Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

154 R 23

Ce Livre appartient à François Strack demeurant à Tournay dans la rue de Sainte Catherine

1779

Ex Libris Francisci
Strach Tiestani
1778.

Ce livre appartient à Francois
Strach Lemeurant à Tournay
Dans la rue de Notre
Dame.

LES

QVINZE LIVRES

DES ELEMENS D'EVCLIDE.

Traduicts de Latin en François:

Par D. HENRION *Mathematicien*

QVATRIESME EDITION,

Reueue, corrigée, & de beaucoup augmentée.



A PARIS,
Imprimé par Isaac Dedin pour ledict Sieur HENRION demeurant en l'isle du Palais à l'Image S. Michel.

M. DC. XXXI.
Auec priuilege du Roy.

D. HENRION

Au Lecteur.

IL y a vingt deux ans que personne n'ayant encore traduit en François tous les Elemens Geometriques d'Euclide, ny les Spheriques de Theodose, le desir de seruir au public m'en fit entreprendre les traductions, lesquelles ont depuis esté imprimees & si bien recueillies, que voicy pour la quatriesme fois que ces Elemens d'Euclide ont esté mis sous la presse: I'espere qu'ils seront encore bien receus, puis qu'ils sont beaucoup plus accomplis qu'ils n'estoient és precedentes editions. Or voicy comme ie me suis comporté en cette traduction des Elemens d'Euclide: Premierement ie me suis efforcé de rendre les demonstrations des Anciens, & principalement de Theon, lesquelles Proclus asseure estre d'Euclide, quelquesfois plus briefues, autant que la matiere l'a pû permettre, ou pour le moins plus claires & intelligibles, retranchant ou il sembloit y auoir de la superfluité, & esclaircissant ou il y auoit trop de briefueté, suiuant en ce Commandin & Clauius: voire mesme en quelques endroicts, où i'estimois les demonstrations de Theon trop longues & embrouillees, ie les ay totalement delaissees pour en prendre d'autres, non seulement plus briefues, mais aussi plus claires & intelligibles. Outre cela i'ay adiousté en diuers endroicts quantité de belles & vtiles propositions; & taschè d'esclaircir les plus obscures definitions, lesquelles à faute d'estre bien prises par aucuns, les ont fait tomber en de grandes erreurs, comme l'a tres-bien remarqué Clauius. Et d'autant que les doctes Commandin, Steuin & Dibuadius ont estimé que le dixiesme liure de ces Elemens (lequel est estimé fort difficile) seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible y soignant les nombres, ie les ay adiousté aux endroicts les plus difficils & obscurs, me seruant quelquesfois du trauail des susdits autheurs. Et pour la mesme raison i'ay en ceste edition aussi adiousté les nombres aux 13 & 14. liures desdits Elemens: bien que personne ne les y eust encore adiousté. Finalement, voyant que chacun

n'entend pas les operations des nombres sourds, comme estans esloignees de celles de l'Arithmetique vulgaire, lesquelles neantmoins sont neces-saires pour l'intelligence de ces demonstrations numerales, i'ay inseré au devant dudit 10. liure vn sommaire & abbregé de l'Algebre vulgaire, auquel sont succinctement enseignees non seulement lesdites operations des nombres sourds, mais aussi toutes les autres regles & operations pratiquees en l'Algebre numerale: auquel Sommaire ie n'ay voulu mettre (à cause de briefueté) les demonstrations des operations y contenues, mais les studieux & amateurs d'icelles demonstrations les pourront veoir en vn plus ample traicté d'Algebre cy-devant mis en lumiere avec plusieurs autres traictez de Mathematiques, recueillis en vn volume institulé Collection Mathematique. Or tant és deux premieres editions de ces Elemens-cy, qu'en l'Apologie par nous mise en lumiere pour les Interpretes & traducteurs desdits Elemens d'Euclide, nous auons declaré les causes & motifs d'icelles editions, & remarqué quelques erreurs d'vne autre traduction, mais nous auons retranché tout cela de cette quatrieſme edition: car nous ne l'y pouuions laisser sans remarquer aussi les fautes & erreurs d'vn quidam, lequel ayant coppié & pris la plus part de cette traduction des Elemens d'Euclide, l'a mis au iour sous le nom de P. le Mardele, luy donnant faucement le titre de traduction faicte sur le Grec, ainsi qu'il appert par les choses contenues en la susdite Apologie, & le peuuent aisément iustifier ceux qui voudront prendre la peine d'en faire la conference sur le Grec de Theon: toutes lesquelles remarques euſſent par trop grossi ce volume, & peut estre apporté plus d'incommodité, que d'erudition & vtilité, qui seroit contre nostre intention, & s'esloigner du but auquel nous visons en toutes nos œuures, assauoir l'vtilité publique: Pour atteindre auquel but nous auons en cette Edition adiousté des figures à plusieurs definitions, qui en faciliteront l'intelligence: & expliqué quelques propositions en telle sorte qu'elles seront beaucoup plus claires & intelligibles qu'és precedentes editions: nous y auons aussi adiousté plusieurs belles & tres-vtiles propositions, entre lesquelles il y en a 19 à la fin du 7. liure, ausquelles sont demonstrees toutes les regles & operations que les Arithmeticiens pratiquent aux fractions ou nombres rompus. Et comme nous auions és precedentes Editions adiousté les nombres en suitte des demonstrations lineales des plus obscures & difficiles propositions du 10. liure: aussi auons-nous en cette-cy adapté aux nombres les prop. des 12, 13 & 14. liures: au moyen de quoy, plusieurs en entendront beaucoup mieux les demonstrations

lineales: & sera facile par les choses y enseignees, de trouuer non seulement le contenu ou superficies des triangles, quadrangles & autres figures rectilignes, mais aussi les costez, superficies & solidatez des cinq corps reguliers inscriptibles en vne sphere proposee: voire mesme estant cogneu le costé, ou la superficie, ou la solidité de l'vn desdits corps, on pourra facilement cognoistre celles de tous les autres corps inscriptibles en la mesme sphere que le proposé. C'est encore à mesme fin, que nous auons cy-deuant fait imprimer à part les six premiers liures de ces Elemens-cy, & faisons encore imprimer en plus grand volume que celuy-cy, non seulement tous lesdits Elemens d'Euclide, mais aussi toutes les autres œuures Mathematiques qu'on estime estre de luy, sçauoir est, vn liure des Donnez, *deux de* l'Optique & Catoptrique, *vn des* Phœnomenes, *& vn autre* de la Musique, *& encore vn* Fragment du leger & du pesant: *tellement qu'au moyen de ces diuerses impressions, chacun pourra prendre desdites œuures d'Euclide, ce qui luy viendra plus à gré, commode ou utile à ses desseins & intentions. Voila donc (amy Lecteur) comme ie me suis comporté en cette traduction des Elemens d'Euclide, & les principales choses adiousstees en cette edition: reçois là de bon œil, & s'il s'y rencontre quelques lettres changees ou autres fautes d'impression, ie te prie les corriger sans passion. A Dieu.*

OR nous auions declaré en la preface des deux premieres editions de cette traduction, pourquoy les disciplines Mathematiques ont esté ainsi appellees : quelle est leur diuision : par qui elles ont esté inuentees, & qui sont ceux qui les ont depuis augmentees : combien elles sont excellentes, vtiles & necessaires : Mais d'autant que toutes ces choses-là seront plus à propos & au long declarees en la preface de toutes lesdites œuures d'Euclide, nous dirons seulement icy quelle est la diuision de la Geometrie, & des presens Elemens.

La Geometrie est diuisee en la contemplation des plans, qui est appellee du mot general Geometrie : *& en la doctrine des solides, laquelle les Mathematiciens appellent par vn nom propre & peculier* Stereometrie. *Car la Geometrie en general se propose ce but, de constituer les plans & les solides, ou bien estans constituez, de les comparer entr'eux, ou de les diuiser. Or Euclide nous voulant laisser en ses Elemens vne parfaitte cognoissance de la Geometrie, il traicte des plans aux six premiers liures : & aux cinq derniers, il dispute subtilement des solides, recherchant leurs plus belles proprietez. Et d'autant que toutes les choses Geometriques, & principalement ces cinq corps reguliers, qui ont de coustume d'estre appellez corps Platoniques, ne pouuoient estre traictez parfaictement sans la cognoissance des lignes commensurables & incommens. Euclide a mis son dixiesme liure deuant sa Stereometrie, auquel il discourt subtilement de ces sortes de lignes-là : Et qui plus est, Euclide sçachant que ce traicté des lignes commensurables & incommensurables ne se peut faire sans la cognoissance des nombres : deuant le dixiesme liure, il traicte des passions ou proprietez des nombres, és trois liures qui le precedent. C'est pourquoy tout ce volume des Elemens Geometriques compris en quinze liures, (desquels les deux derniers sont attribuez par aucuns à Hypsicle Alexandrin) se pourra à bon droict diuiser en quatre parties : tellement que la premiere partie contenue és six premiers liures, traicte des plans : la seconde comprenant les trois liures suiuans recherche les proprietez des nombres : La troisiesme partie, laquelle le dixiesme liure constitue seul, traicte des lignes commensurables & incommensurables. Et finalement la quatriesme partie contenue aux cinq autres liures, comprend la science des corps ou solides. La premiere partie se diuise derechef en trois : Car aux quatre premiers liures, il est traicté des plans absolument, en recherchant leur egalité & inegalité : mais au cinquiesme liure, il est traicté en general des propor-*

tions des magnitudes : & au ſixieſme, ſont examinées les propoſitions des figures planes.

Que c'eſt que Probleme, Theoreme, Propoſition, Lemme, Corollaire & Scholie, entre les Mathematiciens.

Toute demonſtration de Mathematiques, eſt ou Probleme, ou Theoreme. Les Mathematiciens appellent Probleme, *cette demonſtration-là qui enſeigne à faire ou conſtruire quelque choſe : Et* Theoreme, *la demonſtration laquelle recherche ſeulement, quelque paſſion ou proprieté d'vne ou pluſieurs quantitez enſemble : Bref les Problemes enſeignent à trouuer & conſtruire quelque choſe, & les Theoremes demonſtrent les affections & proprietez des choſes deſia faites & conſtruites : Et tant le Probleme que le Theoreme, ſont appellez* Propoſition, *d'autant que l'vn & l'autre nous propoſe quelque choſe. Ils appellent* Lemme, *quelque Probleme ou Theoreme, lequel eſtant neceſſaire à leur demonſtration, ils le prennent & prouuent auparauant que venir à leurdite demonſtration principale, afin de la faire plus euidente & briefue. Mais ce que nous appellons* Corollaire, *eſt vne conſequence que nous tirons de ce qui a eſté demonſtré en quelque propoſition. Et finalement, ce qu'on nomme* Scholie, *eſt vne annotation qu'on fait ſeulement, comme en paſſant ſur quelque propoſition.*

Extraict du Priuilege du Roy.

PAR Priuilege du Roy, il eſt permis à D. HENRION, Profeſſeur és Mathematiques de faire imprimer toutes ſes œuures, ſçauoir eſt, les Memoires Mathematiques, la Coſmographie, le Canon manuel des ſinus, Collection Mathematique, les Triangles Spheriques, l'Vſage tant du Compas de proportion, & des Globes que de la Reigle proportionnelle, la Geometrie d'Errard, les œuures d'Euclide, les Elemens Spheriques de Theodoſe, les Tables des Directions de Mont-royal, &c. ſoit conioinctement ou ſeparement, comme bon luy ſemblera, & l'impreſſion faite, les vendre & diſtribuer ainſi qu'il voudra, & ce iuſques au terme de neuf ans, à compter du iour que chacun de ſeſdicts liures ſera acheué d'imprimer, en vertu des preſentes, pendant lequel temps, defenſes ſont faictes à tous Imprimeurs, Libraires, & autres perſonnes de quelque eſtat, qualité, ou condition qu'ils ſoient, d'imprimer, alterer, traduire, ny extraire aucune choſe des œuures dudit HENRION, d'achepter, eſchanger, vendre, ny diſtribuer aucuns de ſeſdits liures, ſinon de ceux qu'il aura fait imprimer, ſur peine de ſix mille liures d'amende, & confiſcatiõ des exemplaires qui ſe trouueront d'autres impreſſions que de celles qu'aura fait faire ledit HENRION. Voire meſme ſi aucun Imprimeur ou Libraire eſt trouué ſaiſi d'aucun exẽplaire d'autre impreſſion que de celles dudict HENRION, ou faites de ſon conſentement, ſera procedé contre luy extraordinairement, & condãné en pareille amende que s'il l'auoit imprimé ou fait imprimer. Voullant en outre ſa Maieſté, qu'en apposãt au cõmencemẽt ou à la fin deſdits Liures vn extraict des preſentes, elles ſoient tenuës pour bien notifiées & ſignifiées, nonobſtant quelconque lettre au contraire: Car tel eſt le plaiſir de ſa Maieſté. Donné à Paris, le 24. de Decembre, l'an de grace 1624. & de noſtre regne le quinzieſme. Par le Roy en ſon Conſeil, RENOVARD.

Acheué d'imprimer en May 1631.

ELEMENT PREMIER.

DEFINITIONS.

1. Le poinct, eſt ce qui n'a aucune partie.



LEs Phyſiciens diſent que le poinct eſt le moindre obiect de la veuë; & iceluy peut eſtre deſcrit auec ancre ou autre choſe: Mais les Mathematiciés reiettans ceſte definition, diſent que le poinct eſt vn obiect de l'intellect ſi ſubtil qu'il ne peut eſtre diuiſé en aucunes parties: Et iceluy ne ſe peut eſcrire, mais ſeulement entendre & imaginer: bien *eſt vray* que pour le repreſéter à nos ſens exterieurs nous nous ſeruós du poinct Phyſique. Le poinct n'a donc aucunes des dimenſions geometriques, c'eſt à

dire qu'il n'a longueur, largeur, ny eſpoiſſeur, mais bien eſt-il principe d'icelles.

2. La ligne, eſt vne longueur ſans largeur.

Apres le poinct, Euclide vient à la ligne, qui n'eſt autre choſe que le flux ou coullement d'iceluy poinct d'vn lieu en vn autre: car par ainſi l'interualle compris entre ces deux lieux-là, ſera vne lõgueur ſans largeur, puis que le poinct du coullement duquel elle eſt produite n'en a aucune: & par conſequent la ligne (qui eſt la premiere eſpece de magnitude ou quantité continue) a ſeulement vne dimenſion, ſçauoir eſt longueur, car n'ayant aucune largeur, il eſt certain qu'elle n'aura auſſi aucune eſpoiſſeur ou profondeur. Et pour tant mieux entendre cecy, qu'on imagine le poinct A eſtre meu ou coullé depuis A iuſques en B, & auoir laiſſé par ſon flux ou coullement la trace & veſtige AB: or ceſte trace AB ſera appellee ligne: car l'interualle cõpris entre les deux poincts A & B eſt vrayement vne longueur ſans largeur & eſpoiſſeur, puis que le poinct A, par le coullement duquel elle eſt produicte, eſt priué de toute dimenſion.



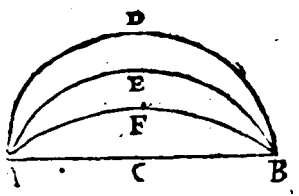
3. Les extremitez de la ligne, ſont poincts.

Cecy eſt intelligible, puis que toutes lignes ter-

minees commencent à vn poinct, & acheuent auſſi à vn poinct, comme les lignes precedentes AB, qui ont pour leurs extremitez les poincts A & B: car Euclide n'entend parler icy ny des lignes infinies, ny des circulaires, ny de toutes autres ſortes de lignes, auſquelles on ne peut aſſigner aucun terme ny extremité.

4. La ligne droicte, eſt celle qui eſt également compriſe & eſtendue entre ſes poincts.

Les *Mathematiciens* ont de trois ſortes de lignes, c'eſt aſçauoir la ligne droicte, la ligne circulaire, qu'ils appellent auſſi ligne courbe, & la ligne mixte: Euclide *definit* icy la droicte, laquelle il dit eſtre celle-là qui eſt eſgalement eſtendue entre ſes *poincts*: ainſi la ligne *A C B* eſt dicte ligne droicte, pource que tous les poincts entremoyens d'icelle ligne, comme C, ſont eſgalement poſés entre les extremes A & B, l'vn n'eſtant *plus* eſleué ou abaiſſé que *l'autre*: ce qui n'aduient aux trois autres lignes ADB, AEB, AFB, car il eſt manifeſte que les poincts entremoiens D, E, F ſont bien plus eſleuez que les extremes A & B.



Quelques autres Autheurs ont diuerſement deſiny *la* ligne droicte: car Campanus dit, que c'eſt le plus court chemin d'vn poinct iuſqu'à vn autre: &, ſelon Archimede, la ligne droicte eſt la plus courte

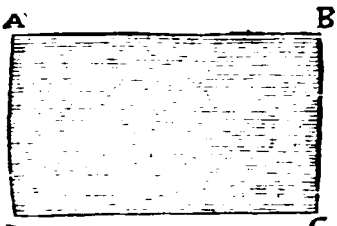
de toutes celles qui ont mesmes extremitez. Mais Platon dit que c'est celle-là, dont les poincts du milieu ombragent les extremes: cõme par exemple, si en la ligne ACB, le poinct extreme A auoit la vertu d'illuminer, & le poinct du milieu C la force de cacher: iceluy poinct C empescheroit que le poinct extreme B fust illuminé de l'autre extreme A: Et aussi l'œil estant au poinct extreme A, il ne pourroit voir l'autre extreme B, à cause du poinct C posé entre iceux extremes: ce qui n'arriueroit pas aux lignes non droictes, comme le demõstrent les lignes ADB, AEB, & AFB.

Or tout ainsi que les Mathematiciens conçoiuẽt la ligne estre descripte par le flux & mouuement imaginaire du poinct, ainsi aussi entendent-ils la qualité de la ligne descripte par la qualité d'iceluy mouuement: car si on entend que le poinct coulle droict par le plus court chemin ne se destournãt çà ne là, la ligne ainsi descrite sera appellee ligne droicte: mais si le poinct fluãt vacille en son mouuemẽt, & s'escarte çà & là; la ligne descripte sera appellee mixte: & finalement si le poinct fluant ne vacille en son mouuement, mais est porté en rond d'vn certain mouuemẽt vniforme & regulier, gardant touſiours vne esgale distãce à quelque certain poinct à l'entour duquel il est porté; ceste ligne descripte sera appellee circulaire. Or Euclide ne traicte icy que des deux simples lignes, sçauoir est de la droicte & de la circulaire. Il a defini celle-là cy dessus, & il definira ceste cy à la 15. def. Mais quant à la mixte, il en obmet la definition, pource qu'elle n'a aucun vsage en ses elemens Geometriques: il y en a de plusieurs sortes, & d'icelles traictent amplement Apol-

Ionius Pergeus, Nicomedes, Archimedes & autres Autheurs.

5. Superficie, est ce qui a longueur & largeur tant seulement.

Apres la ligne, qui est la premiere espece de quãtité *continue*, & qui a vne seule dimension, Euclide *definit* la superficie, qui est la seconde espece de quantité, & a deux dimensions: car on n'y trouue pas la seule *longitude* comme en la ligne, mais aussi latitude, sans *toutesfois* aucune profondité: comme la quantité A B C D compriſe entre les lignes AB, BC, CD, DA, & conſideree ſelon la longitude A B, ou DC, & ſelon la latitude AD, ou BC, ſans aucune eſpoiſſeur ou profondité, eſt appellee ſuperficie. *Quelques vns*



deſcriuans la *ſuperficie* diſent, que c'eſt l'extremité du corps. Et comme dit Proclus, la ſuperficie nous eſt fort naïfuement repreſentee par les ombres du corps: car veu qu'elles ne peuuent penetrer au dedans de la terre, elles ſeront ſeulement longues & larges. Dauantage comme les Mathematiciens entendent que la ligne eſt produite par le flux ou *coullement* du poinct, ainſi diſent-ils que la ligne ſe mouuant en trauers, produit la ſuperficie: comme par exemple, ſi on entend que la ligne AB ſe

ſe meuue vers la ligne DC, elle ſera la ſuperficie ABCD, laquelle n'aura aucune profondeur, puis que c'eſt la trace & veſtige du mouuement de la ligne AB qui n'a aucune profondité.

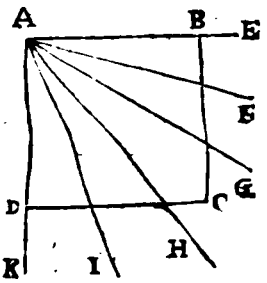
6. Les extremitez de la ſuperficie, ſont lignes.

Il faut icy entendre des ſuperficies bornees, & terminees par lignes droites, cõme la ſuperficie ABCD cy deſſus, de laquelle les extremitez ſont les lignes AB, BC, CD, & DA: car il y a bien pluſieurs ſuperficies encloſes d'vne ſeule ligne, cõme de la circulaire, & autres, dont Euclide ne fait métion en ces Elemens-cy: mais il n'en veut icy parler, non plus que de la ſuperficie ſpherique, qui circuit & enuironne vn corps entierement rond & ſpherique. Comme donc la ligne terminee commence à vn poinct, & finit à vn autre poinct, ainſi auſſi la ſuperficie terminee commence par vne ligne, & finit par vne ligne, tant ſelon ſa longueur, que ſelon ſa largeur.

7. Superficie plane, eſt celle qui eſt également compriſe entre ſes lignes.

Ceſte definition de la ſuperficie plane a quelque ſimilitude & rapport à celle de la ligne droicte: car comme la ligne qui eſt également eſtendue entre ſes poincts, eſt appellee ligne droicte, ainſi auſſi la ſuperficie qui eſt également eſtendue entre ſes lignes, tellement que toutes les parties du milieu ne

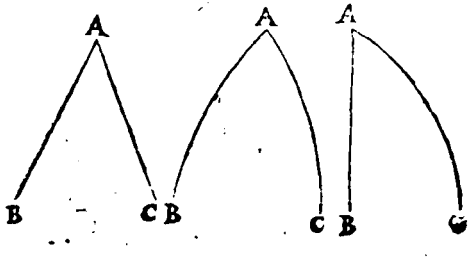
ſont plus eſleuees ny abaiſſees que les extremes, eſt appellee ſuperficie plane. Et de chef, comme la ligne droicte eſt la plus courte d'entre ſes extremitez, ainſi auſſi la ſuperficie plane eſt la plus courte, ou briefue de toutes celles qui ont meſmes extremitez. C'eſt encore pour la meſme raiſon que quelques autres deſcriuãs la ſuperficie plane, diſent que c'eſt celle-là de laquelle toutes les parties du milieu ombragent ſes extremes: ou bien celle-là à toutes les parties de laquelle vne ligne droicte peut eſtre accõmodee. Cõme par exemple, la ſuperficie ABCD ſera dicte plane, ſi la ligne droicte AE ſe mouuant à l'entour du poinct immobile A, en ſorte qu'elle vienne à eſtre la meſme que AF, puis la meſme que AG, & puis encore la meſme que AH, en apres la meſme que AI, & finalement la meſme que AK; elle ne rencontre rien en la ſuperficie de plus eſleué ou abaiſſé l'vn que l'autre, ains que tous les poincts de ladite ſuperficie ſoient touchez d'icelle ligne mouuante AE, & en quelque ſorte raclez par icelle. Mais toutes ſuperficies eſquelles il y a des endroits les vns plus eſleuez que les autres, tellement qu'on n'y peut pas accommoder vne ligne droicte par tous les lieux & endroicts d'icelles, telle qu'eſt la ſuperficie interieure d'vne voulte ou arcade, ou bien l'exterieure d'vn globe, ou d'vne colomne ronde, & auſſi d'vn cone, &c. ſont appellees ſuper-



ficies courbes : & icelles sont de plusieurs sortes, c'est à sçauoir conuexe, comme la superficie exterieure d'vne sphere, ou d'vne colomne ronde: & concaue, comme la superficie interieure d'vne voulte ou arcade: mais la contemplation de toutes ces choses appartient à la Stereometrie dont traicte Euclide és cinq derniers liures : c'est pourquoy il explique seulement icy la superficie plane, de laquelle il traicte és six premiers liures. Et cependant est à noter que ceste superficie est souuentesfois appellée plan par les Mathematiciens: tellement que quand ils parlent de plan, il faut touſiours entendre vne superficie plane.

8. Angle plan, est l'inclination de deux lignes, l'vne à l'autre se touchant en vn plan non directement.

Euclide enseigne icy que quand deux lignes constituees en quelque superficie plane concurrent en vn poinct d'icelle superficie, & ne se rencontrent directement, alors l'inclination d'icelles deux lignes s'appelle angle plan. Comme par exemple, pource que les deux lignes AB, & AC, cõcurrẽt en A, & ne se rencõ-



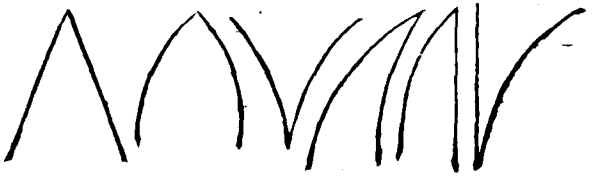
trent pas directement ; ce concours ou inclination qu'icelles deux lignes font au poinct A, s'appelle angle : Et d'autant qu'iceluy angle eſt conſtitué au meſme plan qu'icelles deux lignes AB & AC, on l'appelle angle plan, à la difference d'autres angles, dont les vns ſont nommez angles ſolides, deſquels traicte cy apres Euclide en la Stereometrie ; & les autres ſont appellés angles ſpheriques, deſquels traictent amplement Menelaus & Theodoſe en leurs elemens ſpheriques, cõme nous auons auſſi faict en nos triangles ſpheriques.

Or quant à l'angle plan cy-deſſus deffiny eſt à remarquer, premierement que la grandeur ou quantité dudit angle plan conſiſte en la ſeule inclination des lignes qui le conſtituent, & non pas en la longueur d'icelles lignes ; car le prolongement deſdites lignes n'augmente point leur inclination, ny par conſequent la grandeur de l'angle. En apres que quelques Geometres ont eſtimé qu'afin que deux lignes faſſent angle, il eſtoit neceſſaire qu'eſtans continuées du poinct de leur rencontre, elles s'entrecoupaſſent en iceluy, dont s'enſuiuroit que deux cercles s'entretouchans en vn plan, ou qu'vne ligne droicte touchant vn cercle ne feroit angle, ce qui eſt contre l'intention d'Euclide, ainſi qu'il appert, tant par ceſte definition de l'angle plan, que par la 16. p. 3. & comme l'a auſſi bien demonſtré Clauius ſur la meſme propoſition, où il refute Pelletier, qui diſoit que la ligne droicte touchant le cercle, ne faiſoit angle ; c'eſt pourquoy ceux qui tiennent encore ceſte opinion, ſe mocquent bien d'Euclide, de Clauius, & autres Geometres, qui diſent qu'vne ligne droicte touchant

vn cercle, fait vn angle contigent, ou d'attouchement.

9. Que ſi les lignes comprenant l'angle ſont droictes, l'angle ſera appelé rectiligne.

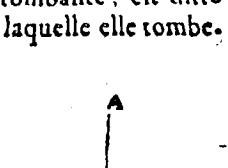
Tout angle plan eſt faict, ou de deux lignes droictes, & alors il ſe nomme angle rectiligne, comme dit icy Euclide; ou de deux lignes courbes, & alors on l'appelle angle curuiligne; ou bien d'vne ligne droicte & d'vne courbe, & alors on le nomme angle mixte. Or les angles curuilignes peuuent varier en trois manieres, & les mixtes en deux, à cauſe de la diuerſe inclination ou habitude des lignes courbes, ainſi qu'il appert manifeſtement aux angles plans de la figure cy appoſee.



10. Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre ligne droicte, fait les angles de part & d'autre eſgaux entr'eux, les angles ſont droicts; & la ligne tombante, eſt perpendi-

culaire à celle-là, sur laquelle elle tombe.

Il y a de trois sortes d'angles rectilignes, sçauoir est droict, obtus & aigu: le premier desquels Euclide definit icy auec la ligne perpẽdiculaire, & quant aux deux autres, il les definit aux deux definitions prochainement suiuantes. Il dit donc icy que si vne ligne droicte tombe sur vne autre ligne droicte, en sorte qu'elle face les angles de part & d'autres esgaux, ce qui aduient lors que ladite ligne ne s'incline ou panche plus d'vn costé que de l'autre; chacun d'iceux angles est appellé angle droict, & la ligne ainsi tombante, est dite perpendiculaire à celle-là sur laquelle elle tombe. Comme par exemple, si la ligne droicte AB tombe sur la ligne droicte CD, en sorte qu'elle ne s'incline pas plus d'vn costé que de l'autre, les deux angles, quelle faict au poinct B seront esgaux entr'eux, & chacun d'iceux sera nommé angle droict; mais la ligne AB sera dicte perpendiculaire à CD, sur laquelle elle tombe. Par mesme raison, la ligne droicte CB sera aussi dicte perpendiculaire à la ligne droicte AB, encore qu'icelle CB face vn seul angle droict auec AB; Et ce d'autant que si ladite ligne AB estoit prolongée directement de la part de B, elle y feroit vn autre angle esgal au premier. Parquoy en Geometrie, pour conclure que quel-

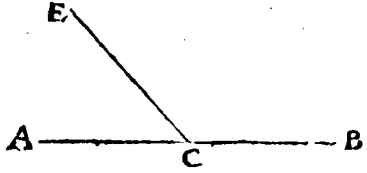


que angle eſt droict, ou que la ligne qui le conſtitue eſt perpendiculaire à vne autre, il faut ſeulement prouuer que ledit angle eſt eſgal à celuy de l'autre coſté. Semblablement, ſi quelque angle eſt dict droict, ou que l'vne des lignes qui le conſtitue ſoit perpendiculaire à l'autre, on pourra auſſi conclurre que ledit angle eſt égal à celuy de l'autre coſté; car ſi ces angles-là n'eſtoient égaux, ils ne ſeroient nommez angles droicts, ainſi qu'il appert tant par la ſuſdite definition, que par les deux ſuiuantes.

11. Angle obtus, eſt celuy qui eſt plus grand qu'vn droict.

12. Mais l'aigu, eſt celuy qui eſt plus petit qu'vn droict.

Quand vne ligne droicte tombant ſur vne autre s'incline ou panche plus d'vn coſté que de l'autre, elle fait conſequemment deux angles inégaux, dont l'vn eſt plus grãd que l'angle droict, & ſe nõme angle obtus; mais l'autre eſt plus petit, & s'appelle angle aigu. Ainſi pour-ce qu'en cette figure, la ligne droicte EC tombant ſur la ligne droicte AB, s'incline & panche plus du coſté de AC que de la part de BC, les deux



angles du poinct C seront inégaux, & celuy vers B, qui est plus grand & ouuert que le droict sera dit angle obtus: mais celuy de la part de A, qui est plus petit & fermé que l'angle droict, sera nommé angle aigu.

Et d'autant que souuentefois en vn plan concurrent plus de deux lignes à vn mesme poinct, & par consequent y constituent plusieurs angles, les Geometres ont accoustumé (pour euiter confusion) d'exprimer l'angle dont ils parlent par trois lettres, desquelles celle du milieu denotte le poinct auquel les lignes constituent l'angle, & celles des extremes signifient les commancemens d'icelles lignes qui font iceluy angle: tellement qu'en la figure cy-dessus l'angle obtus que nous auons dit estre celuy de la part de B, sera exprimé & entendu par ces trois lettres ECB ou BCE, à cause qu'il est constitué au poinct C, & contenu par les deux lignes droictes EC, & BC, qui commançant en E & B, se vont rencontrer au susdit poinct C. Mais l'angle aigu que nous auons dit estre de la part de A, s'exprimera par ces trois lettres ECA ou ACE, par ce qu'il est constitué au point C, & faict par les deux lignes droictes EC & AC, qui commencent en E & A, & se vont rencontrer au susdict poinct C. Ce qu'on doit bien notter, afin de connoistre & discerner facilement les angles, dont sera faict mention és demonstrations suiuantes.

13. Terme, est l'extremité de quelque chose.

Ainſi les poincts ſont termes ou extremitez des lignes, les lignes des ſuperficies, & les ſuperficies des corps.

14. Figure, eſt ce qui eſt compris & enuironné d'vn, ou de pluſieurs termes,

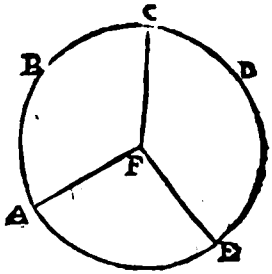
Toute quantité ayant termes, n'eſt pas dicte figure : mais ſeulement celles que les termes enuironnent : ainſi la ligne terminee par deux poincts, n'eſt pas dite figure : mais toutes ſuperficies, & ſolides, finis & limitez, ſont nommez figures, pource qu'ils ſont enuironnez d'vn ſeul, ou de pluſieurs termes : d'vn ſeul, comme le Cercle, l'Ellipſe, & la Sphere : de pluſieurs, comme le triangle, le quarré, le cube, la pyramide, &c.

15. Cercle, eſt vne figure plane, contenue par vne ſeule ligne qu'on appelle circonference, vers laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn ſeul poinct de ceux qui ſont en icelle figure, ſont égales entre elles.

16. Et ce poinct-là eſt appellé centre du cercle.

De toutes les figures planes, la plus parfaicte eſt

le cercle, lequel, selon que le definit icy Euclide, est vne figure plane contenue & enuironnee d'vne seule ligne, à laquelle toutes celles menees d'vn seul poinct de ceux qui sont dedans la figure, sont égales entr'elles: & ceste ligne-là s'appelle periphere, ou circonference du cercle; & le susdict poinct, centre du cercle: Comme par exemple, si vne superficie ou espace est enuironnee d'vne seule ligne ACE, & que de quelque poinct d'audedans d'icelle, comme de F, toutes les lignes droictes menees au terme ou circuit ACE, comme FA, FC, & FE, sont égales entr'elles: telle figure plane sera appellee cercle, & le terme ou ligne ACE, qui circuit & enuironne icelle figure, s'appelle periphere, ou circonference du cercle: mais ledit poinct F, est nommé centre du cercle.

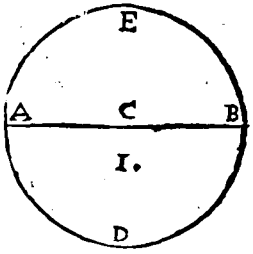


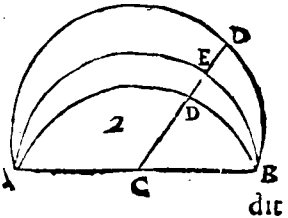
Quelques Geometres definissent autrement le cercle, & disent, que c'est vne figure plane, descrite par vne ligne droicte finie, laquelle ayant vn des poincts extremes fixe, est meuë à l'entour d'iceluy iusques à ce qu'elle retourne au mesme lieu où elle a commencé à mouuoir: comme si la ligne droicte AF ayant le poinct F fixe, est entendue se mouuoir à l'entour d'iceluy poinct F, tirant de A vers C, E, iusques à ce qu'elle reuienne au mesme lieu FA, où elle a commencé son mouuement; elle descrira par iceluy mouuement le cercle ou espace ACE,

duquel la circonference eſt deſcrite & traſſée par le poinct mobile A, & le poinct fixe F, eſt le centre d'iceluy cercle, duquel centre toutes les lignes droictes menées à la ſuſdite circonference ACE, ſont égales entr'elles, puis qu'elles prouiennent toutes d'vne ſeule & meſme meſure, c'eſt à ſçauoir de la ligne FA.

17. Diametre du cercle, eſt vne ligne droicte menée par le centre du cercle, & finiſſant de part & d'autre à la circonference d'iceluy cercle, le diuiſe en deux également.

Si dans vn cercle on mene vne ligne droicte par le centre, qui aille de part & d'autre iuſques à la circonference; icelle ligne s'appellera diametre du cercle. Comme en ceſte premiere figure, la ligne droicte AB, qui eſt tiree par le centre C, & va de part & d'autre iuſques à la circonference du cercle, s'appelle diametre du cercle: Et iceluy, comme adiouſte Euclide, coupe le cercle en deux parties égales, tellemẽt que la partie AEB eſt égale à la partie ADB. Ce qui eſt aſſez manifeſte, puiſque le-





dit

dit diametre AB passe par le milieu du cercle, c'est à sçauoir par le centre C : car s'il ne diuisoit le cercle en deux parties éſgales, les lignes droictes tirées du centre à la circonference, ne seroient pas égales, contre la definition du cercle : Neantmoins plusieurs interpretes d'Euclide rapportent en cet endroict la demonstration que Proclus dit, en auoir esté faite par Thales Milesien, qui est telle : Imaginons nous que la partie de cercle ADB soit superposée & accommodée à l'autre partie du cercle AEB, en sorte que le diametre AB soit commun à l'vne & à l'autre partie. Or la circonference ADB se rencontrera totallement auec la circonference AEB, ou bien elle tombera au dessus d'icelle, ou au dessoubs : Si elles se rencontrent & conuiennent l'vne à l'autre, il est euident que ces deux parties-là faictes par le diametre AB, sont égales entr'elles, puisque l'vne n'excede l'autre. Mais si on dit que la circonference ADB ne se rencontre pas auec la circonference AEB, ains qu'elle tombe au dessus ou au dessoubs d'icelle, comme en la 2. figure, soit tiree du centre C vne ligne droicte, laquelle couppe la circonference ADB en D, & la circonference AEB en E ; les deux lignes droictes CD & CE, qui sont tirées du centre à la circonference d'vn mesme cercle, seront égales entr'elles, par la definition du cercle : Ce qui est absurde, car l'vne n'est que partie de l'autre ; donc l'vne de ces circonferences là ne tombera pas au dessus ny au dessoubs de l'autre ; mais se rencontreront & conuiendront totallement l'vne auec l'autre, & par consequent seront égales, ce qu'il faloit demonstrer.

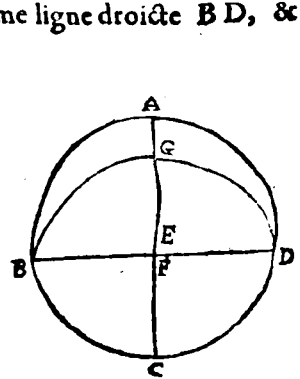
De ceſte demonſtration il appert que le diametre ne couppe pas ſeulement la circonference en deux egallement, mais auſſi toute l'aire & ſuperficie du cercle: Car puiſque les demyes circonferences conuiennent & s'accordẽt entr'elles, comme il a eſté demonſtré; les ſuperficies contenuës & encloſes entre le diametre & chacune d'icelles demy circonferences conuiendront auſſi entr'elles, puiſque l'vne n'excede l'autre; & par conſequent elles ſeront égales entr'elles.

18. Demy cercle, eſt vne figure compriſe du diametre, & moitié de la circonference.

19. Portion ou ſegment de cercle, eſt vne figure compriſe d'vne ligne droicte, & de partie de la circonference.

Au cercle precedent la figure AEB contenuë ſoubs le diametre AB, & la moitié de la circonference AEB, eſt ditte demy cercle; car il a eſté demonſtré cy deſſus qu'icelle figure eſt moitié du cercle AEBD, & ce à cauſe que le diametre ou ligne droicte AB, qui le diuiſe en deux parties, paſſe par le centre C: Mais quant vne ligne droicte, qui ne paſſe pas par le centre du cercle, le diuiſe en deux parties; chacune d'icelles parties contenuë ſoubs ladite ligne droicte, & vne partie de la circonference, eſt nommée ſegment

ou portion de cercle; & ces deux parties sont inegales, car celle où est le centre est plus grande que l'autre. Comme par exemple, au cercle A B C D, duquel le centre est E, soit vne ligne droicte BFD, qui couppe ledit cercle en deux parties sans passer par ledit centre E; la partie BAD, composee soubs la ligne droicte B D, & la partie de circonference B A D, s'appelle segment ou portion de cercle, comme aussi B C D, qui est contenuë soubs la mesme ligne droicte B D, & la circõference BCD



Or il est assés *euident* que la portion BAD, en laquelle est le centre E, *est* plus grande que l'autre portion BCD, attendu que *si* de B par le centre E on menoit vn diametre, il coupperoit le cercle en deux moitiez, chacune desquelles *seroit plus grande* que la portion BCD, & moindre que *l'autre* portion B A D: Neantmoins Clauius & *quelques* autres interpretes d'Euclide le demonstrent *ainsi*. Soit conceu ou imaginé que par le centre E, soit mené le diametre AC perpendiculaire à BD, donc si les susdites portions BAD, & BCD, sont dictes esgales, & que la portion BCD, soit entendue se mouuoir à l'entour de la ligne droicte BD, en sorte qu'elle tombe sur l'autre portion B A D; ceste portion là conuiendra auec ceste-cy, & la ligne

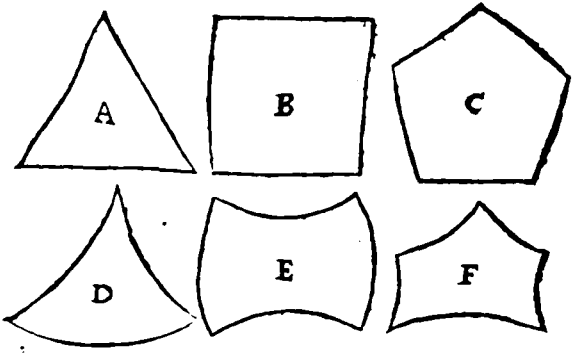
droicte EF à la ligne droicte AF, à cauſe que par la 10. defin. les angles du poinct F ſont droicts & egaux : Parquoy la ligne droicte FC, qui eſt maintenant la meſme que FA, ſera plus grande que EA, qui n'eſt que partie d'icelle FA. Mais d'autant que EC. eſt égale à EA, eſtans toutes deux menees du centre E à la circonference; FC ſera pareillement plus grande que EC, la partie que le tout : Ce qui eſt abſurde. Donc la portion BCD ne conuiendra pas à la portion BAD ; ains elle tombera dedans icelle, comme eſt la portion BGD, de ſorte que la ligne droicte FG, qui ſera lors la meſme que FC ſera moindre que EA ou EC ; car ſi on diſoit qu'elle tombe dehors, comme ſi le cercle eſtoit BCDG, duquel le centre fuſt E ; auſſi la portion BCD tomberoit dehors BGD, ainſi que la portion BAD : Derechef FA, qui ſeroit lors la meſme que FC, ſeroit plus grande que EG, c'eſt à dire que EC ; & partant la partie FC ſeroit derechef plus grande que le tout EC : Ce qui eſt abſurde. Il eſt donc manifeſte que la portion BAD, en laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que l'autre portion BCD, puis que ceſte cy eſt égale à la portion BGD, qui eſt partie de la portion BAD. Car puiſque il a eſté demonſtré que la portion BCD, meüe à l'entour de la ligne droicte BD, ne peut conuenir ſur la portion BAD, ne tomber hors icelle ; elle tombera totalement au dedans comme BGD.

Or ces deux definitions n'eſtoient pas proprement de ce lieu, veu qu'elles ne ſont

employées en ce premier liure, mais bien au troisieſme, auquel la derniere eſt repetée.

20. Figure rectiligne, eſt celle qui eſt compriſe de lignes droictes.

Apres auoir definy le cercle, le demy cercle, & les portions de cercle, Euclide paſſe aux figures planes rectilignes, & dit que ce ſont celles contenues & encloſes de lignes droictes, & telles ſont les trois figures cy deſſous cottees A, B, C; par conſequent les figures planes compriſes & enuironnees de lignes courbes, comme celles cottees D, E, F, ſont appellees figures courbe lignes, ou curuilignes: mais les figures qui ſont circuites & encloſes en partie de lignes droictes, & en partie de lignes courbes, ſont nommees figures mixtes.



21. Figure de trois coſtez, eſt celle qui eſt compriſe de trois lignes droictes.

Euclide voulant deſcrire diuers genres de figures rectilignes, commence par les figures trilateres, ou de trois coſtez, & dit que ce ſont celles qui ſont contenues & enuironnees de trois lignes droictes: & d'autant que telles figures ont touſiours trois angles, on les appelle communement triangles. Ainſi la figure A cy deſſus, laquelle eſt contenue ſous trois lignes droictes, qui conſtituent trois angles, ſera nommee figure trilatere, ou pluſtoſt triangle rectiligne; & y en a de diuerſes eſpeces, qui ſeront declarees cy apres: mais la figure D, circuite & encloſe de trois lignes courbes, ſera dicte triangle curuiligne.

22. Figure de quatre coſtez, eſt celle qui eſt compriſe de quatre lignes droictes.

Apres les figures trilateres viennent en ordre les quadrilateres, ou de quatre coſtez, c'eſt à ſçauoir les figures contenues ſoubs quatre lignes droictes leſquelles conſtituent auſſi quatre angles; & pour ce ſont elles ſouuent appellees quadrangles: ainſi entre les figures precedentes celle cottee B, compriſe & encloſe de quatre lignes droictes qui conſtituent quatre angles, ſera appellee quadrilatere, ou quadrangle rectiligne; & y en a de diuerſes eſ-

peces cy apres declarees : mais la figure cottee E encloſe de quatre lignes courbes ſera dicte quadrangle curuiligne.

23. Figures multilateres, ou de pluſieurs coſtez, ſont celles qui ſont compriſes de plus de quatre lignes droictes.

Le nombre des eſpeces de figure rectiligne eſtant infiny, Euclide s'eſt contenté de definir, & particulierement de nommer les deux premieres eſpeces cy deſſus declarees, c'eſt àſçauoir celles contenues ſoubs trois & quatre lignes droictes: & quant aux autres eſpeces de figures, qui ſont contenues & encloſes par plus de quatre lignes droictes, il les appelle de ce nom general, multilateres: mais les Geometres denommant particulierement quelqu'vne de ces figures multilateres, prenent ſa denomination du nombre des angles d'icelle: ainſi les figures cy deuant cottees C, & F, leſquelles ſont compriſes & enuironnées de cinq lignes, qui conſtituent cinq angles, ſont appellées pentagones: Et celles contenues de ſix lignes, ſont nommées hexagones; de ſept, heptagones; de huict, octogones; de neuf, enneagone; de dix, decagone; de vnze, endecagone; de douze, dodecagone, &c.

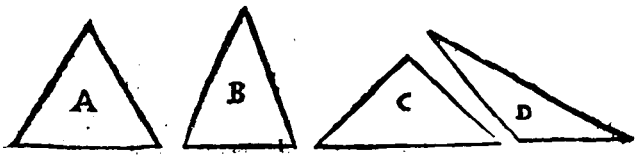
24. Or des figures de trois coſtez, celle ſe nomme Triangle equi-

lateral, qui a les trois coſtez egaux.

25. Triangle Iſoſcele, qui a deux coſtez egaux ſeulement.

26. Scalene, qui a les trois coſtez inegaux.

Il y a diuerſes eſpeces de triangles rectilignes, ſoit qu'on les conſidere ſelon les coſtez, ſoit qu'on ait eſgard à leurs angles: conſiderant les coſtez il y en a de trois eſpeces, leſquelles Euclide expoſe par ces trois definitions; & dit premierement que



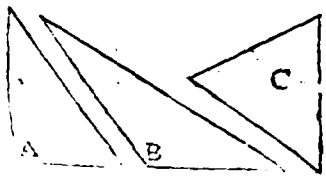
le triangle qui a tous les trois coſtez egaux, comme le triangle A, s'appelle triangle equilateral: Mais les triangles qui n'ont que deux coſtez egaux, comme B & C, s'appellent triangles Iſoſcelles. Et finalement le triangle qui a tous les trois coſtez inégaux, comme D eſt nommé triangle ſcalene. Or les triangles Equilateraux ſont touſiours vniformes & d'vne meſme ſorte: mais les Iſoſcelles, & les Scalenes ſont diuerſifiez en infinies manieres.

27. Encores des figures de trois costez, celle se nomme triangle rectangle qui a vn angle droict.

28. Ambligone, qui a vn angle obtus.

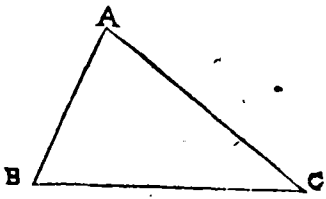
29. Oxigone, qui a les trois angles aigus.

Euclide *considere maintenant* les triangles *ayant égard à leurs angles*, lesquels triangles sont de *trois sortes*, c'est à sçauoir rectangle, ambligone, & oxigone: les triangles rectangles sont ceux qui ont vn angle droict; & tel est icy le triangle A: mais les triangles ambligones sont ceux qui ont vn angle obtus, comme est icy le triangle B: & les triangles oxigones sont ceux qui ont tous les trois angles aigus, & tel est icy le triangle C.



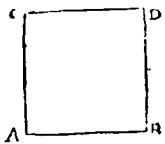
Or est à noter qu'en tout triangle deux quelconques lignes des trois qui le contiennent estans prises pour deux costez, la troisiesme restante a accoustumé d'estre appellé par les Geometres, la base du triangle, soit qu'icelle ligne soit le costé infime du triangle, ou non: tellement que chacune desdites trois lignes qui constituent & enfer-

ment le triangle peuſt eſtre priſe pour baſe: Ainſi au triangle ABC, les lignes AB, & AC eſtãs priſes pour les deux coſtés, la troiſiéme lig. BC ſera la baſe: mais ſi on préd AB, & BC pour les deux coſtés, AC ſera la baſe du triangle.



30. Mais des figures de quatre coſtez; celle qui a les quatre coſtés égaux, & les quatre angles droicts s'appelle quarré.

Apres les figures trilateres, Euclide expoſe les quadrilateres, qui ſont de cinq ſortes: la premiere d'icelles, qui eſt equilaterale & rectãgle, s'appelle quarré. Ainſi la figure quadrilatere ABCD, ayant tous les quatre coſtez égaux, & tous les quatre angles droicts ſera appellee quarré.



31. Quarré long, qui a les quatre angles droicts, mais non pas tous les coſtez égaux.

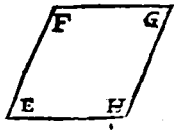
La ſeconde figure quatrilatere s'appelle quarré long, à cauſe qu'eſtãt plus long d'vne part que de l'autre, elle a tous les quatre angles droicts. Ainſi la fig. quadrilatere ABCD,



ſera appellée quarré long, car elle a les quatre angles droicts, & non pas tous les coſtés égaux entr'eux, ains ſeulement les coſtés oppoſez *AB*, DC, qui ſont plus longs que les deux autres oppoſez AD, BC, qui ſont auſſi egaux entr'eux.

32. Rhombe, qui a les quatre coſtez egaux, mais non pas les quatre angles droicts.

La troiſieſme ſorte de figure quadrilatere, laquelle on appelle Rhombe, a bien tous les quatre coſtez egaux entr'eux, ainſi que le quarré, mais elle n'a pas comme luy les quatre angles droicts; ains elle en a deux oppoſez obtus, & deux oppoſez aigus. Ainſi le quadrilatere EFGH, duquel tous les quatre coſtés ſont eſ-



gaux entr'eux, & les quatre angles non droicts, ains obtus & aigus; ſera appellé Rhombe.

33. Rhomboide, qui a les angles oppoſez, & les coſtez oppoſez auſſi egaux

entr'eux, ſans eſtre equilateral, ny rectangle.

La figure quadrilatere qui n'eſt equilateralle ny rectangulaire, mais à les coſtés oppoſés egaux entr'eux, & les angles oppoſés auſſi égaux entre eux, s'appelle Rhomboide; & telle eſt icy la figure IKLM, de laquelle les coſtés oppoſez IK, LM ſont égaux entr'eux, & plus longs que les deux autres coſtés oppoſés IL, KM, qui ſont pareillement egaux entr'eux, mais les angles oppoſés I, M, egaux, & plus grands que les deux autres K, L, leſquels ſont auſſi egaux entr'eux.

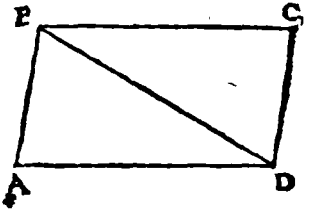


34. Toutte autre figure de quatre coſtez, eſt appellée trapeze

Toute autre figure quadrilatere differente des quatre ſuſdites, c'eſt à ſçauoir qui n'eſt ny quarré ny quarré long, ny Rhombe, ny Rhomboide, s'appelle trapeſe; & telles ſont ce deux figures A & B; car l'vne ny l'autre n'eſt equilatere ny rectangle, ny n'a les angles oppoſez egaux, ny tous les coſtez oppoſez auſſi égaux.



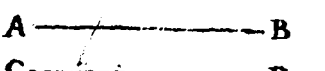
Or est icy à notter que quand d'vn angle de quelconque figure quadrilatere on tire vne ligne droicte à l'angle opposé, cette ligne est appellée diametre par aucuns, & diagonalle par d'autres; ainsi au quadrilatere ABCD la ligne BD, menee de l'angle B à son opposé D est dicte diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droictes paralleles, sont celles qui estant sur vn mesme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre ne se rencontrent iamais.

Afin que les lignes droictes soient dictes paralleles, ou equidistantes, il ne suffit pas qu'estans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ne viennent iamais à se rencontrer; mais il est aussi necessaire qu'elles soient en vne mesme superficie plane: Car plusieurs lignes droictes n'estans en vne mesme superficie, pourroient bien estre prolongées à l'infiny & ne se rencontrer iamais, lesquelles toutesfois ne seroient dites paralleles. Comme par exemple, si deux lignes droictes posées de trauers au milieu de l'air ne se touchent point, bien qu'elles soient prolongées tant

qu'on voudra, elles ne se rencontreront iamais, & toutesfois elles ne seront pas dittes paralleles. Parquoy les deux lig. droictes AB, & CD,



lesquelles sont en vne mesme superficie plane, & qui estans prolongees à l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne se rencontrent iamais, seront dictes lignes paralleles.

Or icy finissent les definitions du premier liure d'Euclide : Mais d'autant qu'en ce mesme liure est souuent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, lesquels Euclide n'a point defiy, nous adjousterons icy leurs definitions..

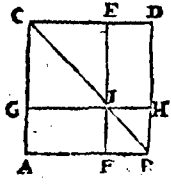
36. Parallelogramme, est vne figure quadrilatere qui a les costez opposez parallels, ou equidistans.

Telle figure est touſiours l'vne de ces quatre: Quarré, Quarré long, Rhombe & Rhomboide, car elles ont toutes leurs costez opposés parallels.

37. Mais quand en vn parallelogramme on mene vn diametre, & deux lignes droictes paralleles aux costez lesquelles couppant iceluy diametre

& vn méme poinct, diuiſent le parallelogrãme en quatre autres parallelogrammes; ces deux là par leſquels le diametre ne paſſe point, ſont appellez complemens; mais les deux autres par leſquels le diametre paſſe, ſont dicts eſtre à l'entour du diametre.

Soit vn parallelogramme ABCD, duquel le diametre eſt BC, & la ligne EF couppant iceluy diametre au poinct I ſoit parallele aux coſtez AC, BD; mais la ligne GH coupant ledit diametre BC au meſme poinct I, ſoit parallele aux coſtés AB, CD. Il eſt manifeſte que tout le parallelogramme eſt diuiſé par leſdites 2. lignes paralleles EF, GH, en quatre autres parallelogrãmes, deux deſquels, ſçauoir AGIF, & DEIH, par leſquels le diametre BC ne paſſe point, ſont appellez par les Geometres complemens, ou ſupplemens des deux autres parallelogrammes BFIH, CEIG, leſquels ſont dicts eſtre à l'entour du diametre, à cauſe que par iceux paſſe le diametre.



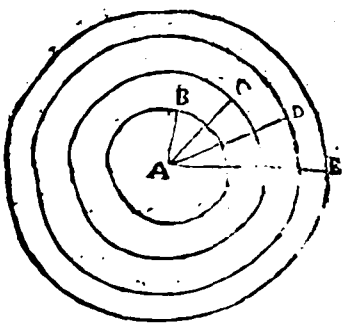
PETITIONS OV demandes.

1. D'vn poinct donné à vn autre poinct mener vne ligne droicte.
2. Continuer infiniment vne ligne droicte donnée & terminée.
3. Deſcrire vn cercle de quelque centre & interual que ce ſoit.

Euclide ne ſe ſert en ces Elemens-cy que de deux ſortes de lignes ſimples, ſçauoir eſt de la droicte & de la circulaire, la deſcription deſquelles eſtant fort facile, il demande icy qu'on la luy concede & accorde, ſans qu'il ſoit contrainct de demonſtrer qu'elle eſt poſſible : ce qui eſt toutefois manifeſte ; car puiſque la ligne eſt vn flux & coullement imaginaire du poinct, & partant la ligne droicte eſtre vn flux procedant de droict chemin, & le plus court qui puiſſe eſtre d'vn lieu à vn autre, il eſt certain que ſi on entend quelque poinct ſe mouuoir directement à vn autre, vne ligne droicte ſera menee d'vn poinct à l'autre. Parquoy on ne peuſt pas nier que depuis le poinct A iuſques à quelconque poinct B, on ne puiſſe mener vne droicte ligne, comme A B, ainſi qu'Euclide requiert qu'on luy accorde par la premiere



premiere des trois petitions susdictes. Et si on entend le mesme poinct se mouuoir encore plus outre directement & sans aucunement decliner çà ne là, la ligne droicte terminee sera prolongee; & ce prolongement se pourra faire à l'infiny, veu que nous pouuons entendre ce poinct là se mouuoir infiniment: Et partant personne ne pourra nier que la ligne droicte AB cy-dessus ne puisse estre continuée iusques en C, puis encore iusques en D, & ainsi à l'infiny, comme Euclide demande qu'on luy accorde par la 2. petition. Mais si on conçoit quelconque ligne droite terminee se mouuoir à l'entour d'vn de ses poincts extremes qui demeure fixe, iusques à ce qu'elle retourne au mesme lieu où elle a commencé son mouuement, sera descrit vn cercle, & fait ce qui est requis par la 3. petition, comme il appert en ces quatre lignes droictes AB, AC, AD, AE, chacune desquelles estant menée à l'entour du centre A, descrit vn cercle selon la grandeur & interualle d'icelle.



Aux trois petitions precedentes, Clauius a adiousté la suiuante.

4. Estant donné quelconque grandeur, on en peust prendre vne autre plus grande ou moindre.

Car d'autant que toute quantité continue peust estre infiniment augmentee par addition, & diminuée par diuision, il ne se peut donner quantité continue si grande, qu'il ne s'en puisse donner encore vne plus grande; ny vne si petite qu'il ne s'en puisse encore donner vne plus petite. Ce qui est dit icy touchant l'addition, est aussi veritable aux nombres; car chaque nombre peut estre augmenté à l'infiny par l'addition continuelle de l'vnité, jaçoit qu'en la diminution d'iceluy on paruienne à l'vnité indiuisible.

AXIOMES OV *communes sentences.*

1. Les choses esgales à vne mesme, sont egales entr'elles.

A ce premier axiome, Clauius a adjousté, qu'vne chose qui est plus grande ou plus petite qu'vne des egales, est aussi plus grande ou plus petite que l'autre: Et si l'vne des choses egales est plus grande ou plus petite que quelque grandeur, l'autre est pareillement plus grande ou plus petite que la mesme grandeur.

2. Si à choſes egales, on adjouſte choſes egales, les touts ſont egaux.
3. Si de choſes egales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont egaux.
4. Si à choſes inegales, on adjouſte choſes egales, les touts ſont inegaux.

A cet axiome Clauius a adjouſté, que ſi à choſes inegales on adiouſte choſes inegales, c'eſt à ſçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite; les touts ſont inegaux, ſçauoir eſt celuy la plus grand, & celuy-cy plus petit.

5. Si de choſes inegales, on oſte choſes egales, les reſtes ſont inegaux.

A ceſte notion Clauius adiouſte auſſi, que ſi de choſes inegales on oſte choſes inegales, c'eſt à ſçauoir de la plus grande, moins, & de la plus petite, plus, les reſtes ſont inegaux, ſçauoir eſt celuy-là plus grand, & ceſtuy-cy plus petit.

Or en toutes les quatre notions precedentes par le mot de choſes ou quantitez egales, il faut auſſi entendre vne meſme commune à pluſieurs; Car ſi à choſes égales on y en adiouſte vne meſme commune, les touts ſeront égaux. Et ſi de choſes égales on en retranche vne commune, les reſtes ſeront auſſi égaux. Et ſi a cho-

ſes inegales on en adjouſte vne commune; où à vne meſme choſe commune, on adjouſte choſes inegales, les tous ſeront inegaux. Et ſi de choſes inegales on en retranche vne meſme commune, ou d'vne meſme choſe, on en retranche d'inegales, les reſtes ſeront inegaux.

6. Les choſes doubles d'vne autre ſont egales entr'elles.

Clauius adjouſte à cet axiome, que ce qui eſt double d'vne des choſes égales eſt pareillement double de l'autre: Mais il eſt auſſi manifeſte que les choſes qui ſont triples d'vne meſme, ou bien quadruple, ou quintuple, &c. ſont égales entr'elles,

7. Les choſes qui ſont moitiez d'vne meſme, ſont egales entr'elles.

Il eſt auſſi euident que les choſes égales entre elles ſont moitiés d'vne meſme: Et ſemblablement que les choſes qui ſont tierces parties d'vne meſme, ou quartes, ou cinquieſmes, &c. ſont auſſi egales entr'elles.

En ces deux derniers axiomes, par vne meſme quantité on doit auſſi entendre les quantitez egales, car les choſes doubles, triples, quadruples, &c. de choſes egales, ſont auſſi egales entr'elles; item les choſes qui ſont moitiez, ou tierces parties &c. de choſes egales, ſont pareillement egales entr'elles.

8. Les choſes qui conuiennent entr'elles, ſont egales entr'elles.

C'eſt à dire, que deux grandeurs ſeront egales entr'elles, ſi eſtans poſees l'vne ſur l'autre, l'vne n'excede l'autre, mais toutes deux enſemble s'adjuſtent entr'elles : cõme deux lignes droictes, ſeront dictes eſtre egales entr'elles, ſi l'vne eſtant poſee ſur l'autre, celle qui eſt poſee deſſus s'adjuſte à toute l'autre, tellement qu'elle ne l'excede, ny ne ſoit excedee d'icelle. Ainſi auſſi deux angles rectilignes ſeront egaux entr'eux quand le ſommet de l'vn, eſtant poſé ſur le ſommet de l'autre, l'vn n'excede l'autre, mais les lignes de l'vn tombent totalement ſur celles de l'autre : car par ainſi les inclinations des lignes ſeront egales combien que ſouuentefois icelles lignes ſoient inegales entr'elles. Ainſi auſſi deux ſuperficies ſeront eſgales entr'elles, quand l'vne eſtant poſee ſur l'autre, elle ne l'excede, ny n'eſt excedee par icelle, mais s'adjuſtent totalement entr'elles. Quelqu'vn expliquant cette notion a dit que conuenir, c'eſt auoir les extremitez ſur les extremitez : ce qui n'eſt pas vray en toutes grandeurs ; Car pour exemple, vne ligne droicte peut bien auoir ſes extremitez ſur les extremitez d'vne ligne courbe, laquelle neantmoins, ne luy ſera egale. Ainſi auſſi vne ligne courbe peut bien auoir ſes extremitez ſur les extremitez d'vne autre ligne courbe, laquelle ne luy ſera pas pourtant egale. Or il eſt manifeſte que de ceſt axiome on peut bien conuertir & pren-

dre pour principe, *que les lignes droictes egales conuiennent* : Auſſi *que les angles rectilignes egaux conuiennent* : Semblablement, *Que les ſuperficies planes egales & ſemblables conuiennent*. On peut bien encore tirer quelques autres conuerſes de cet axiome : mais de le vouloir conuertir vniuerſellement (comme quelques-vns) c'eſt ſe moquer, veu que ſi on trouue vne ligne courbe egale à vne droicte, elles ne conuiendront pas pour tant : & auſſi qu'à tout angle rectiligne, il s'en peut bailler vn curuiligne egal, leſquels neantmoins ne conuiendront iamais : voire meſme faire vn quarré egal à vn triangle, ou à quelconque autre figure rectiligne : leſquels pourtant ne peuuent iamais conuenir.

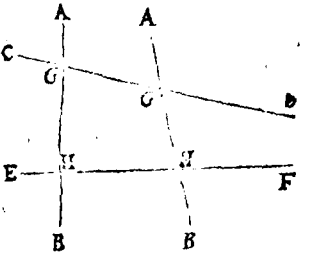
9. Le tout eſt plus grand que ſa partie.
10. Tous les angles droicts ſont egaux entr'eux.

De ce principe, nous pouuons conuertir & prendre pour maxime, que tout angle rectiligne egal à vn angle droict, eſt auſſi droict.

11. Si vne ligne droicte tombant ſur deux autres lignes droictes, faict les angles interieurs d'vn meſme coſté plus petits que deux droicts, icelles deux lignes eſtans conti-

nuées à l'infiny, se rencontreront du costé où les angles sont plus petits que deux droicts.

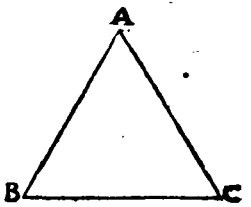
Comme par exemple, si la ligne droicte AB, tombant sur les deux lignes droictes CD, EF, & les couppant aux poincts G, H, faict les deux angles *interieurs* DGH, FHG, pris ensemble plus petis que deux droicts, *icelles* deux *lignes* CD, EF, estans continuees à l'infiny se rencõtreront de *la* part de D, F, où *les* susdits angles interieurs *sont* faits moindres que deux droicts: Car il est manifeste que de l'autre costé, sçauoir est vers C, E, l'espace d'entre *lesdites* deux lignes CD, EF, s'esslargira *touſiours de plus* en plus; mais de cestuy-cy il s'estrecira en sorte que finallement icelles lignes se rencontreront à vn poinct.



12. Deux lignes droictes n'enferment pas vn espace.

Vne seule ligne courbe enferme bien vn espace, comme font aussi vne ligne droicte & vne courbe, mais deux droictes ne le pouuent faire,

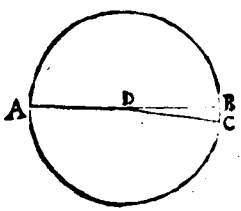
ains il en faut du moins 3. pour contenir & enclorre vne eſpace, cõme il appert en ceſte figure, en laquelle les 2. lignes droictes AB, & BC, qui font l'angle B, eſtans prolõgées tant qu'on voudra de la part de A & C, ne ſe joindront point, mais au contraire elles ſe dilateront touſiours de plus en plus; tellement que pour enclore l'eſpace d'entre icelles deux lignes il ſera neceſſaire d'en mener vne troiſieſme comme AC.



A ces 12. axiomes, Clauius & autres interpretes d'Euclide, ont encore adiouſté les 8. ſuiuans.

13. Deux lignes droictes ſe rencontrans indirectement n'ont pas vn meſme & commun ſegment.

Combien que par la nature de la ligne droicte, il ſoit aſſez manifeſte que deux lignes droictes, ſe rencontrans de trauers, ne peuuent auoir aucune partie cõmune tant petite qu'elle puiſſe eſtre, outre le poinct de leur rencontre; ſi eſt ce toutesfois que Proclus le demonſtre ainſi. Que deux lignes



droictes AB, AC, ayent, s'il eſt poſſible, vne partie commune AD. Du centre D & de l'interualle d'icelle AD ſoit d'eſcrit vn cercle coupant les deux lignes droictes propoſees aux poincts B & C. Donc les circonferances AB, & ABC ſeront égales entr'elles: (car elles ſont circonferences de deux cercles égaux, puis que ADB, ADC ſont poſez diametres) la partie & le tout: ce qui eſt abſurde. Donc deux lignes droictes, &c.

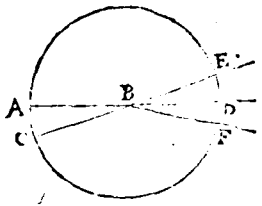
Or nous n'auons pas rapporté cet axiome, ny auſſi les ſept autres ſuiuans, tout de meſme qu'ils ſe trouuent dans Clauius & autres Interpretes d'Euclide, ains auons changé quelques mots aux vns, & adiouſté aux autres, afin d'oſter de ceux là tout doubte & ambiguité, & ne laiſſer en ceux-cy aucune defectuoſité: comme par exemple, en celuy-cy nous auons adiouſté *ſe rencontrant indirectement*, pource que deux lignes droictes peuuent bien auoir vn commun ſegment, quand elles ſont poſees directement, & conſtituent comme vne ſeule ligne droicte, ainſi qu'il appert icy aux deux lignes droictes DC & BA, qui ont la partie ou ſegment AC commun: mais quand elles ſont poſees de trauers & indirectement, elles ne peuuent auoir aucune partie cõmune outre le poinct de leur rencontre.



14. Deux lignes droictes ſe rencontrans à vn poinct indirectement, ſi elles ſont toutes deux prolongees, elles

s'entrecouppent neceſſairement en iceluy poinct.

Cet axiome depend auſſi de la nature de la ligne droicte, & toutesfois Clauius le demonſtre ainſi. Que deux lignes droictes AB, CB ſe rencontrent indirectement au poinct B: ie dis qu'icelles lignes eſtãs prolongees s'entrecouppero̓t à iceluy poinct B, ſçauoir eſt que CB prolongee tombera comme en E au deſſus de AB prolongee. Car ſi CB continuee ne tomboit au

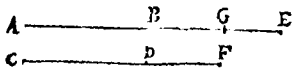


deſſus de AB prolongee, ou elle conuiendroit auec icelle AB continuee, de ſorte qu'elle paſſeroit par D, & par ainſi les deux lignes droictes ABD, CBD auroient vn meſme ſegment BD commun, contre le precedent axiome: ou bien elle tomberoit au deſſoubs de AB prolongee, comme en F, tellement que CBF ſeroit vne ligne droicte. Donc du centre B, & de quelconque interualle ſoit deſcrit vn cercle ACFD, couppant les lignes droictes AB, CB prolongees en D, F. D'autant que l'vne & l'autre ligne droicte ABD, CBF paſſe par le centre B, tant ACD que CF ſera demy cercle par la 18. def. & conſequemment ABD & CF ſeront égales entr'elles, le tout & la partie: ce qui eſt abſurde.

15. Si à choſes égales on adjouſte cho-

ſes inégales, lexcez des toutes ſera le meſme que l'excez des adiouſtees.

Aux grandeurs egales AB, CD eſtans adiouſtees les inégales BE, DF, deſquelles la difference ou excés c'eſt GE il eſt manifeſte que la toute AE excedera la toute CF du meſme excez GE.



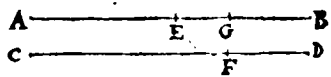
16. Si à choſes inégales on adiouſte choſes egales, l'excez des toutes ſera le meſme que l'excez de celles qui eſtoient au commencement.

Comme ſi (en la figure precedente) aux grandeurs inegales BE, DF, dont l'excez ou difference eſt GE, on adiouſte les grandeurs inegales AB, CD: il eſt manifeſte que la toute AE excedera la toute CF du meſme excez GE.

17. Si de choſes egales on retranche choſes inegales, l'excez des reſtantes ſera le meſme que l'excés des retranchees.

Des grandeurs égales AB, CD eſtans retran-

chees les inegales, BE, DF dont l'excez est EG, il est euident que le reste CF excedera le reste AE du mesme excez EG.



18. Si de choses inegales on oste choses egales, l'excez des restantes sera le mesme que l'excez des toutes.

Comme si des grandeurs inegales AB, CD, dont l'excez est BE, on retranche les grandeurs egales AF, CG, il est manifeste que le reste FB excedera le reste GD du mesme excez BE.



19. Le tout est egal à toutes ses parties prises ensemble.

20. Si vn tout est double d'vn tout, & le retranché du retranché, le reste sera aussi double du reste.

Comme par exemple, le nombre total 24. estant double du nombre total 12: & 18. retranché de celuy-là, double de 5. retranché de cestuy-cy, 14. reste du premier tout, sera aussi double de 7. reste du second tout.

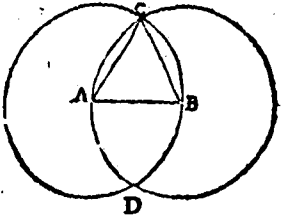
ELEMENT PREMIER

PROBL. I. PROP. I.

Sur vne ligne droicte donneé & terminee, descrire vn triangle equilateral.

SOIT la ligne droicte donnee *A B*, sur laquelle il faut faire vn triangle equilateral.

Du centre *A*, & de l'interuale de *AB*, soit descrit le cercle *B C D*: Item du centre *B*, & de l'interualle de la mesme *AB*, soit descript vn autre cercle *A C D*, couppant le premier és poincts *C* & *D*, de l'vndes quels, sçauoir de *C*, soient menees les deux lignes droictes *CA*, & *CB*: le dis que le triangle *ABC*, construit

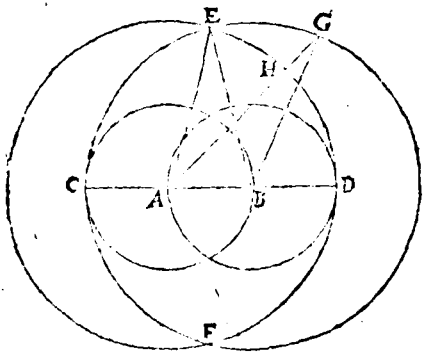


ſur la ligne droicte donnee AB, eſt equilateral.

Car le coſté AB, eſt egal au coſté AC par la 15. deff. d'autant qu'ils procedent de meſme centre vers meſme circonference: & par la meſme raiſon, le coſté BA eſt égal au coſte BC. Dõc par la 1. com. ſent. les coſtés CA, & CB ſeront égaux, eſtant chacun égal à AB: & partant le triangle ABC deſcrit ſur AB, eſt equilateral, qui eſt ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Quelques Interpretes ont icy enſeigné à deſcrire auſſi ſur vne ligne droicte donnee vn triangle Iſoſcelle, & vn Scalene, ce que nous ferons auſſi en ceſte maniere. Soit vne ligne droicte donnee AB, à l'entour de laquelle des centres A & B, ſoient deſcrits deux cercles, ainſi que deſſus. En apres ſoit prolongee icelle AB, de part & d'autre vers les circonferences iuſques en C & D: puis du cẽtre A & interuale AD ſoit deſcrit le cercle DEF,



Item du centre B, & interuale BC, le cercle CEF, coupã

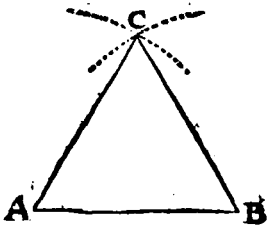
pant le premier és poincts E & F, de l'vn ou l'autre desquels, sçauoir de E, soient menees aux poincts A & B, les deux lignes AE, EB: Ie dis que le triangle AEB, fait sur la ligne donnee AB, est Isoscelle, qui est que les deux costez AE, EB, sont egaux entr'eux, & plus grands que AB. Car d'autant que par la 15. def. AE, est egal à la ligne droicte AD, & icelle AD est double de AB, d'autant que BA, DB sont egales entr'elles: aussi AE sera double de AB. Derechef parce que BE est egal à BC, & icelle BC est double de AB, aussi BE, sera double d'icelle AB. Veu donc que l'vn & l'autre costé AE, BE est double de la mesme AB, ils seront egaux entr'eux par la 6. com. sent. & partant plus grãds que la ligne AE. Donc le triangle AEB est Isoscelle. Maintenant si du poinct A, on tire la ligne droicte AG à la circonference EGF, qui ne soit la mesme que AE, ou AD, coupant la circonference EHD en H, & de G on mene a B la ligne droicte GB, sera constitué le trian. gle AGB sur la ligne AB, lequel ie dis estre scalene. Car par la 15. def. tant AH, AD, que BG, BC sont egales. Mais AD, BC sont doubles de AB: d'icelle seront aussi doubles AH, BG: & partant plus grandes qu'icelle AB. Veu donc que AG est plus grande que BH, ou que BG: le triangle AGB sera scalene: ce qu'il falloit faire.

Or est icy à noter que pour briefueté nous mettons souuentesfois ce mot ligne *au lieu de* ligne droicte: *& quelquesfois aussi nous posons simplement deux lettres capitales: comme par exemple AB, au lieu de dire* la ligne droicte *AB, c'est pourquoy quand on trouuera ledit mot* ligne *posé simplement, ou bien deux lettres capitales de suite, il faudra entendre* vne ligne droicte. *Semblablement quand on trouuera ce mot* angle, *ou trois*

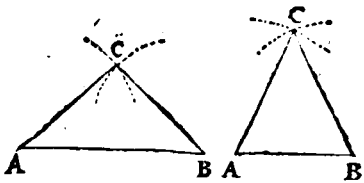
lettres capitales posées simplement de suitte sans aucune explication, il faudra entẽdre vn angle rectiligne, le lieu duquel sera tousiours denotté par la lettre du milieu, ainsi que nous auons desia remarqué à la 12. Def.

Et d'autant qu'en la construction & demonstration de la plus part des problemes de ces Elemens-cy, Euclide employe beaucoup de paroles, & tire plusieurs lignes qui ne sont necessaires pour pratiquer lesdits problemes, nous enseignerons en suitte de leurs demonstrations, comme on peut facilement & briefuement construire lesdits problemes, & principalement ceux qui sont les plus en vsage chez les Mathematiciens, & en la pratique desquels on peut apporter quelque briefueté.

Premierement donc pour describre vn triangle equilateral sur vne ligne droicte donnee AB, des centres A & B, mais de l'interuale d'icelle AB soient describts deux arcs de cercles s'entrecouppans en C: puis à iceluy poinct C, soient tirees les lignes droictes AC, BC, & sera fait le triangle equilateral ACB.

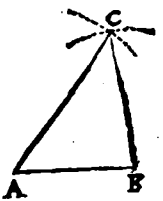


Mais pour describre vn triangle Isoscelle sur ladite ligne AB: des centres A & B, mais d'vn interuale plus grand qu'icelle AB, si on veut les costés plus grands que la ligne donnee, ou moindres (& toutesfois plus grands que la



que la moitié d'icelle AB) si on veut les costez moindres & soient descrits deux arcs s'entrecoupans en C, puis tirés les deux lignes AC, BC, lesquelles feront sur AB le triangle Isoscelle ACB.

Et pour construire vn triangle scalene sur ladite AB, du centre B, & d'vn interualle plus grand que BA soit descrit vn arc, puis du centre A, & d'vn interualle encore plus grand que le precedent, soit descrit vn autre arc qui coupe le premier en C, auquel poinct soient menees les deux lignes droictes AC, BC, & sera fait le triangle scalene ACB.



Voila donc comme il faut descrire sur vne ligne donnée vn triangle ou equilateral, ou Isoscelle, ou scalene, & sur la 22. prop. de ce liure nous enseignerons comme il faut construire quelcõque triangle ayant les trois costez egaux a trois lignes droictes donnees.

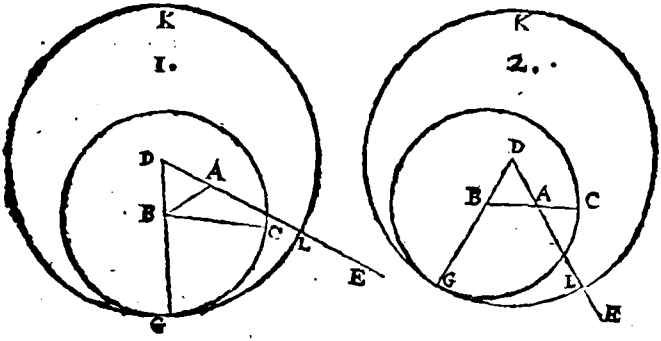
PROB. 2. PROP. II.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnee.

Soit le poinct donné A, & la ligne droicte donnee BC: & il faut du poinct A, mener vne ligne droicte egale à icelle donnee BC.

De l'vn ou l'autre extreme de la ligne donnee BC, sçauoir est de B, comme centre, & de l'interualle d'icelle BC, soit descrit le cercle CG: puis

du poinct donné A, au centre B, soit menee la ligne



droicte AB (sinon que le poinct A fut donné en la ligne BC, comme en la 2. fig.) sur laquelle ligne AB par la precedente proposition soit descrit le triangle equilateral ADB, & soit continué le costé DB iusques à ce qu'il rencontre la circõference en G: mais le costé DA tant qu'on voudra en E. En apres, du centre D, & de l'interualle de la ligne droicte DG, soit d'escrit le cercle GkL couppant la ligne DE en L: Ie dis que la ligne AL, qui est menee du poinct donné A, est egale à la ligne droicte donnee BC.

Car les lignes droictes DG & DL sont egales, d'autant qu'elles procedent de mesme centre vers vne mesme circonference, desquelles lignes si on oste DA & DB, qui sont egales, estant DAB triangle equilateral: les restes BG & AL seront aussi egales par la 3. com. sent. Mais BG est egale à BC, parce qu'elle procede de mesme centre vers

meſme circonference. Donc AL ſera egale à BC, parce que les choſes egales à vne meſme ſont egales entr'elles. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne droicte AL egale à la ligne droicte donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Ce probleme peut auoir diuers cas : car ou le poinct donné eſt posé en la meſme ligne droicte donnee, ou hors icelle: & ſelon chacune de ces poſitions il y peult encor auoir diuers cas, deux deſquels ſeulement nous auons rapporté icy, d'autant qu'en tous les autres cas il y a touſiours vne meſme conſtruction & demonſtration.

Que ſi en la conſtruction on fait ſur la ligne droicte AB *le triangle* ADB, *Iſoſcelle au lieu qu'il a eſté fait equilateral, on demonſtrera en la meſme maniere la ligne droicte* AL *eſtre egale à la ligne droicte* BC.

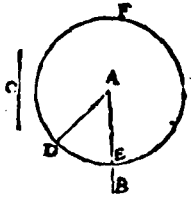
Quant à la practique de ce probleme, elle eſt fort facile: car il n'y a qu'à prendre la ligne donnee BC, *& de ſon internalle deſcrire vn arc du centre* A, *& quelconque ligne droicte menée d'iceluy centre à cet arc ſera egale à la ligne droicte donnee* BC.

PROB. 3. PROP. III.

Deux lignes droictes inegales eſtãs données, oſter de la plus grande, vne ligne droicte egale à la plus petite.

Soient les deux lignes droictes inegales AB &

C, desquelles AB est la plus grande : & d'icelle il faut oster vne ligne egale à C. A l'vn ou l'autre des extremes de la plus grande ligne AB, sçauoir est au poinct A, soit posee par la precedente prop. la ligne droicte AD egale à la moindre C: puis du centre A, & de l'interualle AD, soit descrit vn cercle couppant AB en E. Ie dis que la ligne AE est egale à C. Car d'autant que par la 15. def. les lignes droictes AD, AE sont egales : & par la construction AD est egale à C; par la 1. com. sent. AE sera aussi egale à C. Nous auõs donc osté de AB la ligne AE egale à C, ainsi qu'il falloit faire.



SCHOLIE.

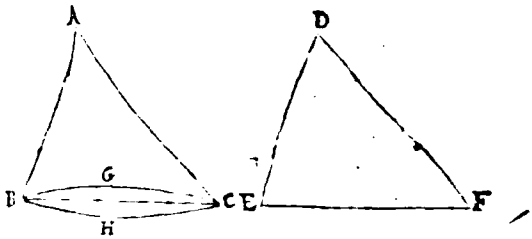
Il y peut bien auoir diuers cas en ce probleme, à cause des diuerses positions ausquelles se peuuent rencontrer les deux lignes donnees, mais en tous ces cas-là on peut tousiours faire la mesme construction & demonstration que cy dessus, comme Proclus a fort bien remarqué sur ceste prop.

Quant à la pratique de ce probleme, elle est tres-aisee, veu qu'il n'y a qu'à prendre la moindre ligne donnee, & de l'interualle d'icelle, descrire de l'vn ou l'autre extreme de la plus grande ligne vn petit arc, qui couppera d'icelle, vne ligne egale a la moindre donnee.

THEOREME I. PROP. IV.

Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien: & l'angle contenu d'iceux, egal à l'angle: la base sera egale à la base; & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien: & le triangle egal au triangle.

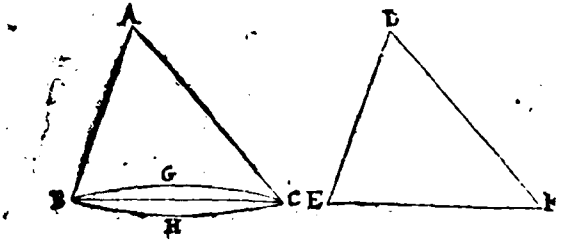
Soient les deux triangles ABC & DEF, desquels le costé AB soit egal au costé DE, & AC à DF, &



l'angle A egal à l'angle D: Ie dis que la base BC sera egale à la base EF, & l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F, & le triangle ABC egal au triangle DEF.

Qu'il ne soit ainsi; si on entend le triangle DEF, estre posé sur le triangle ABC, en sorte que le poinct D soit sur le poinct A, & que DE tombe sur AB: aussi DF tombera sur AC: autrement l'an-

gle A ne ſeroit pas egal à l'angle D. Et d'autant



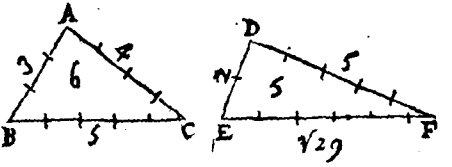
que les coſtez AB & AC ſont egaux aux coſtez DE & DF, chacun au ſien, ils conuiendront par la 8. com. ſent. conuertie, & partant les extremitez E & F tõberont ſur les extremitez B & C: ainſi la baſe EF conuiendra auec la baſe BC: car ſi elle ne conuenoit, elle tomberoit ou au deſſus d'icelle BC, comme BGC, ou au deſſous, comme BHC: ce qui eſt impoſſible, attendu que deux lignes droictes ne peuuent enclore vne eſpace par la 12 com. ſent. Donc les deux baſes BC, & EF conuiendront, & partant ſeront egales entr'elles par la ſuſdite 8. com. ſent. Et par ainſi tout le triangle DEF conuiendra auec tout le triangle ABC, conſequemment egal à iceluy, & l'angle B conuiendra auſſi auec l'angle E, & l'angle C auec l'angle F; partant egaux. Si donc deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Euclide met deux conditions en ce theoreme qui y ſont du tout neceſſaires; la premiere deſquelles eſt que deux coſtez d'vn triangle ſoient egaux aux deux coſtez de l'autre chacun au ſien: & la ſeconde, que les deux an-

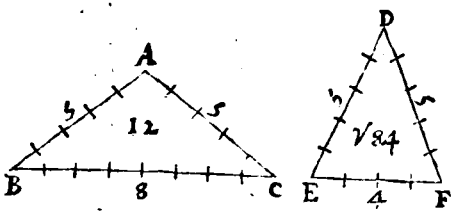
gles contenus d'iceux costez egaux, soient aussi egaux. Car defaillant l'vne ou l'autre de ces deux conditions, ny les bases, ny les autres angles ne pourroient iamais estre egaux: & la derniere defaillant, les triangles peuuēt bien estre quelquefois egaux, mais le plus souuent ils sont inegaux: ce que nous pourrions facilement demonstrer icy n'estoit que plusieurs choses à ce requises n'ont encore esté demonstrees: neantmoins afin de rendre aucunement euidente la necessité des susdites conditions nous rapporterons icy ce qu'en dit Proclus sur ceste proposition, & Clauius apres luy.

Pour la premiere condition de ce theoreme, soient deux triangles ABC, DEF, ayans les angles A & D egaux, sçauoir droicts, & les deux costez AB, AC, egaux aux



deux costez DE, DF, non chacun au sien, mais ces deux-là pris ensemble egaux à ces deux-cy aussi pris ensemble: & soit AB 3, & AC 4, qui adiouſtez ensemble font 7: mais DE soit 2, & DF 5, qui font aussi ensemble 7. Ce qu'estant ainsi, la base BC sera 5, & la base EF, racine quarree de ce nombre 29, laquelle est plus grande que 5, mais moindre que 6, & l'aire ou superficie du triangle ABC sera 6: mais l'aire du triangle DEF ne sera que 5. Finalemēt les angles sur la base BC ne seront pas egaux aux angles de dessus la base EF, chacun au sien. Toutes lesquelles inegalitez aduiennēt à cause de ce que les costez AB, AC ne sont pas egaux aux costez DE, DF chacun au sien.

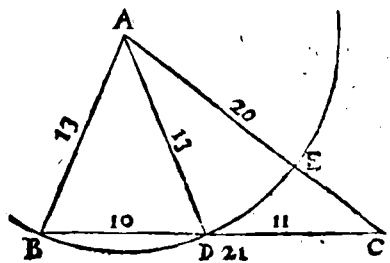
Quant à la seconde condition; Les costez AB, AC du triangle ABC soient egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & chacun d'iceux soit 5, mais les angles A & D contenus d'iceux costez



soient inegaux, & soit A plus grand que D. Toutes lesquelles choses estans ainsi, la base BC sera plus grande que la base EF, comme il sera demonstre en la 24. prop. de ce liure.

Que si nous posons la base BC estre 8, & la base EF 4, l'aire du triangle ABC, sera 12; mais l'aire du triangle DEF sera la racine quarree de ce nombre 84, laquelle est plus grande que 9, mais moindre que 10. Ce qui est tres-bien cogneu des Geometres.

Et afin qu'on n'estime pas que ceste inegalité aduienne à raison de ce que tous les quatre costez des triangles sont egaux & rendre tant plus manifeste la necessité de de la seconde condition de ce theoreme, soit vn triagle ABC duquel le costé AB soit moin-



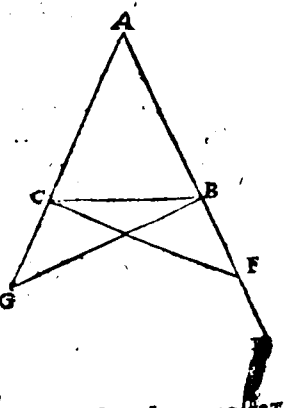
dre que le coſté AC, & auſſi que la baſe BC. Du centre A, & de l'interualle du petit coſté AB, ſoit deſcrit vn cercle BDE qui couppera tant le plus grand coſté AC, que la baſe BC: Car autrement il paſſeroit ou par le poinct C, ou au delà d'iceluy; ce qui eſt abſurde, veu que toutes les lignes droictes tirées du centre A à la circonference du cercle BDE, doiuent eſtre egales entr'elles par la 15. def. Qu'il couppe donc la baſe BC en D, & ſoit tiree la ligne AD. Par la meſme 15. def. AB eſt egale à AD, & AC eſt commun à tous les deux triangles ABC, ADC, & partant iceux triangles auront les deux coſtez AB, AC egaux aux deux coſtez AD, AC, chacun au ſien; mais l'angle DAC, contenu des deux coſtez AD, AC, n'eſt que partie de l'angle BAC contenu des coſtez egaux à ceux-là; & partant la baſe DC ne ſera auſſi que partie de la baſe BC, & pareillement le triangle ADC partie du triangle ABC. Ce qui eſt auſſi manifeſte par l'application des nombres aux lignes: Car les Geometres ſçauent tres-bien que le coſté AB eſtant 13, le coſté AC 20, & la baſe BC 21; le coſté AD ſera auſſi 13, & la baſe DC 11; mais l'aire ou contenu du triangle ABC ſera 126, & celuy du triangle DAC ne ſera que 66. Donc afin que de deux triangles les baſes ſoient egales entr'elles, & leurs angles auſſi egaux entr'eux, & pareillement les triangles egaux; il eſt du tout neceſſaire que non ſeulement chaque coſté de l'vn ſoit egal à chaque coſté de l'autre, mais auſſi que les angles contenus d'iceux coſtez ſoient egaux entr'eux, comme a fort bien dit Euclide.

Finallement, nous remarquerons vne fois pour toutes qu'Euclide n'entend parler en ces Elemens cy que des

triangles rectilignes, car combien que cette proposition & plusieurs autres se puissent faire generales, estans veritables, tant au regard des triangles rectilignes que des spheriques, si est-ce toutesfois que cela n'advient pas en toutes propositions, comme on peut voir en nostre traicté des triangles spheriques, c'est pourquoy nous estendrons toutes ses propositions seulement aux triangles rectilignes, encores qu'Euclide ne les specifie.

THEOR. 2. PROP. V.

Les triangles Isosceles, ont les angles sur la base egaux: & les costez egaux estans continuez, les angles exterieurs sous la base sont egaux.



Soit le triangle Isosceles ABC: Ie dis premierement que les angles ABC, & ACB, sur la base BC, sont egaux.

Qu'il ne soit ainsi. Soiét prolongez AB & AC, costez egaux insques en D & G: & soit fait AF egale à AG par la 3. prop. & soient menees les lignes BG & CF. Les deux triangles ABG, & ACF, ayans l'angle A commun, ont les deux costez AB & AG egaux aux deux costez AC, & AF, chacun au sien; & par 4. proposition, la base

BG sera egale à la base CF, & l'angle ABG egal à l'angle ACF, & l'angle G egal à l'angle F. Item les triangles GCB, FBC, ayant l'angle G egal à l'angle F, & les deux costez GB, & GC egaux aux deux costez CF & FB: (Car CF a esté prouué tantost egal à BG; & AG, AF estans egaux; & AC, AB aussi egaux; les restes CG, & BF seront aussi egaux) par la 4. prop. la base sera egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien: sçauoir l'angle GBC, sera egal à l'angle FCB. Et qui des angles egaux ABG & ACF, oste les angles egaux CBG & BCF; les demeurans ABC & ACB, seront egaux.

Pour la seconde partie. Que les costez egaux AB & AC estans continuez, les angles exterieurs sous la base BC, sont egaux, sçauoir FBC à BCG, elle a esté suffisamment demonstrée, lors qu'on a prouué que les triangles GBC, & CFB, auoient leurs angles egaux, chacun au sien. Parquoy les triangles Isosceles, &c. Ce qu'il falloit demõstrer.

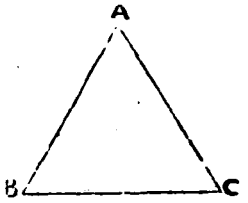
SCHOLIE.

Ceste proposition est aussi vraye ès triangles equilateraux. Car les deux costez AB, AC du triangle ABC estans egaux entr'eux, ou l'autre coste CB, est pareillement egal à iceux, comme il aduient au triangle equilateral, ou bien inegal, comme il arriue au triangle Isoscele: Il s'ensuit necessairement, que les angles de dessus la base BC, sont egaux entr'eux, & ceux de dessous la mesme base aussi egaux entr'eux, comme il appert par la demonstration cy-dessus.

COROLLAIRE.

De ceste 5. proposition il s'ensuit que tout triangle equi-

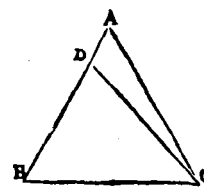
lateral eſt auſsi equiangle, c'eſt à dire que les trois angles de quelconque triangle equilateral ſont egaux entr'eux. Car ſoit vn triangle equilateral ABC: *Donc par ce que les deux coſtez* AB, AC *ſont egaux, par la 5. prop.. les deux angles* B *&* C *ſeront egaux: ſemblablement, pour ce que les deux coſtez* AB, BC *ſont egaux, les deux angles* A *&* C *ſeront auſsi egaux. Donc par la 1. com. ſont. tous les trois angles* A, B, C, *ſeront egaux entr'eux. Ce qu'il falloit demonſtrer.*



THEOR. 3. PROP. VI.

Si vn triangle a deux angles egaux entr'eux; les coſtez ſouſtendans iceux angles, ſeront auſſi egaux entr'eux.

Soit le triangle ABC, duquel les deux angles ABC, & ACB ſur la baſe BC ſont egaux: Ie dis que les deux coſtez AB & AC qui ſouſtendent les ſuſdits angles egaux, ſont auſſi egaux.



Autrement, ſoit AB plus grand que AC, s'il eſt poſſible: on en pourra donc retrancher vne partie egale à AC par la 3. prop. laquelle partie ſoit BD, & ſoit menee la ligne DC: les deux triangles DBC, & ACB, ont deux coſtes egaux à deux coſtez chacun au ſien, & les angles compris d'iceux coſtez auſſi egaux, car les

deux costez BD & BC du triangle BDC sont egaux aux deux costez AC, & CB du triangle ACB, & l'angle B egal à l'angle ACB ; & par la 4. prop. iceux triangles DBC, ACB, seront egaux ; ce qui est impossible: car l'vn est partie de l'autre, Donc les costez AB, & AC n'estoient pas inegaux, ains egaux. Ce qu'il falloit demonstrer.

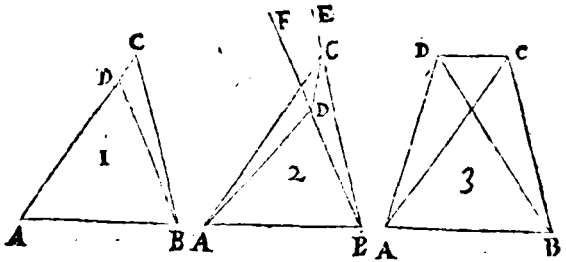
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de cette proposition, que tout triangle equiangle, c'est à dire qui a tous les angles egaux, est equilateral: car par ce qui a esté icy demonstré, les angles ABC, ACB *estans egaux, les deux costez* AB, AC, *seront pareillement egaux: Mais si les deux angles* A *&* B *estoient encore egaux, aussi les costez* CA, CB *subtendans iceux angles, seroient aussi egaux: & partant tous les trois costez* AB, AC, BC *egaux entr'eux, puis que les choses egales à vne mesme, sont egales entr'elles.*

THEOR. 4. PROP. VII.

Si des extremitez de quelque ligne droicte, on mene deux autres lignes droictes, se rencontrans à vn poinct ; des mesmes extremitez, on n'en pourra pas mener deux autres egales à icelles, chacune à la sienne, & de mesme part, se rencontrant à vn autre poinct.

Soit la ligne AB, des extremitez de laquelle soient menées deux lignes droictes AC & CB se rencontrant à quelconque poinct C. Ie dis que des mesmes extremitez A & B, & de la mesme part que C, on ne peut mener deux autres lignes droictes egales à icelles AC, BC, chacune à la sienne, qui se rencontrent à vn autre poinct que C; c'est à dire que si de l'extremité A on mene la ligne AD egale à AC, & de l'extremité B la ligne BD egale à BC, il ne peut estre que le poinct de rencontre D, soit autre que le poinct de rencontre G.



Car si faire se peut que le poinct de rencontre D, tombe ailleurs qu'au poinct C : ou iceluy poinct D tombera sur l'vne ou l'autre des lignes AC, BC; ou dans le triangle ACB; ou hors iceluy.

Premierement iceluy poinct de rencontre D, ne peut estre sur la ligne AC, comme en la premiere figure: car il faudroit que les deux lignes AD, & AC fussent egales entr'elles, sçauoir est la partie

au tout; ce qui eſt abſurde: partant la rencontre D, ne ſe fera point ſur AC, ny auſſi ſur BC, à cauſe de la meſme abſurdité.

Soit donc iceluy poinct de rencontre D, dans le triangle ABC, comme en la 2. figure: & apres auoir prolongé BC iuſques en E, & BD iuſques en F, ſoit menée CD. Puis que les deux lignes AC, & AD ſont poſees egales, le triangle ACD ſera Iſoſcele, & par la 5. propoſition les deux angles ACD & ADC ſur la baſe CD ſeront egaux. Mais l'angle ACD eſt moindre que l'angle DCE: (car il n'eſt que partie d'iceluy) donc l'angle ADC eſt auſſi moindre que le meſme angle DCE: & par conſequent l'angle CDF, qui n'eſt que partie d'iceluy ADC, ſera beaucoup moindre que le meſme angle DCE. Derechef puis que les lignes BC, BD, ſont poſees egales, le triangle BCD doit eſtre Iſoſcele, & partant les angles CDF & DCE ſous la baſe DC, ſeront egaux par la meſme 5. prop. Mais il a eſté demonſtré que l'angle CDF eſt beaucoup moindre que l'angle DCE, donc le meſme angle CDF eſt eſt moindre que l'angle DCE, & auſſi egal à iceluy: ce qui eſt abſurde.

Soit donc finalement iceluy poinct de rencontre D hors iceluy triangle ACB, comme en la 3. figure: apres auoir mené la ligne CD, il s'enſuiura que les deux triangles ADC & BCD ſeront Iſoſceles; & partant qu'ils auront les angles ſur la baſe CD egaux: ſçauoir eſt ADC à ACD, & BDC à BCD. Mais iceluy BCD, eſt plus grand que ACD, donc auſſi BDC ſera plus

grand que ADC, c'eſt à dire la partie que le tout : ce qui eſt abſurde. Le poinct de rencontre D ne tombera donc pas hors le triangle ABC, ny dedans iceluy, ny ſur les lignes AC & BC : Il faut donc qu'iceluy poinct de rencontre D tombe au premier poinct de rencontre C: Parquoy ſi des extremitez de quelque ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

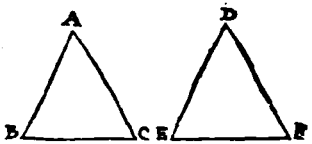
Il eſt manifeſte que ſi AD, BD *priſes enſemble eſtoient faictes egales à* AC, BC *auſſi priſes enſemble, le poinct de leur rencontre* D, *ſeroit autre que le premier poinct* C; *comme il ſeroit encore ſi on faiſoit* AD *égale à* BC, *&* BD *egale à* AC, *mais en l'vne ny l'autre maniere, icelles lignes* AD, BD *ne ſeroient pas ſelon l'intention d'Euclide : car il veut que non ſeulement les lignes* AD, BD, *ſoient egales aux lignes* AC BC, *chacune à la ſienne, mais auſſi que les lignes egales ſoient menees d'vn méme poinct, & de plus que ce ſoit de meſme part. Car il eſt tres euident qu'icelles* AD, BD, *peuuent bien eſtre tirées de l'autre coſté de* C, *c'eſt à ſçauoir au deſſoubs de la ligne* AB. *Doncfort à propos Euclide met en ce theoreme que les lignes ſoient egales chacune à la ſienne, & menees de meſme part, &c.*

THEOR. 5. PROP. VIII.

Si deux triangles ont deux coſtés égaux à deux coſtés, chacun au ſien, & la baſe

base egale à la base; ils auront aussi l'angle, compris d'iceux costez egaux, egal à l'angle.

Soient deux triangles ABC, DEF, desquels le costé AB, est egal à DE; AC à DF, & la base BC à la base EF:



Ie dis que les angles A & D compris d'iceux costez egaux, sont egaux.

Car puis que la base BC est egale à la base EF; si on entéd icelles estre posees l'vne sur l'autre, elles conuiendront tombant le poinct E sur le poinct B, & F sur C: & par la 7. prop. les deux lignes ED, & FD, qui sont egales à BA & CA, se rencontreront au poinct A, & conuiendront auec icelles lignes BA & CA: partant conuiendront aussi les angles A & D contenus d'icelles lignes; & par consequent seront egaux par la 8. com. sent. Donc si deux triangles, &c, Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

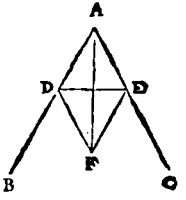
Puis que la base EF conuient auec la base BC, & les costez DE, DF, conuiennent aussi auec les costez AB, AC, il s'ensuit que non seulement l'angle A est egal à l'angle D; mais aussi que l'angle E est egal à l'angle B, & l'angle F, egal à l'angle C, & tout le triangle egal à tout le triangle.

PROB. 4. PROP. IX.

Coupper en deux egalement vn angle rectiligne donné.

Soit l'angle rectiligne donné BA C, lequel il faut coupper en deux egalement; c'eſt dire en deux angles egaux entr'eux.

Soit de A B & A C retranché deux parties egales A D & AE: & apres auoir mené la ligne D E, ſur icelle ſoit deſcrit le triangle equilateral D E F par la premiere propoſition, & ſoit menée la ligne AF: Ie dis que icelle ligne coupe l'angle donné BAC en deux egalement.



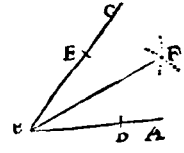
Car puiſque les lignes AD, AE ont eſté priſes egales, & AF eſt commune aux deux triangles D A F, EAF; les deux coſtez AD & AF, du triangle DAF, ſeront egaux aux deux coſtez AE & AF du triangle EAF, & la baſe DF egale à la baſe EF: (eſtant DFE triangle equilateral) donc par la 8. prop. l'angle D A F ſera egal à l'angle E A F: & partant l'angle B A C eſt couppé en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Que ſi au lieu du triangle equilateral cy-deſſus con-

struit, on en faict vn Isoscelle, la demonstration sera tousiours la mesme : Ce qu'on peut aussi faire aux trois propositions suiuantes.

Quant à la practique de cette proposition nous l'auons enseignée en nostre Geometrie practique Probl. 5. Et neantmoins nous ne laisserons de la repeter icy ; Et pource soit vn angle rectiligne ABC, qu'il faut couppper en deux egalement. Du centre B & de tel interualle qu'on voudra, soient couppees BD, BE egales ; puis des poincts D & E soient descrits deux arcs s'entrecouppans en F, & d'icelle intersection soit tirée par le poinct B, la ligne droicte F B, laquelle diuisera l'angle donné A B C en deux egalement.



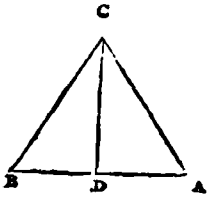
Or il appert par ce que dessus qu'on peut aussi couppper vn angle rectiligne en quatre parties egales, en huict, en seize, en trente deux, & ainsi consecutiuement, en procedant tousiours par augmentation double : Car apres qu'vn angle rectiligne est couppé en deux egalement, si on diuise derechef chasque partie en deux egalement, on aura quatre angles egaux. Que si on couppe derechef chacun d'iceux en deux egalement, nous aurons huict angles egaux, & ainsi consequemment.

PROBL. 5. PROP. X.

Couppper en deux egalement vne ligne

droicte donnée & terminée.

Soit la ligne droicte donnée & terminée AB: laquelle il faut coupper en deux egalement.. Sur icelle ligne AB soit construit le triangle equilateral ACB par la 1. prop & par la prec. l'angle C soit couppé en deux egalement par la ligne CD, tirée iusques à ce qu'elle couppe AB en D. Ie dis qu'icelle AB est couppée en deux egalement en D.

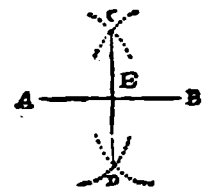


Car puis que les angles du poinct C sont egaux, & le triangle ACB, est equilateral, les deux triangles ACD, & BCD, ont deux costez AC, CD, egaux à deux costez BC, CD, chacun au sien, & les angles du poinct C, qu'ils comprennent aussi egaux; partant par la 4. prop. la base AD, sera egale à la base DB. Donc AB est couppee en deux egalement en D. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enseigné la practique de cette proposition en nostre Geometrie practique Prob. 1. & ce faict ainsi. Pour diuiser la ligne droicte AB en deux parties egales, du centre A, & de quelque interualle que ce soit (plus grand toutesfois que la moitié d'icelle AB) soient descrits deux arcs de cercle, l'vn au dessus d'icelle

Ligne, comme C, & l'autre au dessous, comme D, puis du centre B, & du mesme interualle soient descris deux autres arcs qui coupent les precedens esdicts poincts C & D, puis d'vne intersection à l'autre, soit tiree la ligne droicte CD, laquelle coupera AB en deux egalement au poinct E. Est à notter que si de part ou d'autre de AB on ne pouuoit



descrire deux arcs comme D, il faudroit ayant descrit les deux arcs C, ouurir le compas d'vn plus grand interualle, & en descrire deux autres arcs au dessus de C, & la ligne menee d'vne intersection à l'autre, & continuee iusques à AB, la coupperа en deux egallement.

Or il appert par ce que dessus, qu'on peut aussi coupper vne ligne droicte finie en quatre parties egales, en 8, en 16, en 32. &c. ainsi que nous auons dit, en la precedente prop. de la diuision de l'angle rectiligne. Mais comment on peut diuiser vne ligne droicte terminee en tant de parties egales qu'on voudra, nous l'auons enseigné en nostre Geometrie pratique Probl. 7: & ce tant Geometriquement que Mechaniquement auec le compas de proportion.

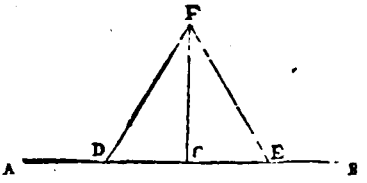
PROBL. 6. PROP. XI.

Sur vne ligne droicte donnee, & d'vn poinct en icelle, esleuer vne ligne droicte perpendiculaire.

Soit la ligne droicte donnee AB, & le poinct

en icelle C : d'iceluy poinct il faut mener vne ligne perpendiculaire à icelle AB.

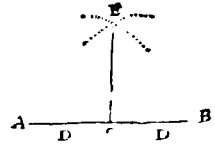
Soient du poinct C prinſes les deux lignes egales CD & CE par la 3. propoſition, & ſur DE ſoit faict le triangle equilateral DFE, & de C à F ſoit menée la ligne CF : Ie dis qu'icelle CF eſt la ligne perpẽdiculaire demãdée.



Car les triangles DFC & CFE ayans deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, ſçauoir D C à C E par la conſtruction, & CF commun, & la baſe D F egale à la baſe E F, à cauſe que le triangle D F E eſt equilateral ; par la 8. prop. les angles au poinct C, contenus des coſtez egaux, ſeront egaux ; & partant par la 10. def. ils ſont dits droicts, & la ligne CF perpendiculaire à AB, ainſiqu'il falloit faire.

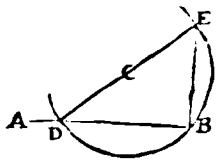
SCHOLIE.

La pratique de cette propoſition eſt enſeignee en noſtre Geometrie pratique, Prob. 2. & neantmoins nous la repeterons encore icy. Pour eſleuer ſur AB vne ligne perpendiculaire du poinct C, ſoient marquees en icelle AB deux poincts comme D, egalemens diſtans de C, & d'iceux poincts, ſoient deſcrits deux arcs d'vn meſme interualle s'entrecouppans en E, de la-

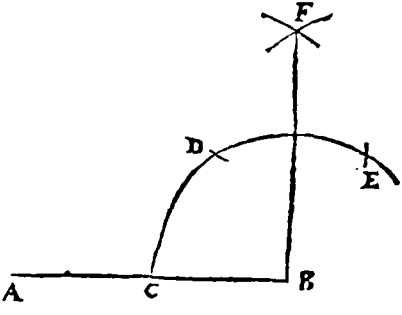


quelle intersection soit tiree à C la ligne droicte EC, qui sera perpendiculaire à ladite AB.

Que si le poinct donné estoit B à l'extremité de la ligne, il faudroit continuer ladite ligne, & sur icelle estant continuée faire comme dessus: ou bien nous prendrons vn poinct au dessus d'icelle ligne, comme C, lequel soit plus prez du poinct donné B, que de l'autre extremité A; puis d'icelluy poinct C, & de l'interualle CB, nous descrirons la circonference DBE, qui couppe la ligne donnée en B, & d'icelluy poinct D par C, nous tirerons la ligne droicte DCE couppant la susdite circonference en E, duquel poinct E soit tiree la ligne droicte EB, laquelle sera perpendiculaire à AB.



Autrement, du poinct donné B, & de quelque interualle que ce soit BC, moindre toutesfois que la ligne donnee, soit descrit vn arc CDE plus grand que le tiers de la circonference entiere du cercle, puis sur icelluy arc CDE soient pris deux interualles CD, DE, chacun egal au semidiametre BC, & des poincts D; E, soient descrits



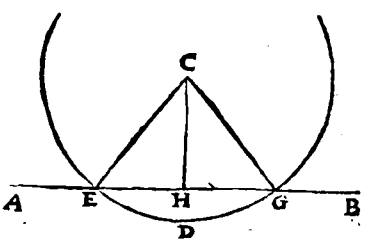
deux arcs de cercle s'entrecouppans au poinct F, duquel soit tiree au poinct B la ligne droicte FB, qui sera perpendiculaire à AB.

Est à noter qu'encore que le poinct donné B ne fust l'extremité de la ligne, on pourroit neantmoins mener la perpendiculaire par l'vne ou l'autre des deux manieres cy dessus.

PROBL. 7. PROP. XII.

Abaisser vne ligne droicte perpendiculaire sur vne ligne droicte indeterminee, & d'vn poinct hors icelle.

Soit la ligne droicte dõnée & interminee AB, & le poinct hors icelle C, duquel il faut mener vne ligne perpendiculaire sur AB.

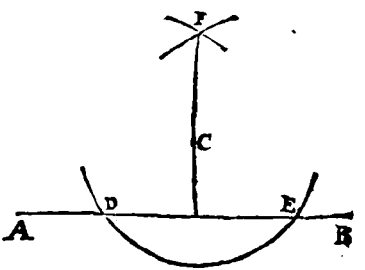


Soit pris au delà de la ligne AB quelcõque poinct D; puis du centre C, & interualle CD, soit descrit le cercle EDG, couppant la ligne AB és poincts E & G, puis par la 10. prop. soit couppee EG en deux egalement au poinct H, & soit menee la ligne CH, laquelle ie dis estre perpendiculaire à AB.

Car eſtans tirées les lignes droictes CE, CG; les deux coſtez EH & HC du triangle EHC, ſeront egaux aux deux coſtez GH & HC du triangle GHC, vn chacun au ſien, & la baſe CE eſt egale à la baſe CG, eſtans icelles tirees dn centre C à la circonference, & par la 8. prop. les angles du poinct H ſeront egaux; & partant par la 10. definit. ils ſeront droicts, & la ligne CH perpendicul. à AB. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La practique de ce probleme eſt enſeignée en noſtre Geometrie practique probl. 3. & eſt telle qu'il enſuit.

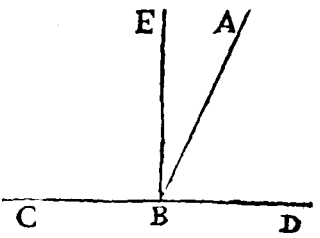


Pour mener à vne ligne donnee AB vne perpendiculaire d'vn poinct donné hors icelle, cõme C; d'iceluy poinct C ſoit d'eſcrit vn arc qui coupe la ligne donnee en D & E, puis d'iceux poincts, comme centres, ſoient d'eſcris deux arcs de cercles d'vn méme interualle, qui s'entrecouppent au poinct F: (il n'importe pas de quel coſté ce ſoit, au deſſus ou au deſſoubs de la ligne AB) puis d'iceluy poinct F par celuy donné C, ſoit tiree vne ligne droicte FCG, qui rencontre la donnee en G, & icelle FCG ſera perpendiculaire à AB.

THEOR. 6. PROPOS. XIII.

Quand vne ligne droicte tombant sur vne ligne droicte fait angles, ou iceux seront deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.

Soit la ligne droicte AB, laquelle tombant sur vne autre ligne droicte CD, fait les angles CBA, & DBA: Ie dis que iceux sont deux angles droicts, ou egaux à deux droicts.



Car ou icelle ligne AB est perpendiculaire à CD, ou elle ne l'est pas: Si elle est perpendiculaire, les deux angles sont droicts par la 10. def. Si elle ne l'est pas, soit leuee la perpend. BE par la 11. prop. & les deux angles CBE & DBE seront droicts par la susdite deff. mais par la 19. com. sent. le seul angle droict DBE est egal aux deux angles DBA, ABE ensemble: parquoy si on leur adiouste le commun CBE, les trois angles DBA, ABE & CBE seront egaux aux deux droicts DBE, CBE. Derechef d'autant que par la mesme 19. com. sent. les deux angles CBE, ABE ensẽble sont egaux au seul ABC: si on adiouste le commun DBA, les deux angles ABC, DBA seront egaux aux trois CBE, ABE, DBA: mais ces trois cy ont esté demonstrez egaux à deux droicts: donc ces deux-là ABC, ABD seront aussi egaux à deux droicts. Parquoy si vne ligne

droicte tombante sur vne autre ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Ceste demonstration de Theon est suiuie par la plus part des Interpretes d'Euclide, mais les autres ayans monstré comme dessus, que les deux angles CBE & DBE sont droicts, concluent incontinent par la 8. com. sent. que les deux ABC, & ABD ensemble, seront donc aussi egaux à deux droicts, veu qu'ils occupent autant d'espace, voire le mesme, que les deux droicts CBE, DBE, & conuiennent auec eux.

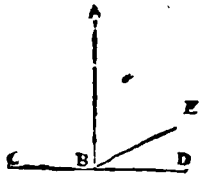
Aussi Clauius a remarqué, que cette proposition semble dependre de quelque commune notion de l'esprit: car de ce que l'angle ABC excede l'angle droict EBC, l'angle restant ABD est excedé par l'angle droict EBD, car comme en celuy-là l'excez est l'angle ABE, ainsi en cestuy-cy le defaut est le mesme angle ABE. Parquoy l'on pourra conclurre, que les angles ABC, ABD sont egaux à deux droicts, attendu que l'excez de l'angle obtus ABC, est le defaut de l'aigu ABD.

THEOR. 7. PROP. XIV.

Si à vn poinct de quelque ligne droicte se rencontrent deux autres lignes droictes de part & d'autre d'icelle, faisant deux angles egaux à deux droicts: icelles deux lignes se rencontreront directement.

Soit la ligne droicte AB, & en icelle le poinct B, auquel se rencontrent deux autres lignes droictes

CB & DB de part & d'autre d'icelle AB, faisant les deux angles ABC & ABD egaux à deux droicts: Ie dis que CB & DB se rencontrent directement, c'est à dire que CBD est vne ligne droicte.

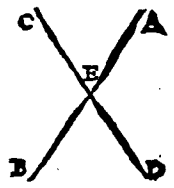


Autrement, si CBD n'est ligne droicte, soit continuee CB directement de la part de B, & la continuation d'icelle tombra ou au dessus de BD, ou au dessous: quelle tombe donc au dessus, s'il est possible, comme BE, en sorte que CBE soit ligne droicte. D'autãt que AB tombe sur CBE, les deux angles ABC, & ABE, serõt egaux à deux droicts par la 13 prop. Mais par l'hypothese les deux ABC & ABD sont aussi egaux à deux droicts, & par la 10. com. sent. tous les angles droicts sont egaux entr'eux: donc par la 1. com. sent. ces deux angles ABC, & ABD seront egaux aux deux ABC, & ABE. Parquoy ostant l'angle commun ABC, les restans ABD & ABE, seront egaux, le tout & la partie; ce qui est impossible. Parquoy la ligne droicte CB estant prolongee, ne tombera pas au dessus de BD; mais elle ne tombera pas aussi au dessous, car il aduiendroit tousiours la mesme absurdité: donc CB, & DB se rencontroient directement. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 8. PROP. XV.

Si deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre, elles feront les angles oppofez au sommet egaux.

Soient les deux lignes AB & CD, se couppans l'vne l'autre au poinct E : Ie dis que les angles opposez au sommet, sçauoir AEC, & DEB, sont egaux entr'eux.



Car d'autant que sur AB tombe la ligne CE, les angles AEC, & BEC, sont egaux à deux droicts par la 13. prop. Item, pour la mesme raison, CEB, & DEB, seront egaux à deux droicts : partant les deux angles AEC & CEB, sont egaux aux deux CEB & DEB. Que si on oste le commun CEB, le demeurant AEC sera egal au demeurant DEB. Le mesme se peut aussi dire des deux angles opposez AED, & CEB. Parquoy si deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonster.

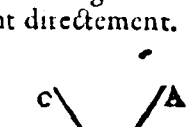
COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ceste demonstration, que deux lignes droictes s'entrecouppans, font au poinct de leur section quatre angles egaux à quatre angles droicts. Est aussi manifeste qu'estans constituez tant d'angles qu'on voudra à l'entour d'vn seul & mesme poinct, qu'ils seront seulement egaux à quatre angles droicts : car si de E, en la precedente figure, on meine tãt d'autres lignes droictes qu'on voudra, elles diuiseront seulement les quatre angles constituez au poinct E, en plusieurs parties ; toutes lesquelles parties prinses ensemble, seront egales aux quatre angles d'icelluy poinct E, par la 19. com. sent. c'est à dire à quatre angles droicts.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy la conuerse qui, selon Proclus, est telle.

Si à vn poinct de quelque ligne droicte se rencontrent deux autres lignes droictes, non de mesme part, faisant les angles au sommet egaux : icelles deux lignes se rencontreront directement.



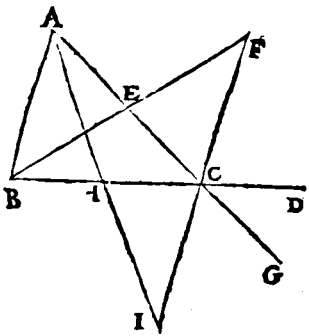
Soit la ligne droicte AB, & vn poinct en icelle E, auquel soient menees les deux lignes droictes CE, DE de part & d'autre de AB faisant les angles CEA, DEB egaux entr'eux. Ie dis qu'icelles lignes CE, DE se rencontrẽt directement. Car adiouſtant aux angles egaux CEA, DEB, l'angle cõmun CEB : les deux angles CEA, CEB ſeront egaux aux deux angles DEB, CEB par le 2. axiome. Mais les deux angles CEA, CEB ſont egaux à deux droicts par la 13. prop. Donc les deux DEB, CEB ſeront auſſi egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les lignes droictes CE, DE ſe rencontreront directement. Ce qui eſtoit propoſé.

Pelletier a aucunement changé ceſte conuerſe : car il dit que ſi quatre lignes droictes AE, CE, BE, DE ſe rencontrans au poinct E y font quatre angles, dont les oppoſez AEC, BED ſoient egaux entr'eux, & les oppoſez BEC, AED, auſſi egaux entr'eux : les deux lignes oppoſites AE, BE ſe rencontreront directement, comme auſſi les deux CE, DE. Ce qui eſt manifeſte, car ſi aux angles egaux AEC, BED, on adiouſte les egaux CEB, AED, par le 2. axiome les deux angles AEC, CEB ſeront egaux aux deux angles BED, AED. Donc tant ces deux là que ces deux-cy ſont moitié des quatre angles faicts au poinct E, leſquels par le Corol. prec. ſont egaux à quatre droicts. Parquoy les deux angles AEC, CEB ſeront egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les

deux lignes, AE, BE se rencontreront directement. Et pour mesme raison CE, DE feront aussi vne seule ligne droicte CD.

THEOR. 9. PROP. XVI.

Vn costé de quelconque triangle estant prolongé, l'angle exterieur est plus grand que l'vn ou l'autre des opposés interieurs.



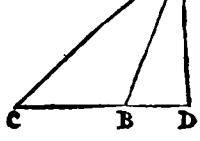
Soit le triãgle *ABC*, duquel le costé B C soit continué iusques à D. Ie dis que l'angle *exterieur* A C D est *plus* grand que l'opposé interieur BAC: Et encore que A B C autre *opposé* interieur.

Qu'ainsi ne *soit*: Apres auoir couppé AC en deux egalement en E, soit menee la ligne *BE*, & continuee iusques en F: en sorte que EF soit faicte egale à BE, & soit menee FC. Les deux triangles AEB, & CEF, auront les deux costez AE, & E B egaux aux deux costez CE & EF, chacun au sien par la construction, & par la precedente prop. l'angle AEB est egal à l'angle CEF: donc par la 4. prop. les bases AB, & FC seront egales; & les autres angles

egaux, chacun au ſien: & partant l'angle BAE, ſera egal à l'angle ECF, qui n'eſt que partie de l'angle ACD, lequel pour ceſte raiſon ſera plus grand que l'opposé interieur BAC. Que ſi le coſté AC eſt prolongé en G, & BC couppé en deux egalement en H, & on tire la ligne AHI, tellement que HI ſoit egale à AH, & ſoit menee CI: On demonſtrera par meſme raiſon que deſſus, que l'angle externe BCG eſt plus grand que l'interne, & oppoſé ABC. Mais par la propoſition precedente à iceluy BCG, eſt egal l'externe ACD: donc iceluy ACD, eſt auſſi plus grand que l'interne & oppoſé ABC. Parquoy en tout triangle, vn coſté eſtant prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ceſte propoſition il s'enſuit (dit Proclus) que d'vn meſme poinct on ne peut mener à vne meſme ligne droicte plus de deux lignes droictes egales entr'elles. Car ſi faire ſe peut, ſoient menees du poinct A à la ligne BC, trois lignes droictes AB, AC, AD, egales entr'elles: d'autant que les coſtez AB, AD, ſont egaux, par la 5. prop. les angles ABD, ADB ſur la baſe BD ſeront egaux. Derechef, pource que les coſtez AB, AC ſont egaux, par la meſme 5. prop. les angles ABC, ACB ſur la baſe BC ſeront egaux. Parquoy veu que chaſque angle ADB & ACB, eſt egal à l'angle ABD, par la 1. com. ſent. l'angle

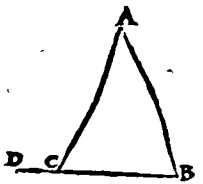


langle ABC ſera egal à l'angle ADC, c'eſt à dire l'exterieur à l'oppoſé interieur: ce qui eſt abſurde, puis que par ceſte 16. p. l'externe eſt plus grand que l'interne. Donc on ne pourra pas mener de A à BC plus de deux lignes droictes egales entr'elles. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 10. PROP. XVII.

Tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, de quelle façon qu'ils ſoient pris.

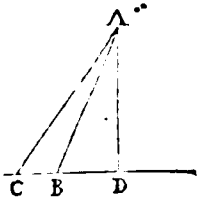
Soit le triangle *ABC*: Ie dis que les deux angles B, & ACB ſont enſemble plus petits que deux droicts; comme auſſi les deux A, & ACB : item les deux A, & B.



Car apres auoir continué le coſté BC, iuſques en D, il eſt euidét par la 16. prop. que l'angle exterieur ACD eſt plus grand que l'oppoſé interieur B : & par la 4. com. ſent. ſi on leur adiouſte l'angle commun ACB, les deux ACD & ACB ſeront plus grãds que les deux B & A CB. Mais les deux ACD, & ACB, ſont egaux à deux droicts, par la 13. prop. Partant ABC, & ACB ſont plus petits que deux droicts. On demonſtrera pareillement que les deux angles A & ACB : Item les deux angles A & B, en prolongeant vn autre coſté, ſont moindres que deux droicts. Parquoy tout triangle a deux angles plus petits que deux droicts, &c. Ce qu'il falloit demonſter.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte que d'vn meſme poinct on ne peut mener plus d'vne ligne perpendiculaire ſur vne ligne droicte. Car ſi faire ſe peut, ſoient menees de A ſur la ligne droicte BD, les deux perpendic. AD, AB. Donc au triangle ABD, les deux angles internes ABD, ADB, ſeront egaux à deux droicts, puis que chacun eſt droict. Ce qui eſt impoſſible: car il a eſté demonſtré cy deſſus que deux angles d'vn triangle ſont moindres que deux angles droicts.



Il s'enſuit auſſi de cette prop. qu'en tout triangle, duquel vn angle eſt droict, ou obtus, que les autres ſõt aigus. Car puis qu'il a eſté demonſtré que deux angles quels qu'ils ſoient, ſont moindres que deux droicts, il eſt neceſſaire que s'il y en a vn droict ou obtus, celuy qu'on voudra des deux autres ſoit aigu: car autrement en vn triangle ſeroient deux angles droicts, ou plus grands que deux droicts.

S'enſuit encore de cette prop. que ſi vne ligne droicte AB, fait auec vne autre ligne droicte CD, angles inegaux, ſçauoir eſt ABD, aigu, & ABC, obtus, & de quelconque poinct d'icelle AB, on tire vne perpendiculaire ſur CD, comme AD d'icelle perpendiculaire AD, tombera de la part de l'angle aigu ABD: car qu'elle tombe, s'il eſt poſſible, du coſté de l'angle obtus ABC. Donc au triangle AB, les deux angles ABC, ACB, obtus & droict, ſont plus grands que deux droicts; mais auſſi moindres que deux droicts par cette prop. ce qui eſt abſurde. La perpendiculaire tiree de A, ne tombera donc

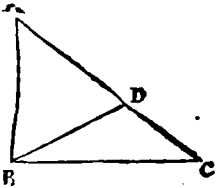
par du costé de l'angle obtus, & partant tombera du coste de l'angle aigu.

Et encore manifeste par cette prop. que tous les angles d'vn triangle equilateral, & les deux angles de dessus la base d'vn triangle Isoscelle, sont aigus. Car puis que deux angles quels qu'ils soient, d'vn triangle equilateral, et les deux de dessus la base d'vn Isoscelle sont egaux entr'eux par la 5. prop. & tant ces deux cy ensemble, que ces deux-là, sont moindres que deux droicts par cette prop. chacun d'iceux sera moindre qu'vn droict, c'est à dire aigu: car s'il estoit droict ou obtus, tous les deux ensemble seroient, ou egaux à deux droicts, ou plus grands.

THEOR. 11. PROP. XVIII.

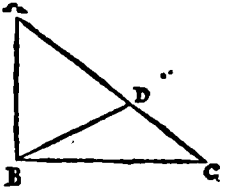
De tout triangle, le plus grand costé soustient le plus grand angle.

Soit vn triangle ABC, ayant le costé AC plus grand que le costé AB. Ie dis que l'angle ABC, est plus grand que l'angle ACB.



Qu'il ne soit ainsi: Puis que AC est plus grãd que AB, d'iceluy soit retranchée AD, egale à AB, & soit menee BD. Le triangle ABD est Isoscele, & par la 5. prop. les deux angles ABD, & ADB, sur la base BD, seront egaux. Or l'angle exterieur ADB, est

plus grand que l'opposé interieur C, par la 16. prop. Mais ABC estant plus grand que ABD, il sera aussi plus grãd que son egal ADB: & à plus forte raison ABC sera plus grãd que C. Par mesme raison, si on pose le costé AC, plus grãd que le costé BC; on demonstrera l'angle ABC estre plus grand que l'angle BAC, sçauoir est, si de CA on couppe vne ligne egale à BC, &c. Parquoy le plus grand costé de tout triangle &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



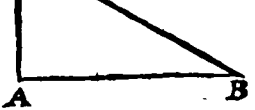
COROLLAIRE.

Il est donc manifeste par cette demonstration que tous les trois angles d'vn triangle scalene sont ineganx.

THEOR. 12. PROP. XIX.

En tout triangle, le plus grand angle est soustenu du plus grand costé.

Soit le triangle ABC duquel l'angle A est plus grand que l'angle C. Ie dis que le costé BC qui soustient le plus grand angle A, est plus grand que le costé AB, qui soustient vn moindre angle C.



Autrement, il sera egal, ou plus petit: Il ne peut estre egal, d'autant que le triangle seroit Isoscelle, & par la 5. prop. les deux angles A & C seroient

egaux contre l'hypotheſe. Il ne peut auſſi eſtre plus petit, d'autant que par la 18. prop. l'angle A ſeroit plus petit que l'angle C, ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Il ſeroit donc plus grand. Par meſme raiſon on prouuera le coſté BC, eſtre plus grãd que le coſté AC, ſi on poſe l'angle A, eſtre plus grand que l'angle B. Donc de tout triangle le plus grand angle eſt ſouſtenu du plus grand coſté. Ce qu'il falloit demonſtrer.

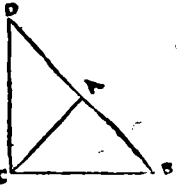
COROLLAIRE.

Il s'enſuit de ceſte propoſition, que ſi de quelconque poinct on tire ſur vne ligne droicte tant d'autres lignes droictes qu'on voudra, l'vne deſquelles ſoit perpendiculaire, icelle perpendiculaire ſera la plus petite de toutes, puis qu'elle ſera touſiours oppoſee à vn angle aigu, & les autres à l'angle droict fait par icelle perpendiculaire.

THEOR. 13. PROP. XX.

En tout triangle, deux coſtez de quelle façon qu'ils ſoient pris, ſont plus grands que le troiſieſme.

Soit le triangle A B C : Ie dis que deux coſtez d'iceluy, leſquels on voudra, ſçauoir eſt A B, & AC, ſont plus grands enſemble que le troiſieſme coſté BC.



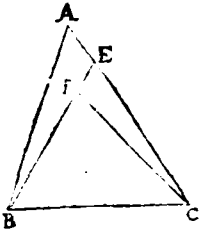
Qu'il ne ſoit ainſi : apres auoir prolongé BA iuſques en D, & fait AD egale à AC, ſoit menee la ligne DC. Le triangle DAC ſera Iſoſcelle, & par la 5. prop, les deux angles ADC, & ACD ſur la baſe DC, ſeront egaux. Mais par le 9 ax. DCB eſt plus grand que DCA : il ſera donc auſſi plus grand que ſon egal ADC : & partant par la 19 prop. BD ſera plus grand coſté que BC. Mais BD eſt egal aux deux coſtez AC & BA : donc auſſi iceux AC & BA ſeront plus grands que BC. On demonſtrera en la meſme maniere que deux autres coſtez tels que l'on voudra ſont plus grands enſemble que l'autre. Parquoy deux coſtez d'vn triangle pris en quelque ſorte que ce ſoit, ſont plus grands que l'autre. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XXI.

Si des extremités d'vn coſté de quelconque triangle, on meine deux lignes droictes ſe rencontrans au dedans d'iceluy : icelles ſeront plus petites que les deux autres coſtez du triangle, mais elles feront vn plus grand angle.

Soit le triangle ABC, & des extremitez du coſté

BC, soient menees interieurement deux lignes droictes BD, CD, se rencontrans au poinct D: Ie dis qu'icelles lignes BD, & CD ensemble sont plus petites que les costez BA & CA ensemble: Mais que l'angle D, est plus grand que l'angle A.



Qu'ainsi ne soit, soit continuee BD, iusques au poinct E. Donc par la 20. prop. les deux costez BA, & AE, du triangle BAE, seront plus grands que le troisiesme BE: Et si on leur adiouste chose commune EC. par la 4. com. sent. les tous CE, EB seront tousiours plus petits que les tous CE, EA, AB, c'est à dire CA, AB. Pareillement les deux costez CE, & ED, du triangle CED, sont plus grãds que le troisiesme CD, ausquels si on adiouste chose egale, sçauoir DB; les tous CE, ED, DB, ou CE, EB, seront tousiours plus grands que les tous CD & DB. Mais il a esté demonstré que CA, AB sont plus grands que CE, EB: donc CA, AB seront beaucoup plus grands que CD, BD. Ce qui estoit proposé en la premiere partie.

Pour la seconde partie, sçauoir que l'angle BDC est plus grand que l'angle A. D'autant qu'il est exterieur du triangle CED, il sera plus grand que son oppose interieur CED par la 16. prop. Mais pour la mesme raison, iceluy angle CED est aussi plus grand que son oppose interieur A: donc

à plus forte raiſon BDC ſera ſera plus grand que A. Si donc des extremitez d'vn coſté de quelconque triangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

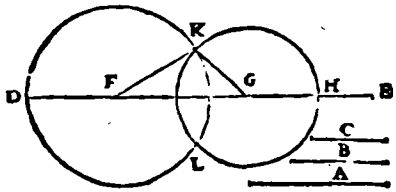
PROB. 8. PROP. XXII.

Faire vn triangle de trois lignes droictes egales à trois autres donnees: mais il faut que deux d'icelles de quelle façon qu'elles ſoient priſes, ſoient plus grandes que l'autre; d'autant que de tout triangle, deux coſtez de quelque façon qu'ils ſoient pris, ſont plus grands que l'autre.

Soient trois lignes donnees A, B & C, deſquelles deux de quelle façon qu'elles ſoient priſes ſont plus grandes que la troiſieſme: car autrement d'icelles on ne pourroit pas conſtituer vn triangle, comme il appert de la 20. prop. en laquelle il a eſté demonſtré que de tout triangle deux coſtez ſont touſiours plus grands que l'autre. Il faut faire vn triangle ayant les trois coſtez egaux à icelles trois lignes donnees.

Soit priſe vne ligne droicte, tant grande qu'il ſera de beſoin, comme D E, de laquelle ſoit retranchee D F, egale à A; & puis du reſte ſoit priſe F G egale à B, & G H egale à C,

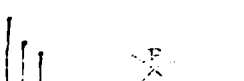
& du centre F, & de l'interualle FD, soit descrit vn cercle DKL: Item vn autre cercle HkL du centre G, & de l'interualle GH, coupant le premier cercle au poinct K duquel soiēt menées les deux lignes KF, KG. Ie dis que les costés du triāgle FKG sont egaux aux trois lig. donnees A, B, C.



Car d'autant que FD, FK sont egales par la def. du cercle : item GK & GH ; les trois costez du triangle FKG, sont egaux aux trois lignes FD, FG, GH, lesquelles estans egales aux trois donnees par la construction ; aussi les costez du triangle FKG seront egaux à icelles lignes donnees A, B, C. Nous auons donc faict vn triangle de trois lignes droictes egales aux trois lignes droictes donnees A, B, C. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La pratique de ce probl. est enseignee en nostre Geometrie practique Prob. II, & est telle : Soit prise la ligne droicte DE egale à quelconque des donnees cōme à A, puis du poinct D, & interualle de la ligne B, soit descrit vn arc F : semblablement du poinct E, & de l'interualle de l'autre ligne C, soit descrit vn autre arc qui coupe le premier

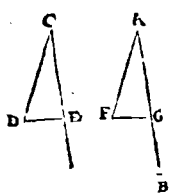


au poinct F: puis à ladite intersection soient tirees les deux lignes droictes DF, EF; & sera fait le triangle DEF, ayant les trois costez egaux aux trois lignes droictes donnees ABC.

PROBL. 9. PROP. XXIII.

Sur vne ligne droicte donnée, & à vn poinct donné en icelle, faire vn angle rectiligne egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnée AB; & le poinct en icelle A; sur lequel il faut faire vn angle rectiligne egal à l'angle rectiligne donné C.

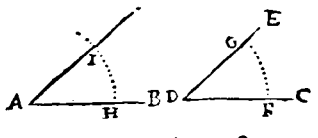


Ayant pris és lignes CD, CE, qui constituent l'angle donné C quelcõques poincts D, E, soit menee la ligne DE: & sur AB soit construict par la prop. precedente le triangle AFG, ayant les trois costez egaux aux trois costez du triangle CDE, sçauoir est les deux costez AF, AG, egaux aux deux costez CD, CE, & la base FG à la base DE. Il est donc euident par la 8. prop. que l'angle A sera egal à l'angle C donné. Nous auons donc faict sur AB, & au poinct A, l'angle FAG egal à vn donné DCE, ainsi qu'il estoit requis.

SCHOLIE.

Combien que la practique de ce probleme soit enfei-

gnee en nostre Geometrie pratique, neantmoins nous l'enseignerons encore icy. Soit vne ligne donnee AB, & vn poinct en icelle A, auquel il faut faire vn angle rectiligne egal au donné CDE. Du centre D soit fait de tel interualle qu'on voudra vn arc FG, qui couppe les lignes de

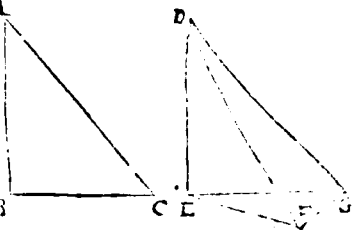


l'angle donné ez poincts F, G: puis du mesme interualle, soit d'escrit du centre A vn arc indeterminé HI: Enapres, soit prise la distance FG, & icelle portee sur l'arc HI, puis du poinct A par I, soit tiree la ligne droicte AI, & sera fait l'angle HAI egal à l'angle donné CDE.

THEOR. 15. PROP. XXIV.

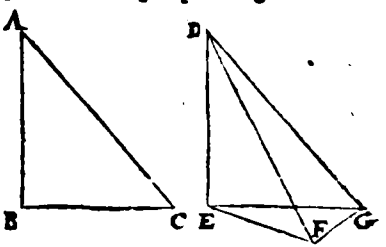
Si deux triangles ont deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle contenu d'iceux costez plus grand que l'angle, ils auront aussi la base plus grande que la base.

Soient deux triangles ABC & DEF, desquels deux costez AB, AC sont egaux aux costez DE, DF, chacũ au sien: mais l'angle A est plus grand que l'angle EDF. Ie dis



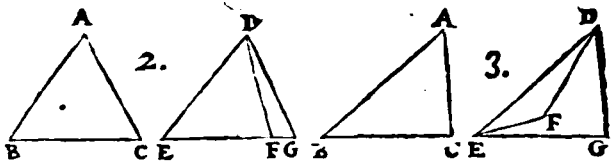
que la baſe B C eſt plus grande que la baſe E F.

Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne DE, & au poinct D, ſoit fait par la precedente prop. l'angle EDG, egal à l'angle A, (& la ligne droicte DG, tombera hors le triãgle DEF, puis que l'ãgle EDF a eſté poſé moindre que l'angle A) & ſoit poſee DG, egale à DF, c'eſt à dire à A C : Soit tiree puis apres la ligne EG, laquelle tombera ou au deſſus de la ligne EF, ou ſur icelle, ou au deſſous d'icelle. Qu'elle tombe premierement au deſſus de EF, & ſoit tiree la ligne F G. D'autant que les deux coſtez AB, AC, ſont egaux aux deux coſtez DE, DG, vn chacun au ſien, & l'angle A egal à l'angle EDG par la conſtruction: la baſe BC ſera egale à la baſe EG, par la 4. prop. Et puis que les deux coſtez DF, D G, ſont egaux entr'eux: les angles DFG, DGF ſeront auſſi egaux entr'eux par la 5. prop. Mais l'angle DGF eſt plus grand que l'angle EGF: donc auſſi l'angle DFG ſera plus grand que le meſme angle EGF, : parquoy tout l'angle EFG ſera beaucoup plus grand que le meſme angle EGF: donc au triangle EFG le coſté EG ſera plus grand que le coſté E F par la 19. propoſ. Mais il a eſté demonſtré que EG eſt egale à BC : donc BC ſera auſſi plus grande que EF: Ce qui eſtoit propoſé.



Maintenant, que EG tombe ſur icelle EF: d'autant que comme deſſus la baſe EG, ſera egale à la

baſe BC par la 4. prop. & E G eſt plus grande



que EF par la 9. com. ſent. auſſi B C ſera plus grande que E F : Ce qui eſtoit propoſé.

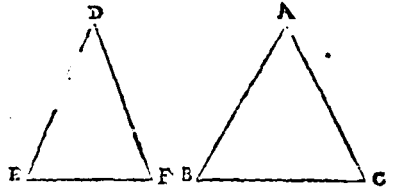
En troiſieſme lieu, que EG tombe au deſſous de EF. Il eſt euident que les deux lignes interieures DF, EF *ſont plus petites* que les deux coſtez DG, EG *par la 21. prop.* Mais par la conſtruction DG eſt *egale* à DF : donc E G eſt plus grande que EF par la 5. com. ſent. Mais comme deſſus par la 4. prop. EG eſt egale à B C : donc auſſi icelle BC ſera plus grande que E F. *Si donc deux triangles* ont deux coſtez egaux, &c. *Ce qu'il falloit demonſtrer.*

THEOR. 16. PROP. XXV.

Si deux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & la baſe plus grande que la baſe; ils auront auſſi l'angle contenu d'iceux coſtez egaux, plus grand que l'angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels

les deux costez AB & AC, sont egaux aux deux DE & DF, chacun au sien : Mais la base BC est plus grande que la base EF. Ie dis que l'angle A est plus grand que l'angle D. Autrement



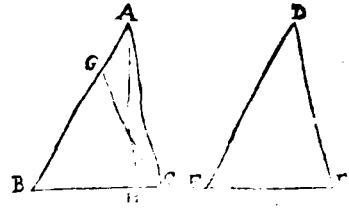
il sera égal, ou plus petit. Mais il ne peut estre égal: d'autant que par la 4 prop. les bases BC & EF seroient egales contre l'yhothese. Pareillement il ne peust estre plus petit; d autant que par la 24. prop. la base BC seroit plus petite que la base EF, & elle a esté posee plus grande. Parquoy l'angle A sera plus grand que l'angle D, puis qu'il ne peust estre egal, ny plus petit. Si donc deux triangles ont deux costez egaux â deux costez, chacun au sien, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEO. 17. PROP. XXVI.

Si deux triangles ont deux angles egaux à deux angles, chacun au sien, & vn costé egal à vn costé, sçauoir est, ou celuy aux extremitez duquel sont les angles egaux, ou bien celuy qui soustient l'vn d'iceux an-

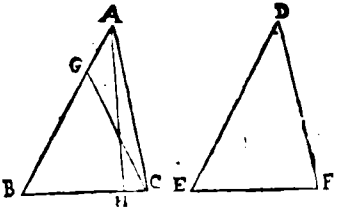
gles egaux : ils auront auſſi les autres coſtez egaux aux autres coſtez, chacun au ſien, & l'autre angle egal à l'autre angle.

Soient deux triangles ABC & DEF, deſquels les angles B & A, CB, ſont egaux aux deux E & F, *chacun* au ſien, & ſoit premierement le coſté BC, aux *extremitez* duquel ſót les angles B & ACB, egal au coſté EF, aux extremitez duquel ſont les angles E & F. *Ie dis que* les deux autres coſtez AB, AC, ſont egaux aux deux autres coſtez DE, DF, chacun au ſien, ſçauoir eſt AB à DE, & AC à DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D.



Car ſi AB n'eſt egal à DE, l'vn d'iceux ſera plus grand: Soit donc AB plus grand, s'il eſt poſſible, & d'iceluy ſoit retranchee BG egale à DE: puis ſoit tirée la ligne droicte CG. Donc puis que les coſtez BC, BG, ſont egaux aux coſtez EF, DE, chacun au ſien, & l'angle B egal à l'angle E, par la 4. prop. la baſe CG ſera egale à la baſe FD, & les autres angles egaux aux autres angles chacun au ſien, c'eſt à ſçauoir que l'angle BCG ſera egal à l'angle F, auquel eſt auſſi egal

l'angle ABC par l'hypotheſe. Partant les deux angles ACB & GCB ſeroient egaux, la partie au tout : ce qui eſt abſurde. Donc le coſté AB n'eſtoit pas inegal au coſté DE, mais egal. Parquoy veu que les coſtez AB, BC ſont egaux aux coſtez DE EF, chacun au ſien, & l'angle B egal à l'angle E; la baſe AC ſera egale à la baſe DF, & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D, par la 4. prop. de ce liure. Ce qui eſtoit propoſé.



Soient maintenant egaux deux autres coſtez, ſçauoir eſt AB à DE ſouſtendans angles egaux ACB & F. Ie dis derechef que les deux autres coſtez AC, BC ſont egaux aux deux autres coſtez DF, EF, chacun au ſien, c'eſt à dire AC à DF, & BC à EF : & l'autre angle BAC egal à l'autre angle D. Car ſi le coſté BC n'eſt egal au coſté EF, ſoit le plus grand BC, duquel ſoit couppé BH egal à EF, puis tiré la ligne AH. Donc puis que les coſtez AB, BH ſont egaux aux coſtez DE, EF, vn chacun au ſien, & l'angle B eſt egal à l'angle E par l'hypotheſe, par la 4. prop. la baſe ſera egale à la baſe, & les autres angles egaux aux autres angles, c'eſt à ſçauoir, que l'angle AHB ſera egal à l'angle F. Mais par l'hypotheſe l'angle ACB, eſt auſſi egal à l'angle F. Donc l'angle AHB ſera auſſi egal à l'angle ACB, l'exterieur à ſon oppoſé interieur : ce qui

ce qui eſt abſurde : car il eſt plus grand par la 16. prop. Le coſté BC n'eſtoit donc pas plus grand que le coſté EF, ains egal. Parquoy les deux coſtez AB, BC, ſont egaux aux deux coſtez DE, EF, chacun au ſien, & par la 4. prop. l'angle B eſtant egal à l'angle E, les baſes AC, DF, ſeront egales, & les autres angles BAC & D auſſi egaux. Parquoy ſi deux triangles ont deux angles egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la demonſtration de cette propoſition, que le triangle eſt auſſi egal au triangle.

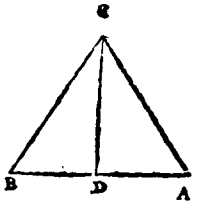
SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy deux theoremes aſſez vtils & neceſſaires en Geometrie : le premier eſt tel.

En vn triangle equilateral, ou Iſoſcelle, eſtant menee vne ligne droicte de l'angle contenu des deux coſtez egaux, laquelle diuiſe en deux egalement, ou l'angle, ou la baſe ; elle ſera perpendiculaire à la baſe : & ſi elle couppe l'angle en deux egalement, elle couppera auſſi la baſe en deux egalement : Mais ſi elle couppe en deux egalement la baſe, elle couppera pareillement l'angle en deux egalement. Et au contraire eſtant tiree vne ligne droicte perpendiculaire à la baſe, elle diuiſera en deux egalement, tant la baſe que l'angle.

Au triangle ABC ſoient deux coſtez egaux AC, BC, & la ligne droicte CD diuiſe premierement l'angle C en deux egalement. Ie dis qu'icelle ligne CD eſt

perpendiculaire à la baſe AB, & la diuiſe en deux egalement. Car puis que les deux coſtez AC, CD, ſont egaux aux deux coſtez BC, CD, & les angles qui la contiennent auſſi egaux, par la quatrieſme prop. les baſes AD, BD ſeront auſſi egales, & les angles au poinct D egaux, & partant droicts



Que ſi la ligne droicte CD diuiſe en deux egalement la ligne AB: Ie dis que la ligne droicte CD eſt perpendiculaire à la ligne AB, & que l'angle C eſt couppé en deux egalement. Car puis que les deux coſtez AD, DC, ſont egaux aux deux coſtez BD, DC, & la baſe AC egale à la baſe BC, par la 8. prop. les angles du poinct D ſeront egaux, & partant droicts, & la ligne CD perpendiculaire, & par le Corol. de la 8. prop. les angles qui ſont en C ſeront auſſi egaux.

Maintenant ſoit la ligne droicte CD perpendiculaire à AB: Ie dis qu'elle couppe auſſi la baſe BA, & l'angle C en deux egalement. Car par la 5. prop. les angles A & B ſeront egaux: parquoy puis que les deux angles A & D du triangle ACD, ſont egaux aux deux angles B & D, du triangle BCD, vn chacun au ſien, & le coſté CD oppoſé aux angles egaux A & B commun, par la 26. prop. les autres coſtez AD, BD, ſeront auſſi egaux, & les autres angles du poinct C pareillement egaux. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Le ſecond Theoreme eſt tel.

Le triangle auquel vne ligne droicte tiree de l'vn des angles perpendiculaire à la baſe, diuiſe ou la baſe ou l'angle en deux egalement, a les deux coſtez comprenant iceluy angle egaux: Et ſi la ba-

se est diuisee en deux egalement, l'angle sera aussi diuise en deux egalement : Mais si l'angle est diuise en deux egalement, aussi sera la base diuisee en deux egalement.

Au mesme triangle ABC, soit CD perpendiculaire à la base AB, & la diuise en deux egalement. Ie dis que les costez AC & BC sont egaux, & les angles à C aussi egaux. Car puis que les deux costez AD, DC, sont egaux aux deux costez BD, DC, & les angles qui la comprennent aussi egaux, sçauoir droicts par la 4. prop. les bases AC, BC, & les angles à C seront pareillement egaux.

Maintenant que la perpendiculaire CD touppe en deux egalement l'angle C : ie dis que les costez AC, BC; & les lignes AD, BD sont egales: Car puis que les deux angles D, C du triangle ACD, sont egaux aux deux angles D, C du triangle BCD, & le costé CD est commun, par la 26. prop. les deux costez AC, BC, & les costez AD, BD, seront egaux : Ce qu'il falloit demonstrer.

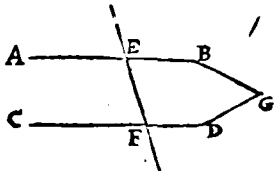
THEOR. 18. PROP. XXVII.

Si vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes faict les angles oppo-sez alternatiuement egaux ; icelles deux lignes serót paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, lur lesquelles tombant la ligne droicte EF, faict les angles BEF, & EFC alternatiuement egaux. Ie dis que AB & CD sont paralleles.

Car si elles ne sont paralleles, estans continuées elles se rencontteront. Que si elles se rencon-

troient comme au poinct G, elles feroient vn triangle auec le coſte EF, & l'angle exterieur CFE ſeroit plus grand que l'oppoſé interieur FEB par la 16. prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc les deux lignes AB, & CD ne ſe rencontreront iamais; & par la 25. def. icelles lignes ſeront paralleles entr'elles. Parquoy ſi vne ligne droicte tombante ſur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

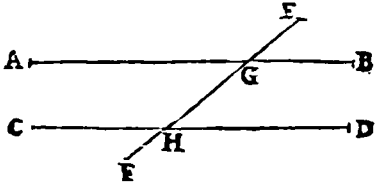


THEOR. 19. PROP. XXVIII.

Si vne ligne droicte tombant ſur deux lignes droictes, faict l'angle exterieur egal à ſon oppoſé interieur du meſme coſté; ou bien les deux interieurs de méme coſté, egaux à deux droicts; icelles deux lignes ſeront paralleles entr'elles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, ſur leſquelles tombant vne autre ligne droicte EF, faſſe l'angle exterieur EGA egal à GHC ſon

opposé interieur de mesme costé. Ie dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.



Car puis que l'angle GHC est posé egal à l'angle EGA auquel est aussi egal l'*angle* BGH par la 15. prop. les angles alternes BGH, GHC, seront egaux par la premiere commune sentence: partant les *lignes droictes* AB, CD seront paralleles par *la proposition* precedente. Ce qui estoit *proposé*.

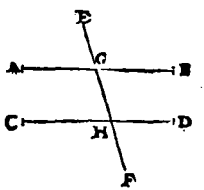
Pour la seconde partie. Ie dis que si les deux angles interieurs de *mesme costé* AGH, & CHG sont egaux à deux droicts, que aussi AB & CD seront paralleles. Car par la 13. proposition, les deux angles GHC & GHD sont egaux à deux droicts; partant aussi egaux aux deux AGH & GHC. Que si d'iceux angles egaux, on oste le commun GHC, les demeurans AGH & GHD se trouueront alternatiuement egaux, & par la 27. prop. AB & CD seront paralleles. Si donc vne ligne droicte tombant sur deux lignes droictes, &c. Ce qui falloit demonstrer.

THEOR. 20. PROP. XXIX.

Si vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes paralleles, elle fera

les angles opposez alternatiuement egaux ; & l'exterieur egal à son opposé interieur du mesme costé : & les deux interieurs de mesme costé egaux à deux droicts.

Soient deux lignes droictes paralles AB & CD, sur lesquelles tombe la ligne droicte EF. Ie dis en premier lieu que les angles AGH & GHD opposez alternatiuement sont egaux. Autrement, s'ils ne sont egaux, AGH sera plus grand, ou plus petit que l'autre : Soit donc AGH plus petit s'il est possible que GHD : & si à iceux angles inegaux on adiouste chose comm. sçauoir l'angle GHC, les deux AGH & GHC seront plus petits que les deux GHC & GHD, lesquels par la 13 propos. estans egaux à deux droicts, AGH & GHC seront plus petits que deux droicts, & par la 11. com. sent. les deux lignes AB & CD ne sont point paralleles : ce qui est contre nostre hypothese. Donc il falloit que l'angle AGH fust egal à l'angle GHD son alterne opposé.



Pour la seconde partie. Ie dis que l'angle exterieur EGB est egal à son opposé interieur de mesme costé GHD : ce qui est manifeste par ce qui a esté demonstré cy-dessus, sçauoir que les angles AGH & GHD estoient egaux, estant aussi EGB

egal à AGH par la 15. proposition & par la 1. com. sent. EGB & GHD seront egaux, estans tous deux egaux au mesme AGH.

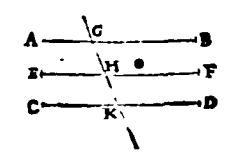
Pour la troisiesme partie: ie dis que les deux interieurs de mesme costé AGH & GHC sont egaux à deux droicts: car s'il estoit autrement les lignes AB & CD ne seroient paralleles par la 11. commune sentence, contre l'hypothese. Si donc vne ligne droicte tombe sur deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 21. PROP. XXX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme ligne droicte, sont paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD paralleles à vne mesme ligne droicte EF. Ie dis que AB & CD sont paralleles entr'elles.

Car d'autant que toutes ces lignes AB, EF, CD, sont posees en vn mesme plan, soit tiree la ligne droicte GHK, qui les couppe toutes trois, sçauoir est AB en G; EF en H; & CD en K. Et puis que AB est posee parallele à EF, les angles alternes AGH, GHF, seront egaux entre-eux par la precedente proposition. Derechef, puis que CD est aussi posee parallele à la mesme EF, l'angle DKH sera aussi egal au méme angle GHF



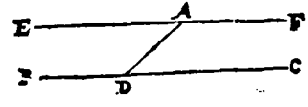
c'eſt à ſçauoir l'interne à l'externe. Parquoy les angles AGH & DKH ſeront egaux entr'eux, leſquels eſtans alternes, les lignes A B & C D ſont paralleles entr'elles, par la 27. prop. Parquoy les lignes droictes paralleles à vne meſme ligne droicte ſont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si quelqu'vn diſoit que AG & B G ſont paralleles à EF, & toutesfois elles ne ſont paralleles entr'elles, il faudroit reſpondre qu'icelles AG & B G ne ſont pas deux lignes, mais ſeulement les deux parties d'vne ſeule & meſme ligne: Car il faut entendre que toutes les paralleles dont parle icy Euclide, ſoient infiniment produites ſans ſe rencontrer: mais il appert que AG eſtant prolongee ſe rencontre auec BG.

THEOR. 10. PROP. XXXI.

D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte parallele à vne ligne droicte donnée.



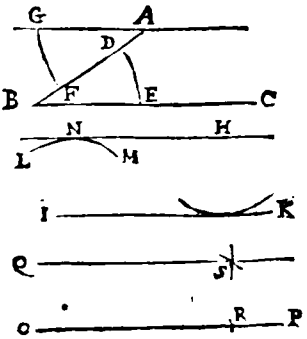
Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte parallele à la donnee BC.

Soit menee la ligne AD faiſant auec la ligne donnee BC, quelconque angle ADC, & ſur icelle AD, & au poinct A ſoit fait l'angle D A E egal à

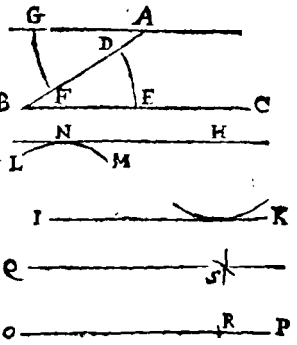
l'angle ADC. Ie dis que la ligne EA tiree tant qu'on voudra vers F, est parallele à BC. Car puis que par la construction les angles alternes ADC, DAE sont egaux, les lignes BC, FE seront paralleles entr'elles par la 27. prop. Nous auons donc d'vn poinct donné A, mené vne ligne droicte EF parallele à vne ligne droicte donnee BC. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Il est manifeste par cette construction, que le poinct donné doit estre tellement situé hors la ligne donnee, qu'icelle estant continuee directement ne rencontre iceluy. Quant à la prattique de cette proposition, nous l'auons enseignee en nos Memoires Mathematiques, Prob. 6. de la Geometrie prattique, laquelle toutesfois nous repeterõs ici. Du poinct donné *A* soit menee la ligne droicte *AB* faisant auec la ligne donnee *BC*, l'angle *ABC*; puis de *A* & *B* comme centres, & d'vn mesme interualle soient descrits les deux arcs *DE*, *FG*, & fait *FG* egal à *DE*, puis par les poincts *A* & *G* soit menee la ligne droicte *AG* si grande qu'on voudra & icelle sera parallele à *BC*.



Autrement, si du poinct H on veut mener vne parallele à la ligne droicte IK, du centre H soit fait vn arc qui touche seulement la ligne donee IK, puis du centre I (qui est l'extremité de la ligne le plus esloigné de l'arc ia fait) & du mesme interualle soit descrit vn autre arc LM, puis du poinct H soit tiree la ligne HN, qui touche l'arc LM, & icelle ligne HN sera la parallele requise.

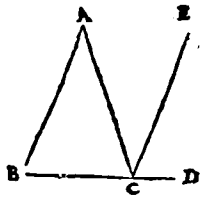


Encore autrement: *Si du poinct Q, il faut tirer vne ligne parallele à vne ligne donnee OP, soit pris en icelle ligne quelconque distance, comme OR, auec laquelle soit descrit du centre Q vn arc S; puis soit pris la distance ou interualle QO, & d'iceluy soit aussi descrit du centre R vn arc qui coupe le precedent en S, & d'icelle intersection soit tiree par le poinct donné Q la ligne droicte QS, laquelle sera parallele à OP.*

THEOR. 22. PROP. XXXII.

En tout triangle, l'vn des costez estant prolongé, l'angle exterieur est egal aux deux opposez interieurs; & de

chacun triangle les trois angles interieurs ſont egaux à deux droicts.



Soit le triangle ABC, duquel le coſté BC, ſoit prolongé iuſques en D. Ie dis en premier lieu que l'angle exterieur ACD, eſt egal aux deux oppoſez interieurs A & B.

Qu'il ne ſoit ainſi: qu'on meine CE parallele à BA par la 31. prop. & d'autant que la ligne AC tombe ſur les paralleles AB, EC, par la 29. prop. les angles BAC, & ACE, ſeront alternatiuemẽt egaux: item l'exterieur ECD, ſera egal à ſon oppoſé interieur ABC. Partant il eſt manifeſte que le total ACD, eſt egal aux deux A & B, oppoſez interieurement.

Pour la ſeconde partie, que les trois angles A, B & C, interieurs du triangle ABC ſont egaux à deux droicts, il eſt euident, eſtant ACD egal aux deux A & B. Mais ACD & ACB, ſont enſemble egaux à deux droicts par la 13. prop. Partant les trois angles interieurs A, B, & ACB, ſeront auſſi egaux à deux angles droicts. Si donc de tout triangle, l'vn des coſtez eſt prolongé, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

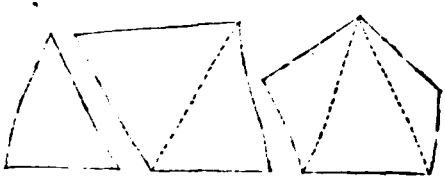
De ceſte propoſition nous pouuons colliger à combien d'angles droicts ſont egaux tous les angles ingeernes de quelconque figure rectiligne, qui n'en a point

d'externe : & ce par deux manieres, dont la premiere eſt telle.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, ſont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle eſt entre les figures rectilignes.

C'eſt à dire, que tous les angles de la premiere figure rectiligne ſont egaux à deux fois vn droict, c'eſt à dire, à deux droicts: Mais les angles de la ſeconde figure rectiligne, ſont egaux à deux fois deux droicts, ſçauoir eſt à quatre droicts: Mais ceux de la troiſieſme figure, ſont egaux à deux fois trois droicts, c'eſt à dire à ſix droicts, & ainſi des autres. Or le lieu qu'obtient chaſque figure rectiligne entre les figures rectilignes, eſt monſtré par le nombre des coſtez, ou des angles, deux d'iceux oſtez; d'autant que deux lignes droictes n'enferment pas vne ſuperficie, & par conſequent ne conſtituent vne figure: mais ſont requiſes au moins trois lignes droictes pour conſtituer vne figure rectiligne: d'où vient que le triangle eſt la premiere figure rectiligne : Car de ſes coſtez, en eſtans oſtez deux, reſte vn: ainſi la figure ayant douze coſtez, ou douze angles, ſera la dixieſme figure, puis que deux eſtans oſtez de douze reſtent dix: & ainſi faut il iuger des autres. Parquoy puis que la figure contenue de douze coſtez, eſt la dixieſme, elle aura auſſi douze angles equiuallans à vingt angles droicts, c'eſt à ſçauoir à deux fois dix angles droicts : Ainſi auſſi tous les dix angles de la figure contenue de dix coſtez, equiuallent à ſeize angles droicts, puis qu'icelle figure eſt la huictieſme en ordre entre les figures rectilignes. Or la raiſon de cecy eſt, que toute figure rectiligne ſe diuiſe en autant de triangles, qu'elle eſt quantieſme en ordre en

tre les figures, ou bien qu'elle a d'angles, ou de costés, deux estans ostez: Car de quelconque angle d'vne figure, on peut tirer des lignes droictes à tous les angles opposez: mais aux deux plus prochains on n'en peut pas tirer. Parquoy la figure sera diuisee en autant de triangles qu'elle a d'angles, deux estans ostez. Ainsi il est euident que le triangle ne se peut diuiser en autres triangles: mais le quadrangle se couppe en deux: le Pentagone en trois, &c. Veu donc que les angles d'iceux triangles constituent tous les angles de la figure proposee,

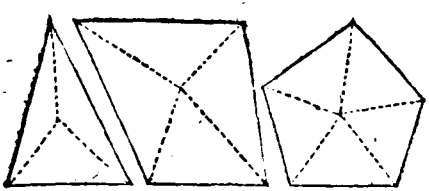


& tous les angles de quelconque triangle rectiligne sont egaux à deux droicts: il est manifeste que tous les angles de quelconque figure rectiligne sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'est le nombre des triangles esquels elle se diuise, c'est à dire à deux fois autant d'angles droicts, qu'icelle figure est quantiesme en ordre entre les figures rectilignes. Ce qui est veu manifestement és figures cy dessus appossees.

Le second moyen par lequel on sçaura la valeur des angles de quelconque figure rectiligne, est cestuy-cy.

Tous les angles de quelconque figure rectiligne, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, quatre estans ostez, qu'il y a en icelle d'angles, ou de costez.

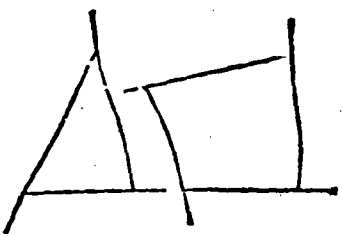
C'eſt à dire, que les angles de chaſque triangle ſont egaux à deux fois trois droicts, quatre oſtez, c'eſt à ſçauoir à deux droicts: Ainſi auſsi les angles de la figure de douze coſtés, vaudront deux fois douze angles droicts, moins quatre, ſçauoir eſt vingt angles droicts, &c. Or la demonſtration de cela eſt telle. Si de quelconque poinct pris dedans la figure on tire des lignes droictes à tous les angles, il y aura autant de triangles en ladite figure, qu'elle a d'angles ou de coſtez. Veu donc que les trois angles de chaſque triangle par la 32. prop. ſont egaux à deux droicts, tous les angles d'iceux triangles, ſont egaux à deux fois autant de droicts qu'il y a de coſtez en la figure. Mais il eſt euidẽt que les angles des meſmes triangles qui ſont à l'entour du poinct pris dedans la figure, n'appartiennent aux angles de ladite figure propoſee: & partãt ſi on oſte ces angles là, les autres angles des triangles qui conſtituent ceux de la figure propoſee, ſeront auſsi egaux à deux fois autant d'angles droicts, ceux d'alentour le poinct pris eſtans oſtez, qu'il y a de coſtez, en



d'angles à la figure. Mais tous ces angles-là d'alentour le poinct pris, ſont ſeulement egaux à quatre droicts, ainſi que nous l'auons colligé de la 15. prop. Parquoy les angles de quelconque figure rectiligne ſont egaux à deux fois autant de droicts, quatre eſtans oſtez, que ladite fi-

gure contient d'angles ou de costez.

Or il appert de ce que dessus, que si chasque costé de quelconque figure rectiligne, qui n'a que des angles interieurs, est prolongé par ordre vers une mesme part, tous les angles externes pris ensemble, seront egaux à quatre droicts. Car par la 13. prop. les angles interieurs pris auec les exterieurs, sont egaux à deux fois autant d'angles droicts, qu'il y a d'angles, ou de costez en la figure. Mais les angles interieurs sont egaux à deux fois autant de droicts, quatre ostez, que ladite figure a d'angles, comme nous auons monstré cy dessus: partant les exterieurs sont tousiours egaux à quatre droicts. Par exemple: En quelconque triangle, les angles interieurs & exterieurs ensemble, sont egaux à six droicts: comme il appert en cette figure. Mais par la 32. prop. les interieurs seuls sont egaux à deux droicts. Donc les seuls exterieurs seront egaux à quatre droicts. En vn quadrangle, les angles exterieurs, & les interieurs ensemble, sont egaux à huict droicts. Mais les interieurs seuls sont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonstré: les exterieurs seuls seront donc aussi egaux à quatre droicts. Toutes lesquelles choses peuuent estre veuës en figures apposées cy dessus. Il y a la mesme raison en toutes autres figures qui ont tous leurs angles interieurs.



COROLLAIRE.

Il resulte de cette 32. propos. que les trois angles de quelconque triangle pris ensemble, sont egaux aux trois angles de quelconque autre triangle pris ensemble: Pource que tant ces trois-là, que ces trois-cy, sont egaux à deux droicts: d'où vient que si deux angles d'vn triangle sont egaux à deux angles d'vn autre triangle, le troisiesme angle de l'vn sera aussi egal au troisiesme angle de l'autre; & de plus, si les deux angles de ce triangle-là sont egaux aux deux angles de cestuy-cy, chacun au sien, les triangles seront equiangles.

Il appert aussi que tout triangle Isoscelle, duquel l'angle compris des costez egaux, est droict, à chacun des autres angles demy droict: car ces deux ensemble sont vn droict, puis que par la 32. prop. les trois sont egaux à deux droicts, & que le troisiesme est posé droict: Parquoy puis que par la 5. prop. les deux restans sont egaux entr'eux: chacun d'iceux sera demy droict. Mais si l'angle contenu des costez egaux estoit obtus, chacun des autres seroit moindre qu'vn demy droict: car les deux ensemble seroiẽt moindres qu'vn droict, &c. Finalement si ledit angle estoit aigu, chacun des autres, seroit plus grand qu'vn demy droict: pource que les deux ensemble seroient plus grãds qu'vn droict, &c. D'où resulte derechef que les triangles Isoscelles, qui ont les angles du sommet egaux, sont equiangles: attendu que chacun des angles de dessus la base, sera la moitié du reste de deux droicts.

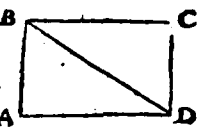
Il est pareillement manifeste, que chasque angle d'vn triangle equilateral, est les deux tierces parties d'vn droict, ou la tierce partie de deux droicts. Car deux angles droicts, ausquels sont egaux les trois angles d'vn trian-

triangle equilateral, par cette 32. prop. eſtans diuiſez en trois angles egaux, chacun d'iceux ſera neceſſairement la tierce partie de deux droicts, ou bien les deux tierces parties d'un droict.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Les lignes droictes qui conjoignent deux lignes droictes egales & paralleles, & de meſme part, ſont auſſi egales & paralleles.

Soient deux lignes droictes AB, & CD, qui conioignent de meſme part deux autres lignes droictes AD & BC egales & paralleles. Ie dis que AB, & CD, ſont auſſi egales & paralleles.



Qu'il ne ſoit ainſi: ſoit menee la diagonalle BD. Icelle tombant ſur les deux paralleles AD & BC, fera les angles ADB & CBD alternatiuement egaux par la 29. prop. Item AD & BC eſtans egales, les deux triangles ABD & CBD, auront deux coſtez egaux à deux coſtez chacun au ſien, & les angles qu'ils comprennent auſſi egaux, & par la 4. prop. la baſe AB ſera egale à la baſe CD, & l'angle ABD ſera egal alternatiuement à l'angle CDB, & par la 27. prop. icelles lignes egales AB & CD, ſeront auſſi paralleles. Donc les lignes droictes qui con-

ioignent deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

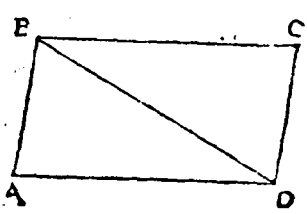
SCHOLIE.

Euclide a dit que les lignes egales & paralleles doiuent eſtre conioinctes de meſme part, afin que celles qui les ioindront ſoient auſſi egales & paralleles, pource que ſi on les conioignoit de part & d'autre, comme de A à C, & de B à D: il eſt manifeſte que les lignes qui les ioindroient ainſi, ne ſeroient iamais paralleles, ains s'entrecoupperoient touſiours, & ne ſeroient que rarement egales.

THEOR. 24. PROP. XXXIV.

En tout parallelogramme, les coſtés & les angles oppoſez, ſont egaux entr'eux; & la diagonalle le coupe en deux egalement.

Soit le parallelogramme A B C D, auquel ſoit menee la diagonalle B D. Ie dis que le coſté A B eſt egal à ſon oppoſé C D; & auſſi le coſté A D egal au coſté B C: Item que l'angle A eſt egal à ſon angle oppoſé C, & encore



l'angle ABC egal à l'angle ADC: finalement qu'iceluy paralellogramme ABCD, eſt couppé en deux egalement par la diagonalle BD.

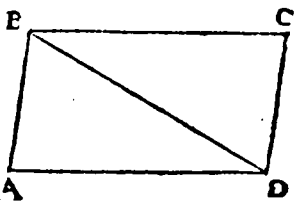
Car puis que la figure quadrilatere ABCD eſt vn parallelogramme, le coſté AB ſera parallele au coſté CD, & le coſté AD au coſté BC, & par la 29. propoſ. l'angle ABD ſera alternatiuement egal à BDC. Item l'angle ADB alternatiuement egal à l'angle CBD. Ainſi les deux triangles BAD & DCB auront les angles ABD & BDA, egaux aux angles BDC & CBD, chacun au ſien: & le coſté BD commun à tous les deux ſuſdits triangles: Et partant par la 26. prop. les autres coſtez AB & AD, ſeront egaux aux autres coſtez CD & BC, chacun au ſien, & l'autre angle A egal à l'autre angle C. Et de plus il eſt euident que les deux angles du poinct B enſemble, ſeront egaux aux deux enſemble du poinct D. Encores par la 4. propoſ. les triangles ABD & CDB ſeront egaux; & partant le parallelogramme ABCD eſt couppé en deux egalement par la diagonalle BD. Donc en tout parallelogramme les coſtez & les angles, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Euclide a bien dit icy que la diagonalle couppe le parallelogramme en deux egalement, mais il n'a rien dit des angles, pource qu'icelle diagonalle les couppe quelquesfois en deux egalement, & d'autresfois inegalement, ainſi qu'il eſt demonſtré au 3. Theoreme ſuiuant.

1. Tout quadrilatere ayant les coſtez oppoſez egaux eſt parallelogramme.

Au quadrilatere A B C D, les coſtez oppoſez A B, C D ſoient egaux, & auſſi les oppoſés A D B C. Ie dis qu'iceluy quadrilatere A B C D eſt vn parallelográme. Car ayant mené la diagonale B D, les deux coſtez A B, B D du triangle A B D ſeront egaux aux deux coſtez D C, B D du triangle B C D, chacun au ſien, & la baſe B D, egale à la baſe B C. Donc par la 8. propoſ. l'angle A B D ſera egal à l'angle C D B, qui luy eſt alterne, & encore A D B à ſon alterne C B D par le Corol. d'icelle 8. prop. Et par la 27. p. les lignes A B, C D ſeront paralleles; comme auſſi B C, A D: & par la 36. def. le quadrilatere A B C D eſt vn parallelogramme. Ce qui eſtoit propoſé.



De cecy reſulte que les Rhombes, & les Rhomboides ſont parallelogrammes, puis qu'ils ont leurs coſtez oppoſez egaux.

2. Tout quadrilatere qui a les angles oppoſez egaux, eſt parallelogramme.

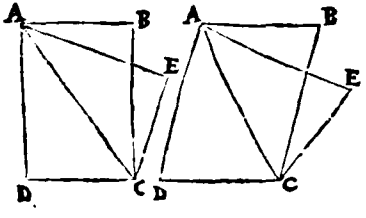
Au quadrilatere A B C D, les angles oppoſez A & C ſoient egaux, comme auſſi les oppoſez B & D. Ie dis que A B C D eſt vn parallelogramme. Car ſi aux angles egaux A & C, on adiouſte les angles egaux B & D: par le 2. Ax. les deux

angles A & B seront egaux aux deux angles C & D : partant les deux A & B seront la moitié des quatre angles A, B, C & D. Mais ces quatre cy sont egaux à quatre droicts, comme nous auons demonstré au Scholie de la 32 prop. Donc les deux A & B seront egaux à deux droicts, & par la 28. prop. les costez AD, BC seront paralleles. Par mesme raison les costez AB, DC seront aussi paralleles. Parquoy le quadrilatere ABCD est vn parallelogramme. Ce qui estoit proposé.

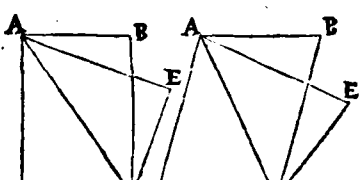


De cecy resulte que tout quadrilatere qui a tous les angles droicts est parallelogramme, attendu que les deux angles A & B seront egaux à deux droicts, comme aussi les deux D & C, &c. Consequemment tant le quarré, que le quarré long, sont parallelogrammes, puis qu'ils ont tous leurs angles droicts.

Or par les deux Theoremes precedents sont conuerties les deux premieres parties de la 34. propos. mais quant à la 3. partie, on ne la peut pas conuertir, veu que tout quadrilatere qui est couppé en deux également par la diagonalle, n'est pas parallelogramme. Car soit ABCD vn quarré long, ou bien vn Rhomboide, lequel sera parallelogramme, & conſequemmẽt

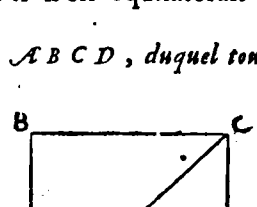


estant tiree la diagonalle A C, elle le couppera en deux egalement: & sur icelle soit cõstruict le triangle A E C, en sorte que le costé A E soit egal au costé A D, & le costé C E egal au costé C D: & sera faict le trapese A D C E, duquel la diagonalle sera A C, qui le couppera en deux egalement, puis que les deux trianoles A B C, A E C ayans tous leurs costez egaux chacun au sien, sont consequemment egaux.

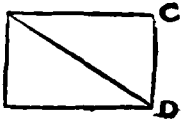


3. Si vn parallelogramme est equilateral, la diagonalle couppera les angles en deux egalement: mais inegalement s'il n'est equilateral.

Soit vn parallelogramme A B C D, duquel tous les costez soient egaux entr'eux, & soit menee la diagonalle A C: Ie dis qu'elle couppe les angles A & C en deux egalement. Ce qui est manifeste par la 8. propos. veu que les deux triangles A B C, A D C ont tous les trois costez egaux, chacun au sien.



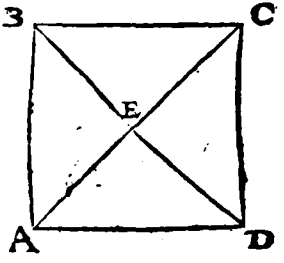
Soit derechef le parallelogramme ABCD, auquel le costé AD soit plus grand que le costé AB, & soit tiree la diagonalle BD:



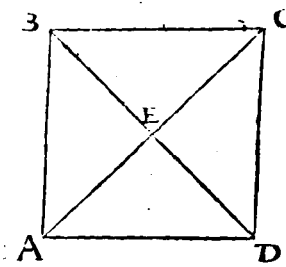
Ie dis qu'elle couppe inegalement les angles B & D. Car puis que au triangle ABD le costé AD est plus grand que le costé AB, par la 18. propos. l'angle ABD sera plus grand que l'angle ADB. Mais par la 29. prop. l'angle ABD est egal à son alterne EDC, car AD est parallele à BC, puis que ABCD est vn parallelogramme. Donc aussi l'angle BDC sera plus grand que l'angle ADB: & partant tout l'angle D est couppé inegalement par la diagonalle BD. Il y a mesme raison des autres angles. Parquoy appert ce qui estoit proposé.

4. Si vn parallelogramme a tous les angles egaux, les deux diagonalles seront egales entr'elles: mais inegales, si les angles sont inegaux.

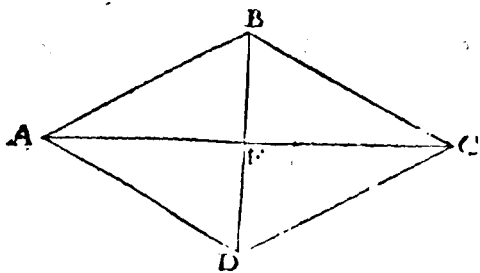
Soit premierement vn parallelogramme ABCD, duquel tous les angles soient egaux, & soient menees les deux diagonalles AC, BD: Ie dis qu'icelles diagonalles sont egalles entr'elles. Car atten-



du que les deux costez AB, BC du triangle ABC sont egaux aux deux costez DC, CB du triangle BCD, chacun au sien, & l'angle B egal à l'angle C, par la 4. propos. la base AC sera egale à la base BD: ce qui estoit proposé. Partant au quarré, & au quarré long les diametres sont egaux, puis que l'vn & l'autre a tous les angles egaux, sçauoir droicts.



Maintenant au parallelogramme $ABCD$, du-



quel l'angle ABC soit plus grand que l'angle BAD, & soient les deux diagonalles AC, BD. Ie dis que la diagonalle AC, qui soustient le plus grand angle B, est plus grande que la diagonalle BD, qui soustient le moindre angle A. Car d'autant qu'au triangle ABC les deux costez AB,

BC, ſont egaux aux deux coſtez AB, AD du triangle BAD, chacun au ſien, & l'angle B plus grand que l'angle A, par la vingt-quatrieſme propoſition, la baſe AC ſera plus grande que la baſe BD. Ce qui eſtoit propoſé.

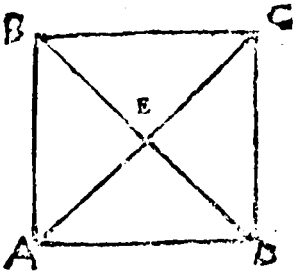
De cecy reſulte qu'au Rhombe, ou Rhomboide les diagonalles ſont inegales: car il ont les angles obliques, & par conſequent inegaux.

5. En tout parallelogramme, les diagonalles s'entrecouppent en deux egalement: & tout quadrilatere auquel les diagonalles s'entrecouppent en deux egalement, eſt parallelogramme.

Au parallelogramme ABCD cy-deſſus, ſoient les deux diametres AC, BD qui s'entrecouppent au poinct E: Ie dis que chacun d'iceux diametres eſt couppé en deux parties egales en E, c'eſt à dire que AE, CE ſont egales, & BE, DE auſsi egales. Car d'autant que par la 29. prop. les deux angles EAB, EBA du triangle ABE, ſont egaux aux alternes ECD, EDC du triangle CDE, un chacun au ſien, & le coſté AB egal au coſté oppoſé CD par la 34. prop. le coſté AE ſera egal au coſté CE, & le coſté BE au coſté ED par la 26. prop. Ce qui eſtoit premierement propoſé.

Maintenant au quadrilatere ABCD ſoient les deux diagonalles AC, BD, qui s'entrecouppent en deux egalement en E: Ie dis qu'iceluy quadrilatere ABCD eſt un parallelogramme. Car puis que les coſtez AE, BE du triangle AEB ſont egaux aux coſtez CE, DE du triangle CED, chacun au

sien, & que par la quinzieſme propoſition les angles au ſommet E ſont auſſi egaux; par la quatrieſme propoſit. les baſes AB, CD ſerõt egales, & l'angle ABE egal à l'angle alterne CDE: Donc les lignes droictes AB, CD ſeront paralleles par la 27. propoſition. Par meſme raiſon AD, BC ſeront demonſtrées paralleles. Parquoy ABCD eſt vn parallelogramme.

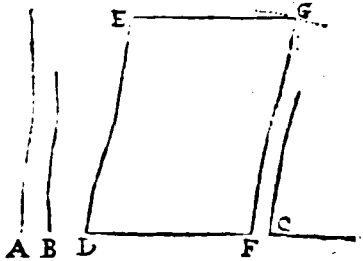


De cecy appert que ſi on veut promptement conſtruire vn parallelogramme, il faut tirer deux lignes droictes interminees AC, BD, qui s'entrecouppent comme que ce ſoit en E; puis prendre AE, EC egales, & BE, ED auſſi egales, puis ſoient tirees les lignes AB, BC, CD, DA: & ſera faict le parallelogramme ABCD: lequel ſera vn Rhombe, ſi les angles du poinct E ſont faicts droicts, & s'ils ſont obliques, ce ſera vn Rhomboide: Mais les ſuſdicts angles eſtans droicts, ſi on faict toutes les quatre lignes EA, EB, EC, ED egales entr'elles; le parallelogramme conſtitué ſera vn quarré: Finalement leſdits angles du poinct E eſtans obliques, & toutes les quatre ſuſdites lignes egales, le parallelogramme conſtitué ſera vn quarré long; le tout comme il appert des choſes demonſtrees cy-deſſus.

A ce que deſſus nous adiouſterons encore ce probleme.

6. Construire vn parallelogramme qui ait vn angle egal à vn angle donné, & les costez comprenant iceluy angle, egaux à deux lignes droictes donnees.

Soient donnees deux lignes droictes A, B, & vn angle C: Il faut construire vn parallelogramme ayant vn angle egal au donné C, & les deux costez comprenant iceluy angle, egaux aux deux lignes donnees A & B.



Soit prise D E egale à A, puis à l'extremité D, soit faict l'angle E D F egal au donné C, faisant D F egale à B: en apres du centre E, & du mesme internualle B soit descrit vn arc de cercle G, puis du centre F & internualle A soit descrit vn autre arc qui couppe le precedent G, & de l'intersection soient tirees les lignes droictes E G, F G: & le quadrilatere D E G F, sera le parallelogramme requis, ainsi qu'il est manifeste par les choses cy-dessus demonstrees.

THEOR. 25. PROP. XXXV.

Les parallelogrammes constituez sur vne mesme base, & entre mesmes

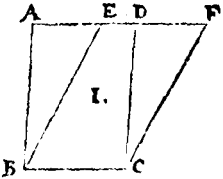
paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient deux parallelogrammes A B C D & B C F E, tous deux ſur meſme baſe B C, & entre meſmes paralleles A F, & B C : Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

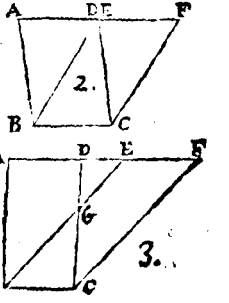
Or le poinct E tombera, ou entre A & D, ou au poinct D, ou entre D & F : qu'il tombe premierement entre A & D, comme en la premiere figure. D'autant que par la 34. prop. au parallelogramme A B C D, le coſté A D eſt egal au coſté B C qui luy eſt oppoſé, & qu'au meſme B C eſt auſſi egal E F coſté du parallelogramme B E F D, par la 1. com. ſent. les coſtez A D, E F ſeront egaux entr'eux : oſtant donc d'iceux la partie commune E D, les reſtes A E & D F ſeront egaux par la 3. com. ſent. Mais par la meſme 34. prop. au parallelogramme A B C D, les coſtez oppoſez A B, D C ſont auſſi egaux; & puis qu'eſtans parallels, ſur iceux tombe la ligne droicte F A, l'angle exterieur C D F ſera egal à l'angle interieur B A E par la 29. prop. Donc les triangles A B E, D C F auront deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & les angles qu'ils comprenent auſſi egaux; & partant iceux triangles A B E, D C F ſeront egaux entr'eux par la 4. prop. leur adiouſtant donc le trapeze commun B E D C, ſera faict le parallelogramme A B C D egal au parallelogramme B E F C. Ce qui eſtoit propoſé.

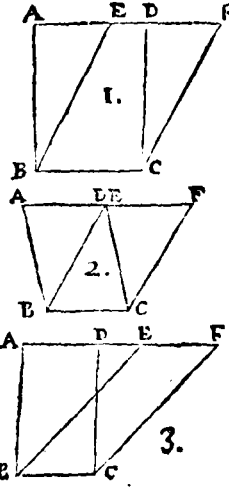
Maintenant, que le poinct E tombe auec le

poinct D, comme en la deuxieſme figure, d'autant que comme deſſus les lignes AD, EF ſeront egales entr elles, & l'angle exterieur FEC egal à l'interieur DAB; les triangles BAD & CEF ſeront egaux par la quatrieſme propoſition. Adjouſtant donc à chacun le triangle commun BDC, ſeront faicts egaux les parallelogrãmes ABCD, & BEFC.



En troiſieſme lieu, que le poinct E tombe entre D & F, comme en la troiſieſme fig. D'autant que par la 34 propoſ. les coſtez oppoſez des parallelogrammes ſont egaux, AD & BC ſeront egaux: Item BC & EF; & partant AD & EF egaux, auſquels ſi on adjouſte la ligne commune DE; la toute AE ſera egale à la toute DF. Item AB eſt egale à DC, leſquelles eſtans paralleles, l'angle exterieur CDE ſera egal à l'oppoſé interieur EAB: & par la quatrieſme propoſition les triangles BAE & CDF, ſeron egaux: deſquels ſi on oſte le triangle commun GDE, les demeurans trapezes BADG & CGEF, ſeront egaux: auſquels

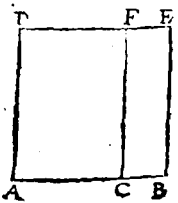




si on adiouſte le triangle commun B G C, le parallelogramme A B C D ſera egal au parallelogramme B C F E : Donc les parallelogrammes coſtituez ſur vne meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr eux : Ce qui eſtoit à demonſtrer.

SCHOLIE.

Eſt icy à noter, que quand Euclide & les autres Geometres parlent de parallelogrammes conſtituez ſur vne meſme baſe, & entre meſmes paralleles, ils entendent que ladite baſe ſoit en l'vne d'icelles paralleles comme aux exemples cy-deſſus: Car entendant autrement cette propoſition elle pourroit eſtre faulce, comme a fort bien remarqué le ſieur Donnot, & ainſi qu'il appert en ces deux parallelogrammes A D F C, C F E B. Leſquels ſont tous deux conſtituez ſur la baſe C F, & entre meſmes paralleles A B, D E: & toutesfois il eſt euident, qu'ils ne ſont pas egaux. Ce qui aduient à cauſe de ce que leur baſe commune C F, n'eſt pas en l'vne ne l'autre des paralleles A B, D E. Le meſme ſe doit auſſi entendre des pa-

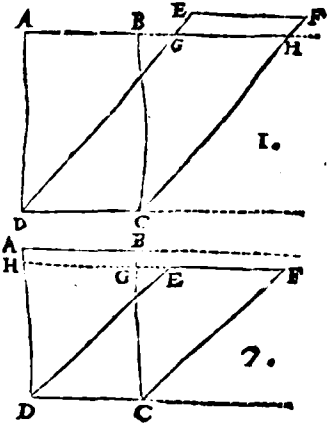


rallelogrammes & des triangles mentionnez aux propositions suiuantes, c'est à dire qu'ils doiuent tous auoir leur baſes en l'vne des paralleles.

Clauius a conuerty cette 35. prop. ainſi:

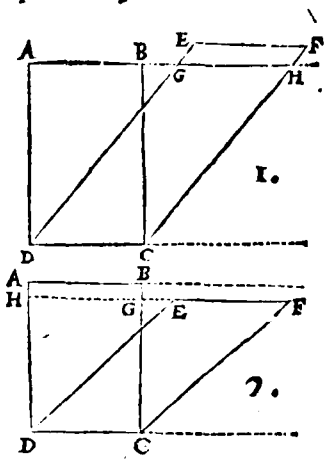
Les parallelogrammes egaux conſtituez ſur vne meſme baſe, & de meſme part, ſeront entre meſmes paralleles.

Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, CDEF, ſur vne meſme baſe CD, & d'vne meſme part: Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que prolongeant la ligne droicte AB elle rencontrera directement EF. Car autrement ſi elle ne la rencontre elle tombera ou au deſſus d'icelle EF ou au deſſoubs. Premierement qu'elle tombe au deſſoubs, s'il eſt poſsible, comme eſt AH, en la premiere figure. Donc par la 35. propoſition le parallelogramme CDGH ſera egal au parallelogramme ABCD: Mais à iceluy parallelogramme ABCD eſt poſé egal le parallelogr. CDEF. Parquoy les parallelogrammes CDEF,



C D H G seront egaux: le tout & la partie. Ce qui est absurde. Le prolongement & continuation directe de A B ne tombera donc pas au dessous de E F.

Secondement que A B prolongee tombe s'il est possible, au dessus de E F, comme en la 2. figure, donc E F prolongee tombera au dessoubs de A B. Par quoy comme dessus les parallelogrammes A B C D C D H G seront egaux, le tout & la partie. Ce qui est absurde. Donc puis que A B produite ne tombera pas au dessus de E F, ny au dessoubs elle la rencontrera directement. Ce qui estoit proposé.



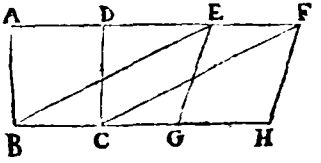
THEOR. 26. PROP. XXXVI.

Les parallelogrammes constituez sur bases egales, & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.

Soient les deux parallelogrammes A BCD & EFGH, ayans les bases BC & GH egales, & entre mesmes paralleles A F & B H. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Qu'il

Qu'il ne soit ainsi: soient menees les deux lignes BE, CF: d'autant que BC est posee egale à GH, & que par la 34. prop. la mesme GH est egale à son oppossee EF; les deux lignes BC, EF, seront egales entr'elles par la 1. com. sent. Mais elles sont aussi paralleles par l'hypothese: Donc les lignes BE, CF, qui les conioignent seront aussi egales & paralleles par la 33. propos. & par consequent BEFC sera vn parallelogramme constitué sur mesme base BC, & entre mesmes paralleles BH, AF que le parallelogram. ABCD, & par la 35. prop. ils seront egaux; & par la mesme prop. il sera aussi egal au parallelog. EFGH, estant sur mesme base ED, auec iceluy, & entre mesmes paralleles AF, BH; Et par la 1. com. sent. les parallelog. ABCD, & EFGH, seront egaux entr'eux. Donc les parallelogrammes constitués sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



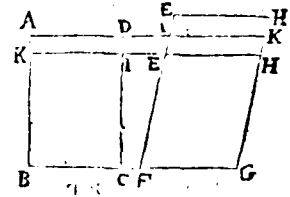
SCHOLIE.

Clauius a conuerty cette 36. propos. ainsi qu'il ensuit.

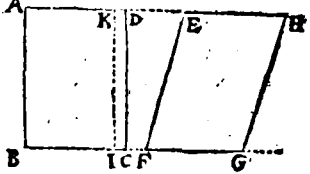
Les parallelogrammes egaux constituez sur bases egales: & de mesme part sont entre mesmes paralleles. Et si les parallelogrammes egaux constituez entre mesmes paralleles, n'ont vne mesme base, ils seront sur bases egales.

Premierement, soient deux parallelogrammes egaux

A B C D, E F G H, constituez sur bases egales B C, F G, & de mesme part : Ie dis qu'ils sont entre mesmes paralleles, c'est à dire que A D prolongee se rencontrera directement auec E H. Car autrement elle tomberoit ou au dessoubs d'icelle E H, ou au dessus ; & il s'ensuiuroit le tout estre egal à la partie: comme il a esté dit en la conuerse de la precedente proposition.



Secondement, soient les parallelogrammes egaux A B C D, F F G H, entre mesmes paralleles A H, B G : Ie dis que leurs bases B C, F G sont egales : car autrement l'vne sera plus grande que l'autre, & soit B C la plus grande, s'il est possible, & d'icelle soit retranchee B I egale à F G : puis soit menee I K parallele à A B. Donc par la 36. propos. le parallelogramme A B I K sera egal au parallelogramme E F G H ; & puis aussi egal au parallelogramme A B C D, la partie au tout. Ce qui est absurde. La base A B C n'est donc pas plus grande que la base F G : Et par mesme raison elle ne sera pas plus petite. Parquoy les bases B C, F G sont egales.



Clauius demonstre encore icy cest autre Theoreme.

Si deux parallelogrammes conſtituez entre meſmes paralleles, ont leurs baſes inegales; celuy-là ſera le plus grand, qui aura la plus grande baſe. Et au contraire, ſi deux parallelogrammes inegaux ſont entre meſmes paralleles; le plus grand aura vne plus grande baſe que l'autre.

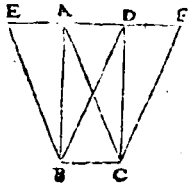
Soient les deux parallelogrammes ABCD, EFGH *de la figure precedente, entre les paralleles* AH, BG, *& ſoit la baſe* BC *plus grande que la baſe* FG: *Ie dis que le parallelogramme* ABCD, *qui eſt ſur la plus grande baſe* BC, *eſt plus grand que le parallelogramme* EFGH. *Car de* BC *ſoit retranchee* BI *egale a* FG, *& ſoit tiree* IK *parallele à* AB *par la* 31. *propoſ. de ce liure. Donc par la* 36. *propoſ. les parallelogrammes* ABIK, EFGH *conſtituez ſur baſes egales, ſeront egaux: & puis que par le* 9. *ax. le parallelogramme* ABCD *eſt plus grand que le parallelogramme* ABIK, *le meſme parallelogramme* ABCD *ſera auſſi plus grand que le parallelogramme* EFGH. *Ce qui eſtoit proposé.*

Soient derechef les parallelogrammes ABCD, EFGH *inegaux, &* ABCD *le plus grand: Ie dis que la baze* BC *eſt plus grande que la baſe* FG. *Car ſi elle eſtoit egale, les parallelogrammes ſeroient egaux par la* 33. *propoſition de ce liure. Ce qui eſt abſurde, puis que* ABCD *a eſté poſé plus grand que* EFGH. *Mais ſi ladite baſe* BC *eſtoit moindre, le parallelogramme* EFGH *ſeroit plus grand que le parallelogramme* ABCD,

comme il a esté demonstré cy dessus : Ce qui est encore absurde. Donc puis que la base BC ne peut estre egale, ny moindre que la base FG, elle sera plus grande. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 27. PROP. XXXVII.

Les triangles constituez sur vne mesme base ; & entre mesmes paralleles, sont egaux entr'eux.



Soient deux triangles ABC, BDC, tous deux constituez sur la mesme base BC, & entre mesmes paralleles EF, & BC. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

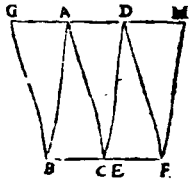
Car si on meine BE parallele à CA, & CF parallele à BD, afin d'acçomplir les parallelog. BEAC, & BCFD, iceux seront egaux par la 35. prop. attendu qu'ils sont constituez sur mesme base BC, & entre mesmes paralleles BC, EF. Mais les triangles donnez ABC, & DBC, sont moitiez d'iceux parallelogrammes par la 34. prop. pource qu'ils sont couppez en deux egalement par les diagonales AB, DC : donc aussi les triangles ABC, & DBC seront egaux, par la 7. com. sent. Parquoy les triangles constituez sur vne mesme base, & entre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Les triangles constituez sur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſont egaux entr'eux.

Soient deux triangles ABC, DEF, conſtituez ſur baſes egales BC & EF, & entre meſmes paralleles GH & BF. Ie dis qu'ils ſont egaux entr'eux.

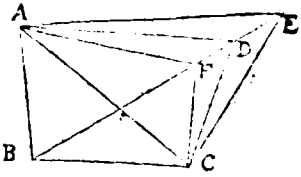
Car apres auoir mené BG, parallele à CA, & FH parallele à DE par la 31. prop. qui accompliſſent les deux parallelogram. ACBG, DEFH: iceux eſtans conſtituez ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles, ſeront egaux par la 36. prop. auſſi egales ſeront leurs moitiez, ſçauoir les triangles propoſez ABC, & DEF par la 34. prop. eſtans les parallelogrammes couppez en deux egalement par les diagonales BA & DF. Donc les triangles conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 29. PROP. XXXIX.

Les triangles egaux conſtituez ſur vne meſme baſe, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Soient deux triangle egaux A B C, & B C D constituez sur vne mesme base B C, & de mesme part. Ie dis qu'ils sont entre mesmes paralleles, c'est à dire, que si on meine la lig. droicte A D, elle sera parall. à B C.



Autrement, du poinct A, on en pourra mener vne autre qui sera parallele à B C (si A D ne l'est) par la 31. prop. laquelle tombera, ou bien au dessus de A D, ou au dessous. Qu'elle tombe premierement au dessus, & soit icelle A E, s'il est possible; & apres auoir continué B D iusques en E, & mené E C, les deux triangles B A C, & B E C par la 37. prop. estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, seront egaux. Mais par l'hypothese les deux triangles B E C, & B D C sont aussi egaux: donc par la 1. com. sent. les triangles B E C & B D C seroient aussi egaux, la partie & le tout; partant la parallele menee du poinct A, ne tombera pas au dessus de A D. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on la fait tomber au dessous de A D, comme A F: car ayant mené C F, les triangles B F C & B D C se trouueroient egaux, ce qui ne peut estre: donc du poinct A on ne menera point d'autre ligne que A D parallele à B C. Parquoy les triangles egaux constituez sur mesme base, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

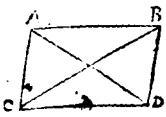
SCHOLIE.

Par cette prop. qui est la conuerse de la 37. il est aisé

de demonſtrer comme a fait Commandin le 1 theor. ſuiuãt.

Tout quadrilatere qui eſt couppé en deux egalement par l'vn & l'autre diametre, eſt parallelogramme,

Le quadrilatere ABDC ſoit diuiſé en deux egalement par l'vn & l'autre diametre AD, BC: Ie dis qu'iceluy eſt parallelogramme. Car d'autant que les triangles ACD, BDC ſont chacun moitié du quadrilatere ABDC, ils ſont egaux entr'eux



par le 7. ax. Et pource qu'ils ont vne meſme baſe CD, & ſont de meſme part, ils ſont entre meſmes paralleles par la 39. prop. & partant AB eſt parallele à CD. Semblablement veu que les triangles ABC, ACD ſont egaux & ſur meſme baſe AC, icelle ligne AC ſera auſſi parallele à BD: donc le quadrilatere ABDC eſt parallelogramme, puis que les coſtez oppoſez d'iceluy ſont parallels. Ce qui eſtoit propoſé.

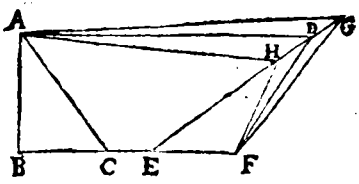
THEOR. 30. PROP. XL.

Les triangles egaux conſtituez ſur baſes egales, & de meſme part, ſont auſſi entre meſmes paralleles.

Soient deux triangles egaux ABC, & DEF, conſtituez ſur baſes egales BC & EF, & de meſme part. Ie dis qu'ils ſont auſſi entre meſmes paralleles: c'eſt à dire, que ſi on meine vne ligne droicte de A en D, qu'icelle ſera parallele à BF.

Autrement, du poinct A on en pourra mener vne autre qui ſera parall. à BF (ſi AD ne l'eſt) par

la 31. prop. Laquelle tombera, ou au dessus de AD, ou au dessous. Soit donc premierement au dessus,

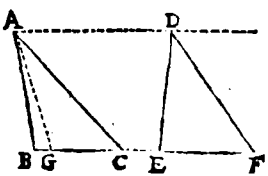


& soit icelle AG, s'il est possible, & apres auoir continué ED iusques à ce qu'il rencontre AG en G, & mené DG, les deux triangles BAC, & EGF seront egaux par la 38. prop. mais par l'hypothese les triangle BAC & DEF sont aussi egaux: donc par la 1. com. sent. le triangle EDF sera egal au triangle EGF, la partie au tout; ce qui est impossible: Partant la parallele menee du poinct A ne tombera point au dessus de AD. Le mesme inconuenient s'ensuiura si on la fait tomber au dessous, comme AH, car les triangles EHF & EDF, se trouueroient egaux: donc du poinct A ne pourra estre menee autre ligne que AD parallele à BF. Parquoy les triangles egaux constituez sur bases egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Commandin & Clauius apres luy, demonstrent en ce lieu le Theoreme suiuant.

Si les triangles egaux constituez entre mesmes paralleles, n'ont vne mesme base, ils seront sur bases egales.



Soient les triangles egaux ABC, DEF, entre mesmes paralleles AD, BF, & sur les bases BC, EF: Ie dis qu'icelles

baſes ſont egales entr'elles. Car ſi elles ne ſont egales ſoit BC la plus grande, & d'icelle ſoit retranchée CG, egale à EF, & tirée AG. Donc par la 38. propoſit. le triangle ACG ſera egal au triangle DEF: Mais à ce meſme triangle a eſté poſé egal le triangle ABC. Donc par le 1. axiome les triangles AGC, ABC ſeront egaux, la partie & le tout: Ce qui eſt abſurde. Donc les baſes BC, EF, ne ſont pas inegales, mais egales. Ce qui eſtoit propoſé.

En ſuitte de ce theoreme Clauius demonſtre encore le ſuiuant.

Si deux triangles conſtituez entre meſmes paralleles, ont leurs baſes inegales, celuy-là ſera le plus grand, duquella baſe ſera la plus grande, Et au contraire, ſi deux triangles inegaux ſont entre-meſmes paralleles, la baſe du plus grand ſera la plus grande.

En la figure precedente ſoient entre meſmes paralleles AD, BF, les triangles ABC, DEF, & ſoit la baſe BC plus grande que la baſe EF: Ie dis que le triangle ABC, eſt plus grand que le triangle DEF. Car ayant pris CG egale à EF, & tiré AG, les triangles AGC, DEF, ſeront egaux par la 38. propoſition. Et puis que par le 9. axiome le triangle ABC eſt plus grand que le triangle AGC, le meſme triangle ABC ſera plus grand que le triangle DEF.

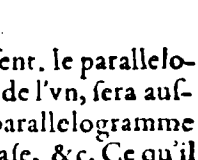
Soient derechef les triangles inegaux ABC, DEF, & le plus grand ſoit ABC. Ie dis que la baſe BC eſt plus grande que la baſe EF. Car ſi on dit qu'elle eſt egale, le triangle ABC ſera egal au triangle DEF: ce qui eſt abſurde, attendu qu'il a eſté poſé plus grand. Et ſi on l'eſtime eſtre moindre, le triangle DEF ſera plus grand que le triangle ABC, comme il a eſté demonſtré.

cy-dessus : Ce qui est encore plus absurde, puis que ABC a esté posé plus grand que DEF. Donc la base BC sera plus grande que la base EF, puis qu'elle ne peut estre ny egale, ny moindre. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 31. PROP. XLI.

Si vn parallelogramme, & vn triangle ont vne mesme base, & sont entre mesmes paralleles; le parallelogramme sera double du triangle.

Soit le parallelogramme ABCD sur la mesme base BC, que le triangle BCE, & tous deux entre mesmes paralleles AE & BC. Ie dis que le parallelogramme ABCD est double du triangle BEC.



Car si on meine la diagonalle AC, le triangle ABC sera la moitié du parallelogramme ABCD par la 34. prop. Mais par la 37. prop. le mesme triãgle ABC sera egal au triangle BEC. Donc par la 6. com. sent. le parallelogramme ABCD, qui est double de l'vn, sera aussi double de l'autre. Si donc vn parallelogramme & vn triangle ont vne mesme base, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

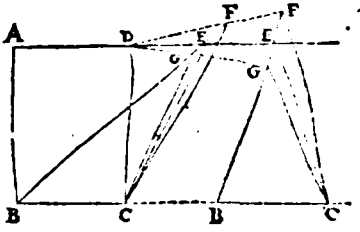
SCHOLIE.

Si les bases estoient egales, on demonstreroit encore la mesme chose, & en la mesme maniere que dessus, tirant

le diametre du parallelogramme. Car d'autant que les triangles constituez sur baſes egales, & entre meſmes paralleles ſont egaux entr'eux, le parallelogramme qui eſt double de l'vn, ſeroit auſsi double de l'autre.

Clauius a demonſtre apres Commandin la conuerſe de cette 41. prop. ainſi qu'il enſuit.

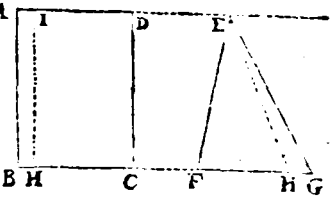
Si vn parallelogramme double d'vn triangle eſt conſtitué ſur vne meſme baſe qu'iceluy, ou ſur vne baſe egale, & de meſme part; ils ſeront entre meſmes paralleles. Et ſi vn parallelogramme eſt double d'vn triangle, & entre meſmes paralleles, leurs baſes ſeront egales, ſi elles ne ſont vne meſme.



Soit le parallellogrãme A B C D double du triangle E B C, ſur vne meſme baſe, ou ſur baſes egales: Ie dis qu'ils ſont entre meſmes paralleles, c'eſt à dire que A D qui eſt parallele à B C, eſtant prolongee directement tombera au poinct E. Car autrement elle tombera ou au deſſus de E, ou au deſſous. D'ou aduiendra comme il a eſté demonſtré en la 39. ou 40. prop. la partie eſtre egale au tout. Car par la 41. prop. le parallelogramme ſera pareillement double du triangle B F C, ou B G C: & par le 6. axiom. les triangles E B C, F B C, ou les triangles F B C, G B C ſeront egaux, la partie & le tout. Ce qui eſt abſurde.

Soit maintenant le parallelogramme A B C D double du triangle E F G, & entre meſmes paralleles. Ie dis que la baſe B C eſt egale à la baſe F G. Car ſi l'vne d'icelles

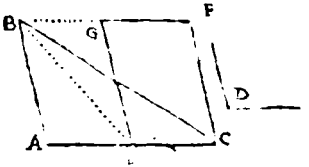
sçauoir BC est plus grande, ayant pris CH egale à FG & tiré HI parallele à BA, on demonstrera les parallelogrammes ABCD, IHCD estre egaux, le tout & la partie: (pour ce que chacun est double du triangle EFG, celuy-là par l'hypothese; & cestuy-cy par la 41. prop.) ce qui est absurde. On demõstrera encore le méme, si on dit la base FG estre plus grande que la base BC: Car ayant faict FH egale à BC, & tiré la ligne droicte HE, les triangles EFH, EFG seront egaux, la partie & le tout; (d'autant que chacun est moitié du parallelogramme ABCD, celuy-là par la 41. prop. & cestuy-cy par l'hypothese) Ce qui est absurde.



PROBL. II. PROP. XLII.

Faire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le triangle donné ABC, & l'angle rectiligne donné D: il faut faire vn parallelogramme egal au



triangle donné ABC, & qui ait vn angle egal à l'angle donné D.

L'vn des costez du triangle, sçauoir, AC soit couppé en deux egalement en E, par la 10. prop. puis soit fait l'angle CEG egal à l'angle D par la 23. prop. Et par la 31. prop. soit menee de B, la ligne BF parallele à AC, laquelle couppe EG en G. Derechef, de C soit menee CF parallele à EG, rencontrant BF en F : & sera constitué vn parallelogramme EGFC, ayant l'angle CEG egal au donné D, lequel parallelogramme *ie dis estre egal au triangle donné* ABC. Car estant tiree la ligne BE, iceluy parallelogramme EGFC sera double du triangle EBC par la proposition precedente, duquel est aussi double le triangle ABC, iceluy estant egal aux deux ABE, EBC, qui sont egaux entr'eux par la 38. propos. Donc le parallelogramme EGFC, & le triangle ABC seront egaux entr'eux par la sixiesme commune sentence, & puis qu'iceluy parallelogramme à l'angle CEG egal au donné D par la construction, nous auons construict vn parallelogramme egal à vn triangle donné, &c. Ce qu'il falloit faire.

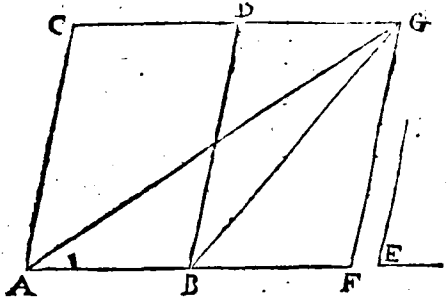
SCHOLIE.

La pratique de ce probleme est enseignee au 13. de nostre Geometrie practique : Et est si facile à entendre par la construction cy-dessus, qu'il n'est besoin d'en dire autre chose : mais nous adiousterons icy (apres Pelletier) la conuerse de cette 42. proposition, qui est telle.

Faire vn triangle egal à vn parallelogramme

donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit donné le parallelogramme ABDC, & l'angle rectiligne E: il faut faire vn triangle egal au paralle-



logramme donné AD, ayant vn angle egal au donné E. Soient prolongees CD, tant qu'il sera de besoin, & AB en sorte que BF soit egale à icelle AB; puis au poinct A soit faict l'angle FAG egal au donné E, tirant AG iusques à ce qu'elle rencontre CD prolongee, & estant ioinct FG, le triangle AGF sera le requis: Car l'angle FAG est egal au donné E, & estant tiree BG, les triangles AGB & BGF seront egaux par la 38. prop. & partant le total AGF sera double de AGB: Mais par la 41. prop. le parallelogramme AD est aussi double d'icelluy triangle ABG. Donc le triangle AGF, & le parallelogramme ADBB seront aussi egaux entre eux. Ce qu'il falloit faire.

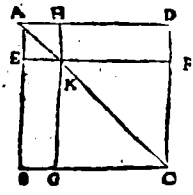
COROLLAIRE.

Il est enident par les deux demonstrations cy-dessus, qu'vn triangle qui a la base double de celle d'vn parallelogramme constitué entre mesmes paralleles qu'icelluy, est egal à icelluy parallelogramme.

THEOR. 32. PROP. XLIII.

En tout parallelogramme les supplemens des parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, sont egaux entr'eux.

Soit le parallelogramme ABCD, son diametre AC, à l'entour duquel sont les parallelogrammes AEKH & KGCF. Ie dis que les parallelogrammes HKFD & EBGK, qu'on appelle supplements, sont egaux entr'eux.

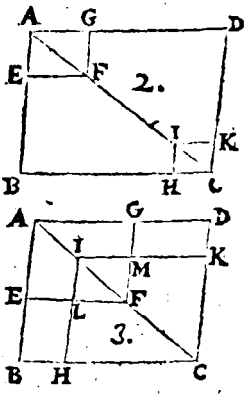


Car d'autant que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC sont egaux entr'eux : Item les triangles CKG, CFK aussi egaux ; si on oste ceux cy de ceux-là, resteront egaux les trapezes ABGK, ADFK : Mais par la 34. prop. sont aussi egaux les triangles AEK, AHK ; partant si on les oste des trapezes susdits, demeureront egaux les complemens EBGK, HKFD. Donc en tout parallelogramme les supplements, &c. Ce qui estoit à prouuer.

SCHOLIE.

Si les deux parallelogrammes d'alentour le diametre n'estoient conioincts au poinct K, ainsi qu'en la figure cy-dessus, mais que l'un fut éloigné de l'autre, comme en la deuxiesme figure, ou bien qu'ils s'entrecoupassent ainsi qu'en la troisiesme, on demonstreroit en la mesme maniere que dessus, estre aussi egaux, les

complemens ou restes, sçauoir en la 2. figure, les pentagones BEFIH, DGFIK, & en la 3. les parallelogrãmes BELH, DGMK: Car puis que par la 34. prop. les triangles ABC, ADC, de l'vne & l'autre fig. sont egaux entr'eux, comme aussi les triangles AEF, AGF; les trapezes BEFC, DGFC seront pareillement egaux par le 3. axiome. Parquoy si d'iceux trapezes de la seconde figure, on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront encore egaux les pentagones BEFIH, DGFIK. Mais adioustant aux trapezes de la troisiéme fig. les triangles egaux LIF, MIF, les figures BELIC, DGMIC seront egales entr'elles, desquelles si on oste les triangles egaux HIC, KIC, resteront aussi egaux les parallelogrammes BELH, DGMK. Ce qui estoit proposé.



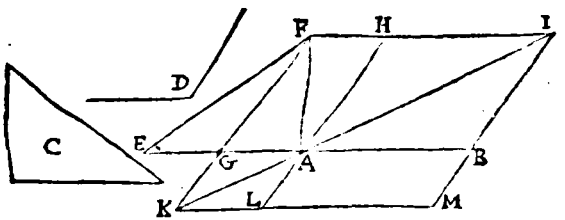
PROB. 12. PROP. XLIIII.

Sur vne ligne droicte donnee, d'escrire vn parallelogramme egal à vn triangle donné, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, le triangle donné C,

né C, & l'angle rectiligne donné D. *Il faut* sur A B descrire vn parallelogramme egal au triangle C, & qui ait vn angle egal au donné D.

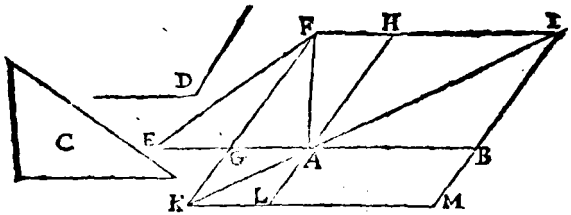
Soit prolongee la ligne donnee A B iusques en E, tellement que A E soit egale à quelconque des costez du triangle C, & soit acheué de construire par la 22. prop. le triangle A F E, ayant les costez egaux aux costez dudit triangle donné C, lequel



luy sera aussi egal par le Corol. de la 8. propos. Soit maintenant construit par la 42. prop. le parallelogramme A G F H, egal au triangle A F E, & ayant l'angle G A H egal au donné D: & apres auoir continué la ligne F H iusques en I, tellement que H I soit egale à A B, soit menee I A iusques à ce qu'elle rencontre F G prolongee en K: (ce qui doit arriuer, n'estant I A parallele à F G, par la 11. com. sent. puis du poinct K, soit menee K M parallele à G B) iusques à ce qu'elle rencontre I B tiree en M: & finalement soit prolongee H A iusques à ce qu'elle rencontre K M en L. Ie dis que le parallelogramme A B M L est le requis.

Car il est constitué sur la ligne droicte donnee A B, & à l'angle B A L egal à l'angle donné D, puis

que par la 15. prop. il eſt egal à l'angle GAH, qui a eſté fait egal à l'angle D: Finalement il



eſt egal au triangle donné C, puis que par la 43. propoſ. il eſt egal au parallelogramme AHFG, lequel a eſté faict egal au triangle AFE, ou C. Nous auons donc deſcrit ſur la ligne donnee AB vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

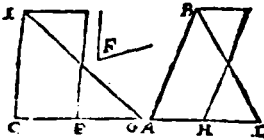
SCHOLIE.

Nous auons enſeigné la practique de ce Prob. en nos Memoires Mathem. Prob. 15. de la Geometrie practique, & ne differe de la conſtruction cy deſſus. C'eſt pourquoy nous n'en dirons autre choſe, mais nous adiouſterons icy la conuerſe de cette propoſ. laquelle eſt telle.

Sur vne ligne droicte donnee, conſtruire vn triangle egal à vn parallelogramme donné, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut deſcrire vn triangle egal au parallelogramme CDKE, & qui ait vn angle egal à l'angle donné F.

Soit prolongé CE iusques en G, tellement que CF, FG soient egales, & soit menee DG, qui fera le triangle CDG: En apres, par la prec. propos. soit construit sur AB le parallelogramme BH egal au triangle CDG, ayant l'angle BAH egal au donné F: puis soit prolongee AH iusques en L, de sorte que HL soit egale à AH, & ayant tiré BL; le triangle ABL, sera le requis. Car par le corol. de la 42. prop. iceluy triangle ABL est egal au parallelogramme BH. Mais iceluy parallelog. est egal par la construction au triangle DCG, lequel est egal au parallelog. CK par le mesme corol. Donc le triangle ABL sera aussi egal à iceluy parallelogramme CK: mais il a l'angle A egal au donné F, & est faict sur la ligne donnee AB; parquoy appert estre faict ce qui estoit proposé.

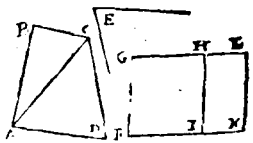


PROB. 13. PROP. XLV.

Faire vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, ayant vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la figure rectiligne donnée ABCD, & l'angle donné E: Et il faut faire vn parallelogramme egal à icelle figure rectiligne ABCD,

qui ait vn angle egal au donné E



Soit resoluë la figure rectiligne donnee en triangles, sçauoir est menant la ligne droicte A C : puis par la 42. propos. soit fait le parallelogramme F G H I egal au triangle A D C, ayant l'angle F egal à l'angle donné E. Item sur H I soit fait le parallelogramme H I K L : egal au triangle A B C, ayant vn angle H I K egal au donné E, & sera fait ce qui est requis. Car les deux parallelogrammes F H & I L, sont constructs egaux à la figure rectiligne A B C D, & ont chacun vn angle egal à l'angle donné E; & ces deux parallelogrammes ensemble en font vn seul. Car d'autant que chacun des angles G F I, H I k est esgal à l'angle donné E, ils le seront aussi entr'eux : ausquels si on adiouste l'angle commun F I H, les deux angles G F I, H I F, qui sont egaux à deux droicts par la 29. prop. estant F H parallelogramme ; seront egaux aux deux angles H I K, H I F, lesquels partant seront egaux à deux droicts, & par la 14. prop. les deux lignes F I, K I, se rencontreront directement. Pareillement les deux angles G H I, H L K estans egaux par la 34. prop. car ils sont opposez à angles egaux G F I, H I K : Si à iceux on adiouste l'angle commun I H L, par le mesme discours que cy dessus, les deux lignes G H & L H se rencontreront directement : ainsi F K & G L estans lignes droictes, & conioignant de mesme part les egales & paralleles F G & K L; elles seront aussi egales & paralleles par la 33. prop. & partant F G L K sera pa-

rallelogramme ; lequel nous auons construict egal à la figure rectiligne donnee ABCD, & faict l'angle F egal au donné E, ainsi qu'il estoit requis.

SCHOLIE.

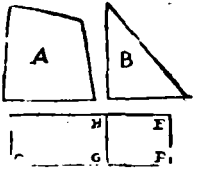
S'il y eust eu dauantage de triangles en la figure donnee, il eust fallu construire sur KL vn troisiesme parallelogramme egal au troisiesme triangle : puis sur le costé opposé à KL, vn autre parallelogramme egal au 4. triangle, & ainsi proceder de triangle en triangle iusques à la fin. Et quant à la demonstration, ce sera touſiours la mesme que dessus, repetee autant de fois qu'il sera de besoin. Or comme on descrira sur vne ligne droicte donnee vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & qui ait vn angle egal à vn angle rectiligne donné ; il est assez manifeste par les choses cy dessus dictes : car pour exemple, si la ligne droicte FG eust esté donnee, nous eussions par la precedente prop. descrit sur icelle le parallelogramme FGHI : puis sur la mesme ligne FG, ou plustost sur vne egale à icelle HI, le parallelogramme HIKL, & ainsi consecutiuement s'il y auoit dauantage de triangle en la figure rectiligne donnee.

Pelletier a adiousté en ce lieu vn Probleme fort vtile, lequel nous rapporterons icy, mais beaucoup plus briefuement qu'il n'a fait.

Estans donnees deux figures rectilignes inegales, trouuer l'excez de la plus grande par dessus la moindre.

Soient donnees deux figures rectilignes A & B, dont A est la plus grande : il faut trouuer l'excez de A par

dessus B. Par la 45. prop. soit faict le parallelogramme CDEF egal au rectiligne A, ayant quelconque angle C: puis sur la ligne CD soit fait le parallelogramme CDHG egal au rectiligne B, ayant l'angle C commun: & le parallelogramme GHEF sera l'excez du rectiligne A par dessus le rectiligne B.

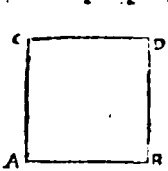


Car d'autant qu'iceluy parallelogramme GE est l'excez du parallelogramme CE egal à A, par dessus le parallelogramme CH egal à B; le mesme parallelogramme GE sera aussi l'excez du rectiligne A par dessus le rectiligne B. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 14. PROP. XLVI.

Sur vne ligne droicte donnee, descrire vn quarré.

Soit la ligne droicte donnee AB, sur laquelle il faut descrire vn quarré. Du poinct A, soit menee AC ligne perpendiculaire à AB par la 11. prop. laquelle soit faicte egale à icelle AB, & apres auoir mené CD parallele à AB, & BD parallele à AC, par la 31. propos. Ie dis que le quadrilatere ABDC est vn quarré.



Car d'autant que par la construction il est parallelogramme, les costez & les angles opposez sont egaux par la 34. propos. partant le costé AB

eſt egal à CD, & AC à BD: mais AC eſtant egal à AB par la conſtruction; il eſt euident que les quatre coſtez ſont egaux entr'eux. Item l'angle A eſtant droict par la conſtruction, auſſi ſon oppoſé D ſera droict. Et la ligne AC tombant ſur les deux iignes paralleles AB, CD, les deux angles interieurs A & C ſont egaux à deux droicts par la 29. prop. Mais l'angle A eſt droict: donc l'angle C ſera auſſi droict: partant auſſi droict ſon oppoſé B. Ainſi les quatre angles A, B, C, D ſeront droicts: & par la def. du quarré la figure ABDC ſera quarree. Nous auons doncdeſcrit vn quarré ſur la ligne droicte donnee AB. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné la practique de cette propoſ. en noſtre Geometrie practique. Prob. 12. laquelle ne differe gueres de la conſtruction cy deſſus: car ayant mené la perpendiculaire AC, & icelle faict egale à AB, du meſme internalle AB ſoient deſcrits des centres C & B, deux arcs qui s'entrecouppent en D, duquel eſtans tirees les lignes CD, BD, ſera faict le quarré requis.

Proclus demonſtre icy: Que les quarrez de lignes egales ſont egaux entr'eux: & que des quarrez egaux les lignes ſont egales. *Ce qui eſt aiſé à prouuer par la ſuperpoſition d'vn quarré ſur l'autre: Car les lignes eſtans egales, ſi l'vne eſt poſee deſſus l'autre, elles conuiendront entr'elles; & les angles eſtans auſſi egaux, c'eſt à ſçauoir droicts, ils conuiendront pareillement entr'eux: & partant tout le quarré conuiendra à tout le quarré. Que ſi les quarrez*

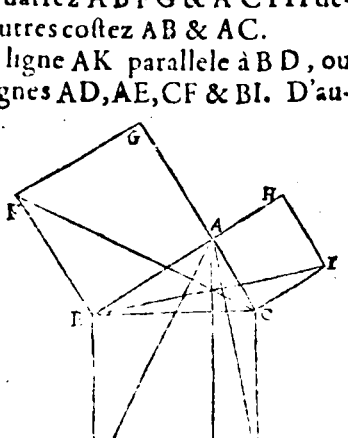
ſont egaux, il conuiendront entr'eux, à cauſe de l'egalité des angles : donc auſsi les lignes ; autrement vn quarré ſeroit plus grand que l'autre. Nous auons laiſſé la demonſtration de Proclus qui eſt tres-longue, pour ſuiure celle-cy qui eſt briefue & facile.

THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle droict, eſt egal aux quarrez des deux autres coſtez.

Soit le triangle rectangle A B C, ſur les coſtez duquel ſoient deſcrits les trois quarrez B C E D, A B F G, A H I C. Ie dis que le quarré B C E D deſcrit ſur le coſté B C, qui ſouſtient l'angle droict B A C, eſt egal aux deux quarrez A B F G & A C I H deſcrits ſur les deux autres coſtez A B & A C.

Car ſoit menee la ligne A K parallele à B D, ou à C E, & tirees les lignes A D, A E, C F & B I. D'autant que par la definition du quarré, les 4 angles au poinct A ſont droicts, les lignes droictes A B, A H ſe rencontreront directemẽt, & ne feront qu'vne lig. droicte: ſçauoir CA, AG par la 14. pr.



Derechef, puis que les angles ABF, CBD ſont egaux, car ils ſont droicts, ſi on leur adjouſte le commun ABC, le total FBC ſera egal au total ABD. Le triangle ABD a donc les deux coſtez AB, BD, egaux aux deux coſtez FB, BC du triangle CBF, chacun au ſien, & les angles ABD, CBF contenus d'iceux coſtez, egaux, & par la 4. prop. les triangles ABD, CBF ſeront egaux. Mais le quarré AF eſt double du triangle FBC par la 41. prop. car ils ſont ſur meſme baſe BF, & entre meſmes paralleles BF, GC: il ſera donc auſſi double de ſon egal ABD, duquel le parallellogramme BK eſt auſſi double par la meſme 41. prop. & par conſequent le quarré AF ſera egal au parallelogramme BK: car les choſes doubles d'vne meſme ſont egales entr'elles. Par meſme diſcours on prouuera que le parallelog. CK eſt egal au quarré AI: partant les deux parallelogrammes enſemble BK & CK, ſeront egaux aux deux quarrez enſemble AF & AI. Donc le quarré BE qui eſt compoſé d'iceux parallelogrammes BK, CK, ſera auſſi egal aux meſmes quarrez AF, AI: parquoy aux triangles rectangles, le quarré du coſté, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Par ce theoreme on peut facilement entendre, qu'aux triangles ambligones le quarré du coſté oppoſé à l'angle obtus eſt plus grand que les deux quarrez enſemble des deux autres coſtez: Et qu'en tout triangle le quarré d'vn coſte oppoſé a vn angle aigu eſt moindre que les

deux quarrez ensemble des deux autres costez. Car si l'angle obtus est resserré iusques à ce qu'il vienne à estre droict, les costez qui le comprennent demeurans les mesmes, le costé opposé viendra moindre par la 24. proposition. Mais si l'angle aigu est ouuert & eslargy iusques à ce qu'il vienne droict, les costez, qui le contiennent demeurans les mesmes, le costé opposé à iceluy angle sera faict plus grand par la mesme 24 prop. veu donc qu'il a esté demonstré cy-dessus que le quarré du costé opposé à l'angle droict, est egal aux deux quarrez ensemble des deux autres costez; il est euident que le quarré du costé opposé à l'angle obtus, est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez; & que le quarré du costé opposé à vn angle aigu, est moindre que les deux quarrez ensemble des deux autres costez: Mais de combien celuy-là est plus grand, & de combien cestuy-cy est moindre, Euclide le demonstrera ez 12. & 13. prop. du second liure.

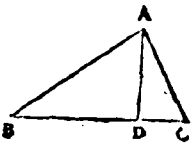
Or l'inuention de ce celebre & tant renommé Theoreme est attribuee à Pythagoras, lequel en fut si content & ioyeux, que pour en rendre grace aux dieux, plusieurs disent qu'il sacrifia vn Hecatombe, & d'autres rapportent qu'il ne leur sacrifia qu'vn bœuf, ce qui est plus vray-semblable, que non pas qu'il en ait immolé 100, veu que ce Philosophe faisoit tres-grand scrupule d'espandre le sang des animaux. Mais quoy qu'il en soit ce Theoreme est vn des plus vtiles aux choses Geometriques, encore qu'il ne semble pas si admirable que la 31. prop. du 6. liu. où Euclide demonstre qu'aux triangles rectangles, la figure descripte sur le costé qui soustient l'angle droict, est egale aux deux

figures ſemblables, deſcriptes & ſemblablement poſees ſur les deux coſtez qui contiennent iceluy angle droict.

Par le moyen de cette 47. prop. il eſt fort aiſé de demonſtrer cet autre Theoreme ſuiuant.

Si de l'angle d'vn triangle compris de deux coſtez inegaux, eſt tiree vne perpendiculaire à la baſe, laquelle tombe dans le triangle; elle couppera la baſe en deux parties inegales, la plus grande deſquelles ſera vers le plus grand coſté: Et au contraire, ſi la baſe eſt couppee inegalement par la perpendiculaire, les deux coſtez ſeront inegaux, & le plus grand ſera celuy adjaceant au plus grand ſegment.

Au triangle ABC, duquel le coſté AB eſt plus grand que le coſté AC, ſoit la ligne AD perpendiculaire à la baſe BC, laquelle tombe dedans le triangle: ce qui aduient touſiours quand l'vn & l'autre angle d'icelle baſe eſt aigu, ainſi qu'il appert du Cor. de la 17. prop. Ie dis que la partie BD eſt plus grande que la partie CD. Car par la 47. prop. le quarré de AB eſt egal aux deux quarrez de AD, BD; & le quarré de AC, egal aux deux de AD, CD: Mais le quarré de AB eſt plus grand que celuy de AC, puis que le coſté AB eſt plus grand que le coſté AC; donc auſſi les deux quarrez de AD, BD, ſeront plus grands que les deux quarrez de AD, DC; parquoy oſtant le commun quarré de AD, reſtera le quarré de BD plus



grand que le quarré de CD; & partant la ligne droicte BD sera plus grande que la ligne droicte CD.

Maintenant, que la ligne perpendiculaire AD faſſe le ſegment BD plus grand que le ſegment CD. Ie dis que le coſté AB eſt plus grand que le coſté AC. Car le quarré de BD ſera plus grand que le quarré de DC, & adiouſtant le cõmun quarré de AD, les deux quarrez de BD, AD, ſeront plus grands que les deux de CD, AD. Mais par la 47. prop. le quarré de AB eſt egal aux deux de BD, AD; & celuy de AC egal aux deux de CD, AD. Donc auſſi le quarré de AB ſera plus grand que le quarré de AC, & par conſequent le coſté AB ſera plus grand que le coſté AC. Ce qu'il falloit prouuer.

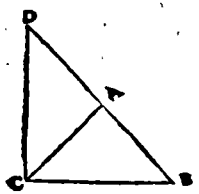
THEOR. 34. PROP. XLVIII.

Si le quarré de l'vn des coſtez d'vn triangle, eſt egal aux quarrés des deux autres coſtez; l'angle ſouſtenu d'iceluy coſté eſt droict.

Au triangle ABC, le quarré du coſté BC ſoit egal aux quarrez des deux autres coſtez BA & AC. Ie dis que l'angle BAC, ſouſtenu d'iceluy coſté BC, eſt droict.

Car apres auoir mené AD perpendiculaire à AC, par la 11. prop. & faict icelle AD egale à AB, ſoit menee CD. Le triangle CAD ſera rectangle, & par la 47. prop. le quarré de CD ſera egal aux deux quarrez de CA & AD, leſ-

quels sont egaux aux quarrez de BA & AC, estans leurs lignes egales ; & par la 1. com. sent. le quarré de BC sera egal au quarré de CD: partant la ligne CB egale à CD. Donc les triangles BAC, & CAD auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & la base BC egale à la base DC, & par la 8. prop. l'angle BAC sera egal à l'angle droict CAD: partant il sera aussi droict. *Si donc le quarré de l'vn des costez d'vn triangle est egal, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.*



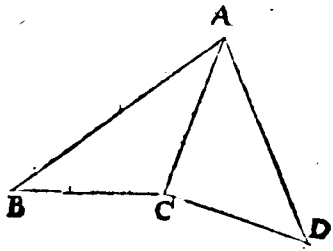
SCHOLIE.

A cette proposition, qui est la converse de la precedente, nous adiousterons cet autre theoreme.

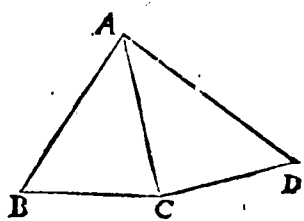
Si le quarré d'vn costé de quelque triangle est plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez; l'angle soustenu d'iceluy costé est obtus: Et s'il est moindre, aigu.

Au triangle ABC, le quarré du costé AB, soit plus grand que les deux quarrez ensemble des deux autres costez AC, CB: Ie dis que l'angle ACB opposé au costé AB est obtus. Car soit tiré de C perpendiculaire à AC, la ligne droicte CD egale à BC, & soit ioinct AD. D'autant que par la 47. proposit. le quarré de AD est egal aux deux quarrez de AC, CD, c'est à dire AC, CB, & le quarré de AB a esté posé plus grand que les quarrez de AC, CB, le quarré

de AD, sera moindre que le quarré de AB; & partant la ligne AD moindre que ladite ligne AB. Parquoy veu que les costez BC, AC, du triangle ABC, sont egaux aux costez CD, AC, du triangle ACD, vn chacun au sien, & la base AB plus grande que la base AD, par la 25. propos. l'angle ACB sera plus grand que l'angle ACD: Mais iceluy ACD est droict. Donc ACB est plus grand qu'vn droict; & partant obtus. Ce qui est proposé.



Maintenant, soit le quarré de AB moindre que les deux quarrez des deux autres costez AC, CB: Ie dis que l'angle ACB soustenu d'icelluy costé AB, est aigu. Car ayant fait comme au parauant le triangle rectangle ACD, on prouuera par les mesmes raisons que dessus, que la base AD est plus grande que la base AB, & l'angle droict ACD plus grand que l'angle ACB, qui partant est aigu. Ce qui est proposé.



Or d'autant que l'application des nombres

aux coſtez des triangles rectangles eſt vtile à pluſieurs operations, nous remarquerons icy que tout triangle eſt rectangle, duquel le plus grand coſté contenant 5 parties egales, le moindre contient trois des meſmes parties, & l'autre 4: ou bien ſelon trois autres nombres, doubles, ou triples, ou quadruples, &c. des trois ſuſdits 5, 4, 3, comme 10, 8 & 6: ou 15, 12 & 9; ou 20, 16 & 12; ou 50, 40, & 30; &c. Car il appert que le quarré du plus grand de trois tels nombres, eſt touſiours egal aux quarrez des deux autres nombres.

Mais ſi ſans auoir egard aux nombres cy deſſus, on vouloit faire vn triangle rectangle, ayant tous les trois coſtez en nombre de parties egales ſans fraction, on pourroit trouuer leſdits nombres en deux manieres; dont la premiere qu'on attribue auſſi à Pythagoras eſt telle. Soit pris pour le moindre coſté vn nombre de parties nompair, & iceluy nombre eſtant quarré, ſoit oſtee l'vnité de ſondit quarré, & la moitié du reſte d'iceluy quarré, ſera le moyen nombre, auquel adiouſtant l'vnité viendra le plus grand nombre: Comme par exemple, prenant 5 pour le nombre des parties du moindre coſté, ſon quarré eſt 25, duquel oſtant l'vnité reſtent 24, dont la moitié eſt 12, pour le nombre des parties du moyen coſté; mais adiouſtant l'vnité à iceluy, viendront 13 pour le nombre des parties du plus grand coſté.

La deuxieſme maniere eſt attribuee à Platon, & eſt telle: Soit pris vn nombre pair, & du quarré de la moitié d'iceluy ſoit oſtee l'vnité, & reſtera l'vn des

deux autres nombres; mais adiouſtant ladite vnité au meſme quarré, viendra le troiſieſme nombre: comme par exemple, prenant 6 pour l'vn des nombres, le quarré de la moitié d'iceluy eſt 9, dont l'vnité eſtant oſtee, reſtent 8, pour l'vn des deux autres nombres; mais adiouſtant ladite vnité à iceluy quarré, viennent 10 pour le troiſieſme nombre.

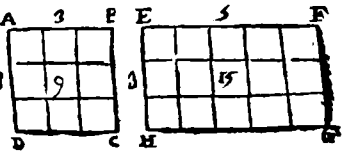
Fin du premier Element.

ELEMENT SECOND.

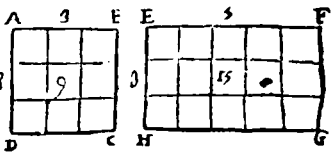
DEFINITIONS.

1. Tout parallelogramme rectangle, eſt dit eſtre contenu ſous deux lignes droictes qui font l'angle droict.

IL a eſté dit en la 36. def. 1. que c'eſt quo parallelogramme, & qu'il y en a de quatre ſortes: mais maintenant il faut entendre qu'vn parallelogramme eſt dit rectãgle, lors qu'il a tous les angles droicts, & par conſequent il y a ſeulement le quarré, comme A B C D, & le quarré long, comme E F G H, qui ſoient rectangles: car il n'y a que ces deux ſortes de parallelogrammes qui ayent les angles droicts. Et eſt à noter, qu'en tout parallelogramme ſi vn ſeul angle eſt donné droict, il eſt neceſſaire que les trois autres ſoient auſſi droicts: comme par exemple, ſi l'angle E du parallelogramme E F G H eſt droict: Ie dis que les trois autres F, G, H, ſont auſſi



droicts. Car d'autant que les lignes EF, GH sont paralleles les angles internes E & H, sont egaux à deux droicts par la 29 p.1. Mais l'angle E est droict par l'hypotheſe: donc auſsi l'angle H sera droict: & par la 34.p.1. leurs oppoſez G & F seront auſsi droicts. Et puis que par la 34.p.1. tout parallelogramme a les coſtez oppoſez egaux, il n'y peut auoir en vn parallelogramme que deux coſtez inegaux, leſquels conſtituent chaque angle d'iceluy: C'eſt pourquoy Euclide dit icy, tout parallelogramme rectangle eſtre contenu ſous deux lignes droictes, qui comprennent vn angle droict; tellement que le parallelog. rectãgle EFGH



ſera dict eſtre contenu ſous les deux lignes droictes, EF, EH: ou ſous les deux EF, FG, ou ſous FG, GH: ou finalement ſous GH, HE: ainſi deux lignes expriment toute la magnitude ou grandeur d'vn parallelogramme rectangle: ſçauoir l'vne comme EF, ou HG, ſa longueur: & l'autre comme EH, ou FG, ſa largeur: & par le mouuement imaginaire de l'vne de ces deux lignes en l'autre, ſe faict iceluy parallelogramme. Car ſi l'eſprit conçoit que la ligne EF, en allant en bas au long de ligne EH, ſe meuue en trauers, tellement qu'elle face touſiours angle droict auec icelle EH, iuſques à ce que le poinct E paruienne au poinct H, & le poinct F au poinct G; ſera deſcrit tout le parallel. rectangle EFGH. Le meſme ſera faict, ſi on poſe EH ſe mouuoir en trauers, ſ lon la ligne EF. D'où aduient que pour obtenir l'aire ou conte u de tout parallelogramme rectangle on multiplie vn coſté d'iceluy par l'autre: comme par exemple, le coſté EF eſtant de 5. pieds, & l'autre coſté EH de trois: ſi on multiplie vn nombre par l'autre,

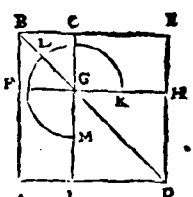
seront produicts 15 pieds quarrez, pour l'aire ou contenu de tout le parallelogramme EFGH. Pareillement au parallelogramme rectangle ABCD, le costé AB estant de 3 pieds, & le costé AD aussi de trois pieds: multipliant l'vn par l'autre, seront products neuf pieds quarrez pour l'aire d'iceluy rectangle, comme monstre la figure cy dessus.

Or est icy à noter, qu'en ce second liure, & és autres suiuans, Euclide appelle les parallelogrammes rectangles, simplement rectangles, ce qu'obseruent aussi les autres Geometres, tellement que par le nom de rectangle, il faut touſiours entendre parallelogramme rectangle. Derechef, que pour briefueté, & afin de ne repeter souuentesfois toutes les lettres apposées aux parallelogrammes, les Geometres ont de coustume d'exprimer chaque parallelogramme, soit rectangle ou non, par deux lettres seulement, sçauoir par celles qui sont diametralement oppoſées: tellement que pour denoter le parallelogramme ABCD, on dira seulement le parallelogramme AC, ou BD.

2. En tout parallelogramme, l'vn des parallelogrammes descrits à l'entour du diametre, auec les deux supplemens, est appellé Gnomon.

Au parallelogramme ABED, soit menee la diagonalle BD: & la ligne CGI parallele à AB, couppant icelle diagonalle BD en G, & par iceluy poinct G, soit menée FGH parallele à AD: & le parallelogrãme ABED sera diuiſé en quatre parallelogrammes, deux deſquels FC & HI, sont dicts estre descrits à l'entour du diametre ou diagonalle, mais les autres deux EG, AG, sont ap-

pellez supplemens, ainsi que nous auons dict à la 37. def. du premier liure. Or la figure composee d'iceux supplemens & de l'vn ou l'autre des parallelogrammes d'alentour la diagonalle, sera dit Gnomon: comme la figure CEDAFG, laquelle est composee des deux supplemens AG, GE, & du parallelogramme HI, qui est alentour le diametre; sera appellee Gnomon. Pour mesme raison la figure ABEHGI, qui est composee des deux supplemens IF, GE, & du parallelogramme FC, qui est alentour le diametre, sera aussi dit Gnomon. Et est à noter que pour briefuement exprimer telles figures, les Geometres y describent quelquesfois vne circonference, comme le Gnomon susdit ABEHGI, auquel est descrite la circonference KLM, sera exprimé & denoté par icelle circonference KLM.



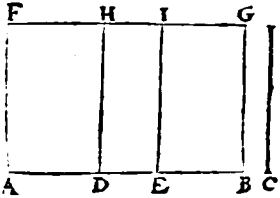
THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux lignes droictes l'vne est couppee en tant de parties que l'on voudra, le rectangle contenu soubs les deux toutes, est egal aux rectangles compris de la non couppée, & d'vne chacune partie de celle qui est couppée.

Soient deux lignes droictes AB & C, dont la premiere AB est couppée à l'aduanture en plusieurs parties, sçauoir est en AD, DE, EB. Ie dis

que le rectangle compris d'icelles deux lignes AB & C, sera egal aux trois rectangles compris de la ligne non couppée, & d'vne chacune partie de la couppee AB.

Qu'il ne soit ainsi: qu'on meine A F perpendiculaire à A B, par la 11. p. 1. laquelle soit faite egale à C, & du poinct F soit menee F G parallele à *AB*; & B G parallele à *AF* par la *31. prop. 1. Il est*



euident que le quadrilatere A F G B, sera vn parallelog. rectangle, & qu'iceluy sera compris des deux lignes donnees A B & C, puis que AF est egale à C. Item soient menees les deux lignes DH & E I paralleles à AF par la *31. prop. 1. Donc* par la deff. des parallelog. les trois quadrilateres A H, DI, EG, seront parallelogrammes rectangles cõpris des lignes egales AF, DH, EI, & des trois segmens AD, DE, EB, c'est à dire de la ligne C, & d'iceux trois segmens. Mais iceux trois parallelogrammes rectangles ensemble, conuiennent au rectangle AG, compris des lignes donnees: & par la 8. com. sent. ils luy sont egaux. Parquoy si de deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Ce qu'Euclide propose en lignes aux dix premiers Theoremes de ce second liure, nous l'auons appliqué & demonstré en nombres au Scholie de la 14. pr. 9. Neanmoins i'estime qu'il ne sera inutile de les expliquer icy par nombres, comme a fait Clauius: Car d'autant que ce qui prouient de la multiplication d'vn nombre

par vn autre respond au produit d'vne ligne en vne autre, on peut facilement & briefuement monstrer par nombres ce qui est icy demonstré en lignes auec beaucoup de paroles.

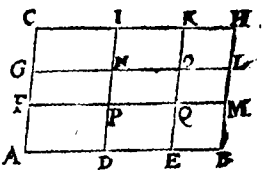
Soient donc proposez deux nombres, comme 10 & 6, le premier desquels soit diuisé en trois autres nombres ou parties, 5, 3 & 2. Or multipliant les deux nombres proposez entr'eux, c'est à sçauoir 10 & 6, sera produict le nombre 60, auquel sera egale la somme de ces trois nombres 30, 18 & 12, lesquels sont procreez multipliant chaque partie du nombre diuisé 10, c'est à sçauoir 5, 3, 2, par le nombre non diuisé 6: ainsi qu'il appert en l'operation cy-dessoubs:

				30
10	5	3	2	18
6	6	6	6	12
60	30	18	12	60.

Or Commandin demonstre icy deux autres Theoremes, dont le premier est tel.

S'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre desquelles soit couppee en tant de parties qu'on voudra; le rectangle compris d'icelles deux lignes, est egal aux rectangles contenus de chaque segment de l'vne, & d'vn chacun des segmens de l'autre.

Soient deux lignes droictes AB, AC, contenant vn angle droict A, & AB soit couppée és poincts D & E, mais AC és poincts F & G. Ie dis que le rectangle contenu sous AB, AC, est egal aux rectangles cõpris de chaque partie AD, DE, EB, & d'vn chacun segment AF, FG, GC, c'est à dire egal aux rectangles contenus de AD, AF: AD, FG: AD, GC: DE, AF; DE, FG: DE, GC: EB, AF: EB, FG: EB, GC. Car estant accomply le rectangle AH, soient tirees DI, EK, paralleles à

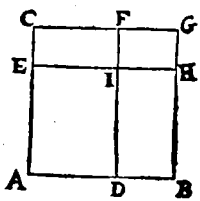


AC: Item FM, GL paralleles à AB, qui couppperont les premieres és poincts P, Q, N, O. Veu donc que le rectangle AP est contenu sous AD, AF: & FN sous AD, FG: & GI sous AD, GC, (pource que par la 34. prop. 1. les lignes FP, GN sont egales à icelle AD.) Item que les rectangles DQ, PO, NK, sont contenus sous DE, AF: DE, FG: DE, GC: (car DP, PN, NI sont egales à icelles AF, FG, GC & PQ, NO, à icelle DE, par la 34. prop. 1.) Et par la meſme raiſon les rectangles EM, QL, OH, ſont compris ſous EB, AF: EB, FG: EB, GC. Il eſt euident que le rectangle contenu ſous AB, AC, eſt egal aux rectangles compris ſous chacune des parties AD, DE, EB, & vn chacun des ſegmens AF, FG, GC: ce qui eſtoit proposé.

Nous rendrons auſsi manifeſte ce Theoreme par nombres: & pource ſoient deux nombres 12 & 8, le premier deſquels ſoit diuiſé en trois parties 6, 4 & 2: mais le dernier ſoit ſeulement diuiſé en deux parties 5 & 3. Or le produict de ces deux nombres propoſez multipliez entr'eux eſt 96, auquel eſt manifeſtement egale la ſomme de ces ſix nombres, 30, 20, 10, 18, 12 & 6, leſquels ſont produicts par la multiplication de chacune des parties 6, 4, 2, en chacune des parties 5 & 3, comme vouloit Commandin en ce premier Theor. Quant au ſecond il eſt tel qu'il enſuit.

S'il y a deux lignes droictes couppées comme on voudra, le rectangle compris ſous icelles, auec celuy compris ſous vne partie de l'vne d'icelles lignes, & vne partie de l'autre, eſt egal aux rectangles contenus ſous les lignes totales, & les ſuſdictes parties reciproquement, auec le rectangle contenu des deux autres parties.

Soient deux lignes droictes AB, AC, faisant l'angle droict A, lesquelles soient couppees comme on voudra en D & E. Ie dis que le rectangle compris sous AB, AC auec celuy compris sous les parties AD, EC, est egal aux rectangles contenus sous AB, EC : AC, AD; DB, AE. Car ayant accomply le rectangle AG, soit menee DF parallele à AC; & EH à AB, s'entrecouppans en I. Veu donc que le rectangle AG est egal aux rectangles EG, AI, DH: si on leur adiouſte le commun rectangle EF: les rectangles AG, EF, qui sont compris sous les toutes AB, AC, & les parties AD, EC, seront egaux aux rectangles EG, AF, DH, compris sous AB, EC: AC, AD: DB, AE: ce qui estoit proposé.



Afin que ce theor. de Commandin soit auſsi manifeſte par nombre, soient proposez deux quelconques nombres 9 & 5, le premier desquels soit diuisé en deux parties 5 & 4: mais l'autre soit diuisé en 3 & 2: Or le produit de ces deux nombres proposez est 45, & celuy de la partie 5, multipliee par la partie 3 est 15, & la somme de ces deux produicts est 60, auquel nombre est manifeſtement egale la somme & addition de ces trois nombres 27, 25 & 8, qui sont produicts de 9 par 3, de 5 par 5, & de l'autre partie 4 par l'autre partie 2.

COROLLAIRE.

Parce que dessus est manifeſte que s'il y a deux lignes droictes, l'vne & l'autre desquelles soit couppee comme on voudra, le rectangle compris sous icelles sera egal au rectangle cõpris sous vne totalle, & vn segmen de l'autre, & aux deux rectãgles cõtenus de l'autre segmen de ceſte 9, et d'vn chacun segmen de celle-là. Car le rectãgle AG

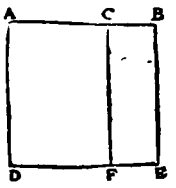
qui eſt compris des deux toutes AB, AC, eſt egal au rectangle EG, contenu de la toute EH, c'eſt à dire AB, & du segmen EC, & aux deux rectangles AI, DH, compris de l'autre segmen AE, & des ſegmens AD, DE. Iceluy rectangle AG eſt auſsi egal aux trois rectangles AH, EF, IG. Pareillement aux trois AF, DH, IG, comme auſsi aux trois autres DG, AI, EF.

Le meſme ſe doit auſsi entendre des nombres: car il eſt euident que les deux nombres cy deſsus propoſez, c'eſt aſſauoir 9 & 5, eſtans multipliez entr'eux produiſent 45, auquel ſont egaux ces trois nombres 27, 10 & 8, produits de la multiplication de 9 par la partie 3: & de la partie 2 par chacune des parties 5, 4. Et ainſi de toute autre partie qu'on voudra prendre.

THEOR. 2. PROP. II.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra: les rectangles compris de la toute & d'vne chaſcune partie, ſont egaux au quarré de la toute.

Soit la ligne droicte AB, couppee en deux parties telles qu'on voudra au poinct C. Ie dis que le rectangle de la toute AB, & de la partie AC, auec le rectangle de la toute AB, & de l'autre partie CB, ſont enſemble egaux au quarré de la toute AB.

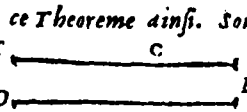


Qu'ainſi ne ſoit; Sur AB ſoit deſcrit le quarré

AE; puis de C soit menee CF parallele à AD, laquelle CF sera egale à icelle AD, c'est à dire à AB: car icelles AD, AB sont egales par la def. du quarré. Il est donc euident que les deux rectangles AF & CE, sont compris de la toute AB, ou son egale CF, & des deux parties AC & CB, & si ils conuiennent auec le quarré AE, & par consequent luy sont egaux. Si donc vne ligne droicte est couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Clauius demonstre encore ce Theoreme ainsi. Soit prise vne ligne droicte D egale à AB: Or puis que AB est coupee en C, le rectangle contenu soubs la non couppee D, & la couppee AB (qui est le quarré de la toute AB) sera egal aux deux rectangles compris soubs la non couppée D (c'est à dire soubs AB) & vn chacun des segmens AC, CB par la prec. prop. Ce qui estoit proposé.



Pour accommoder ce Theoreme aux nombres. Soit le nombre 12 diuisé en deux nombres 7 & 5: il est euident qu'au quarré d'iceluy nombre, qui est 144, sont egaux les deux nombres 84 & 60, qui sont produicts du mesme nombre 12 multiplié par chascune des parties 7 & 5: car ils font aussi 144, comme monstre l'addition d'iceux.

Or encore qu'en ce second Theoreme Euclide propose d'vne ligne diuisee en deux parties seulement, si est-ce toutesfois qu'en la mesme ma-

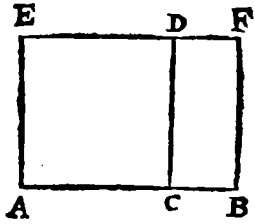
iere ſera demonſtré le meſme, ſi la ligne eſt diuiſee en tant de parties qu'on voudra. Ce qui ſe peut auſſi voir par nombres, ainſi qu'il enſuit. Soit le nombre 12 diuiſé en trois parties 5, 4 & 3. Le quarré dudit nombre ſera 144; auquel ſont egaux ces trois nombres 60, 48 & 36, leſquels ſont produicts du nombre propoſé 12, multiplié par chacune des parties 5, 4 & 3.

Sera auſſi demonſtré comme deſſus, que ſi vne ligne droicte eſt couppee en tant de parties qu'on voudra; le quarré de la toute eſt egal aux rectangles contenus ſoubs chaſques ſegmens & vn chaſcun ſegment. Ce que nous rendrons auſſi manifeſte par nombres: & pour ce ſoit le nombre 10 diuiſé en trois parties 5, 3 & 2: Il eſt euident que le quarré du nombre total 10 eſt 100, & qu'à iceluy ſont egaux ces neuf nombres 25, 15, 10, 15, 9, 6, 10, 6 & 4, leſquels ſont produicts par chacune des parties multipliée par chacune d'icelles.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra; le rectangle compris de la toute, & de l'vne des parties, eſt egal au rectangle compris d'icelles parties, & au quarré de la partie premierement priſe.

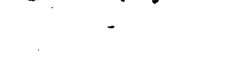
Soit la ligne droicte A B couppee comme on voudra au poinct C. Ie dis que le rectangle compris de la totale AB, & de l'vne ou l'autre partie, comme AC, eſt egal aux deux rectangles compris des deux parties AC & CB, & au quarré de la partie AC, laquelle auoit eſté premierement priſe.



Qu'il ne ſoit ainſi : Sur la partie AC ſoit fait le quarré AD par la 46. prop. 1. puis ſoit menee BF parallele à CD par la 31. prop. 1. rencontrant ED prolongee en F. Il eſt donc euident que AD eſt le quarré de la partie AC ; & CF le rectangle des parties AC & CB ; (car CD eſt egale à AC par la definition du quarré) & AF le rectangle de la toute AB & de la partie AC, ſur laquelle a eſté fait le quarré. Or le quarré AD, & le rectangle CF enſemble, conuiennent auec le rectangle AF ; & par conſequent egaux à iceluy. Si donc vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre encore ce Theor. ainſi. Soit priſe la ligne droicte D egale à la partie AC. D'autant que la ligne droicte AB eſt diuiſee en C, par la 1. prop. dece liure, le rectangle contenu ſoubs D & AB (c'eſt à dire ſoubs



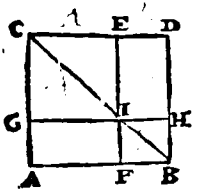
AC & AB) sera egal au rectangle compris sous D & CB (c'est à dire soubs AC, CB) & au rectangle contenu soubs D & BC, c'est à dire au quarré de la partie AC. Ce qui est proposé.

Pour accommoder ce Theor. aux nombres, soit quelconque nombre 12 diuisé en deux parties telles qu'on voudra 7 & 5. Or multipliant ledit nombre proposé 12 par sa partie 7, viendront 84, auquel produit sont egaux ces deux nombres 35 & 49, lesquels sont produits de 7 multipliez par 5, & de 7 par soy-mesme. Mais multipliant le mesme nombre 12 par l'autre partie 5, sera produict le nombre 60, auquel sont aussi egaux ces deux nombres 35, & 25, qui sont les produits des deux parties 7 & 5, multipliées entr'elles, & de la partie 5 en soy mesme: Et partant appert ce qui a esté proposé.

THEOR. 4. PROP. IV.

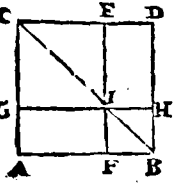
Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra; le quarré de la toute est egal aux deux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnée AB, couppée comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrez descrits sur les parties AF & FB, auec deux fois le rectangle d'icelles AF & FB, sont ensemble egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainsi ne soit. Sur la ligne totale AB soit descrit le quarré AD; & apres

auoir mené la diagonalle BC; du poinct F, soit menée la ligne droicte FE parallele à AC, couppant la diagonalle BC en I, & derechef par iceluy poinct I soit menee GH parallele à AB, le tout par la 31. prop. 1. Ie dis premierement que les quadrilateres HF & EG sont quarrez.



Car desia il appert qu'ils sont parallelogrammes, estans descrits entre lignes paralleles. Item puis que AD est quarré, les deux costez AB & AC seront egaux, & le triangle ABC est Isoscelle: & par la 5. prop. 1. les deux angles sur la base BC, sçauoir est ABC & ACB, seront egaux. Pareillement la ligne BC tombant sur les deux paralleles AC & FE, fera l'angle exterieur FIB egal à l'oppose interieur ACB par la 29. prop. 1. lequel estant egal à ABC, par la 1. com. sent. ABC & FIB seront egaux, & par la 6. prop. 1. les deux costez BF & FI seront egaux: & par la 34. prop. 1. le parallelogramme HF aura les quatre costez egaux: & partant il sera quarré; car l'angle FBH estant droict, les trois autres seront aussi droicts, comme nous auons demonstré à la 1. def. de ce liure. Par mesme discours on monstrera GE estre aussi quarré. Maintenant, d'autant que AI & ID sont descrits entre lignes paralleles, & les angles A & D sont droicts, il appert qu'ils sont parallelogr. rectangles, & egaux entr'eux par la 43. pr. 1. & sont compris des deux parties AF, FB, estant GI, EI, chacune egale à AF, & HI, IF à FB par la 34. prop. 1. & def. du quarré. Partant AI &

I D ſont deux fois le rectangle de AF & FB, leſquels auec les deux quarrez F H & G E conuiennent auec le quarré total A D, & par la 8. comm. ſent. ils luy ſeront egaux. Si donc vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, le quarré de la toute eſt egal, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par la demonſtration cy deſſus, que les parallelogrammes deſcrits à l'entour de la diagonalle d'vn quarré, & qui ont vn angle commun auec iceluy, ſont auſſi quarrez. Et de plus, il eſt euident que la diagonalle couppe en deux egalement les angles du quarré: Ce que nous auons auſſi demonſtré au 3. Theor. du Scholie de la 34. p. 1.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre encore apres Campanus ce 4. Theor. d'Euclide ainſi. D'autant que la ligne droicte A B eſt couppee en F, par la 2. prop. 2. le quarré de la toute A B ſera egal aux rectangles compris ſoubs la toute A B, & chacune des parties A F, F B. Mais par la 3. prop. 2. le rectangle contenu ſoubs A B, A F eſt egal au rectangle compris ſoubs A F, F B auec le quarré de la partie A F. Item le rectangle de A B, F B eſt egal au rectangle de F B, A F, auec le quarré de la partie F B. Donc le quarré de A B eſt auſſi egal aux quarrez des parties A F, F B, & aux rectangles contenus ſoubs A F, F B, & ſoubs F B, A F. Ce qui eſt propoſé.



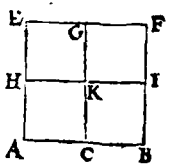
Pour accommoder ce Theoreme aux nombres: Soit le nombre 10 diuisé en deux parties 6 & 4: Il est manifeste que le nombre 100, qui est le quarré du nombre total 10, est egal à 36 & 16, qui sont les quarrez des parties 6 & 4, auec deux fois 24, nombre produit de sdites parties 6 & 4 multipliees entr'elles: car tous ces quatre nombes 36, 16, 24 & 24 font ensemble 100, ainsi qu'il appert en l'operation suiuante.

10	6	4	6	36
				16
10	6	4	4	24
				24
100.	36.	16.	24.	
				100.

Clauius demonstre aussi en ce lieu le Theoreme suiuant.

Si vne ligne droicte est double d'vne autre, le quarré de celle-là est quadruple du quarré de ceste-cy: & si vn quarré est quadruple d'vn autre quarré, le costé de celuy-là est double du costé de cestuy-cy.

Soient deux lignee droictes AB & D, desquelles AB est double de D. Ie dis que le quarré de AB est quadruple du quarré de D. Car ayant diuisé AB en deux egalement en C, si on fait telle construction qu'en ceste 4. propos. il est euident que les 4. parallogrammes AK, CI, HG, KF. seront quarrez & egaux entr'eux. Mais le quarré AF est egal à iceux quatre quarrez: donc le quarré de AB sera quadruple du



quarré

quarré de AC, c'est à dire de D, qui luy est egale : car AB est double de l'vne & de l'autre.

Pour la seconde partie : Soit le quarré de AB quadruple du quarré de D. Ie dis que AB est double de D. Car AB estant couppee en deux egalement en C, le quarré de AB sera quadruple du quarré de AC, comme il a esté demonstré cy-dessus. Mais le quarré de AB a esté posé aussi quadruple du quarré de D : donc les quarrez des lignes AC & D, sont egaux : & partant icelles lignes AC & D aussi egales. Mais AB est double de AC : donc aussi double de D.

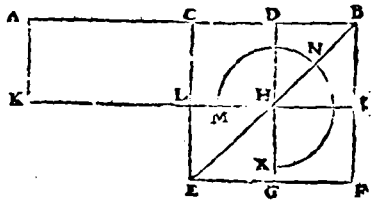
Ce Theoreme est aussi manifeste en nombres : Car soient deux quelconques nombres 10 & 5, dont le premier est double de l'autre. Il appert que 100, quarré du premier nombre 10, est quadruple de 25, quarré du dernier nombre 5.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte est couppee en deux parties egales, & en deux inegales : le rectangle contenu d'icelles parties inegales, auec le quarré de la partie du milieu, sont egaux au quarré de la moitié de la toute.

Soit la ligne donnée AB couppée en deux parties egales au poinct C, & en deux inegales au poinct D. Ie dis que le rectangle compris des deux parties inegales AD & BD, auec le quarré

de la partie du milieu CD, ſont egaux au quarré de la moitié CB.



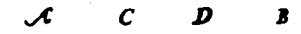
Car ſur la ligne CB ſoit deſcrit le quarré CF par la 46. prop. 1. & apres auoir mené DG parallele à BF ſoit menee la diagonalle BE couppant DG au poinct H, par lequel ſoit menee interminement IK parallele à AB, couppant CE en L: puis du poinct A, ſoit auſſi menee AK parallele à DH, rencontrant KI en K. Donc par le Corol. de la prec. prop. DI, LG ſeront quarrez: & partant la ligne DH egale à la ligne DB: & par la 34. prop. 1. LH eſt auſſi egale à CD: parquoy le rectangle AH eſt compris des deux ſegmens AD, DE; & LG ſera quarré de la partie du milieu CD. Il faut donc prouuer que le rectangle AH, auec le quarré GL, eſt egal au quarré CF, faict ſur la ligne CB, moitié de la toute AB.

Or le rectangle AL eſt egal au rectangle CI, par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egales AC & CB, & entre meſmes paralleles AB & KI. Pareillement les ſupplemens CH & HF ſont egaux par la 43. propoſition 1. auſquels ſi on adiouſte le quarré commun DI, les tous CI & DF ſeront egaux: & par la 1. com. ſent. DF ſera egal à AL, auſquels ſi on adiouſte auſſi le ſupplement commun CH, le gnomon MNX ſera egal au rectangle AH. Mais iceluy Gnomon, & le quarré GL, conuiennent auec le quarré CF: & partant ſont egaux par

la 8. com.sent. Donc aussi le rectangle A H, & le quarré G L seront egaux au quarré C F par la 1. com.sent. Parquoy si vne ligne droicte est couppee en deux parties egales, & en deux inegales, &c. Ce qu'il fallout demonstrer.

SCHOLIE.

Nous adiousterons tant en ce Theor. qu'aux 5. suivans les demonstrations qu'en a fait le docte Maurolycus.

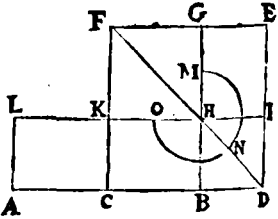


D'autant que par la 4 p. 2. le quarré de C B est egal aux quarrez de C D & D B, auec deux fois le rectangle d'icelles; & que par la 3. p. 2. le rectangle de C B, D B est egal au rectangle de C D, D B, auec le quarré de D B: le quarré de C D sera egal à l'autre quarré de C D, auec le rectangle de C B, D B, & celuy de C B, D B, ou de A C, D B. Mais par la 1. prop. 2. le rectangle des toutes A D, D B, est egal aux rectangles de D B, A C, & de D B, C D. Donc le quarré de C B sera egal au quarré de C D, auec le rectangle de A D, D B. Ce qui estoit proposé.

Pour accommoder ce Theoreme aux nombres, soit le nombre 12 diuisé en deux parties egales 6 & 6; Et aussi en deux parties inegales 8 & 4; & par ainsi la plus grande partie 8 excede la moitié 6 du nombre 2, qui est la partie du milieu. Il est euident que 32, nombre produit des deux nombres ineaux 8 & 4, auec 4 qui est le quarré de 2, est egal à 36, qui est le quarré de 6, moitié du nombre proposé.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte est couppee en deux parties egales, & qu'on luy adiouste directement quelque autre ligne droicte: le rectangle de la toute & de l'adiouſtee comme d'vne, & de l'adiouſtee, auec le quarré de la moitié, est egal au quarré qui est faict de la moitié & de l'adiouſtee comme d'vne.



Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement au poinct C; & à icelle AB soit adiouſtee directement la ligne BD. Ie dis que le rectangle compris de la totale AD, & de l'adiouſtee BD, auec le quarré de la moitié CB, est egal au quarré de la ligne CD, laquelle est compoſee de la moitié CB, & de l'adiouſtee BD.

Qu'ainſi ne soit: ſur la ligne CD soit deſcrit le quarré CE, & tiré ſa diagonalle DF; & apres auoir du poinct B, mené BG parallele à DE, laquelle couppe la diagonalle au poinct H; par iceluy poinct H soit menee interminement IKL parallelle à AD par la 31. prop. 1. Item AL parallele à DI, rencontrant IL en L.

Premierement le rectangle A I eſt compris de la toute & adiouſtee comme d'vne A D, & de l'adiouſtee D I (car icelle D I eſt egale à l'adiouſtee B D eſtant B I quarré par le Cor. de la 4. P. de ce liure.) Item K G, qui eſt quarré par le meſme Cor. eſt faict ſur H K egale à la moitié C B par la 34. prop. Ie dis donc que le rectangle A I, & le quarré K G ſont enſemble egaux au quarré C E. Car les deux ſupplemens C H & H E eſtans egaux par la 43. pr. 1. Item les deux rectangles A K & C H auſſi egaux par la 36. prop. 1. d'autant qu'ils ſont ſur baſes egales, & entre meſmes paralleles: & par la 1. com. ſent A K ſera egal à H E, & en adiouſtant à chacun d'iceux le rectangle commun C I. le Gnomon M N O ſera egal au rectangle A I. Mais iceluy Gnomon auec le quarré K G, ſont egaux au quarré C E: donc le rectangle A I auec le quarré K G ſera egal au meſme quarré C E. Parquoy ſi vne ligne droicte eſt coupee en deux parties egales, &c. C e qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement. D'autant que par la 4 pr. 2. le quarré de C D eſt egal aux deux quarrez de C B, B D auec deux fois le rectangle d'icelles C B, A C B D

B D; & que par la 1. pr. 2. le rectangle des toutes A D, B D eſt egal aux trois rectangles de D B, A C; D B, C E; & D B, D B, (qui eſt le quarré de D B) le quarré de C D ſera egal à l'autre quarré de C B auec le rectangle de A D, B D. Ce qu'il falloit demonſtrer.

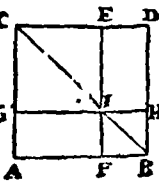
Pour appliquer ce Theor. aux nombres, ſoit le nombre 12 diuiſé en deux nombres egaux 6 & 6; & à iceluy nombre 12 ſoit adiouſté 3. Il eſt euident que le nombre 45 produict de tout le nombre compoſé 15 multiplie par

l'adiousté 3. auec 36 quarré de la moitié 6, font 81, tout ainsi que le quarré de 9, composé de ladite moitié 6, & de l'adiousté 3.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si vne ligne droicte est couppee comme on voudra; le quarré de la toute & le quarré de l'vne des parties, sont egaux au quarré de l'autre partie, & deux fois le rectangle cópris de la totale, & de la partie premieremẽt prise.

Soit la ligne AB coupee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrés de la totale AB, & de la partie AF, sont egaux au quarré de l'autre partie FB, & deux fois le rectangle de AB, AF.



Qu'il ne soit ainsi: sur AB soit descrit le quarré AD auec sa diagonalle BC: & apres auoir mené du poinct F, la ligne FE parallele à AC, laquelle coupera la diagonalle BC au poinct I; d'iceluy poinct soit menee GH parallele à AB par la 12. pr. 1 Donc FH & GE seront quarrez par le Cor. de la 4 pr. de ce liu. & puis que par la 34. pr. 1. GI est egale à AF, GE sera quarré du segm. AF. Derechef pource que AC est egale à AB, le rectangle AE sera compris sous la toute AB & le segm AF. Par mesme raison le rectangle GD sera compris sous les mesmes lignes AB, AF: (car CD, CG sont egales à AB, AF, à cause des quarrez AD, GE.) Veu donc que les re-

ctangles AE, ID, auec le quarré FH ſont egaux au quarré AD: ſi on leur adiouſte le commun quarré EG, les quarrez AD, EG ſeront egaux aux rectangles AE, GD, (chacun deſquels eſt compris de la toute AB & de la partie AF) auec le quarré FH. parquoy ſi vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. pr. 2. le quarré de AB eſt egal aux deux quarrez de AF, FB, & deux fois le rectangle d'icelles AF, FB; ſi on adiouſte le quarré commun de AF, les quarrez de AB, AF ſeront egaux aux trois quarrez de AF, AF, FB, auec deux fois le rectangle de AF, FB. Mais par la 3. p. 2. le rectangle de AB, AF eſt egal au rectangle de AF, FB, auec le quarré de AF; & partant deux fois le rectangle de AB, AF, eſt egal à deux fois le rectangle de AF, FB auec deux fois le quarré de AF: donc les quarrez de AB, AF, ſont egaux à l'autre quarré de FB, auec deux fois le rectangle de AB, AF. Ce qui eſtoit a demonſtrer.*



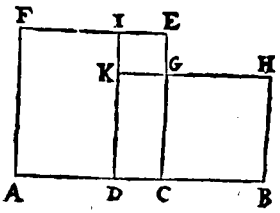
Pour accommoder ce Theor. aux nombres, ſoit diuiſé le nombre 12 en deux tels nombres qu'on voudra 7 & 5. Or il eſt euident que 144 nomb. quarré de 12, & 49 nombre quarré de la partie 7, ſont enſemble egaux à 193 qui eſt fait de 25 nombre quarré de l'autre partie 5 & deux fois 84, produit de 12 multiplié par 7. Semblablement 144 & 25, nombres quarrez de 12 & 5 ſont enſemble egaux à 169, fait de 49 quarré de 7, & deux fois 60 produit de 12 multiplié par la partie 5.

Commandin demonſtre en ce lieu le Theor. ſuiuant.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties inegales, les quarrez d'icelles parties ſont egaux au rectangle contenu deux fois ſous icelles

parties, & au quarré de la ligne, dont la plus grande partie excede la moindre.

Soit la ligne droicte A B couppee en deux parties inegales, AC, CB, desquelles AC est la plus grande, & d'icelle AC soit prise AD egale à B C, afin que DC soit l'excez de la partie AC par dessus B C. Ie dis que les quarrez des parties AC, C B sont egaux au rectangle contenu deux fois soubs AC, CB, & au quarré de D C. Car soient construicts les quarrez AE, CH, & mené D I parallele à CE: puis prolongé H G iusques à ce qu'elle rencontre D I en K. Or d'autant que les lignes B C, AD sont egales, leur adioustant la commune DC, la toute AC, c'est à dire CE, sera egale à la toute DB. Mais CG est aussi egale à CB: donc aussi le reste GE sera egal au reste DC: & partant puis qu'aussi IE est egale à DC par la 34. pr. 1. GE, IE seront egales: & partant IG sera le quarré de l'excez DC. Et d'autant que les rectangles AI, DH sont contenus sous les parties AC, C B; (car AC est egale à l'vne & à l'autre ligne AF, DB: CB à l'vne & à l'autre AD, BH.) Il est manifeste que les quarrez AE, CH, des parties A C, CB sont egaux aux rectangles AI, DH, qui sont contenus sous les parties AC, CB, & à IG quarré de l'excez D C Ce qui estoit proposé.



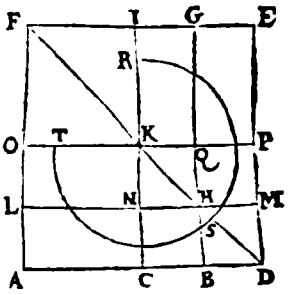
Le mesme est aussi manifeste par nombres: car le nombre 12 estant diuisé en deux parties inegales 7 & 5, dont la plus grande excede la moindre de 2: les quarrez d'icelles parties seront 49 & 25, qui font ensemble 74, auquel nombre sont egaux deux fois 35 produit de 7 multiplié par 5, auec 4 quarré de l'excez 2.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra : quatre fois le rectangle compris de la toute & de l'vne des parties, auec le quarré de l'autre partie, eſt egal au quarré de la toute, & d'icelle partie premierement priſe comme d'vne ſeule ligne.

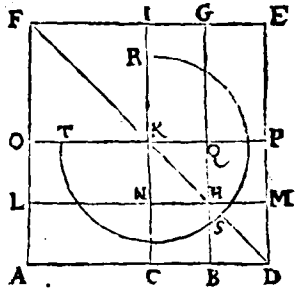
Soit la ligne donnee A B couppee comme on voudra au poinct C. Ie dis que quatre fois le rectangle, compris de A B & de l'vne ou l'autre partie, ſçauoir B C, auec le quarré de l'autre partie A C, ſont enſemble egaux au quarré de A D compoſee de la totale A B, & de la partie B C.

Qu'il ne ſoit ainſi : Soit prolongee A B vers D, & pris B D egale à B C, puis ſur la totale A D ſoit fait le quarré A E auec ſa diagonale F D, & des deux poincts B & C, ſoient menees B G & C I paralleles à D E. Item des poincts H & K, auſquels elles couppent la diagonalle F D, ſoient menees L M & O P paralleles à A D, par



la 31. prop. 1. lesquelles couppent les premieres paralleles en N & Q.

Premierement, par ce qui resulte de la 4. prop. de ce liure les rectangles OI, NQ, BM au long de la diagonalle seront quarrez. Item d'autant que CB est egale à BD: CH, & BM, seront egaux & quarrez: (estant l'vn d'iceux quarré) pareillement NQ & HP aussi egaux quarrez; ainsi les quatre CH, BM, NQ, HP, seront quarrez, & egaux: & par la 43. p. 1. les deux supplemens. LK & KG seront aussi egaux entr'eux, & par la 36. p. 1. LK est egal à AN; & KG à QE: & par consequent iceux quatre rectangles sont aussi egaux entr'eux. Mais comme aux precedentes, il est euident que AH est vne fois le rectangle de AB & BH, (egale à BD) qui est vn des quatre rectangles auec vn des quatre petits quarrez egaux: donc iceux quatre rectangles auec iceux quatre quarrez faisant le Gnomon RST seront egaux à quatre fois le rectangle de AB & BD; lequel Gnomon auec le quarré de OK, (egale à AC par la 34. p. 1.) sçauoir est OI, conuiennent auec le quarré AE: & partant par la 8. com. sent. ils luy seront egaux: Si donc vne ligne droicte est couppee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Autrement, *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré*

de AD est egal aux quarrez de AB, BD, & à deux fois le rectangle d'icelles AB, BD, c'est à dire, aux quarrez de AB, BC auec deux fois le rectangle de AB, BC: &



que par la precedente les quarrez de AB, BC sont egaux au quarré de AC auec deux fois le rectangle de AB, BC: le quarré de AD sera egal à quatre fois le rectangle de AB, BC, auec le quarré de AC. Ce qu'il falloit demonstrer.

Pour accommoder ce theoreme aux nombres, soit le nombre 12, diuisé comme on voudra en 7 & 5. Or ledit nombre 12 multiplié par la partie 7, faict 84, qui pris quatre fois auec 25 quarré de l'autre partie 5, font 361, qui est le nombre quarré de 19, composé de 12 & 7. Semblablement le nombre 240, qui est faict du nombre proposé 12 multiplié quatre fois par la partie 5, estant adiousté auec 49, quarré de l'autre partie 7, font 289, tout ainsi que le quarré de 17 nõbre composé du donné 12, & de la partie 5.

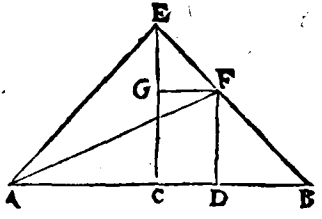
THEOR. 9. PROP. IX.

Si vne ligne droite est couppée en deux parties egales, & en deux inegales: les quarrés d'icelles parties inegales seront doubles des quarrez de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit la ligne donnée AB couppee en deux egalement au poinct C, & en deux inegalement en D. Ie dis que les quarrez de AD & DB parties inegales, sont doubles des quarrez de AC moitié, & de CD partie du milieu.

Qu'il ne soit ainsi: au poinct C soit leuee la perpendiculaire CE, qu'on fera egale à CA, & apres auoir mené AE & BE, soit leuee la perpen-

diculaire DF, couppant B E en F, duquel poinct soit menee FG parallele à AB, couppant CE en G: & finalement soit menee AF.

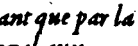


Premierement, les triangles A C E, & E C B seront Isoscelles, & feront les angles sur les bases AE & EB egaux par la 5. prop. 1. estant l'angle ECB droict pour estre CE perpendiculaire. Item FDB estant droict, & DBF demy droict, aussi par la 32. pr. 1. DFB sera demy droict, & par la 6. pr. 1. les costez DB & DF, du triangle BDF, seront egaux entr'eux. Par le mesme discours sera demonstré que les costez G F, G E du triangle FGE, sont egaux entr'eux. Item il est euident que l'angle AEB sera droict, estant composé des deux demy droicts AEC, & BEC.

Maintenant par la 47 pr. 1. au triangle rectangle ACE, le quarré de AE, costé qui soustient l'angle droict, est double du quarré de AC; estant egal à tous les deux de AC & CE. Par mesme discours, le quarré de EF est double du quarré GF, ou CD son egal par la 34. pr. 1. partant les deux quarrez AE & EF, seront doubles des deux de AC & CD. Pareillement le quarré AF estant egal aux deux de AE & EF par la 47. pr. 1. iceluy sera double des deux de AC & CD. Mais par la mesme 47 pr. 1. le quarré de AF est egal aux deux de AD & DF, ou DB son egale: donc les deux quarrez de A D & D B seront doubles des deux de AC & CD. Si donc vne ligne droicte est couppee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. Le quarré de la ligne AD est egal aux deux quarrez de AC, CD, & à deux fois le rectangle d'icelles AC, CD: si on adiouste le commun quarré de DB, les deux quarrez de AD, DB, seront egaux aux trois quarrez de AC, CD & DB, auec deux fois le rectangle de AC, CD, ou de BC, CD. Mais par la 7. prop. 2. les quarrez de BC ou AC, & de CD, sont egaux au quarré de DB auec deux fois le rectangle de BC, CD. Donc les quarrez de AD, DB sont egaux à deux fois les quarrez de AC, CD: & partant doubles d'iceux. Ce qu'il falloit demonstrer.*



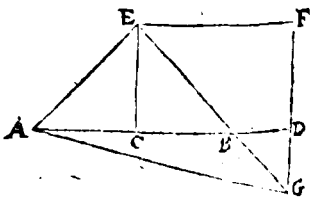
Commandin demonstre encore cette proposition autrement, ainsi qu'il ensuit. D'autant que AC est egale à CB, & icelle CB excede CD de DB, aussi AC excedera la mesme CD de DB. Parquoy comme il a esté demonstré à la 7. proposit. 2. les quarrez de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, auec le quarré de DB, & partant les trois quarrez de AC, CD, DB auec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. proposit. 2. le quarré de AD est egal aux quarrez de AC, CD auec deux fois le rectangle de AC, CD. Donc les quarrez de AD, DB sont doubles des quarrez de AC, CD.

Pour aussi rendre manifeste ce Theoreme par les nombres, soit le nombre 12 diuisé en deux parties egales 6 & 6, & en deux inegales 8 & 4: de sorte que la partie du milieu sera 2. Or il est euident que 64 & 16, qui sont les quarrez des parties inegales 8 & 4, sont ensemble doubles de 36 & 4, qui sont les quarrez de la moitié 6, & de la partie du millieu 2, comme vouloit la propos.

THEOR. 10. PROP. X.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux parties egales, & on luy adiouſte directement quelque autre ligne droicte; le quarré de la toute auec l'adjouſtee comme d'vne, & le quarré de l'adiouſtee, ſont doubles des quarrez de la moitié, & de celle qui eſt faite de la moitié, & de l'adiouſtee comme d'vne.

Soit la ligne droicte A B couppee en deux egalement au poinct C, à laquelle ſoit adiouſtee directement B D. Ie dis que les quarrez de A D & B D, ſont doubles des quarrez de AC, & CD.



Qu'ainſi ne ſoit: au poinct C ſoit leuee la perpendiculaire CE par la 11. prop. 1. egale à AC: & apres auoir mené les deux lignes A E & E B, ſoient menees par la 31. prop. 1. EF parallele à C D, & D F à C E ſe rencontrant en F, & ſoient continuees EB, & F D iuſques à ce qu'elles ſe rencontrent au poinct G;

(elles s'y rencontreront, puis que les deux angles BEF, EFD, ſont moindres que les deux droicts CEF, EFD.) Finalement ſoit tirée la ligne droicte AG.

Premierement, puiſque AC & CE ſont egaux: auſſi par la 5. prop. 1. les angles EAC & CEA ſont egaux, & demy droicts par la 32. prop. 1. eſtant l'angle ACE droict. Par meſme diſcours, les angles CBE & BEC ſeront auſſi demy droicts, & l'angle AEB droict, eſtant compoſé de deux demy droicts. Item par la 15. prop. 1. l'angle DBG ſera egal à CBE, & partant demy droict: & les deux lignes CD & EF eſtans paralleles, par la 29. pr. 1. l'angle interieur de meſme coſté BEF ſera auſſi demy droict, & l'angle F eſtant droict par la 34. prop. 1. car il eſt oppoſé à vn droict, BGD ſera auſſi demy droict par la 32. p. 1. & par la 6. p. 1. les triangles EGF, & BDG, ſeront Iſoſcelles rectangles, & CF parallelogramme rectangle.

Maintenant par la 47. prop. 1. le quarré de AE, coſté qui ſouſtient l'angle droict C, eſt egal aux deux quarrez des deux autres coſtez AC, CE, partant double du quarré de AC. Par meſme diſcours EG ſe trouuera double du quarré de EF, ou de CD, qui luy eſt egale par la 34. prop. 1. ainſi les deux quarrez de AE & EG, ou le ſeul de AG qui leur eſt egal par la 47. prop. 1. ſera double des deux de AC, CD. Mais par la meſme 47. p. 1. il eſt egal aux deux quarrez de AD & DG, ou BD ſon egal, & par conſequent les deux quarrez de AD & BD, ſeront doubles des deux de AC & DC. Si donc vne ligne droicte eſt couppée en deux parties egales, &c

Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Autrement. *D'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AD est egal aux quarrez de AC, CD, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CD, ou de EC, CD : Si on adiouste le commun quarré de BD, les deux quarrez de AD, BD seront egaux aux trois quarrez de AC, CD, BD auec deux fois le rectangle de BC, CD. Mais*



par la 7. p. 2. le quarré de BD auec deux fois le rectangle de BC, CD, est egal aux quarrez de CD, BC, c'est à dire de AC, CD. Donc les quarrez de AD, BD, sont egaux à deux fois les quarrez de AC, CD : & partant ils sont doubles d'iceux. Ce qu'il falloit demonstrer.

Commandin demonstre encor cette prop. ainsi. D'autant que AC est egale à CB, & CD excede icelle CB de BD, aussi la mesme CD excedera AC du mesme excez BD : Parquoy comme il a esté demonstré à la 7. prop. de ce liure, les quarrez de AC, CD, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD auec le quarré de BD : & partant les trois quarrez de AC, CD, BD auec deux fois le rectangle de AC, CD, sont doubles des quarrez de AC, CD. Mais par la 4. p. 2. le quarré de AD est egal aux deux quarrez de AC, CD, & deux fois le rectangle d'icelles AC, CD : Donc les quarrez de AD & BD sont doubles des quarrez de AC, CD.

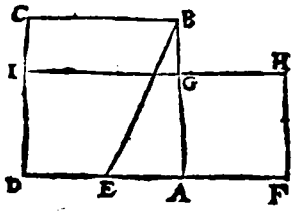
Ce Theoreme est aussi euident en nombres : car le nombre 8 estant diuisé en deux parties egales 4 & 4, si on luy adiouste quelconque nombre 5, le nombre composé sera 13, duquel le quarré 169, auec 25 quarré du nombre adiousté 5, faict 194, qui est double du nombre 97, somme de ces deux nombres 16 & 81, qui sont les quarrez de la moitié 4, & de 9, composé de ladite moitié, & du nombre adiousté 5.

PROBL.

PROBL. I. PROP. XI.

Couppper vne ligne droite donnee, tellement que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties, ſoit egal au quarré de l'autre partie.

Soit la ligne droicte donnee AB, laquelle il faut diuiſer ſelon le requis de la propoſition.



Apres auoir conſtruict ſur icelle AB le quarré AC, ſoit diuiſée AD en deux egalement au poinct E, & apres auoir mené EB, & prolongé EA vers F, tellement que EF ſoit egale à EB, ſur AF ſoit faict le quarré AH; & ſoit continuée HG iuſques en I. Ie dis que la ligne AB eſt couppee au poinct G, en ſorte que le rectangle CG compris de BC egale à BA, & de BG partie de BA, eſt egal au quarré de l'autre partie AG, ſçauoir eſt à GF.

Car la ligne AD eſtant couppee en deux egalement en E, & on luy adiouſte directement AF, le quarré de la moitié & de l'adjouſtée comme d'vne, ſçauoir EF, ou de ſon egale EB, eſt egal au rectangle de DF, AF, & au quarré de AE par la 6. p. de ce liure. Mais le quarré de EB eſt egal aux deux de BA & AE par la 47. prop. 1. ainſi les deux quarrez de BA & AE ſeront egaux au re-

ctangle de DF, AF, & au quarré de AE : oſtant donc le quarré de AE commun, les demeurans quarré de AB, ſçauoir AC, & le rectangle de DF, AF, ſçauoir FI, ſeront egaux ; deſquels AC & FI, ſi on oſte le rectangle commun AI ; le demeurant quarré FG, ſera egal au demeurant rectangle GC. Parquoy nous auons coupé la ligne droicte AB en G, tellement que le rectangle d'icelle & de la partie GB, eſt egal au quarré de l'autre partie AG: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné en nos Memoires Mathematiques Probl. 72. de la Geometrie pract. à coupper vne ligne droicte, non ſeulement comme enſeigne icy Euclide, mais auſsi en ſorte que le rectangle de la toute, & de l'vne des parties ſoit double, ou triple, ou quadruple, &c. ou moitié, ou tiers, ou quart, &c. du quarré de l'autre partie : bref qu'icelluy rectangle ſoit au quarré, ſelon quelconque raiſon donnee.

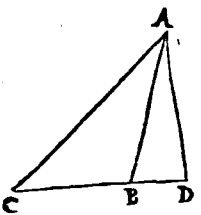
Quant aux nombres, ils ne ſe peuuent accommoder à ce probleme, ſinon qu'on y employe les nombres irrationaux: Car aucun nombre abſolu ne peut eſtre diuiſé en deux autres tels que le nombre produict du tout, multiplié par l'vne des parties ſoit egal au nombre quarré de l'autre partie, comme il ſera demonſtré au Scholie de la 14. p. 9. auquel les 10. theoremes precedens ſeront demonſtrez en nombres : Neantmoins pour le contentement de ceux qui entendent les operations des nombres irrationaux, nous appliquerons les nombres aux lignes & ſuperfices mentionnez en la demonſtration cy-deſſus. Que la ligne AB ſoit 8 : donc ſa moitié AE ſera 4, & leurs quarrez ſeront 64 & 16, qui ſont enſemble 80, pour le quarré de BE, ou EF, qui par conſequent ſera irrationelle, c'eſt à ſçauoir √80 : & d'icelle EF, oſtons EA 4, & reſte-

ront pour AF, ou AG, √80—4, qui ostez de la toute AB 8, resteront pour l'autre partie BG 8—√80—4, c'est à dire 12—√80, qui multipliez par le nombre total 8, feront 96—√5120 pour le rectangle GC, & autant est le quarré AH; car la partie AG, qui est √80—4, multipliee par soy-mesme fait aussi 96—√5120, comme vouloit ce probleme.

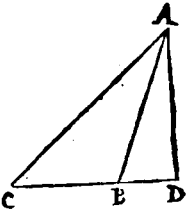
THEOR. 11. PROP. XII.

Aux triangles ambligones, le quarré du costé qui soustient l'angle obtus, est plus grand que les quarrez des deux autres costez, de la quantité de deux fois le rectangle, compris d'vn des costez contenant l'angle obtus, sçauoir celuy sur lequel estant prolongé tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

Soit le triangle ambligone A B C, duquel soit prolongé le costé CB iusques en D, & du poinct A soit menee la perpendiculaire AD par la 12. prop. 1. Ie dis que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle obtus A B C, est plus grand que les quarrez de A B & CB, de deux fois le rectangle de C B & B D, sça-



uoir CB, qui eſt l'vn des coſtez faiſant l'angle obtus, celuy ſur lequel eſtant prolongé tombe la perpendiculaire AD, & BD priſe dehors entre l'angle obtus, & la perpendiculaire, c'eſt à dire que le quarré du coſté AC eſt egal aux deux quarrez des coſtez AB, BC, auec deux fois le rectangle de CB, BD.

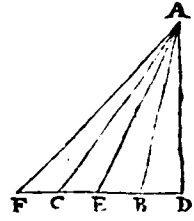


Qu'il ne ſoit ainſi : Puis que la ligne CD eſt couppee en B, le quarré d'icelle CD ſera egal aux deux quarrez de CB, BD, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD, par la 4. prop. de ce liure: Adiouſtant donc le commun quarré de AD, les deux quarrez de CD, DA, ſeront egaux aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de AC eſt egal aux quarrez de CD, DA: donc auſſi le quarré de AC ſera egal aux trois quarrez de CB, BD, DA, & au rectangle compris deux fois ſous CB, BD. Et puis que par la 47. p. 1. le quarré de AB eſt egal aux quarrez de BD, DA; le quarré de AC ſera egal aux quarrez de CB, AB, & deux fois le rectangle de CB, BD. Parquoy aux triangles ambligones, le quarré du coſté qui ſouſtient l'angle obtus, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or que la perpendiculaire tiree de A, doiue tomber ſur le coſté CB prolongé de la part de l'angle obtus, comme l'a pris icy Euclide, nous le demonſtrerons ainſi : Soit le trian-

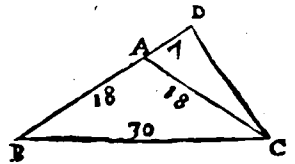
gle ABC ayant l'angle B obtus, & le costé CB prolongé de la part de B. Ie dis que la perpendic. tiree de A tombe hors le triangle sur le costé CB prolongé, comme est la ligne droicte AD. Car si elle tomboit dans le triangle, comme est la ligne AE, les deux angles ABE, AEB seroient plus grands que deux droicts, contre la 17. prop. 1. Mais si elle tomboit hors le triangle sur le costé BC prolongé de la part de C, comme est AF; derechef au triangle ABF, les deux angles ABF, AFB seroient plus grands que deux droicts: ce qui est absurde.



Or afin de pouuoir par le moyen des nombres faire paroistre la verité de ce theoreme, nous enseignerons icy certaines regles, par lesquelles on pourra construire diuers triangles ambligones, ayans les costez commensurables en nombre entier, & aussi la ligne d'entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

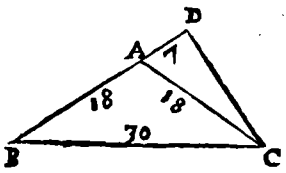
REGLE I.

Pour construire vn triangle ambligone Isoscelle, ayant les costez, & la ligne prise dehors entre la perpendiculaire & l'angle obtus commensurables en nombre entier, soit faict le segment exterieur, d'autant de parties egales que le nombre d'icelles parties se puisse diuiser exactement par 7, comme de 7, ou de 14, ou de 21, ou de 28, ou 35, &c. puis apres soit



posé pour chasque costé egal, le double d'iceluy segment, & outre ce $\frac{4}{7}$ d'iceluy, mais pour le plus grand

coſté, le quadruple & $\frac{2}{7}$ dudit ſegment exterieur : comme au triãgle ABC, ou le ſegment AD eſt poſé de 7, & l'vn & l'autre des coſtez AB, AC de 18, qui eſt double & $\frac{4}{7}$ de 7; mais le plus grand coſté BC de 30, qui eſt le quadruple & $\frac{2}{7}$ de 7. Or que ce triangle ABC compoſé comme deſſus ſoit ambligone, il eſt euident : Car le quarré du coſté BC eſt 900, & ceux des coſtez AB, AC ſont ſeulement enſemble 648, chacun d'iceux eſtant 324 : & partant parce que nous auons demonſtré au Scholie de la 48. p. 1. l'angle BAC ſera obtus. Donc le triangle ABC duquel les coſtez & la ligne exterieure AD ſont commenſurables en nombre entier, eſt ambligone. Parquoy le quarré dudit coſté BC, qui eſt 900 ſera egal à la ſomme des quarrez des deux autres coſtez AB, AC, & de deux fois BA en DA, c'eſt à dire à la ſomme de ces quatre nombres 324, 324, 126, 126, qui ſont auſſi 900, comme veut cette 12. prop.



REGLE II.

Pour conſtruire vn triangle ambligone ſcalene duquel non ſeulement les coſtez & la ligne priſe dehors entre la perpendiculaire tombant ſur le moindre coſté prolongé & l'angle obtus, mais auſſi ladite perpendiculaire, ſoient commenſurables en nombre entier ; ſoit poſé le ſegment exterieur d'autant de parties qu'on voudra qui ſe puiſſent exactement diuiſer par 5 ; comme de 5, 10, 15, 20, &c. puis au double d'icelles parties adiouſtez $\frac{1}{5}$ pour auoir le petit coſté, $\frac{3}{5}$ pour auoir le moyen, & $\frac{2}{5}$ pour auoir la perpendiculaire, mais le quadruple dudit ſegment ſera le plus grand coſté. Ou bien poſez le ſegment exterieur de 9, ou

18, ou 27, ou d'autre nombre de parties qui se puisse partir exactement par 9 : puis pour le petit costé prenez $\frac{7}{9}$ dudit segment ; pour auoir le moyen, adiouſtez à iceluy segment $\frac{1}{3}$, pour la perpendiculaire $\frac{1}{3}$, & pour le grand costé adiouſtez $\frac{2}{9}$ au double d'iceluy segment : Comme ſi nous poſons que le segment exterieur ſoit de 9 parties egales, le plus petit costé ſera 7 d'icelles parties, le moyen 15, la perpendiculaire 12, & le plus grand costé 20. Or le quarré d'iceluy costé eſt 400, auquel eſt egale la ſomme de ces quatre nombres 225, 49, 63, 63, qui ſont les quarrez des deux costez 15 & 7, & deux fois le produict de 9 multiplié par 7, c'eſt à dire le segment exterieur par le moindre costé: Parquoy appert que le triangle ainſi conſtruict eſt ambligone, & cette 12. prop. eſtre veritable.

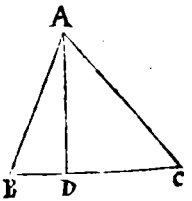
REGLE III.

Pour conſtruire vn triangle ambligone Scalene, duquel les costez & le segment exterieur du moyen costé prolongé iuſques à la rencontre de la perpendiculaire tombant ſur iceluy costé, ſoient commenſurables en nombre entier : Soit pris ledit segment exterieur de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis ſoit adiouſté $\frac{1}{3}$ au triple d'iceluy segment, & viendra le moindre costé, le double duquel donnera le moyen costé, mais multipliant ledit segment par 8, nous aurons le plus grand costé : comme ſi nous poſons le segment exterieur de 5 parties, adiouſtans $\frac{1}{3}$ d'iceluy segment à ſon triple 15, nous aurons 16 pour le moindre costé, & doublant iceluy costé viendront 32 pour le moyen costé : & finalement multipliant ledit segment par 8, nous aurons 40 parties pour le plus grand costé du triangle: lequel ſera ambligone, veu que le quarré d'iceluy costé 40, eſt 1600, & la ſomme des quarrez des deux autres costez 16 & 32 n'eſt que 1280 ; mais ces deux quarrez eſtant adiouſtez à deux fois 160 procreez de la multiplication du moyen costé 32 par le segment exterieur 5, ſont auſſi 1600, comme veut Euclide en ceſte 12. prop.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, est plus petit que les quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu de l'vn des costez qui font l'angle aigu, sçauoir celuy sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne prise au dedans entre la perpendiculaire, & l'angle aigu.

Soit le triangle ABC, ayant les angles B & C aigus, mais de l'angle A tombe AD perpendiculaire au costé BC. Ie dis que le quarré du costé AB, qui soustient l'angle aigu C, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AC & CB, de deux fois le rectangle de BC & CD : sçauoir BC, l'vn des costez qui font l'angle aigu C, sur lequel tombe la perpendiculaire, & CD prise entre la perpendiculaire, & iceluy angle aigu C.



Car d'autant que la ligne BC est couppee en D, les quarrez de BC, CD, sont egaux au quarré de BD, & deux fois le rectangle de BC, CD par la 7. prop. de ce liure, ausquels si on adiouste le

quarré commun de AD, les trois quarrez de BC, CD, AD, seront egaux aux deux quarrez de BD, AD, & deux fois le rectangle de BC, CD. Mais les deux triangles ADB, ADC estans rectangles, le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AD, DB: & le quarré de AC aux deux quarrez de AD, DC par la 47. prop. 1. Donc les deux quarrez de AC, BC seront egaux au quarré de AB, & deux fois le rectangle de BC, CD: en ostant donc iceux deux rectangles, le quarré de AB sera d'autant plus petit que les quarrez de AC, BC: ce qui estoit proposé à prouuer. On demonstrera en la mesme maniere que le quarré du costé AC, qui soustient l'angle aigu, B, est plus petit que les deux quarrez des deux autres costez AB, BC, de deux fois le rectangle de CB, BD. Donc aux triangles Oxigones, le quarré du costé qui soustient l'angle aigu, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'Euclide propose ce Theoreme des triangles oxigones seulement: toutesfois le mesme est aussi veritable ez triangles rectangles & ambligones, la perpendiculaire tombant de l'angle droict ou obtus: Car il est manifeste par la 17. pr. 1. que les deux autres angles sont aigus: & partant la perpendiculaire tombera tousiours dans le triangle, comme Euclide l'a pris en la demonstration cy-dessus: Ce qui est aussi facile à prouuer. Car si elle tomboit hors le triangle, il s'ensuiuroit qu'vn angle aigu seroit plus grand que le droict. Ce qui est absurde.

Et comme au precedent scholie nous auons enſeigné à conſtruire diuers triangles ambligones ayans les coſtés & le ſegment cõpris entre la perpendiculaire & l'angle obtus cõmenſurables en nomb. entiers, afin de pouuoir plus facilement faire apparoir en nombres la verité de ce qu'Euclide a demonſtré en la 12. prop. auſſi enſeignerons nous icy quelques reigles pour conſtruire diuers triangles oxigones ayant les coſtez & les ſegmens de la baſe commenſurables en nombres entiers, afin de faire auſſi paroiſtre en nombre la verité de cette 13. prop.

REGLE I.

D'autant qu'au triangle equilateral, & à l'Iſocelle, la perpendiculaire tombant de l'angle compris des deux coſtez egaux fait les ſegmens de la baſe egaux, ainſi qu'il a eſté demonſtré ſur la 26. prop. 1. il ſera fort aiſé de conſtruire tels triangles qui ayent les coſtez & les ſegmens commenſurables en nombre entier, c'eſt pourquoy il n'eſt pas beſoin de nous y arreſter: Mais quand eſt requis vn triangle Iſoſcelle, auquel la baſe ſoit plus grande que chaque coſté, & que la perpendiculaire tombe ſur l'vn d'iceux coſtez egaux; elle le coupera en deux ſegmens inegaux, comme nous auons demonſtré à la 47. prop. 1. le moindre deſquels ſegmens il faut poſer d'autant de parties qu'on voudra, & icelles eſtans multipliees par 8, produiront le plus grand ſegment, mais les multipliantpar 12, ſera produit la baſe, & les deux ſegmens eſtans adiouſtez, l'on aura l'vne & l'autre des iambes: ce qu'on aura auſſi multipliant le moindre ſegment par 9. Comme par exemple, ayant poſé le moindre ſegment de 4. parties, nous les multiplierons par 8, & viendront 32 pour le plus grand ſegment: mais les multipliant par 12, viennent 48

pour la baſe, & par 9 viennent 36 pour chaſque coſté. Or que ce triangle Iſoſcelle ſoit oxigone, il eſt manifeſte parce que nous auons demonſtré au Scholie de la 48. prop. 1. car veu que le quarré de la baſe 48 n'eſt que 2304, & la ſomme des quarrez des deux iambes eſt 2592, chacun d'iceux eſtant 1296, l'angle compris d'iceux coſtez ſera aigu, & par conſequent les autres ſeront auſſi aigus, puis qu'ils ſont plus petits par la 18. prop. 1. Et ſi à icelluy quarré 2304, nous adiouſtons 288, qui ſont deux fois 144, nombre produit de 36, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire, par 4, ſegment compris entre la perpendiculaire & l'angle oppoſé à ladite baſe, viendront auſſi 2592. Pareillement 1296, quarré de l'vne des iambes eſt moindre que 3600, ſomme des quarrez de la baſe & de l'autre iambe, de deux fois 1152, nombre produit du coſté 36 multiplié par le grand ſegment 32: car ces trois nombres 1296, 1152, 1152 ſont enſemble le meſme nombre 3600. Parquoy appert eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE II.

Que s'il eſt requis que le triangle ſoit Iſoſcelle, ayant la baſe moindre que chacune iambe, & que ſur l'vne d'icelle tombe la perpendiculaire: il faudra poſer le moindre ſegment, d'autant de parties que l'on voudra en nombre pair, & multipliant la moitié d'icelluy nombre par 7, on aura le plus grand ſegment, mais multipliant ledit moindre ſegment par 3, on aura la baſe, & finalement la ſomme des deux ſegmens ſera chacune des iambes: qu'on aura auſſi multipliant la moitié du moindre ſegment par 9. Parquoy ayant poſé le moindre ſegment de 4, ie multiplie ſa moitié 2, par 7, & viennent 14 pour l'autre ſegment, tellement

que toute la iambe ſera 18, & multipliant ledit ſegment 4 par 3, viennent 12 pour la baſe. Or que ce triangle ſoit oxigone, il eſt euident, attendu que le quarré du coſté 18 n'eſt que 324, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 468: Et de plus, iceluy quarré 324 eſt moindre que ladite ſomme 468, de deux fois 72, nombre produit de la multiplication de 18, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 4, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à l'autre iambe: partant il appert eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE III,

Que s'il eſt requis que le triangle ſoit ſcalene, & la perpendiculaire tombe ſur le moindre coſté, il faudra poſer le moindre ſegment de 70 parties, ou de 140, ou de quelque autre nombre qui ſe puiſſe diuiſer exactement par 70; puis adiouſter à iceluy nombre $\frac{29}{70}$ & viendra le plus grand ſegment, & la ſomme de ces deux ſegmens ſera le moindre coſté; mais ayant doublé le moindre ſegment, & à iceluy double adiouſté $\frac{42}{70}$ c'eſt à dire $\frac{3}{5}$ dudit ſegment, ſera procreé le moyen coſté; & finalement ſi à ce double du moindre ſegment on adiouſte $\frac{11}{10}$, c'eſt à dire $\frac{11}{10}$, on aura le plus grand coſté. Comme ſi nous poſons le moindre ſegment de 70, & à iceluy adiouſtons $\frac{29}{70}$, nous aurons 99 pour le plus grand ſegment, & par conſequent le moindre coſté ſera 169; mais adiouſtant $\frac{42}{70}$ au double d'iceluy moindre ſegment, viendront 182 pour le moyen coſté; & adiouſtant au meſme double $\frac{55}{70}$, viendront 195 pour le plus grand coſté. Or que ce triangle ſoit oxigone, il eſt euident, attendu que le quarré du plus grãd coſté 195 n'eſt que 38025, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 61685: parquoy le plus grand

angle eſt aigu, & conſequemment les autres ſont auſſi aigus. Que ſi à iceluy quarré 38025, on adiouſte deux fois 11830, nombre produit de la multiplication de 169, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par le moindre ſegment 70, viendra le meſme nombre 61685. Parquoy appert encore eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

REGLE IV.

Que ſi au triangle ſcalene il eſt requis que la perpendiculaire tombe ſur le moyen coſté, ſoit poſé le moindre ſegment de 5 parties, ou de 10, ou de quelqu'autre nombre qu'on puiſſe exactement diuiſer par 5, puis à iceluy ſegment ſoient adiouſtez $\frac{4}{5}$, & on aura le plus grand ſegment; & la ſomme d'iceux ſera le moyen coſté: mais adiouſtant $\frac{1}{5}$ au double d'iceluy moindre ſegment, on aura le moindre coſté, & le plus grand ſera le triple dudit ſegment. Parquoy ſi nous poſons le moindre ſegment de 10 parties, adiouſtant à iceluy les $\frac{4}{5}$, nous aurons 18 pour l'autre ſegment, & conſequemment tout le moyen coſté ſera 28. Mais adiouſtant 6, qui ſont les $\frac{1}{5}$ du moindre ſegment 10, au double d'iceluy ſegment, viennent 26 pour le moindre coſté; & le plus grand ſera 30, triple dudit moindre ſegment. Or qu'iceluy triangle ſoit oxigone, il eſt manifeſte: car le quarré du plus grãd coſté 30, n'eſt que 900, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 26 & 28 eſt 1460: & partant le plus grand angle eſt aigu, & conſequemment les autres angles ſont auſſi aigus. Maintenant ſi nous multiplions le coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire, ſçauoir 28 par le moindre ſegment 10, nous aurons 280, & pour le double 560, qui adiouſtés au ſuſdit quarré de 30 ſçauoir 900, ſont le meſme nombre 1460, ſomme des

deux quarrez des deux autres coſtez 26 & 28, qui ſont 676 & 784. Pareillement le quarré du moindre coſté 26, n'eſt que 676, & la ſomme des quarrez des deux autres coſtez eſt 1684 : tellement qu'il eſt moindre que cette dite ſomme de deux fois 504, nombre produit de la multiplication de 28, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 18, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à iceluy moindre coſté. Parquoy appert derechef eſtre veritable ce que dit Euclide en cette 23. prop.

REGLE V.

Et finalement, s'il eſtoit requis que la perpendiculaire tombe ſur le plus grand coſté, ſoit encore poſé le moindre ſegment de 5 parties, ou de 10, ou de 15, &c. puis au triple d'iceluy ſegment ſoit adiouſté $\frac{1}{5}$, & viendra le plus grand ſegment, tellement que la ſomme d'iceux ſegmens ſera le plus grand coſté : mais adiouſtant $\frac{1}{5}$ au double d'iceluy moindre ſegment, on aura le moindre coſté, & le moyen ſera le quadruple dudit ſegment. Par ainſi le moindre ſegment eſtant poſé de 5 parties, le plus grand ſera de 16, & le plus grand coſté 21, le moindre 13, & le moyen 20. Or le quarré de ce plus grand coſté 21, n'eſt que 441, & la ſomme des deux quarrez des deux autres coſtez 20 & 13 eſt 569 : parquoy l'angle oppoſé à iceluy coſté, qui eſt le plus grand par la 18. prop. 1. eſt aigu, & conſequemment le triangle ſuſdit eſt oxigone. Dauantage le quarré du moindre coſté 13, ſçauoir 169 eſt plus petit que la ſomme des quarrez des deux autres coſtez 20 & 21, ſçauoir eſt 841, de deux fois 336, nombre produit de la multiplication de 21, coſté ſur lequel tombe la perpendiculaire par 16, ſegment compris entre ladite perpendiculaire & l'angle oppoſé à iceluy moindre

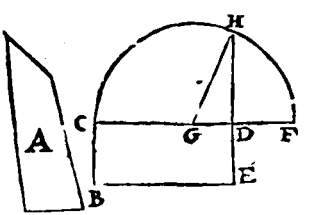
costé. Pareillement le quarré du moyen costé 20, sçauoir 400, est moindre que 610, somme des quarrez des deux autres costez 13 & 21, de deux fois 105, nombre produit de 21 multiplié par le moindre segment 5. Parquoy appert encore par ce 5 triangle estre veritable ce que dit Euclide en cette 13. prop.

Mais il est aussi euident tant par la demonstration d'Euclide, que par l'application des nombres cy deuant faicte, que ce qu'il dit icy des triangles oxigones seulement, est aussi veritable tant aux triangles rectangles qu'aux ambligones, tellement qu'on peut dire qu'en tout triangle, le quarré du costé qui soustient vn angle aigu est plus petit que la somme des quarrez des deux autres costez, de deux fois le rectangle contenu du costé sur lequel tombe la perpendiculaire, & de la ligne compriſe entre icelle perpendiculaire, & ledit angle aigu.

PROBL. 2. PROP. XIV.

Faire vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee.

Soit donnee la figure rectiligne A, à laquelle il faut faire vn quarré egal.



Soit premierement fait le parallelogramme B D egal à la figure donnee A, ayant vn angle droit & par la 45. prop. 1. puis soit prolongé vn costé, comme C D, iusques en F, & fait D F egale à l'autre co-

ſté D E : & apres auoir couppé C F en deux egalement au poinct G, & d'iceluy poinct G & interualle G C ou G F deſcript le demy cercle C H F, ſoit continuee E D iuſques à ce qu'elle rencontre la circonference du demy cercle en H. Ie dis que le quarré de D H eſt egal à la figure rectiligne A.

Car puis que C F eſt couppee en deux egalement au poinct G, & en deux inegalement au poinct D; le rectangle de C D & D F, ſçauoir B D, auec le quarré de la partie du milieu G D, eſt egal au quarré de la moitié G F par la 5. prop. de ce liure, ou de ſon egale G H, lequel eſt egal aux deux quarrez de G D & D H par la 47. prop. 1. Que ſi on oſte le quarré commun de G D, le demeurant quarré de D H ſe trouuera egal au demeurant rectangle B D: & par conſequent à la figure rectiligne donnee A. Nous auons donc trouué le coſté d'vn quarré egal à vne figure rectiligne donnee A. Ce qu'il falloit faire.

Fin du ſecond Element.

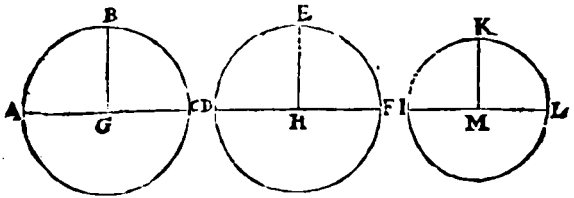
ELEMENT TROISIESME.

DEFINITIONS.

CERCLES egaux, ſont ceux deſquels les diametres ſont egaux, ou deſquels les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſont egales.

D'autant qu'Euclide demonſtre en ce 3. liure diuerſes proprietez & affections du cercle, il explique auparauãt quelques termes dont l'vſage ſera fort frequẽt en iceluy: Il dit donc premierement que ces cercles-là ſont egaux, deſquels les diametres ou ſemidiametres ſont egaux. Car puis que le cercle eſt deſcrit par le mouuement & reuolution du demy diametre à l'entour d'vne de ſes extremitez fixe & immobile, comme nous auons dit à la 15. def. du 1. liure. Il eſt euident que ces cercles-là ſont egaux deſquels les demy diametres, ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences ſont egales entr'elles, ou bien deſquels les diametres entiers ſont egaux en-

tr'eux. Comme ſi les diametres AC, DF, ou les lignes



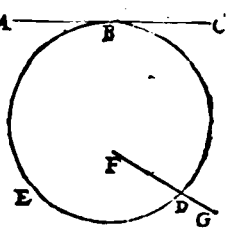
droictes GB, HE, menees des centres G & H, ſont egales entr'elles, les cercles ABC, DEF ſeront egaux entr'eux. Et au contraire ſi les cercles ſont egaux, leurs diametres ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſeront auſſi egales.

De cecy il appert, que les cercles ſont inegaux quand les diametres, ou les lignes droictes menees des centres aux circonferences, ſont inegales; & que celuy eſt le plus grand, duquel le diametre, ou demy diametre eſt le plus grand. Comme ſi les diametres DF, IL, ou les lig. droictes HD, MK, menees des centres aux circonfer. ſont inegales, les cercles DEF, IKL ſeront inegaux; & ſi le diametre DF eſt le plus grand, auſſi le cercle DEF ſera le plus grand. Et au contraire, des cercles inegaux, les diametres, ou ſemidiametres ſeront inegaux, c'eſt aſſauoir celuy du plus grand cercle, plus grand, & celuy du moindre plus petit.

2. Vne ligne droicte eſt dicte toucher le cercle, laquelle touchant le cercle, ſi elle eſt continuee ne le coupe point.

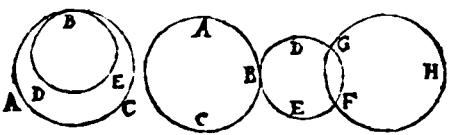
Comme la ligne droicte AB ſera dicte toucher le cer-

cle B D E en B, si elle l'y touche, en sorte qu'estant prolongee vers C, elle ne le couppe point, ains demeure totalement dehors iceluy cercle. Mais d'autant que la ligne droicte G D atteint le mesme cercle au poinct D, en telle sorte qu'estant prolongee iusques à F, elle couppe le cercle, & tombe dedans iceluy, elle ne sera pas dicte toucher le cercle, mais le couppper.



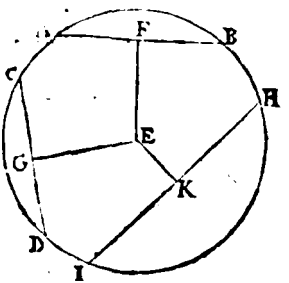
3. Les cercles sont dicts se toucher l'vn l'autre, quand en se touchant ils ne se coupent point.

Ainsi les deux cercles A B C, D B E seront dicts se toucher l'vn l'autre en B; s'ils s'y touchent en sorte qu'ils ne s'entrecouppent point. Or cet attouchement des cercles est de deux sortes; Car les cercles s'entretouchent ou en dedans, ou en dehors: Ils se touchent en dedans, quand l'vn est posé dedans l'autre; & en dehors, quand l'vn est constitué hors de l'autre, comme il appert icy. Mais si deux cercles s'atteignent de telle sorte que l'vn couppe l'autre, comme font icy les deux cercles D G E, F G H, ils seront dicts se couppper, & non pas se toucher.



4. Au cercle, les lignes droictes sont dictes estre egalement distantes du centre, lors que les perpendiculaires tirees du centre sur icelles, sont egales. Mais celle-là est dicte estre plus esloignee du centre, sur laquelle tombe la plus grande perpendiculaire.

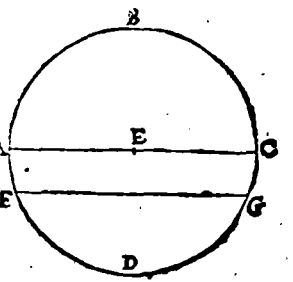
Comme au cercle ABDC, les lignes droictes AB, CD, seront dites estre egalement distantes & esloignees du centre E, si les perpendiculaires EF, EG, sont egales: Mais la ligne droicte AB sera dicte estre plus esloignee du centre E que la ligne HI, si la perpendiculaire EF est plus grande que la perpendiculaire EK.



5. Segment, ou portion de cercle, est vne figure comprise d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

Si dans vn cercle, comme ABCD, on mene vne ligne droicte qui coupe le cercle en deux parties, comme fait

la ligne droicte FG; tant la figure FBG contenue soubs ladite ligne droicte FG, & la partie de circonference FBG, que la figure FDG compriſe ſoubs la meſme ligne droicte FG, & la partie de circonference FDG, ſera dicte ſegment ou portion de cercle. Mais eſt icy à noter qu'il y a de trois ſortes de ſegmens de cercle. Car ſi la ligne droicte paſſe par le centre du cercle, comme AEC, elle diuiſera le cercle en deux ſegmens egaux ABC, ADC, chacun deſquels s'appelle proprement demy cercle, comme il a eſté dit au premier liu. Mais quand la ligne ne paſſe point par le centre, comme FG, elle diuiſe le cercle en deux parties inegales FBG, FDG, l'vne deſquelles, ſçauoir FBG, dans laquelle eſt le centre E, eſt plus grande que le demy cercle, & s'appelle portion ou ſegment maieur: mais l'autre portion FDG, eſt plus petite que le demy cercle, & s'appelle ſegment mineur. Dauantage, la ligne droicte FG eſt appellee chorde par pluſieurs Geometres, & la partie de circonference FBG, ou FDG, arc.



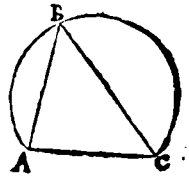
6. L'angle du ſegment, eſt celuy compris d'vne ligne droicte, & de la circonference du cercle.

Euclide vient maintenant à definir trois ſortes d'angles que l'on conſidere aux cercles, & commence par l'angle du ſegment, diſant que l'angle mixte BFG, ou

BGF, qui en la figure prec. eſt contenu ſous la ligne droicte FG, & la circonference FBG, s'appelle angle du ſegment. Que ſi le ſegmẽt eſt vn demi cercle, l'angle d'iceluy ſera appellé angle du demi cercle, & tel eſt l'angle EAB, ou ECB. Mais ſi le ſegmẽt eſt plus grand que le demi cercle l'angle d'iceluy, comme BFG, ou BGF, ſera dict angle du ſegment maieur: Et ſi le ſegment eſt plus petit que le demy cercle, l'angle d'iceluy, comme DFG, ou DGF, ſera appellé angle du ſegment mineur.

7. Vn angle ſe dit eſtre au ſegment, ou en la portion, lors qu'à vn poinct pris en la circonference du ſegment, ſont menees deux lignes droictes des extremitez de la ligne qui ſert de baſe au ſegment; & cet angle-là eſt celuy compris d'icelles deux lignes.

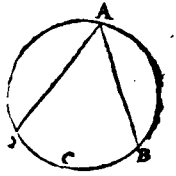
Soit vn ſegment de cercle ABC, duquel la baſe eſt la ligne droicte AC, des extremitez de laquelle ſoient menees au poinct B, pris en la circonference les deux lignes droictes AB, CB, qui conſtituent l'angle rectiligne ABC; iceluy angle eſt dit eſtre au ſegment ABC.



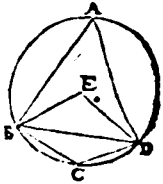
8. Mais quand les lignes droictes qui comprennent l'angle embraſſent

quelque circonference, l'angle eſt dit eſtre, ou s'appuyer ſur icelle.

En la circonference du cercle A B C D ſoit pris quelconque poinct A, & d'iceluy à deux autres poincts B & D d'icelle circonference, ſoient menees deux lignes droictes AB, AD, qui conſtituent l'angle rectiligne D A B, & embraſſent la circonference B C D: Iceluy angle B A D ſera dit eſtre ou s'appuyer ſur icelle circonference BCD.



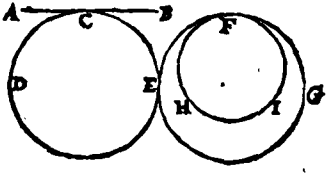
Eſt icy à noter que quelques Interpretes n'ont fait aucune difference entre cet angle cy & le precedent, mais les ont pris pour vn meſme: & toutesfois ſi on les conſidere bien, on y trouuera vne grande diſcrepance: Car celuy-là ſe refere au ſegment auquel il eſt conſtitué, & cettuy-cy ſe rapporte à la circonference qui luy ſert de baſe: Comme par exemple, ſi au cercle ABCD on prend quelque ſegment de cercle B C D, l'angle qui eſt en ce ſegment ne ſera pas le meſme que celuy qui inſiſte, ou eſt appuyé ſur la circonference d'iceluy ſegment: car l'angle qui eſt en iceluy ſera BCD, & l'angle qui inſiſte ou s'appuye ſur la circonference d'iceluy, ſera l'angle BAD.



Vne autre choſe eſt encore à remarquer icy, c'eſt que les angles qui s'appuyent ſur la circonference, peuuent eſtre non ſeulement conſtituez en la circonference, comme il a eſté dit cy-deſſus, mais peuuent auſſi eſtre conſtituez au centre du cercle; comme par exemple, l'angle B E D conſtitué au centre E par les deux lignes droictes B E,

DE, sera aussi dit s'appuyer sur la circonference BCD; tellement qu'il y a icy deux angles appuyez sur ladite circonference BCD, sçauoir BAD constitué en la circonference, & BED constitué au centre.

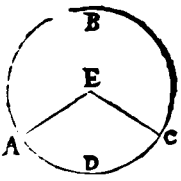
Or outre les trois sortes d'angles cy-dessus definis & expliquez, les Geometres en considerent encore vn autre qu'ils appellent angle de contingence ou d'attouchement: ceſt angle eſt contenu d'vne ligne droicte touchant le cercle, & de la circonference d'icelluy cercle, ou bien de deux circonferences ſe touchant l'vne l'autre au dehors ou au dedans. Comme par exemple, ſi la ligne droicte AB touche le cercle CDE au poinct C, l'angle mixte ACD, ou BCE ſera dit angle de contingence, ou d'attouchement. Derechef, ſi le cercle EFG touche le cercle CDE au dehors en E, & le cercle HFI au dedans en F, tant l'angle curuiligne CEF que EFH, ou GFI, ſera appellé angle de contingence, ou d'attouchement.



9 Secteur de cercle, eſt vne figure contenue ſoubs deux lignes droictes qui font vn angle au centre, & la circonference compriſe entre icelles lignes.

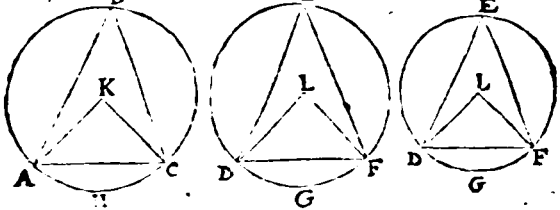
Si au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, les deux lignes droictes AE, CE, conſtituent au centre E, l'an-

gle AEC; la figure AECD, contenue des deux lignes droictes AE, EC, & de la circonference ADC compriſe entre icelles lignes, ſera appellée ſecteur de cercle. Item la figure ABCE compriſe des meſmes lignes droictes AE, EC, & de la circonference ABC, ſera auſſi dicte ſecteur de cercle.



10. Semblables portions de cercle, ſont celles qui reçoiuent angles egaux; ou bien eſquelles les angles ſont egaux entr'eux.

Comme ſi aux cercles ABC, DEF, les angles rectilignes B, E, ſont egaux; les ſegmens ABC, DEF, qui



reçoiuent iceux angles egaux, ou eſquels ſont les ſuſdits angles egaux, ſeront dicts ſegmens ſemblables: Et les circonferences ABC, DEF, ſeront pareillement dictes ſemblables, c'eſt à dire que le ſegment ABC ſera telle partie de tout le cercle ABCH, que le ſegment DEF eſt partie de tout le cercle DEFG: & la circonference ABC ſera auſſi telle partie de toute la circonference ABCH, que la

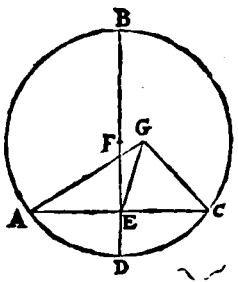
circonference DEF eſt de toute la circonference DEFG. Par meſme raiſon les arcs ou circonferences AHC, DGF, ſur leſquelles s'appuient angles egaux, ſont auſsi dictes ſemblables: Comme ſi aux meſmes cercles ABC, DEF, les angles BAC, DEF ou AKC, DLF ſont egaux; les arcs ou circonferences AHC, DGF, ſur leſquelles s'appuient les ſuſdits angles, ſeront dicts arcs ſemblables.

Des choſes ſuſdites, l'on peut colliger que les ſemblables portions d'vn meſme cercle, ou de cercles egaux, ſont auſsi egales entr'elles, attendu qu'elles ſont parties egales d'vne meſme choſe, ou de choſes egales.

PROBL. 1. PROP. I.

Trouuer le centre d'vn cercle donné.

Soit le cercle donné ABC, duquel il faut trouuer le centre.



Soit tiree en iceluy la ligne droicte AC, qui couppe la conference, comme que ce ſoit, és poincts A & C: puis par les 10. & 11. p 1. ſoit icelle AC couppee en deux egalement, & à droicts angles par la ligne droicte BD, ſe terminant à la periphere és poincts B & D: & finalement icelle BD ſoit auſsi couppee en deux egalement en F, par la ſuſdite 10. prop. 1. Ie dis que F eſt le centre du cercle propoſé.

Car en icelle ligne droicte BD, vn autre poinct que F ne ſera pas le centre, veu que tout autre

poinct la diuiſe inegalement. Si donc le poinct F n'eſt pas le centre, le poinct G hors la ligne BD ſoit le centre, (s'il eſt poſſible) duquel ſoient menees les trois lignes droictes GA, GE, & GC. D'autant que G eſtant le centre, par la def. du cercle les lignes droictes AG & GC ſeront egales: mais par la conſtruction AE & EC ſont auſſi egales, & GE eſt commune aux deux triangles GEA & GEC: donc iceux triangles ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & la baſe AG egale à la baſe CG, & par la 8. pr. 1. les angles AEG & CEG ſeront egaux: & partant droicts, & la ligne EG perpendiculaire par la 10. def. 1. Mais l'angle BEA par la conſtruction eſt droict, & tous les angles droicts ſont egaux par la 10. com. ſent. donc les deux angles AEG & BEA ſeront egaux, ſçauoir le tout à ſa partie: ce qui eſt abſurde. Donc le poinct G n'eſt pas le centre. Le meſme inconuenient s'enſuiura prenant tout autre poinct hors la ligne BD. Partant le poinct F ſera le centre du cercle ABC, requis à trouuer.

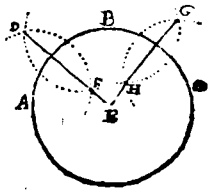
COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi au cercle vne ligne droicte couppe vne autre ligne droicte en deux egalement, & à angles droicts, le centre du cercle ſera en icelle couppante. Car il a eſté demonſtré qu'il eſt impoſſible que le centre du cercle ABC ſoit ailleurs qu'au poinct F, milieu de la ligne BD, laquelle couppe la ligne AC en deux egalement, & à angles droicts en E.

SCHOLIE.

Combien que la practique de ce Probleme ſoit aiſee par

la construction d'iceluy, si est-ce toutesfois qu'elle est encore plus briefue & facile, ainsi qu'il ensuit. Pour trouuer le centre du cercle A B C, soient pris en la circonferẽce d'iceluy les trois poincts A, B, C, comme on voudra: puis des deux poincts A & B, soient descrits d'vn mesme interualle, deux arcs qui s'entrecouppent es poincts D & F, par lesquels soit menee la ligne droicte D F E interminement: en apres, des poincts B & C, soient aussi descrits d'vn mesme interualle deux autres arcs s'entrecouppans ez poincts G & H, par lesquels soit menee la ligne droicte G H, qui couppe D F en E, & iceluy poinct sera le centre requis.

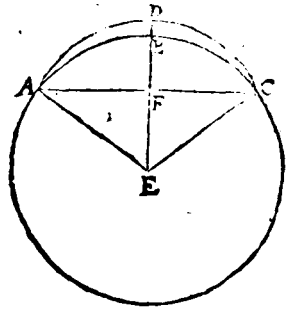


THEOR. 1. PROP. II.

Si en la circonference d'vn cercle, on prend deux poincts comme on voudra; la ligne droicte menee de poinct à autre, tõbera dans le cercle.

Soit le cercle ABC, & en la circonference d'iceluy soient pris deux poincts tels qu'on voudra A & C: Ie dis que la ligne droicte menee du poinct A au poinct C tombera dedans le cercle: car si elle ne tombe au dedans, elle tõbera, ou sur la circonference, ou hors du cercle. Qu'elle tombe donc hors le cercle, s'il est possible, comme la ligne ADC: & ayant trouué le centre E par la prec.

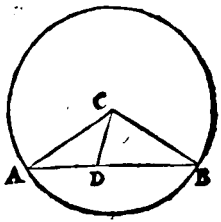
prop. d'iceluy soient menees aux poincts A & C, les lignes droites EA, EC, & à quelque poinct D de la ligne ADC, soit aussi menee ED, qui couppe la circonference du cercle ABC en B. Or d'autant que les deux costez EA, EC sont egaux, le triangle AEC aura les angles EAD, ECD, sur la base ADC, egaux par la 5. prop. 1. Mais puis que du triangle AED, le costé AD est prolongé, l'angle exterieur EDC sera plus grand que son opposé interieur EAD, par la 16. prop. 1. Donc le mesme angle EDC sera aussi plus grand que l'angle ECD, qui est egal à EAD. Parquoy EC opposé au plus grand angle EDC sera plus grand que ED par la 19. prop. 1. & partant EB egale à EC, sera aussi plus grande que ED, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Dõc la ligne droicte menee de A à C ne tombera pas hors le cercle. On demonstrera par mesme raison qu'elle ne peut pas aussi tomber sur la circonference ABC. Il faut donc qu'elle tombe dedans le cercle, comme la ligne droicte AIC. Parquoy si en la circonference d'vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Ce mesme Theoreme peut aussi estre demonstré affirmatiuement ainsi qu'il ensuit.

En la circonference du cercle AB, dont le centre est C soient pris deux poincts tels qu'on voudra A & B. Ie dis que la ligne droicte AB menee d'vn poinct à l'autre tombe dans iceluy cercle.



Car soit prins en icelle ligne droicte AB quelconque poinct comme D, entre ses extremes A & B, puis du centre C, soient menees les lignes droictes CA, CD, CB. D'autant que les deux costez AC, EC, du triangle ACB sont egaux, les angles BAC, ABC seront egaux par la 5. prop. 1. Mais l'angle externe ADC est plus grand que l'angle interne ABC par la 16. prop. 1. donc le mesme angle ADC sera plus grand que l'angle BAC: & partant par la 19. prop. 1. le costé AC sera plus grand que le costé CD: parquoy puis que CA est tiree du centre iusques à la circonference, la ligne droicte CD ne paruiendra pas iusques à icelle circonference, & par consequent le poinct D tombe dans le cercle. Le mesme sera demonstré de tout autre poinct qu'on voudra prendre. Donc toute la ligne droicte AB tombe dedans le cercle proposé. Ce qu'il falloit prouuer.

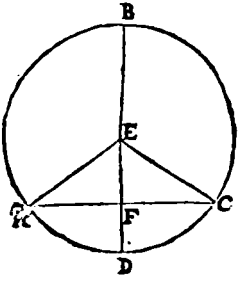
CORROLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'vne ligne droicte touchant vn cercle, le touche seulement à vn poinct: car si elle le touchoit à deux poincts, la partie de la ligne d'entre iceux poincts tomberoit dans le cercle par cette proposition, parquoy elle coupperoit le cercle, contre l'hypothese.

THEOR. 2. PROP. III.

Si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, & couppe en deux egalement vne autre ligne droicte, qui ne passe point par le centre; elle la couppera à angles droicts: & si elle la couppe à angles droicts, elle la couppera aussi en deux egalement.

Au cercle ABCD soit la ligne droicte BD, laquelle passant par le centre E, couppe en deux egalement la ligne droicte AC, laquelle ne passe point par le centre; Ie dis que BD couppe aussi AC en angles droicts au poinct F.



Car estans menees les deux lignes droictes CE & AE, les deux triangles AEF, CEF, auront les deux costez AF, FE, egaux aux deux costez CF, EF, chacun au sien, & la base AE egale à la base EC; & par la 8. prop. 1. les deux angles au poinct F seront egaux, & partant droicts par la 10. def. 1.

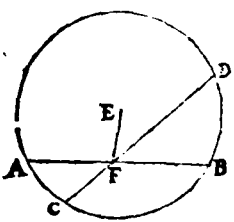
Ie dis pareillement, que si BD couppe AC à angles droicts au poinct F; qu'elle la couppera aussi en deux egalement. Car les deux angles au poinct F estans droicts, ils seront egaux, & l'an-

gle A est egal à l'angle C par la 5. prop. 1. estant AEC triangle Isoscelle, & le costé EF commun aux deux triangles AEF, CEF, & par la 26. prop. 1. AF sera egale à CF. Parquoy si dans le cercle quelque ligne droicte passe par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 3. PROP. IV.

Si dans le cercle, deux lignes droictes ne passans point par le centre, s'entrecouppent; elles ne se coupperont pas l'vne l'autre en deux egalement.

Au cercle ACBD, duquel le centre est E, soient deux lignes droictes AB & CD, s'entrecouppans au poinct F, & desquelles ny l'vne ny l'autre ne passe par le centre E. Ie dis que l'vne ou l'autre est couppee inegalement. Car du centre E estant menee la ligne EF; si icelles lignes AB, CD s'entrecouppent en deux egalement au poinct F, la ligne EF les couppera au mesme poinct aussi en deux egalement, & à droicts angles par la prop. prec. & les angles AFE, EFB seront droicts, & egaux à CFE, EFD, aussi droicts, & egaux: ce qui est impossible, n'estant AFE que



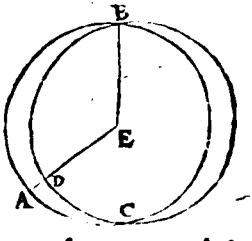
partie

partie de CFE: ainsi les lignes droictes A B, C D ne s'entrecouppoient pas en deux egalement. Parquoy si dans le cercle deux lignes droictes ne passant point par le centre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. V.

Si deux cercles se couppent l'vn l'autre, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, BCD se couppans l'vn l'autre en B & C. Ie dis qu'ils ne sçauroient auoir vn mesme centre.



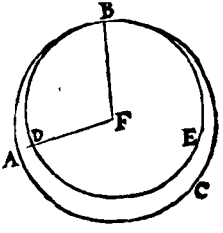
Car s'il est possible, soit leur centre commun E, duquel soient tirees deux lignes droictes, sçauoir EB à la section B: Mais EA couppant l'vne & l'autre circonference en A & D. Donc puis que E est posé centre du cercle BCD, la ligne droicte ED sera egale à la ligne droicte EB par la 15. def. 1. Derechef, puis que E est aussi posé centre du cercle ABC, la ligne droicte EA sera aussi egale à la mesme ligne EB, & par la 1. com. sent. ED, EA seront egales entr'elles, la partie au tout; ce qui est impossible: partant les deux cercles ne pouuoient auoir vn mesme centre. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. VI.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dedans, ils n'auront pas mesme centre.

Soient les deux cercles ABC, & D B E se touchans l'vn l'autre au dedans en B. Ie dis qu'ils n'auront pas mesme centre.

Car s'il est possible, soit leur centre commun F, & d'iceluy soient menees les deux lignes F A & F B: sçauoir est FB à l'attouchechement B; & F A, couppant l'vn & l'autre cercle en D, A. D'autant que F est posé centre du cercle A B C, les lignes droictes FA, FB seront egales: derechef, d'autant que F est aussi posé centre du cercle BDE, la ligne FD sera egale à la ligne FB, à laquelle a esté demonstré estre aussi egale FA: donc FA, FD seront egales entr'elles; la partie au tout. Ce qui est absurde. Parquoy F ne pouuoit estre centre commun des cercles s'entretouchans interieurement en B. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Euclide a proposé ce Theoreme des cercles s'entre-touchans seulement au dedans, d'autant que des cercles qui se touchent par dehors, il appert assez que leurs centres

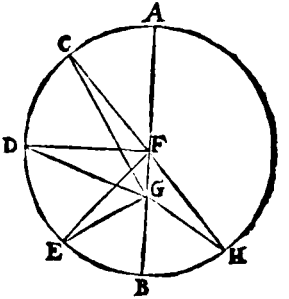
ſont diuers: veu qu'vn des cercles eſt dehors l'autre, & le centre eſt touſiours au milieu de ſon cercle.

THEOR. 6. PROP. VII.

Si au diametre du cercle l'on prend quelque poinct qui ne ſoit pas le centre du cercle, & d'iceluy poinct tombent quelques lignes droictes à la circonference; la plus grande ſera celle en laquelle eſt le centre, & la plus petite celle qui reſte : Mais des autres touſiours la plus proche de celle qui eſt menee par le centre, eſt plus grande que la plus eſloignee: Et du meſme poinct ne peuuent eſtre menees à la circonference que deux lignes droictes egales, de part & d'autre de la plus petite.

Au diametre AB du cercle ACDEB, duquel le centre eſt F, ſoit pris quelque poinct G outre le centre; & d'icelui poinct G tombent tant qu'on voudra de lignes droictes GC, GD, GE, en la circonference. Ie dis en premier lieu, que de toutes les lignes menees de G à la circonference, GA en laquelle eſt le centre, eſt la plus grande. Car du centre F eſtans menees à C, D & E,

les lignes FC, FD & FE : le triangle GFC aura les deux costez GF, FC, plus grands que le costé GC par la 20. pr. 1. Mais les lignes droictes GF, FC sont egales aux lignes droictes GF, FA, c'est à dire à toute la ligne GA: donc GA sera aussi plus grande que GC. Par mesme raison GA sera aussi plus grande que GD, & que GE: parquoy la ligne GA est la plus grande de toutes celles menees de G à la circonference.



Secondement, ie dis que GB est plus petite que GD, ou autre quelconque : car au triangle DFG, les deux costez DG & GF, seront plus grands que le troisiesme DF par la 20. prop. 1. ou que son egale BF. Que si on oste la ligne commune GF, le demeurant GD sera plus grand que le demourant GB. Par mesme raison GB, sera aussi plus petite que GE, & que GC, ou autre quelconque tombant de G à la circonference.

Tiercement, ie dis que GC plus proche de la ligne AG que GD, est plus grande qu'icelle GD: & pour la mesme raison GD plus grande que GE, & ainsi des autres s'il y en auoit dauantage de tirees de G à la circonference. Car les deux costez GF, FC du triangle GFC, sont egaux aux deux costez GF, FD du triangle GFD, chacun au sien: mais l'angle CFG est plus grand que l'angle DFG; & partant par la 24. p. 1. la base GC sera plus grãde

que la baſe GD. Pour meſme raiſon GC ſera plus grande que GE: Item GD plus grande que GE. Parquoy la ligne la plus proche de celle qui eſt menee par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee.

Finalement, ayant fait l'angle BFH egal à l'angle BFE, & tiré GH: ie dis que les lignes GE, GH, ſont egales entr'elles, & qu'on n'en peut mener de G à la circonference aucune autre egale à icelles. Car d'autant que les coſtez EF, FG du triangle EFG, ſont egaux aux coſtez HF, FG du triangle AFG, & les angles EFG, HFG auſſi egaux: les lignes GH, GE, qui ſont de part & d'autre, du diametre, ſont egales entr'elles. Et il eſt euident qu'on ne pourra tirer du poinct G vne autre ligne dans le cercle, qui ne s'approche ou recule de la ligne BA, tombant de coſté ou d'autre de GE, ou GH; & par ce qui a eſté monſtré cy deſſus, elle ſera plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles GE, GH. Donc du poinct G à la circonference ne ſe peuuent tirer plus de deux lignes droictes qui ſoient egales entr'elles. Parquoy ſi au diametre d'vn cercle on prend quelconque poinct qui ne ſoit pas le centre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

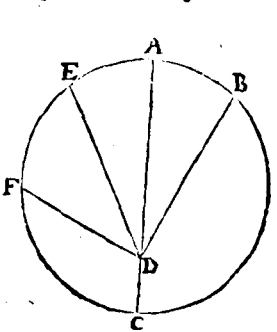
SCHOLIE.

Iaçoit qu'Euclide ait ſeulement demonſtré que des lignes droictes tirees de meſme part du diametre, la plus proche de celle tiree par le centre eſt plus grande que la plus eſloignee, toutesfois cela eſt auſſi vray, ſi elles ſont tirees de diuerſe part: comme ſi la ligne droicte GD eſt plus proche de GA que la ligne droicte GH; icelle GD ſera plus grande que GH: car ſi de la part de GD on fait l'an-

gle BGE egal à l'angle BGH les lignes GE, GH seront egales, attendu qu'elles sont egalement distantes de GA, & le poinct E tombera entre B & D, puis que GD a esté posee plus proche de G A que G H. Mais par ceste prop. GD est plus grande que GE: donc la mesme G D sera aussi plus grande que GH. Quelques interpretes veulent conuertir cette 7. prop. ainsi qu'il ensuit.

Si on prend vn poinct dedans le cercle, & d'iceluy poinct tombent des lignes droictes à la circonference, entre lesquelles soient la plus grande & la plus petite qui puissent estre menees de ce poinct là à ladite circonference: mais des restantes, les vnes soient inegales, & les autres egales: la plus grande passera par le centre du cercle, & la plus petite sera le reste du diametre: mais des autres les plus grandes seront les plus proches du centre, & les egales en seront egalement distantes.

Au cercle ABC soit pris le poinct D, duquel tombent, en la circonference tant qu'on voudra de lig. droictes DA, DB, DC, DE, DF, desquelles DA soit la plus grande qui puisse estre tiree d'iceluy poinct à ladite circonference, & DC la moindre: mais des autres DE soit plus grande que DF, & egale à DB. Ie dis premierement que DA passe par le centre du cercle: Car si elle



n'y passe, estant tiree quelque ligne droicte de D par ledit centre, elle sera la plus grande de toutes celles tombantes de D par la 7. prop. 3. Ce que est absurde, puis que D A est posee la plus grande. Donc D A passe par le centre.

En second lieu, ie dis que D C est le reste du diametre, c'est à dire qu'elle est directement à D A : Car autrement icelle D A estant prolongee directement, son prolongement sera autre que D C, & la plus petite ligne qui puisse tomber de D à la circonference, par la 7. prop 3. Ce qui ne peut estre, puis que D C a esté posee la plus petite : donc D C est l'autre partie du diametre.

Tiercement, ie dis que D E est plus proche de D A que D F. Car elle n'y pourroit pas estre egalement distante, attendu que par la susdite prop. elles seroient egales, & elles ont esté posees inegales. Mais D E ne peut pas aussi estre plus esloignee de la mesme D A que D F : car elles seroient plus petites qu'icelle D F, par la mesme proposition, & elle a esté posee plus grande.

En dernier lieu, ie dis que D B, D E sont egalement distantes de D A : Car si l'vne en estoit plus proche elle seroit plus grande que l'autre par la mesme 7. prop. & elles ont esté posies egales.

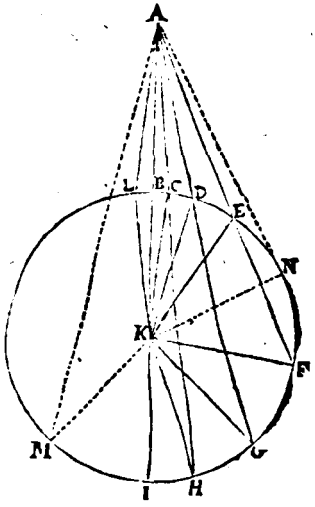
THEOR. 7. PROP. VIII.

Si on prend quelque poinct hors le cercle, & d'iceluy poinct soient menees quelques lignes droictes dans iceluy cercle, desquelles l'vne passe par le

centre, & les autres où l'on voudra: celle qui passe par le centre sera la plus grande de toutes celles qui seront menees en la circonference concaue. Quant aux autres, tousiours la plus proche de celle qui passe par le centre est plus grande que la plus esloignee. Mais de celles qui tombent à la circonference conuexe, la plus petite est celle qui est compriſe entre le poinct & le diametre: Quant aux autres, la plus esloignee de la plus petite est plus grande que celle qui en est plus proche: Et d'iceluy poinct ne peuuent tomber à la circonference que deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite.

Du poinct A hors le cercle B C D E, le centre duquel est K, soient menees les lignes droictes AF, AG AH & AI couppans ledit cercle, desquelles lignes AI passe par le centre K, & les autres comment que ce soit. Ie dis premierement que AI qui passe par le centre, est la plus grande de toutes icelles lignes tirees à la circonference cõcaue: puis apres que AH qui est la plus proche d'icelle AI

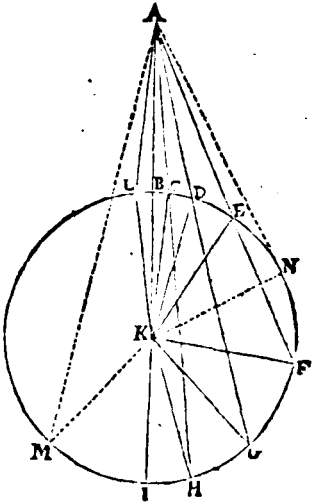
eſt plus grande que AG, qui en eſt plus eſloignee: Et pour meſme raiſon AG, plus grande que AF. Et au contraire, ie dis que AB compriſe entre le poinct A & la circonference conuexe, eſt la plus petite ligne de toutes celles qui ſont hors le cercle: puis apres, que la ligne AC plus prochaine de la plus petite AB, eſt moindre que AD, qui en eſt plus eſloignee: Et par meſme raiſon, icelle AD moindre que AE.



Finalement, ie dis que de A, on peut ſeulement mener deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus petite AB.

Car du centre K eſtans menees aux poincts C, D, E, F, G & H, les lignes droictes KC, KD, KE, KF, KG & KH; les deux coſtez AK, KH, du triangle AKH, ſont plus grands que la ligne AH par la 20. pr. 1. Mais les lignes AK, KH ſont egales aux lignes AK, KI, c'eſt à dire à toute la ligne droicte AI: icelle AI ſera donc auſſi plus grande que AH. Pour la meſme raiſon AI ſera plus grande que AG, & auſſi que AF. Parquoy la ligne AI eſt la plus grande de toutes celles qui tombent du poinct A dans le cercle.

Puis apres, d'autant que les coſtez AK & KH du triangle AKH ſont egaux aux coſtez AK, KG du triangle AKG, chacun au ſien, & l'angle AKH plus grand que l'angle AKG; la baſe AH ſera plus grande que la baſe AG, par la 24. prop. 1. Par meſme raiſon AH ſera plus grande que AF; item AG plus grande que la meſme AF. Parquoy la ligne plus proche de celle qui paſſe par le centre, eſt plus grande que celle qui en eſt plus eſloignee.



Derechef, puis qu'au triangle ACK la ligne AK eſt moindre que les deux AC, CK; ſi on oſte les egales BK, CK, demeurera encore AB moindre que AC. Par ſemblable raiſon AB ſera plus petite que AD, & auſſi que AE. Parquoy la ligne AB eſt la plus petite de toutes celles qui ſont menees de A à la circonference conuexe.

Derechef, d'autant que dans le triangle ADK tombent deux lignes droictes AC, CK, des extremitez du coſté AK, icelles AC, CK ſeront moindres que AD, DK par la 21. prop. 1. deſquelles ſi on oſte les egales CK, DK, reſtera encore AC moindre que AD. Par méme raiſõ on prouuera que AC

eſt moindre que AE: Item AD moindre que la meſme AE. Parquoy la ligne la plus proche de la plus petite AB, eſt moindre que la plus eſloignee.

Finablement, ſoit faict l'angle AKL egal à l'angle AKC, tirant KL iuſques à ce qu'elle rencontre la periphere en L, & ſoit menee la ligne AL. D'autant que les coſtez AK, KG du triangle AKC, ſont egaux aux coſtez AK, KL du triangle AKL; & les angles AKC, AKL auſſi egaux, les lignes droictes AC, AL de part & d'autre de la moindre AB, ſeront egales entr'elles par la 4. prop. 1. Or que nulle autre puiſſe eſtre egale à icelles, il eſt euident; car ſi on en mene vne autre du poinct A, il faudra qu'elle ſoit plus proche ou plus eſloignée de AB; & parce qui a eſté demonſtré cy-deſſus, elle ſera plus grande ou plus petite que l'une & l'autre d'icelles AC, AL. Donc du poinct A tomberont ſeulement deux lignes droictes egales de part & d'autre de la moindre AB. Parquoy ſi on prend quelque poinct hors le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Par meſme raiſon de A ne peuuent tomber en la circonference concaue que deux lignes droictes egales de part & d'autre de la plus grande AI. Car ayant faict l'angle AKM egal à l'angle AKG, & mené AM, les triangles AKM, AKG auront les baſes AG, AM egales par la 4. prop. 1. & on ne peut de A mener à ladite circonference concaue d'autre ligne egale à icelle AG, AM, attendu qu'elle ſeroit plus proche ou plus eſloignee de AI, & par conſequent plus grande ou plus

petite qu'icelles, ainſi qu'il appert par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus.

Il appert auſſi que quand l'vne des lignes tombantes de A, touche le cercle, comme A N, qu'icelle touchante eſt plus petite qu'aucune de celles qui tombent en la circonference concaue : Car eſtant tiree du centre à l'attouchement la ligne droicte K N, les deux coſtez A K, K F du triangle A K F, ſeront egaux aux deux coſtez A K, K N du triangle A K N, chacun au ſien, & l'angle A K F eſt plus grand que l'angle A K N, & par la 24. pr. 1. la baſe A F ſera plus grande que la baſe A N: Et par meſme raiſon toute autre ligne tombante en la circonference concaue ſera plus grande qu'icelle A N.

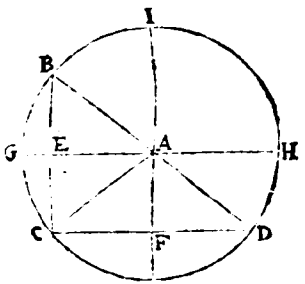
Mais la meſme ligne touchante A N ſera la plus grande de toutes les autres lignes qui tombent de A en la circonference conuexe. Car puis que par la 21. prop. 1. les deux coſtez A E, E K ſont moindres que les deux coſtez A N, N K, ſi on en oſte les lignes egales K E, K N, reſtera A E moindre que A N ; & ainſi des autres.

Au reſte ce qu'Euclide a demonſtré en cette 8. prop. aduenir aux lignes menees d'vne meſme part de la plus grande ou plus petite, aduiendra encore, les lignes eſtans menees de diuerſes parts, c'eſt à dire, que ſi A H eſt plus proche de A I que A M : Icelle A H ſera auſſi plus grande que ladite A M, iaçoit qu'elles ne ſoient toutes deux d'vne meſme part : & ſi A D eſt plus eſloignee de A B que A L, elle ſera auſſi plus grande qu'icelle A L. Ce qu'on peut demonſtrer procedant, ainſi qu'au precedent Scholie pour les lignes tirees de diuerſe part.

THEOR. 8. PROP. IX.

Si on prend quelque poinct au dedans d'vn cercle, & d'iceluy poinct tombent à la circonference plus de deux lignes droictes egales, le poinct pris eſt le centre du cercle.

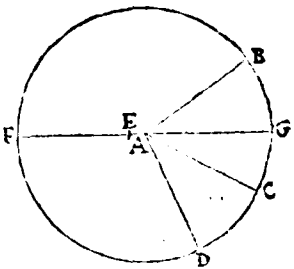
Soit pris le poinct A au cercle B C D, & *d'iceluy poinct tombent* à la circonference les trois lignes droictes egales AB, AC AD. Ie dis que le poinct pris A eſt le centre du cercle.



Qu'il ne ſoit ainſi : ſoient menees les lignes droictes BC & CD, & apres les auoir couppees en deux egalement aux poincts E & F, d'iceux poincts au poinct A, ſoient menees les deux lignes droictes EA, FA, & prolongees de part & d'autre en la circonference. D'autant que les deux triangles BEA & CEA, ont deux coſtez egaux à deux coſtez, chacun au ſien, & les baſes AB, AC auſſi egales, les deux angles au poinct E ſeront egaux, & partant droicts, & par le Corol. de la 1. prop. de ce liure le centre du cercle ſera en la ligne droicte GAH, puis qu'elle diuiſe la ligne droicte

BC en deux egalement, & angles droicts en E. Par mesme discours le centre du cercle se trouuera aussi en la ligne droicte K I. Il faut donc que ce soit à leur commune section A, n'y ayant poinct d'autre poinct commun. Parquoy si on prend quelque poinct dedans vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Autrement. Si le poinct A n'est le centre du cercle, soit iceluy centre au poinct E, si faire se peut, duquel soit mené par A le diametre FG. D'autant donc qu'au diametre FG, est pris le poinct A outre le centre, duquel tombent en la circonference les lignes droictes A D, A C;



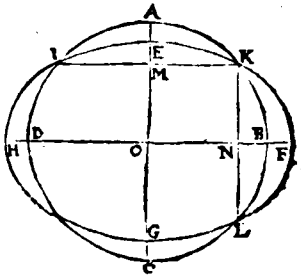
icelle AD qui est plus proche de AF tiree par le centre E, sera plus grande que A C par la 7. p. 3. Ce qui est absurde, car icelles A B, A C ont esté posees egales. La mesme absurdité s'ensuiura tousiours si on pose le centre estre à vn autre poinct que A : parquoy iceluy poinct A sera le centre du cercle ABC. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. X.

Vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts.

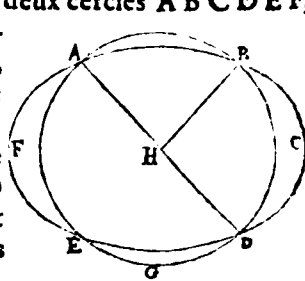
Soient les deux cercles A B C D & E F G H,

se couppans aux trois poincts I, K & L, s'il est possible. Item soient menees les deux lignes droictes IK & KL, lesquelles soient couppees en deux egalement aux poincts M & N par la 10. prop. 1. & soient menees les lignes droictes MC, NH à droicts angles sur IK & KL. Il faudra par le Corol. de la 1. pr. de ce liure, que les



deux centres des deux cercles soient en la ligne AC; ils seront aussi en la ligne FH: Ce sera donc au poinct de la commune section O, & en ce faisant les deux cercles auroient mesme centre, contre la 5. prop. de ce liure. Donc les cercles A B C D & E F G H ne se pouuoient pas couppper en plus de deux poincts: Ce qu'il falloit demonstrer.

Autrement. Que les deux cercles A B C D E F, & A B D G E se couppent, s'il est possible, en plus de deux poincts c'est à sçauoir en A, B, D: & soit trouué le centre du cercle A B D G E, lequel soit H, & d'iceluy soient menees les lignes droictes HA, HB, HD, lesquelles seront egales entr'elles par la defin. du cercle. Et d'autant qu'au cercle

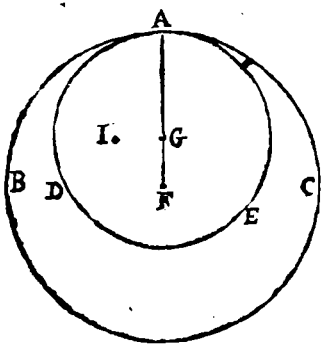


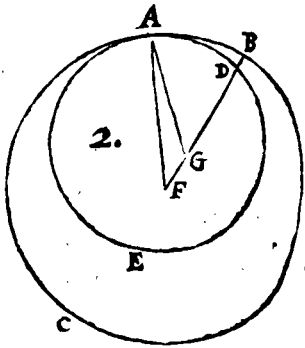
ABCDEF on a pris le poinct H, duquel tombant à la circonference plus de deux lignes egales, iceluy poinct H sera le centre dudit cercle, par la 9. prop. 3. Mais il est aussi le centre du cercle ABDGE. Donc deux cercles s'entrecouppans ont mesme centre. Ce qui est absurde.

THEOR. 10. PROP. XI.

Si ayant pris les centres de deux cercles qui se touchent l'vn l'autre au dedans, on conjoinct iceux centres par vne ligne droicte; icelle ligne estant prolongee tombera en l'attouchement des cercles.

Soient deux cercles ABC & ADE s'entretouchans interieurement au poinct A, & par le





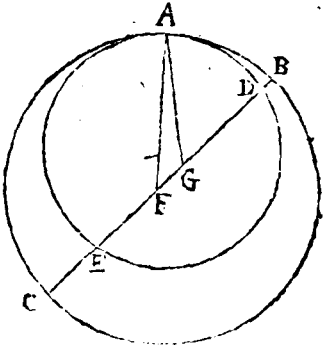
1. pr. 3. soit trouué le centre du cercle ABC lequel soit F; & puis que par la 6. prop. 3. deux cercles

cercles s'entretouchans au dedans ne peuuent auoir vn meſme centre, F ne ſera pas le centre du cercle ADE: Soit donc auſſi trouué ſon centre, qui ſoit G. Ie dis que la ligne droicte menee du centre F au centre G, & prolongee de ce coſté-là iuſques à la circonference du plus grand cercle ABC, tombera au poinct de l'attouchement A, comme à la premiere figure. Car autrement il faudra qu'elle tombe à quelque autre poinct de ladite circonference, car d'autant que les deux centres F & G ſont au dedans du cercle ABC, ladite ligne FG eſtant continuee, elle ira neceſſairement rencontrer la circonference d'iceluy cercle: & ſi quelqu'vn dit que ce n'eſt pas au poinct d'attouchement, ſoit s'il eſt poſſible, à quelconque autre poinct, comme B en la 2. figure; tellement que la ligne FGB couppe la circonference du moindre cercle ADE au poinct D. D'autant donc que les centres F & G, & le poinct d'attouchement A ne ſont pas en vne ligne droicte, ſi dudit poinct A on mene des lignes droictes aux deux centres F & G, elles feront vn triangle auec la ligne FG, qui eſt la diſtance d'vn centre à l'autre, lequel triangle ſoit AFG. Donc puis que par la 20. prop. 1. les deux coſtez AG, FG dudit triangle AFG, ſont plus grands que l'autre coſté FA; & iceluy FA eſt egal à ligne FB, (pource que F eſt le centre du cercle ABC) auſſi les lignes AG, GF ſeront plus grandes que FB: oſtant donc FG commune, reſtera GA, plus grande que GB. Et partant, puis que GA eſt egale à GD; (car G eſt le centre du cercle ADE) GD ſera auſſi plus grande que GB,

la partie que le tout : ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte conioignant les deux centres des cercles AEC, ADE, & produicte, ne tombera pas ailleurs qu'à l'attouchement A. Parquoy ſi deux cercles ſe touchent l'vn l'autre au dedans, &c. Ce qu'il falloit demonſtter.

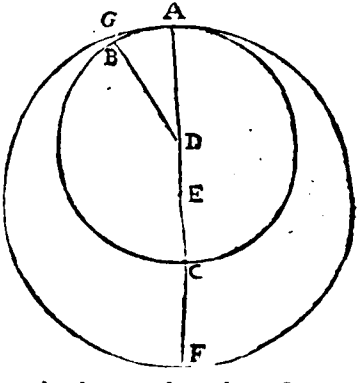
SCHOLIE.

Candalle, Errard & quelques autres Interprettes demonſtrent ceſte 11. prop. ainſi qu'il enſuit. Soient deux circonferences ABC & ADE ſe touchans interieurement au poinct A, & de la plus grãde ABC, le centre ſoit F, duquel au poinct d'attouchement A ſoit menee la ligne droicte AF : Ie dis que le centre de la plus petite circonference ADE eſt en icelle ligne AF. Autrement, qu'il ſoit hors d'icelle, s'il eſt poßible, cõme au poinct G, & ſoit conioinct FG, & prolongé de la part de G iuſques à ce qu'il couppe les deux circonferences aux poincts D & B, puis ſoit menee GA. D'autant que par la 20. p. 1. les deux coſtez AG, FG du triangle AFG ſont plus grands que l'autre coſté FA, & iceluy FA eſt egal à la ligne FB, puis que F eſt le centre du cercle ABC; auſſi AG, FG ſeront plus grandes que FB. Oſtant donc FG commune, reſtera GA plus grande que GB : mais GA eſt egale à GD (car G a eſté poſé centre du cercle ADE.) Donc auſſi GD ſera plus grande que GB; la partie que le tout; ce qui eſt abſurde. Parquoy le centre de l'autre cir-



conference ADE ne sera pas hors la ligne FA: & partant les deux centres des circonferences ABC & ADE seront en ladite ligne FA. Donc la ligne conioignant iceux centres & prolongee tombera au poinct d'attouchement A.

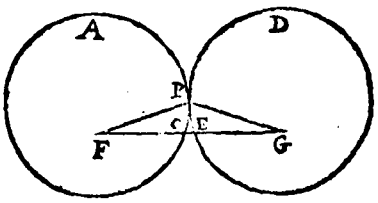
Encore autrement selon Pelletier & Billingsley. Soient deux cercles ABC, AFG s'entretouchans au dedans en A, & par la 1. pr. 3. soit trouué le centre du cercle ABC, qui soit D, & aussi le centre de AFG, lequel soit E: Ie dis que la ligne droicte menee du cẽtre E à D & prolongee iusques à la circonference du plus grand cercle tombera au poinct de l'attouchement A. Car autrement elle tombera de part ou d'autre d'iceluy attouchement A; qu'elle tombe donc, s'il est possible, à vn autre poinct, comme G. tellement que FEDG soit diametre du grand cercle AGF, & CEDB du petit cercle ABC, & soit tiree DA. D'autant qu'au diametre FEDG, le poinct D est autre que le centre E, la ligne droicte DA sera plus grande que DG par la 7. pr. 3. Mais DB est egale à DA par la def. du cercle: donc DB sera aussi plus grande que DG, la partie que le tout. Ce qui est absurde. Parquoy la ligne ED prolongee vers A ne pourra tomber ailleurs qu'à iceluy poinct d'attouchement A.



THEOR. II. PROP. XII.

Si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, passera par l'attouchement.

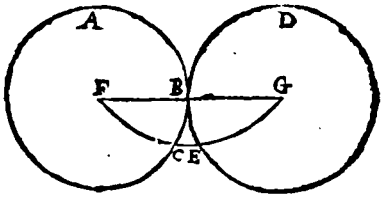
Soient deux cercles A B C, D B E se touchans l'vn l'autre au dehors au poinct B, desquels les centres soient F & G. Ie dis que si d'vn centre à l'autre on meine vne ligne droicte, qu'icelle passera par le poinct d'attouchement B.



Autrement, il s'ensuiura absurdité : car si icelle ligne ne passe par le poinct d'attouchement B, qu'elle passe ailleurs, s'il est possible, sçauoir aux poincts C & E, où elle couppe les deux circonferences, & du poinct d'attouchement B soient menees les deux lignes droictes FB, GB, lesquelles par la 20. prop. 1. seront plus grandes que FG, & par la def. du cercle, il s'ensuit que FC, estant egale à FB, & GE à GB, que les deux lignes FC & GE, seront plus grandes que F G, la partie que le tout. La ligne droicte menee d'vn centre à l'autre, passera donc par l'attouchement B. Parquoy si deux cercles se touchent l'vn l'autre au dehors, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

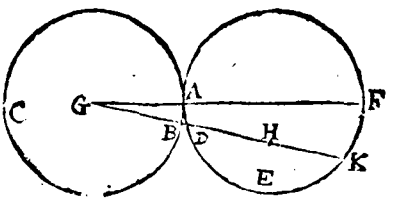
SCHOLIE.

D'autant qu'en cette demonſtration d'Euclide, les centres ne demeurent en leurs vrayes places, & que cela pourroit peut eſtre cauſer quelque doubte, Orence & Schubelius en ont adiouſté vne autre où les centres retiennent leurs places, laquelle eſt telle. Que les cercles A B C, D B E s'entretouchent au dehors en B, & d'iceux les centres ſoient F & G: Ie dis que la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre paſſera par le poinct d'attouchement B, c'eſt à dire que ſi on mene à iceluy poinct B les lignes droictes F B, G B, elles feront vne ſeule ligne droicte F B G. Car autrement elles feront vn angle à iceluy poinct B, & de F à G on pourra mener vne ligne droicte, laquelle ſoit (s'il eſt poſſible) F C E G, qui coupe les circonferences en C & E. Donc icelle ligne droicte F C E G conſtituera vn triangle auec les deux lignes F B, G B, puis qu'on a poſé qu'elles s'inclinent & font angle au poinct B: & par la 20. p. 1. icelles F B, G B ſont plus grandes que F C E G: Mais par la def. du cercle F C eſt egale à F B, & G E à G B: dont F C & G E ſeront auſſi plus grandes que la meſme F C E G, la partie que le tout: (car icelle F C E G outre F C, G E contient encore la ligne droicte C E,) Ce qui eſt abſurde.



Pelletier, & apres luy Billingſley demonſtrent encore cette 12. pr. ainſi. Soient les deux cercles A B C & D E F qui s'entretouchent par de hors au poinct A; & que G ſoit le centre du cercle A B C, duquel ſoit tiree par l'attouchement des cercles, la ligne droicte G A iuſques à ce qu'elle

rencontre la circonference DEF au poinct F: Ie dis que le centre du cercle ADE est en icelle ligne droicte GAF. Autrement qu'il soit hors d'icelle, s'il est possible, comme au poinct H, & du centre G à iceluy centre H soit tiree la



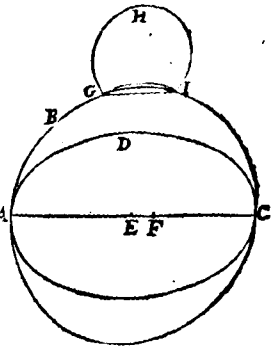
ligne droicte GHK iusques à ce qu'elle rencontre la circonference en K, couppant la periphere ABC en B, & la circonference ADE en D. D'autant que du poinct G, qui est hors le cercle ADE, sont tirees à iceluy cercle les deux lignes droictes GK, GF, desquelles GK passe par le centre H, par la 8. pr. 3. la partie exterieure GD sera moindre que GA partie exterieure de GF. Mais AG est egale à GB par la def. du cercle: donc aussi GD sera moindre que GB, le tout que la partie: ce qui est absurde. Donc le centre du cercle ADE ne sera pas hors la ligne GAF, & partant les deux centres des cercles ABC, & ADE seront en icelle ligne GF; parquoy la ligne conioignant iceux centres passera par l'attouchement des cercles.

THEOR. 12. PROP. XIII.

Vn cercle ne touche point vn autre cercle à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans.

Soient les deux cercles ABC, & ADC se touchans interieurement aux deux poincts A & C,

s'il est possible: & d'autant qu'ils ne peuuent auoir vn mesme centre par la 6. pr. de ce liure, soient les deux centres diuers E & F, par lesquels estant tiree la ligne droicte EF, & produite de part & d'autre, il faut qu'elle tombe és poincts d'attouchement A & C par la 11. pr. de ce mesme liure: & par la def. du cercle, il faut que les lignes droictes E A & E C soient egales.

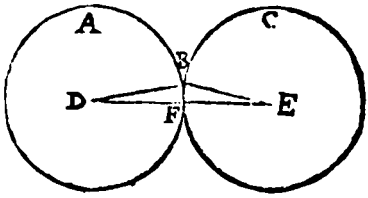


Item F A & F C. Mais F A est plus grande que E A Partant F C sera aussi plus grande que E C, la partie que le tout: ce qui est impossible. Donc les deux cercles ne se toucheront point en deux poincts au dedans.

Pareillement, il est impossible qu'ils se touchent exterieurement à plus d'vn poinct: car si le cercle G H I pouuoit toucher en dehors le cercle A B C en deux poincts, comme G & I, il faudroit que la ligne droicte G I menee par lesdits deux poincts, tombast dedans l'vn & l'autre cercle par la 2. pr. 3. ce qui est impossible: car icelle ligne droicte G I tombant dedans le cercle A B C, elle ne peut pas tomber dedans le cercle G H I, puis qu'iceluy est tout dehors A B C. Parquoy les cercles ne se touchent point à plus d'vn poinct, tant dehors que dedans. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Cette ſeconde partie eſt encore demonſtree par pluſieurs interpretes ainſi. Que les deux cercles AB & CB, dont les centres ſont D & E, s'entretouchent par dehors au poinct F: Ie dis qu'ils ne ſe peuuent toucher à vn autre poinct. Car ayant mené du centre D au centre E la ligne droicte DE, elle paſſera par ledit attouchement F par la precedente prop. & ſi les cercles ſe touchoient encore à vn autre poinct, comme B, la ligne droicte menee d'vn centre à l'autre paſſeroit auſſi par iceluy attouchement B; & par ainſi les deux lignes droictes DFE, DBE enclorroient vne ſuperficie, ce qui eſt impoßible.

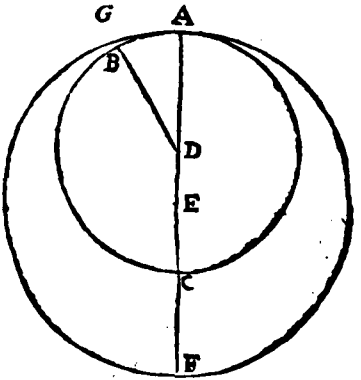


Clauius demonſtre en ce lieu le Theoreme ſuiuant.

Si au demy diametre d'vn cercle produict, on prend vn poinct outre le centre, le cercle deſcrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du demy diametre, touchera le premier cercle en iceluy poinct extreme du demy-diametre, & tombera tout dehors le meſme cercle.

Soit le cercle ABC, duquel le centre eſt D, & au demy diametre AD prolongé, ſoit prins quelconque poinct E, duquel & de l'interualle EA ſoit décrit le cercle AFG, lequel ie dis toucher le cercle ABC au ſeul poinct A. Car ou le poinct E eſt dans le cercle ABC, ou dehors.

s'il eſt dedans: d'autant que A E eſt plus grand que A D, c'eſt à dire que D C, & à plus forte raiſon que E C : E F qui eſt egale à E A ſera auſſi plus grande que E C : & partant le poinct F eſt hors le cercle A B C & le cercle A F G hors le meſme cercle pres du poinct F. Iceluy poinct F tombera beaucoup dauantage hors le cercle A B C, ſi E eſt hors le meſme cercle A B C. Si donc le cercle A F G ne tombe tout dehors le cercle A B C, tellement qu'il le touche au ſeul poinct A, que le cercle A F G couppe ou touche le cercle A B C, en vn autre poinct B, ſi faire ſe peut, & ſoit tiree la ligne D B. Veu donc qu'au diametre du cercle A F G eſt pris le poinct D, outre le centre E, la ligne D A ſera la plus petite de toutes les lignes droictes tombantes de D à la circonference, par la 7. prop. 3. Donc D A eſt moindre que D B, ce qui eſt abſurde; car D A, D B tombant du centre D en la circonference d'vn meſme cercle A B C, ſont egales. Donc le cercle A F G ne couppe ou touche le cercle A B C en vn autre poinct que A, mais tõbe tout dehors iceluy: ce qui eſtoit propoſé.



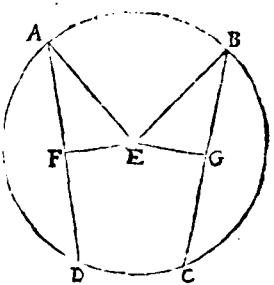
Que ſi au ſemy-diametre non produit, on prend vn poinct outre le centre, le cercle deſcrit d'iceluy poinct comme centre, par le poinct extreme du ſemy-diametre touchera pareillement le premier cercle au ſuſdit poinct extreme du demy-diametre, & tombera tout dedans le

meſme cercle. Comme ſi au ſemy-diameetre AE, du cercle AFG, on prend le poinct D, duquel & de l'interualle DA, on deſcriue le cercle ABC, iceluy tombera totalement dedans AFG, & le touchera au ſeul poinct A. Car puis qu'il a eſté demonſtré cy deſſus que le cercle AFG tombe tout dehors le cercle ABC, pareillement tout ceſtuy-cy tombera dedans celuy-la, tellement qu'ils s'entre-touchent au ſeul poinct A: & par ainſi appert ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 13. PROP. XIV.

Dans le cercle, les lignes droictes egales, ſont egalement diſtantes du centre; & les egalement diſtantes du centre ſont egales entr'elles.

Au cercle ABCD, duquel le centre eſt E, ſoient deux lignes droictes egales AD & BC. Ie dis qu'elles ſeront egalemẽt diſtantes du centre E.



Qu'ainſi ne ſoit, par la 12. prop. 1. du centre E ſoient menees les deux lignes EF, EG, perpendiculaires aux deux lignes droictes AD, BC: puis ſoient tirees les deux lignes AE & BE. Or les deux lignes droictes AD & BC eſtans couppées en angles droicts par les perpendiculaires EF & EG, elles ſeront auſſi couppees en deux egalement par

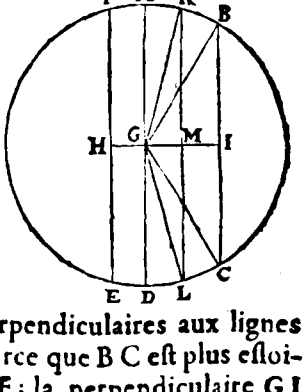
la 3.p.3. & puis qu'icelles AD, BC ſont poſees egales, la moitié AF ſera egale à la moitié BG. Pareillement AE eſtant egale à BE par la def. du cercle; le quarré de AE ſera egal au quarré de BE. Mais iceluy quarré de AE eſt egal aux deux quarrez de AF, FE, par la 47. p. 1. & le quarré de BE eſt egal aux deux quarrez de BG, GE. Donc les deux quarrez de AF, FE ſeront egaux aux deux quarrez de BG, GE. Mais puis que les lignes AF, BG ſont egales, le quarré de AF eſt egal au quarré de BG, & par conſequent le quarré de FE, eſt egal au quarré de GE. Parquoy la ligne FE ſera egale à la ligne GE, & par la 4. def. du 3. AD & BC ſeront egalement diſtantes du centre E.

Quant à la ſeconde partie. Ie dis que ſi AD, BC ſont egalement diſtantes du centre E, qu'elles ſeront egales entr'elles: car ayant conſtruit, comme deſſus, les perpendiculaires EF & EG ſeront egales par la 4. def. de ce liu. & coupperont AD, BC en deux egalement par la 3. pr. de ce meſme liu. & par deduction de la 47. p. 1. comme cy deſſus, AF ſe trouuera egale à BG, & par conſequent auſſi leurs doubles AD & BC ſeront egales entr'elles. Si donc au cercle les lignes droictes egales, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XV.

Dans le cercle, la plus grande ligne eſt le diametre: quant aux autres touſiours la plus proche du centre eſt plus grande que la plus eſloignee.

Au cercle A B C D E F, duquel le centre est G soit le diametre A D, & la ligne F E la plus proche d'iceluy, mais B C la plus esloignee. Ie dis que de toutes ces lignes A D est la plus grande, & que F E est plus grande que B C.



Car soient tirees du centre G les lignes droictes G H, G I perpendiculaires aux lignes droictes F E, B C: & pource que B C est plus esloignee du centre que F E; la perpendiculaire G I sera plus grande que G H, par la 4. def. de ce liure. Soit donc couppé d'icelle G I, la ligne G M egale à G H, & par M soit menee K M L perpendiculaire à G I, & soient tirees les lignes G K, G B, G C, G L. Donc puis que les perpendiculaires G M, G H sont egales, les lignes droictes K L, F E seront egalement distantes du centre par la 4. def. de ce liure, & partant egales entr'elles par la prop. precedente. Derechef, puis que G K, G L, sont plus grandes que K L par la 20. prop. 1. & icelles G K, G L sont egales au diametre A D; iceluy diametre A D sera aussi plus grand que K L ou F E. Par mesme raison on demonstrera que A D est la plus grande de toutes les autres lignes.

Item, d'autant qu'aux triangles G K L & G B C, les costez G K, G L, G B, G C, sont egaux par la definition du cercle, & l'angle G K L est plus grand que l'angle B G C, par la 24. prop. 1. la base K L, ou

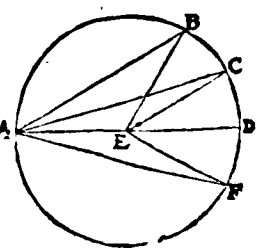
ſon egale FE, ſera plus grande que la baſe BC, & ainſi des autres. Parquoy dans le cercle la plus grande ligne eſt le diametre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

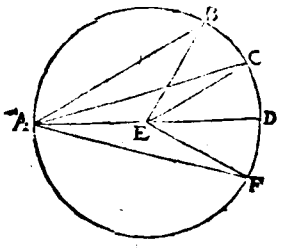
Clauius demonſtre icy le Theoreme ſuiuant pris de Commandin.

Si en la circonference du cercle on prend vn poinct, & d'iceluy l'on mene quelque ligne droicte au cercle, l'vne deſquelles paſſe par le centre, & les autres où l'on voudra: celle qui paſſe par le centre ſera la plus grande de toutes: mais des autres les plus proches de celle là qui paſſe par le centre ſeront plus grandes que les plus eſloignees: & n'y en peut auoir que deux egales de part & d'autre de la plus grande.

En la circonference du cercle ABCD, ſoit pris le poinct A, & d'iceluy ſoient menees pluſieurs lignes droictes AB, AC, AD, deſquelles AD paſſe par le centre E: ie dis que AD eſt la plus grande de toutes, & AC eſtre plus grande que AB, qui eſt plus eſloignee d'icelle AD. Car eſtans menees les lignes BE, CE; au triangle AEC les deux coſtez AE, EC ſeront plus grands que le coſté AC par la 20. prop. 1. Mais icelles lignes AE, EC ſont egales aux lignes droictes AE, ED, c'eſt à dire à la ligne droicte AD. Donc icelle AD ſera plus grande que AC: & par meſme raiſon elle ſera auſſi plus grande que AB, & ainſi des autres.



En apres, d'autant qu'au triangle AEC les deux costez AE, EC sont egaux aux deux costez AE, EB du triangle AEB, chacun au sien, & tout l'angle AEC plus grand que l'angle AEB, la base AC sera plus grande que la base AB par la 24. prop. 1. Et par mesme raison AC sera plus grande que toute autre ligne plus esloignee du centre E.



En troisiesme lieu: ie dis que du poinct A on ne peut mener au cercle que deux lignes droictes egales entr'elles de part & d'autre de la plus grande AD. Car ayant fait l'angle AEF egal à l'angle AEC, & ioinct AF, les deux costez AE, EC seront egaux aux deux costez AE, EF, & les angles AEC, AEF, contenus d'iceux costez, aussi egaux, & par la 4. prop. 1. les bases AC AF sont egales: & il est euident que du mesme poinct A on ne peut tirer dans le cercle vne autre ligne, qui ne s'approche ou esloigne de AD; & partant plus grande ou plus petite que l'vne & l'autre d'icelles AC, AF. Donc du poinct A ne se peuuent tirer dans le cercle que deux lignes droictes egales entr'elles.

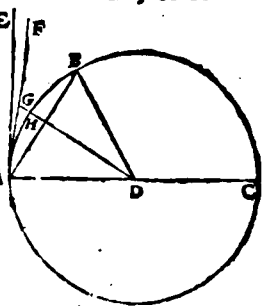
Que si de AB, AF, tirees de diuerse part du diametre AD, on dit que AF est plus proche d'icelluy diametre AD, on demonstrera comme au scholie de la 7. prop. de ce liure que ladite AF est plus grande que AB.

THEOR. 15. PROP. XVI.

Si à l'extremité du diametre d'vn cer-

cle, on leue vne ligne perpendiculaire, elle tombera dehors le cercle: & entre icelle perpendiculaire & la circonference ne tombera pas vne autre ligne droicte; & l'angle du demy cercle eſt plus grand que tout angle rectiligne aigu, & celuy qui reſte plus petit.

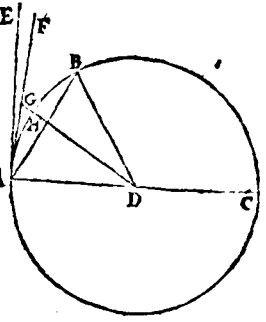
Du cercle ABC, ſoit le centre D, & le diametre AC, ſur l'extremité duquel A, ſoit leuée la ligne perpendiculaire AE, par la 11. prop. 1. Ie dis premierement qu'icelle ligne AE tombe hors le cercle.



Car ſi elle tomboit dans iceluy, ainſi que AB; eſtant tiree DB, les deux angles DAB, DBA, ſeront egaux par la 5: prop. 1. Mais DAB eſt droict par la conſtruction: DBA ſera donc auſſi droict: ce qui eſt abſurde, puis que par la 17. propoſ. 1. deux angles d'vn triangle ſont moindres que deux droicts. Donc la perpendiculaire ne tombera pas dans le cercle. Pour la meſme raiſon elle ne tombera pas auſſi en la circonference, mais dehors, comme eſt AE.

Maintenant, ie dis que de A ne peut tomber

entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB, vne autre ligne droicte. Car s'il eſt poſſible que quelque ligne droicte y tombe, comme AF, de D ſoit menee ſur icelle AF la perpendiculaire DG, couppant la circonference en H, laquelle tombera neceſſairement de la part de l'angle aigu DAF par le Corol. de la 17. prop. 1. Veu donc que au triangle DAG, les deux angles DAG, DGA, ſont moindres que deux droicts par la 17. pr. 1. & par la conſtruction DGA eſt droict, l'angle DAG ſera moindre qu'vn droict, & partant la ligne DA, ou ſon egale DH, ſera plus grande que DG, par la 19. pr. 1. la partie que le tout: ce qui eſt abſurde. Entre la perpendiculaire AE, & la circonference AB ne tombera donc pas vne autre ligne droicte.



Ie dis finalement, que tout l'angle du demy cercle BAC contenu du diam. AC & de la circonference AB, eſt plus grand que tout angle rectiligne aigu, & que celuy qui reſte BAE contenu de la ligne droicte AE & de la circonference AB, eſt plus petit que tout angle rectiligne aigu. Car puis que CAE eſt angle droict diuiſé par la ſeule circonference AB, & qu'entre icelle circonference AB & la ligne droicte AE, ne peut tomber vne autre ligne droicte; l'angle BAE ne peut eſtre diuiſé par aucune ligne droicte, & par ainſi ne ſera diminué par aucune ligne droicte, ny par conſe-

quent

quent l'angle BAC ne sera augmenté par aucune ligne droicte. Si donc à l'extremité du diametre d'vn cercle on leue vne perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

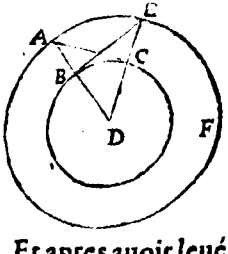
COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste qu'vne ligne droicte tiree perpendiculairement de l'extremité du diametre, touche le cercle en vn seul poinct. Car il a esté demonstré qu'elle tombe hors le cercle: & partant elle le touche seulement au poinct extreme du diametre. Parquoy s'il estoit requis tirer vne ligne droicte par le poinct A donné en la circonference du cercle, laquelle toucha le cercle en A nous tirerions de A au centre D la ligne droicte AD, & sur icelle seroit esleuee la perpendiculaire AE, laquelle toucheroit le cercle en A, comme il a esté demonstré.

PROBL. 2. PROP. XVII.

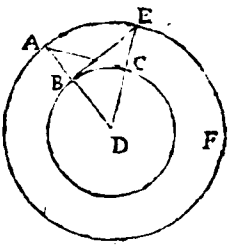
D'vn poinct donné, mener vne ligne droicte qui touche vn cercle donné.

Soit le poinct donné A, duquel il faut mener vne ligne droicte qui touche le cercle donné BC, dont le centre est D.



Soit menee la ligne AD couppant le cercle BC en B: puis du centre D, & interuale DA, soit descrit le cercle AEF: Et apres auoir leué la

perpendiculaire B E au bout du demy diametre B D par la 11. p. 1. laquelle couppe la circonference A E F en E, soit menee la ligne E D couppant le cercle B C au poinct C, & du poinct dõné A, à iceluy poinct C, soit menee la ligne A C: ie dis qu'elle touche le cercle donné B C au poinct C.



Car les deux triangles A C D & E B D ayans deux costez egaux, & l'angle D commun, la base A C sera egale à la base E B, & l'angle droict A C D egal à l'angle E B D, qui sera aussi droict. Et par le Corol. de la preced. prop. la ligne A C touchera le cercle B C au seul poinct C. Nous auons donc du poinct donné A mené la ligne droicte A C, qui touche le cercle donné au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

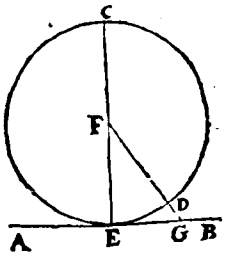
SCHOLIE.

La pratique de cette prop. est aisee à entendre par la construction d'icelle: mais nous auons enseigné en nostre Geometrie pratique, Prob. 20. vne autre maniere beaucoup plus facile, laquelle nous rapporterons encore à la 31. prop. de ce liure.

THEOR. 16. PROP: XVIII.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & du centre à l'attouchement on mene vne ligne droicte, elle sera perpendiculaire à la touchante.

Soit la ligne droicte A B touchant le cercle CDE, au poinct E, & d'iceluy poinct d'attouchement soit menee la ligne droicte EC passant par le centre F. Ie dis qu'elle sera perpendiculaire à A B.



Car si elle ne l'est, soit menee FG perpēdiculaire à AB, couppant la circonference en D. Veu donc qu'au triāgle EFG les deux angles FEG, FGE sont moindres que deux droicts par la 17. p. 1. & FGE est droict par la construction, FEG sera moindre qu'vn droict, & par la 19. p. 1. la ligne F E, ou FD son egale, sera plus grande que FG, la partie que le tout: ce qui est absurde. Donc FE est perpendic. à AB. Parquoy si vne lig. droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

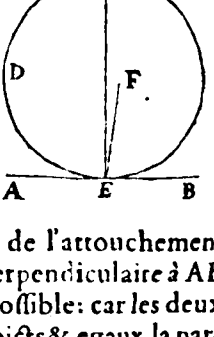
SCHOLIE.

Clauius demonstre encore cette prop. ainsi. Si EC n'est perpendiculaire à AB, l'vn des angles qu'elle faict au poinct E sera obtus, & l'autre aigu. Soit donc CEB aigu; & veu qu'il est plus grand que l'angle du demy cercle CED, l'angle du demy cercle sera plus petit que quelque angle rectiligne aigu: ce qui est contre la 16. pr. 3. & partant absurde.

THEOR. 17 PROP. XIX.

Si vne ligne droicte touche vn cercle, & au poinct de l'attouchement est leuee vne perpendiculaire; en icelle sera le centre du cercle.

Soit la ligne droicte A B, touchant le cercle CDE au poinct E: & d'iceluy soit leuee E C perpendiculaire à AB. Ie dis que le centre du cercle sera dans icelle ligne perpendiculaire EC.



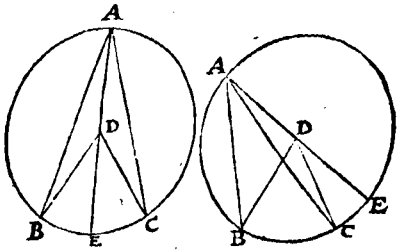
Autrement, il sera dehors icelle ligne; soit donc au poinct F, s'il est possible, & d'iceluy poinct soit menee la ligne droicte E F au poinct de l'attouchement E; icelle ligne E F sera aussi perpendiculaire à AB par la prec. prop. ce qui est impossible: car les deux angles AEC, AEF seroient droicts & egaux, la partie au tout: partant le centre du cercle n'estoit pas hors la ligne E C, ains dedans. Si donc vne ligne droicte touche vn cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Au cercle, l'angle du centre est double de l'angle de la circonference, quand iceux angles ont vne mesme circonference pour base.

Au cercle ABC, duquel le centre est D, soient constituez les deux angles BAC & BDC, sçauoir BAC en la circonference, & BDC au centre, ayant pour base vne mesme circonference B C. Ie dis que l'angle BDC sera double de l'angle BAC.

Car premierement si les lignes droictes AB,



A C encloſent les lignes DB, D C, comme en la premiere figure; eſtant menee par le centre D la ligne droicte ADE, & les lignes DA, DB & DC, eſtans egales, les deux triangles ADB & ADC ſeront Iſoſceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles egaux ſur les baſes AB & AC. Mais l'angle exterieur BDE par la 32. p. 1. eſt egal aux deux angles interieurs DAB & DBA, qui ſont egaux: partant il ſera double du ſeul DAB: par meſme diſcours EDC ſe trouuera auſſi double de D A C, & par conſequent les deux enſemble BDC ſeront doubles des deux enſemble BAC.

Que ſi l'angle de la circonference B A C eſt comme en la ſeconde figure, il s'enſuiura touſiours le meſme, ſçauoir que l'angle B D C ſera double de l'angle BAC.

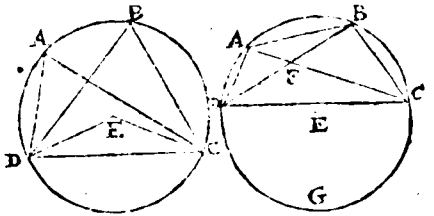
Car apres auoir mené par le centre D la ligne ADE, par la 32. pr. 1. l'angle exterieur B D E ſera egal aux deux oppoſez interieurs ABD, DAB, & double du ſeul D A B, eſtant le triangle Iſoſcele: par meſme diſcours CDE ſera double de C A D, & par la 20. com. ſent. ſi de BDE double de B A E on oſte C D E, double de C A E, le demeurant

BDC sera double du demeurant BAC. Parquoy au cercle, langle du centre est double de l'angle de la circonference, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Au cercle, les angles qui sont en vne mesme portion, sont egaux entr'eux.

Toute portion de cercle, est ou plus grande, ou plus petite que le demy cercle. Soit donc pre-



mierement au cercle ABCD, le centre duquel est E, vne plus grande portion DABC, en laquelle soient les angles DAC & DBC. Ie dis qu'ils sont egaux entr'eux.

Car si du centre E on meine les deux lignes ED & EC, l'angle du centre DEC sera double de l'angle en la circonference DAC par la prop. precedente: & par la mesme prop. il sera aussi double de l'autre angle DBC. Mais les choses qui sont moitié d'vne mesme, sont egales entr'elles: Donc aussi les angles A & B seront egaux entr'eux.

Soit maintenant vne portion plus petite que le

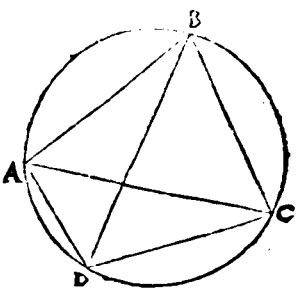
demy cercle, comme en la 2. figure. Ie dis que les deux angles DAC, DBC, eſtans en la meſme portion DABC ſont egaux.

Car ſi on meine la ligne dr. AB, il ſe fera vne portion BGA, plus grande que le demy cercle; & comme nous auons demonſtré cy deſſus, les deux angles ADB & BCA, qui ſont en vne meſme portion AGB, ſeront egaux: pareillement aux deux triangles DAF & CBF, les angles oppoſez au poinct F ſont egaux par la 15. pr. 1. & par ce qui a eſté demonſtré à la 32. pr. 1. le troiſieſme angle DAF ſera egal au troiſiſeme angle CBF. Donc au cercle, les angles qui ſont en vne meſme portion ſont egaux entr'eux: ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

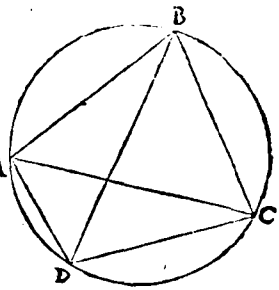
Les figures de quatre coſtez inſcrites au cercle, ont les angles oppoſez egaux à deux angles droicts.

Soit le cercle A B C D, auquel ſoit inſcrite la figure de quatre coſtez A B C D. Ie dis que les angles oppoſés A B C, A D C; item B A D, B C D, ſont egaux à deux droicts.



Car ſi on meine les deux diagonales A C & B D, les deux angles A C D & A B D, eſtans en vne meſme portion A B C D, ſeront egaux

par la pr. prec. Pareillement les deux angles D B C & C A D, estans en vne mesme portion D A B C, seront egaux; donc les deux angles sous le poinct B, seront egaux aux deux D A C & D C A, lesquels auec les deux du poinct D, sont egaux à deux droicts par la 32. pr. 1. partant aussi les deux soubs le poinct B auec les deux soubs le poinct D: c'est à dire le total A B C, auec le total A D C, seront egaux à deux droicts. Nous demonstrerons en la mesme maniere que les deux angles B A D, B C D, sont egaux à deux droicts. Car derechef les deux angles A B D, A C D, sont egaux. Item les deux B C A, B D A; & partant tout l'angle B C D sera egal aux deux A B D, A D B, lesquels auec B A D sont egaux à deux droicts par la 32. p. 1 Donc aussi les deux B C D, B A D, seront egaux à deux droicts. Parquoy les figures de quatre costez inscriptes au cercle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

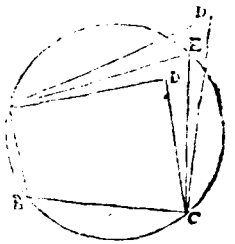


SCHOLIE.

La conuerse de cette 22. prop. peut estre demonstree ainsi qu'il ensuit.

Si deux angles opposez d'vn quadrilatere sont egaux à deux droicts, le cercle descrit par trois angles d'iceluy passera aussi par le quatriesme angle.

Au quadrilatere ABCD, les deux angles opposez B & D soient egaux à deux droicts, & par les trois angles A, B, C, soit descrit vn cercle: Ie dis qu'il passera aussi par le 4. angle D. Car s'il n'y passe, il passera ou au de çà de D, ou au dela. Soient donc tirees les deux lignes droictes AE, CE, en telle sorte que ne couppant les lignes droictes CD, AD, elles constituent au cercle vn quadrilatere



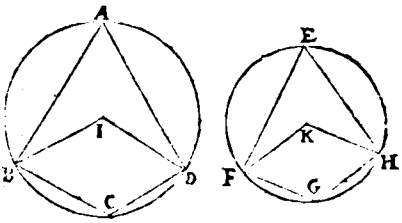
ABCE. Donc par la 22. prop. 3. les deux angles opposez B, E sont egaux à deux droicts: Mais par l'hypothese les deux angles B & D, sont aussi egaux à deux droicts; & partant les deux angles B & E seront egaux aux deux B & D. Parquoy en ostant l'angle commun B, resteront les angles D & E egaux: Ce qui est absurde, car estant tiree la ligne droicte CA, l'angle D sera plus grand que l'angle E par la 21. prop. 1. ou au contraire l'angle E plus grand que l'angle D. Le cercle passera donc par le poinct D.

Nous demonstrerons encore icy quatre theoremes non seulement vtils aux choses Geometriques, mais aussi neceſſaires aux Astronomiques.

1. Aux cercles, les angles qui s'appuyent sur arcs semblables sont egaux entr'eux, soit qu'ils soient constituez aux centres ou aux circonferences: & au contraire, les arcs ausquels s'appuyent angles egaux constituez aux centres ou aux circonferences, sont semblables.

Aux cercles ABCD, EFGH desquels les centres

I & K, soient premierement les arcs semblables BCD, FGH, ausquels insistent & s'appuyent les angles I & K aux centres; & les angles A & E aux circonference:



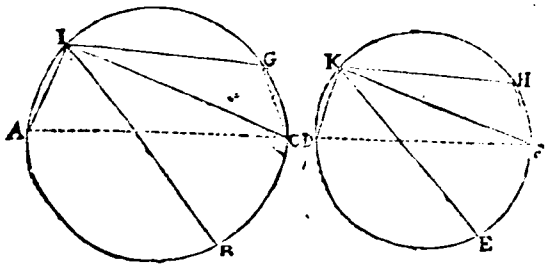
Ie dis que tant ces deux-là, que ces deux-cy sont egaux entr'eux. Car estans constituez en iceux arcs les angles C, G, qui par la 10. d. 3. seront egaux: & par la 22. pr. 3. tant les deux angles C, A, que les deux G, E, sont egaux à deux droicts. Ostant donc les egaux C, G, les restans A, E seront aussi egaux: Mais d'iceux sont doubles les angles I, K, par la 20. prop. 3. & par consequent ils sont aussi egaux. Ce qui estoit proposé.

Secondement, soient egaux tant les angles I, K, que A, E, lesquels s'appuyent sur les arcs BCD, FGH: Ie dis qu'iceux arcs BCD, FGH sont semblables. Car si A & E sont egaux, & par la 22. prop. 3. tant les deux angles A & C, que les deux E & G sont egaux à deux droicts, les deux autres C & G seront aussi egaux; & partant les arcs BCD, FGH, ausquels insistent les angles A, E aux circonferences, seront semblables par la 10. d. 3. Mais si les angles I & K aux centres sont egaux, leurs moitiez A & E seront aussi egales. Parquoy comme dessus, les arcs BCD, FGH sont semblables. Ce qu'il falloit demonstrer.

2. Si aux demy cercles, ou autres segmens semblables, l'on adiouste des segmens semblables, les totals segmens seront aussi semblables: &

si des cercles, demy cercles, ou autres segmens semblables, on oste des segmens semblables; les segmens restans seront aussi semblables.

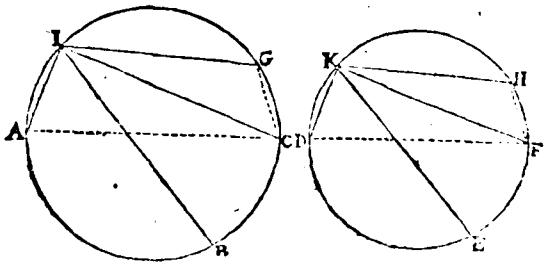
Aux cercles ABC, DEF, soient les segmens ou arcs semblables ABC, DEF, qui soient demy cercles ou non,



& a iceux soient adioustez les arcs semblables CG, FH. Ie dis que tout l'arc ABG est semblable à tout l'arc DEH. Car estans pris aux arcs restans les deux poincts I, K, comme on voudra, soient menees les lignes droictes AI, CI, GI: DK, FK, HK. D'autant que les arcs ABC, DEF sont semblables, les angles AIC, DKF, seront egaux par le prec. Theor. Et par mesme raison les angles CIG, FKH seront aussi egaux, à cause des arcs semblables CG, FH. Donc tout l'angle AIG sera egal à tout l'angle DKH: & par le mesme theor. prec. les arcs ABG, DEH seront semblables: ce qui estoit proposé.

Maintenant, que des segmens ou arcs semblables ABC, DEF, soient retranchez les arcs semblables AB, DE. Ie dis que les arcs restans BC, EF, sont aussi semblables. Car estans pris derechef les deux poincts I, K, aux peripheres restantes des

arcs donnez soient menees les lignes droictes AI, BI, CI: DK, EK, FK. Donc puis que tout l'arc ABC est semblable à tout l'arc DEF, tout l'angle AIC sera egal



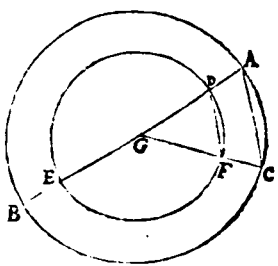
à tout l'angle DKF par le prec. theor. Et par mesme raison l'angle retranché AIB sera egal à l'angle retranché DKE, à cause des arcs semblables AB, DE: donc aussi l'angle restant BIC sera egal à l'angle restant EKF; & consequemment les arcs BC, EF, seront semblables. Ce qu'il falloit demonstrer.

Que si des cercles entiers on oste les segmens semblables IAC, KDF, les segmens restans CGI, FHK seront aussi semblables. Car ayant pris aux arcs d'iceux segmens les poincts A, G, D, H, soient menees les lignes droictes IA, CA, IG, CG: KD, FD, KH, FH. D'autant que les segmens IAC, KDF sont semblables, les angles IAC, KDF seront egaux par la 10. def. 3. Et puis que par la 22. prop. 3. tant les deux angles opposez A, G, que les deux D, H, sont egaux à deux droicts; en ostant les deux angles egaux A & D, les deux restans G & H seront aussi egaux, & partant les segmens IGC, KHF seront semblables par la mesme def. Ce qui estoit proposé.

3. Si deux ou plusieurs cercles sont descrits d'vn

meſme centre, & d'iceluy ſoient menees deux ou dauantage de lignes droictes, qui couppent les circonferences; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, ſeront ſemblables.

Soient deux cercles ABC, DEF, deſcrits d'vn meſme centre G, duquel ſoient menees les deux lignes droittes GB, GC, qui couppent les circonferences en B, C, & E, F: Ie dis que les arcs EF, BC, ſont ſemblables. Car eſtant prolongee la ligne BG iuſques en A, & tiré les lignes droittes AC, DF, l'angle G conſtitué au centre ſera double de chacun des angles A, D, en la circonferences par la 20. pr. 3. Donc par le 1. de ces theor. les arcs BC, EF, ſur leſquels ils s'appuient ſeront ſemblables. Ce qui eſtoit proposé.

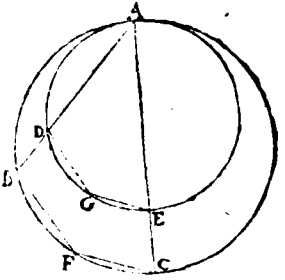


Autrement. *D'autant que ſur les arcs EF, BC s'appuient angles egaux au centre, ou pluſtoſt vn ſeul & meſme angle BGC; iceux arcs EF, BC ſeront ſemblables par le theor. ſuſdit.*

4. Si deux ou dauantage de cercles s'entretouchent au dedans, & du poinct d'attouchement ſoient tirees deux ou dauantage de lignes droictes qui couppent les cercles; les arcs compris entre deux quelconques d'icelles lignes, ſeront ſemblables; comme auſſi les arcs compris entre le poinct d'attouchement, & laquelle on voudra d'icelles lignes.

Que les deux cercles ABC, ADE s'entretouchent en

dedans au poinct A, duquel soient menees les deux lignes droictes AB, AC, qui couppent les cercles en B, C, & D, E : Ie dis que tant les arcs BC, DE, que AB, AD: & ACB, AED sont semblables. Car ayant pris les deux poincts F, G, & tiré les lignes droictes, BF, CF, DG, EG; les deux angles DAE, DGE, seront egaux aux deux angles BAC, BFC, attendu que tant ces deux-là, que ces deux cy sont egaux à deux droicts par la 22. pr. 3. & partant l'angle commun BAC estant



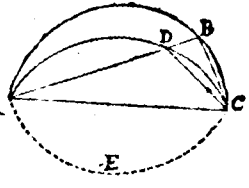
osté, les deux autres angles DGE, BFC demeureront egaux: & par la 10. def. 3. les arcs DE, BC seront semblables. Et d'autant que si on conçoit estre tiree la ligne droicte AC par le centre du cercle, elle tombera en l'attouchement A par la 11. pr. 3. & en la mesme maniere que dessus les arcs DE, BC seront semblables, lesquels estans ostez des demy cercles semblables, resteront aussi semblables les arcs AD, AB, qui ostez des circonferences entieres, resteront encores les arcs AED, ACB semblables, comme nous auons demonstré au 2. theor. Ce qui estoit proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Deux portions de cercles, semblables & inegales, ne se mettront pas dessus vne mesme ligne droicte, & de mesme part.

Car si faire se peut, soient deux portions de cer-

cles semblables, & inegales ABC & ADC, sur la la ligne droicte AC, & de mesme costé. Il est euident qu'elles s'entrecoupperont seulement és poincts A & C, puis que par la 10. pr. de ce liure vn cercle ne couppe pas vn autre cercle en plus de deux poincts; & partant la circonference d'vne portion sera toute dehors la circonference de l'autre. Soit dõc menée la ligne droicte A B couppant les circonferences en D & B, & tirees les deux lignes droictes B C, & DC: par la definition des semblables portions, les deux angles ABC & ADC seront egaux, ce qui est absurde: car par la 16. prop. 1. l'angle exterieur ADC doit estre plus grand que l'oppose interieur B. Donc les deux portions ABC & ADC, estans semblables & inegales, ne se pouuoient mettre sur vne mesme ligne droicte AC, & de mesme part Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

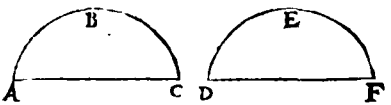
Encore qu'en ceste 23. prop. & demonstration d'icelle les portions de cercles soient constituees de mesme part, si est-ce toutesfois que la prop. sera aussi veritable, si lesdites portions sont posees de diuerse part; comme sont les portions ABC, AEC. Car si on conçoit que l'vne d'icelles portions, cõme AEC, soit meüe à l'entour de la ligne dr. AC, & vienne à estre de mesme part que ABC il aduiendra tousiours la mesme absurdité que dessus, attendu qu'vne portion ne conuiendra point à l'autre, à cause de leur inegalité.

Dauantage il eſt euident, que ce qui eſt dit icy de deux portions conſtituees ſur vne meſme ligne droicte ſe doit auſſi entendre de celles conſtituees ſur lignes droictes egales: car l'vne d'icelles lignes eſtant ſuperpoſee à l'autre, elle luy conuiendra, & partant les deux portions ſeront lors poſees ſur vne meſme ligne droicte, ainſi que deſſus, &c.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Semblables portions de cercles eſtans conſtituees ſur lignes droictes egales, ſont egales entr'elles.

Soient deux portions de cercles ſemblables ABC & DEF conſtituees ſur lignes droictes egales AC, & DF. Ie dis qu'icelles portions ſont egales entr'elles.



Autrement, ſi elles eſtoient inegales, il s'enſuiuroit que deux portions ſemblables & inegales, pourroient eſtre poſees ſur lignes droictes egales, ou bien ſur vne meſme, contre la prop. precedente: donc les deux portions ABC & DEF conſtituees ſur lignes droictes egales, ſeront egales; Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

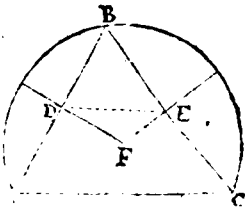
Il eſt aiſé de demonſtrer la conuerſe tant de cette 24. prop.

prop. que de la precedente, c'eſt à ſçauoir que les egaux ſegmens de cercles conſtituez ſur lignes droictes egales, ou ſur vne meſme, ſont ſemblables. Car à cauſe de l'egalité deſdits ſegmens ou portions de cercles, l'vne conuiendra à l'autre: & partant tous les angles conſtituez en icelles ſont egaux: Parquoy icelles portions ſeront ſemblables. Que ſi quelqu'vn dit que leſdites portions ne conuiennent entr'elles, il faudroit ou que l'vne tombaſt toute hors de l'autre, & elles ne ſeroient egales entr'elles, contre l'hypotheſe; ou bien que la circonference de l'vne couppaſt la circonference de l'autre, & par ainſi vn cercle en couppe vn autre à plus de deux poincts, contre la 10. prop. 3.

PROB. 3. PROP. XXV.

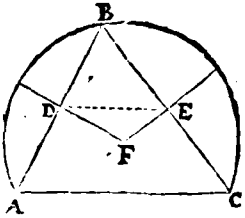
La portion d'vn cercle eſtant donnee, deſcrire le cercle duquel elle eſt portion.

Soit vne portion de cercle ABC, de laquelle il faut trouuer le centre pour acheuer le cercle d'icelle.



En la circonference d'icelle portion ſoient pris comme on voudra les trois poincts A, B, C, & apres auoir mené les deux lignes droictes AB & BC, & icelles couppees en deux egalement en D & E par la 10. prop. 1. d'iceux poincts ſoient leuees par la 11. prop. 1. les perpendiculaires D F,

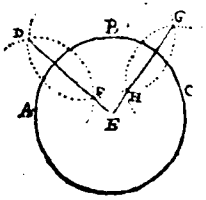
& EF, se rencontrans au poinct F: (or elles se doiuent rencontrer, pource que si on menoit vne ligne droicte de D à E, comme D E, seroient faicts deux angles EDF, DEF, moindres que deux droicts.) Ie dis que le poinct F est le centre cherché.



Car par le Corol. de la 1. prop. de ce liure le centre sera en la ligne DF: Il sera aussi en EF: ce sera donc au poinct F, qui leur est commun. Parquoy nous auons trouué le centre du cercle, duquel le segment donné ABC est portion: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

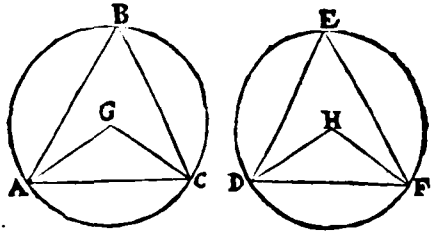
La pratique de cette prop. n'est differente à celle de la premiere, c'est à sçauoir qu'ayant pris en la circonference les trois poincts A, B, C, il faut des poincts A & B, descrire d'vn mesme interualle deux arcs qui s'entrecouppent en D, F, & par iceux mener vne ligne droicte DFE: en apres des poincts B & C, descrire encore d'vn mesme interualle deux autres arcs qui s'entrecouppent en G & H, par lesquels soit menee vne ligne droicte GHE, qui couppe la precedente DF en E, qui sera le centre requis.



THEOR. 23. PROP. XXVI.

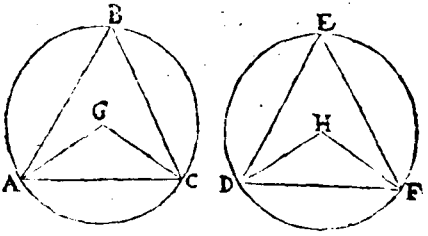
Aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent sur circonferences egales, soit qu'ils s'appuyent estans constituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient les cercles egaux A B C & D E F, desquels les centres sont G & H, & à iceux soient constituez les angles egaux G, H: Item les angles B, E constituez aux circonferences, soient aussi egaux. Ie dis que les circonferences A C & D F, sur lesquelles iceux angles s'appuyent, sont egales.



Car d'autant que les cercles sont egaux, les lignes tirees du centre à la circonference seront egales par la 1. def. de ce liure. Parquoy ayant tiré les deux lignes droictes A C, D F, les deux triangles A G C & D H F, auront deux costez egaux à deux costez, chacun au sien, & l'angle G egal à

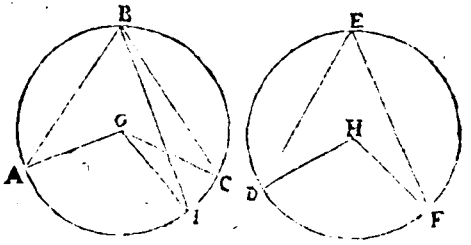
l'angle H: & par la 4. prop. 1. la baſe AC ſera egale à la baſe DF. Pareillement l'angle B eſtant egal à l'angle E, la portion A B C ſera ſemblable à la



portion DEF, par la 10. def. de ce liu. & par la 24. prop. elles ſeront egales; & qui de cercles egaux oſte portions egales, ſçauoir ABC & DEF, le demeurant AC ſera egal au demeurant DF: ainſi les angles egaux s'appuyeront deſſus circonferences egales AC, DF. Donc aux cercles egaux, les angles egaux s'appuyent ſur circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Que ſi les ſuſdits angles eſtoient inegaux, le plus



grand s'appuyeroit ſur vn plus grand arc que le moindre: Car aux cercles egaux ABC, DEF, ſoit l'angle

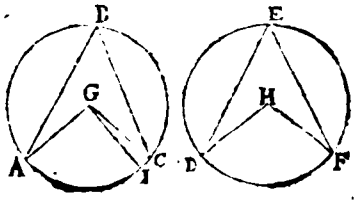
AGC au centre G, plus grand que l'angle DHF au centre H. Item l'angle ABC en la circonference, plus grand que l'angle DEF en la circonference. Ie dis que l'arc AC eſt plus grand que l'arc DF. Car ayant fait l'angle AGI egal à l'angle DHF, & l'angle ABI egal à l'angle DEF; par cequi a eſté demonſtré cy deſſus, les arcs AI, DF ſeront egaux; & partant AC ſera plus grand que DF.

Or ce qu'Euclide dit des cercles egaux en ceſte propoſition, & aux trois prochaines ſuiuantes, ſe doit auſſi entendre d'vn meſme cercle; c'eſt à dire qu'en vn meſme cercle, les angles egaux s'appuyent ſur circonferences egales, &c. Car touſiours la meſme demonſtration qui ſe fera en deux ou pluſieurs cercles egaux, aura auſſi lieu en vn meſme cercle.

THEOR. 24. PROP. XXVII.

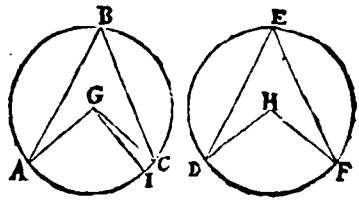
Aux cercles egaux, les angles qui s'appuyent deſſus circonferences egales, ſont egaux entr'eux, ſoit qu'ils s'appuyent eſtans conſtituez aux centres, ou aux circonferences.

Soient deux cercles egaux ABC & DEF, les centres deſquels ſont G & H, & ſur les circonferences egales AC & DF, ſoient les angles ABC & DEF, tous



deux en la circonference. Item A G C & D H F au centre : ie dis premierement qu'iceux angles A G C & D H F ſeront egaux.

Autrement, l'vn d'iceux angles ſera plus grand que l'autre: Soit donc A G C plus grand que D H F s'il eſt poſſible, & par la 23. pr. 1. ſur A G ſoit fait l'angle A G I egal à D H F, & par la precedente prop. les circonferences A I & D F ſeront egales ; ce qui eſt contre noſtre hypotheſe; car nous auons poſé A C egale à D F. Il faudroit doncques que A C & A I fuſſent egales, contre la 8. com. ſent. Donc l'angle A G C n'eſtoit point plus grand que l'angle D H F, & partant egal: ce qui eſtoit propoſé.

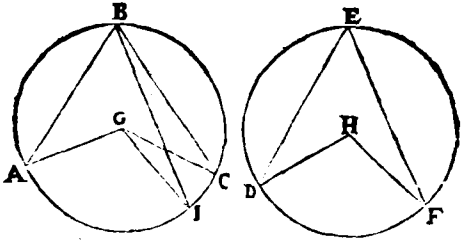


Or l'egalité des angles du centre eſtant prouuee, les angles de la circonference ſont entendus egaux, puis qu'ils ſont moitiez d'iceux par la 20. propoſition de ce liure. Donc aux cercles egaux les angles qui s'appuyent deſſus circonferences egales, ſont egaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que ſi les arcs eſtoient inegaux, l'angle inſiſtant ſur le plus grand arc ſeroit plus grand que celuy du moindre. Comme en la figure du Scholie precedent, ſoit l'arc AC plus grand que l'arc DF : Ie dis que l'angle AGC eſt plus grand que l'angle DHF, & l'an-

gle ABC, plus grand que l'angle DEF. Car ayant faict l'arc AI egal à l'arc DF, & tiré les lignes



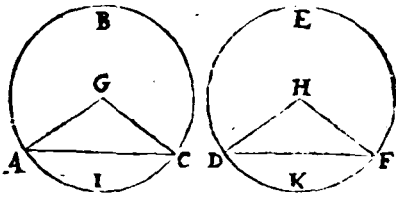
droictes GI, BI ; tant les angles AGI, DHF, que les angles ABI, DEF, seront egaux, comme il a esté demonstré cy dessus : & partant l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF, & l'angle ABC plus grand que l'angle DEF.

THEOR. 25. PROP. XXVIII.

Aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, sçauoir la plus grande à la plus grande, & la plus petite à la plus petite.

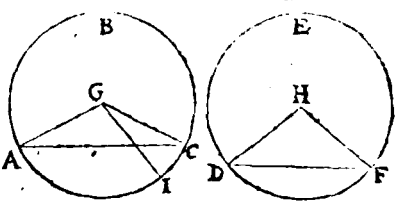
Soient deux cercles egaux ABC & DEF, desquels les centres sont G & H, & dans ces cercles soient deux lignes droictes egales AC & DF : Ie dis que les circonferences qu'elles couppent, sont egales, sçauoir la petite AIC à la petite DKF, & la grande ABC à la grande DEF.

Qu'il ne soit ainsi; des centres G & H, soient menees les lignes GA, GC, HD, HF, qui seront egales par la 1. def. de ce liure, estans les cercles egaux; & la ligne droicte AC estant egale à la ligne droicte DF, les deux triangles AGC & DHF, auront les trois costez egaux aux trois costez, chacun au sien: & par la 8. pr. 1. l'angle G sera egal à l'angle H, & par la 26. p. de ce liure ils s'appuyeront dessus circonferences egales AIC, DKF; & qui de cercles egaux oste icelles circonferences egales, resteront les circonferences ABC, DEF, aussi egales. Donc aux cercles egaux, les lignes droictes egales prennent circonferences egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

Que si les lignes droictes estoient inegales, la plus grande prendroit aux segmens mineurs vne plus grande circonference que la moindre: mais vne moindre aux segmens maieurs. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, desquels les centres sont G & H, soit la ligne droicte AC, plus grande que la ligne droicte DF: ie dis que la circonference AC moin-

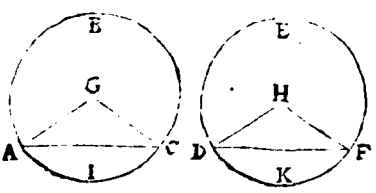


dre que le demy-cercle, eſt plus grande que la circonference DF: & que la circonference ABC eſt moindre que la periphere DEF. Car eſtans tirees les lignes droictes AG, GC, DH & HF: les coſtez AG, GC du triangle AGC, ſeront egaux aux coſtez DH, HF du triangle DHF: & la baſe AC eſt poſee plus grande que la baſe DF: Donc l'angle AGC ſera plus grand que l'angle DHF par la 25. pr. 1. Parquoy ſoit faict l'angle AGI egal à l'angle DHF par la 23. p. 1. & par la 26. p. 3. l'arc AI ſera egal à l'arc DF, & partant la circonference AIC ſera plus grande que la circonference DF, & conſequemment le reſte ABC ſera moindre que le reſte DEF.

THEOR. 26. PROP. XXIX.

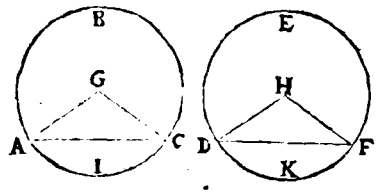
Aux cercles egaux, les circonferences egales, ſouſtendent lignes droictes egales.

Es cercles egaux A B C & D E F, deſquels les centres ſont G & H, ſoient les circonferences ABC, DEF egales: item les circonferences AIC, DKF auſſi egales & ſouſtenduës des lignes droictes A C & DF. Ie dis qu'icelles lignes ſouſtendantes ſont egales.



Qu'ainſi ne ſoit; des centres G & H ſoient menees les lignes droictes G A, G C, H D, H F.

Or d'autant que l'on pose les circonferences AIC, DKF egales, les angles G & H qui s'appuyent dessus icelles circonferences, seront egaux par la 27. pro. de ce liure: pareillement les costez G A & G C, estans egaux aux costez HD & HF par la 1. d. 3. la base AC sera egale à la base DF par la 4. propos. 1. Donc aux cercles egaux les circonferences, &c. Ce qui estoit à prouuer.



SCHOLIE.

Mais si les circonferences estoient inegales, la plus grande seroit soustendue d'vne plus grande ligne que la moindre, lesdites circonferences estans moindres que le demy cercle: Car si elles estoient plus grandes, la moindre d'icelles circonf. seroit soustendue d'vne plus grande ligne que la plus grande. Comme aux cercles egaux ABC, DEF, desquels les centres sont G & H, soient les circonferences AC, DF, chacune moindre que le demy cercle, & soit AC plus grande que DF, & partant ABC moindre que DEF: Ie dis que la ligne droicte AC est plus grande que la ligne droicte DF. Car estans tirees les lignes droictes AG, GC, DH, & HF, l'angle AGC sera plus grand que l'angle DHF par le Scholie de la 27. prop. de ce liure; & puis que les costez AG, GC, du triangle AGC sont egaux aux costez DH, HF du triangle DHF, par la 24. prop. 1. la base AC sera plus grande que la base DF.

Clauius, apres Commandin, demonſtre en ce lieu les quatre Theoremes ſuiuants.

1. Les cercles, deſquels les lignes droictes egales retranchent ſemblables circonferences, ſont egaux.

Soient deux cercles ABC, DEF, *deſquels les lignes droictes egales* AC, DF, *couppent ſemblables circonferences* ABC, DEF: *Ie dis qu'iceux cercles ſont egaux. Car ſi les ſegmens* ABC, DEF *ſont ſemblables, les ſegmens reſtans* AIC, DKF, *ſeront auſſi ſemblables, cõme nous auons demonſtré au Scholie de la 22. prop. de ce liure. Derechef, pour ce que ſur les lignes droictes egales* AC, DF, *ſont conſtituez les ſemblables ſegmens* ABC, DEF, *ils ſeront egaux par la 24. prop. 3. Par meſme raiſon ſeront auſſi egaux les ſemblables ſegmens* AIC, DKF. *Donc les cercles entiers* ABC, DEF, *ſeront egaux. Ce qui eſtoit propoſé.*

2. Des cercles inegaux, les lignes droictes egales couppent circonferences diſſemblables

En la meſme figure precedente les lignes droictes AC, DF *ſoient poſees egales, & les cercles* ABC, DEF, *inegaux. Ie dis que les circonferences* ABC, DEF, *ſont diſſemblables. Car ſi elles eſtoient ſemblables, les cercles ſeroient egaux, comme nous auons demonſtré cy-deſſus, contre l'hypotheſe. Donc les circonferences* ABC, DEF, *ſont diſſemblables. Par meſme raiſon les circonferences* AIC, DKF, *ſeront auſſi diſſemblables. Ce qu'il falloit demonſtrer.*

3. Les lignes droictes, qui prennent circonferences ſemblables de cercles inegaux, ſont inegales.

En la meſme figure ſoient poſez les cercles inegaux, & les circonferences ABC, DEF ſemblables: Ie dis que les lignes droictes AC, DF ſont inegales. Car ſi elles eſtoient egales, les cercles ſeroient egaux par le 1. Theor. cy-deſſus, contre l'hypoth. icelles lignes droictes AC, DF, ſont donc inegales.

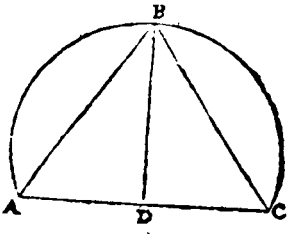
4. Les lignes droictes, qui de quelconques cercles prennent circonferences ſemblables & inegales, ſont inegales.

En la meſme figure, ſoient poſees les circonferences ABC, DEF ſemblables & inegales. Ie dis que les lignes droictes AC, DF ſont inegales. Car les cercles ſont ou egaux, ou inegaux: Soient premierement egaux. Si donc les lignes droictes AC, DF, ſont dictes egales, par la 28. prop. 3. les circonferences ABC, DEF, ſeront egales: ce qui eſt contre l'hypoth. Icelles lignes droictes AC, DF, ne ſont donc pas egales. Soient puis apres les cercles inegaux. Donc les lignes droictes AC, DF, eſtans les circonferences ABC, DEF, ſemblables, ſeront inegales, comme il a eſté demonſtré au precedent Theor. En la meſme maniere nous demonſtrerons les lignes droictes AC, DF eſtre inegales, ſi les circonferences AIC, DKF ſont poſees ſemblables & inegales.

PROB. 4. PROP. XXX.

Coupper vne circonference donnée en deux egalement.

Soit la circonference donnée AB C, laquelle il faut couper en deux egalement.

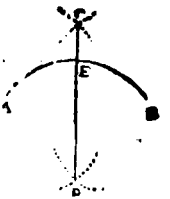


Soit menee la ligne droicte A C, laquelle soit couppee en deux egalement au poinct D, duquel poinct soit esleuee la perpendiculaire DB par la 11. propos. 1. qui rencontre la circonference en B. Ie dis que la circonference ABC est couppee en deux egalement en B.

Qu'il ne soit ainsi: soient menees les lignes droictes AB & BC. D'autant que les deux costez AD & D B du triangle ADB, sont egaux aux deux costez CD & DB du triangle CDB, chacun au sien, & les deux angles au poinct D egaux: par la 4. p. 1. la base AB sera egale à la base B C, & par la 28. prop. de ce liure les circonferences AB & BC seront egales. Nous auons donc couppé la circonference donnee en deux egalement. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

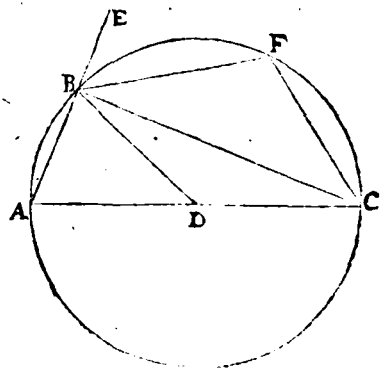
La practique de ceste proposition est fort aisee, car il n'y a qu'à descrire deux arcs de cercles de chaque extremité de la circonference donnée A & B, qui s'entrecouppent és poincts C & D, desquels poincts estant menee vne ligne droicte CD, elle couppera la circonference donnée A B en deux egalement au poinct E.



THEOR. 27. PROP. XXXI.

Au cercle, l'angle qui eſt au demy cercle eſt droict: & celuy qui eſt en la plus grande portion, eſt plus petit qu'vn droict; mais celuy qui eſt en la plus petite, eſt plus grand qu'vn droict. Et d'auantage, l'angle de la plus grande portion, eſt plus grand qu'vn droict: mais l'angle de la plus petite portion eſt moindre qu'vn droict.

Au cercle ABC, duquel D eſt le centre, & AC le diametre, ſoit conſtitué au demy cercle ABC: l'angle rectilig. ABC & en la plus grãde portion BAC, l'angle BAC; mais en la moindre portion BFC, l'angle CFB. Ie dis en premier lieu que l'angle ABC au demy cercle, eſt droict.



Car apres auoir mené la ligne BD, & continué

AB iuſques en E : il eſt euident que les triangles ABD & CBD ſont Iſoſceles, & par la 5. pr. 1. ils auront les angles ſur la baſe egaux, ſçauoir BAD à ABD, & CBD à BCD : & partant les deux enſemble ABD, CBD, ſeront egaux aux deux enſemble BAD & BCD. Mais par la 32. p. 1. l'exterieur CBE eſt egal à iceux deux angles BAD, BCD : & partant les deux au poinct B, faiſant le ſeul ABC, ſeront auſſi egaux à l'exterieur CBE, & par la 10. def. 1. les deux angles ABC & CBE, ſeront deux droicts.

Ie dis en ſecond lieu, que l'angle BAC, qui eſt en la plus grande portion CAB, eſt plus petit qu'vn droict : ce qui eſt aiſé à prouuer par la 32. pr. 1. d'autant qu'au triangle BAC, l'angle ABC, eſtant droict, les deux autres enſemble ne vaudront qu'vn droict : & partant le ſeul angle BAC eſt plus petit qu'vn angle droict, & ainſi des autres.

Ie dis tiercement, que l'angle BFC, qui eſt en la petite portiõ CFB, eſt plus grand qu'vn droict : car par la 22. p. de ce liure la figure de quatre coſtez ABFC inſcrite au cercle, a les deux angles oppoſez A & F. egaux à deux droicts, Mais nous auons prouué A eſtre plus petit qu'vn droict, par conſequent F ſera plus grand.

Ie dis en quatrieſme lieu, que l'angle de la plus grande portion, ſçauoir CBA, compris de la ligne droicte BC, & de la periphere BAC, eſt plus grand qu'vn angle droict : ce qui eſt euident ; car l'angle droict rectiligne ABC n'eſt que partie d'iceluy angle mixte CBA.

Finalement, ie dis que l'angle de la petite portion, compris de la ligne droicte BC & de la circonference BFC, c'eſt à dire l'angle mixte CBF,

eſt moindre qu'vn droict, car iceluy n'eſt que partie de l'angle droict CBE. Donc au cercle, l'angle qui eſt au demy cercle eſt droict, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ce que deſſus, eſt manifeſte qu'vn angle d'vn triangle eſtant egal aux deux autres, eſt droict.

SCHOLIE.

La conuerſe de cette prop. eſt manifeſtement vraye, c'eſt à ſçauoir, que

Le ſegment de cercle, auquel eſt conſtitué vn angle droict, eſt demy cercle; & celuy auquel eſt vn angle aigu, eſt ſegment maieur: mais celuy auquel eſt vn angle obtus, eſt ſegment mineur: Et le ſegment duquel l'angle eſt plus grand qu'vn droict eſt plus grand que le demy cercle; mais celuy duquel l'angle eſt moindre que le droict, eſt ou demy cercle, ou moindre que le demy cercle.

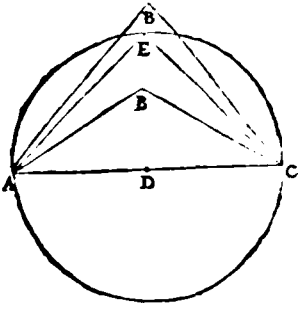
Car l'angle eſtant droict, ſi le ſegment n'eſt pas vn demy cercle, il ſera ou plus grand, & ainſi l'angle ſera aigu; ou moindre, & ainſi l'angle ſera obtus: contre l'hypotheſe. Derechef, l'angle eſtant aigu, ſi le ſegment n'eſt pas plus grand que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera droict; ou moindre que le demy cercle & ainſi l'angle en iceluy ſera obtus: Ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Finalement, l'angle eſtant obtus, ſi le ſegment n'eſt moindre que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, & ainſi l'angle en iceluy ſera droict; ou plus grand, & ainſi l'angle ſera aigu: Ce qui eſt ſemblablement contre l'hypotheſe. Dauantage, quand l'angle du ſegment eſt plus grand qu'vn droict, ſi le ſegment n'eſt pas plus grand que le demy cercle, il ſera ou demy cercle, ou moindre que

dre que le demy cercle, & ainſi l'angle d'iceluy ſera moindre qu'vn droict, contre la poſition. Et quand l'angle du ſegment eſt moindre qu'vn droict, ſi le ſegment n'eſt pas demy cercle, ou moindre que le demy cercle, il ſera plus grand, & par ainſi l'angle d'iceluy ſera pareillement plus grand que le droict: Ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Clauius demonſtre en ce lieu le theoreme ſuiuant.

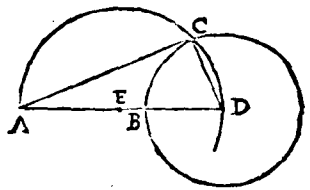
Si le coſté oppoſé a l'angle droict d'vn triangle rectangle eſt couppé en deux egalement, & du poinct de la ſection eſt deſcrit vn cercle de l'interualle de la moitié d'iceluy coſté; iceluy cercle paſſera par l'angle droict du triangle.

Au triangle rectangle A B C, le coſté A C oppoſé à l'angle droict B, ſoit couppé en deux egalement au poinct D, duquel & de l'interualle D A, ou D C, ſoit deſcrit le cercle A E C, lequel ie dis paſſer par B. Car s'il paſſoit au deſſus de B, ou au deſſoubs, eſtans tirees les lignes droictes A E, C E, tellement qu'elles ne couppent les lignes droictes A B, A C, ains qu'elles tombent au deçà d'icelles, ou au delà: l'angle A E C par la 31. p. 3. ſera droict, & conſequemment les angles B & E ſeront egaux, eſtans droicts: ce qui eſt abſurde, veu que l'angle E par la 21. prop. 1. eſt neceſſairement ou plus grand ou plus petit que l'angle B. Le cercle A E C paſſe donc par le poinct de l'angle droict B. Ce qui eſtoit propoſé.



Or de la demonſtration de la premiere partie de cette pr. nous colligeons vn facile moyen pour d'vn poinct donné hors

vn cercle mener vne ou deux lignes droictes qui touchẽt iceluy cercle, ce qui se fait ainsi. Soit donné le poinct A hors du cercle BC, le centre duquel est D: & il faut mener de A vne ligne droicte, qui touche iceluy cercle dõné. Ayant mené la ligne AD soit couppee icelle, en deux



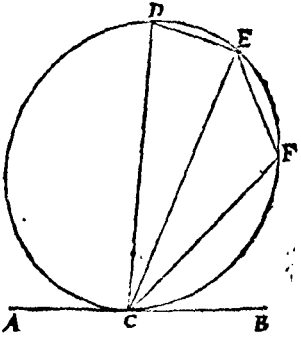
egalement en E par la 10.p11. & de E cõme centre, & de l'interualle EA soit descrit vn cercle ACD qui couppe le donné en C, auquel poinct C soit menee la ligne droicte AC, & icelle touchera le cercle donné en C. Car estant tiree la lig. droicte CD, l'angle ACD au demy cercle sera droict par ladite 31. pr.3. & partant la ligne droicte AC touchera le cercle BC en C par le Cor. de la 16. p.3. Et si du mesme poinct A on vouloit encore tirer vne autre ligne qui touche semblablement ledit cercle BC, il n'y auroit qu'à descrire le cercle entier ACD, & il couppperoit encore la circonference BC à vn autre poinct au dessoubs de AD, &c.

THEOR. 28. PROP. XXXII.

Si quelque ligne droicte touche le cercle, & de l'attouchement on meine quelque ligne droicte coupant le cercle, les angles qu'elle faict à la touchante sont egaux à ceux qui sont aux segmens alternes du cercle.

Soit la ligne droicte AB touchant le cercle CDE, au poinct C, & d'iceluy poinct soit menee CE, couppant le cercle en deux portions inegales. Ie

dis que l'angle ECB, est egal à tout angle qui peut estre fait en la plus grande portion CDE, & que l'angle ECA est egal à tout angle qui peut estre fait en la petite portion CFE.



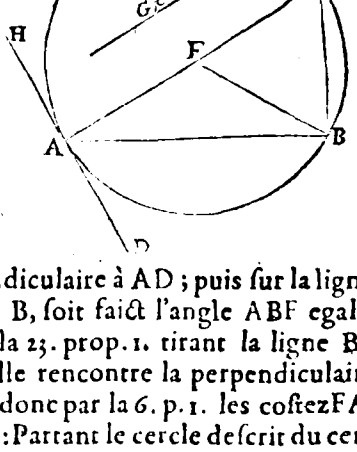
Qu'il ne soit ainsi, apres auoir mené par le centre le diametre CD, soient menees les lignes droictes DE, EF, FC. Maintenant par la pro. preced. l'angle DEC dans le demy cercle est droict, & par la 32. p. 1. les deux autres D & ECD sont egaux à vn droict, c'est à dire à DCB, lequel est droict par la 18. prop. de ce liure, desquels si on oste l'angle commun ECD, le demeurant ECB sera egal au demeurant D. Pareillement par la 22. prop. la figure de quatre costez inscrite au cercle CFED, aura les angles opposez F & D, egaux à deux droicts: c'est à dire aux deux ECA, ECB, desquels si on oste choses egales, c'est à sçauoir les angles egaux D & ECB, les demeurans F & ECA seront egaux.

Que si la ligne couppant le cercle estoit le diametre d'iceluy, tous les angles tant en l'vn qu'en l'autre demy cercle, seroient droicts par la proposition precedente. Si donc quelque ligne droicte touche le cercle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. XXXIII.

Dessus vne ligne droicte donnee, descrire vne portion de cercle capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit la ligne donnee AB, & l'angle rectiligne C: il faut sur icelle ligne descrire vne portion de cercle comprenant vn angle egal à l'angle dõné C.



Soit construit l'angle BAD egal à l'angle dõné C par la 23. prop. 1. & au poinct A soit leuee AE perpendiculaire à AD; puis sur la ligne AB, & au poinct B, soit faict l'angle ABF egal à l'angle BAE par la 23. prop. 1. tirant la ligne BF iusques à ce qu'elle rencontre la perpendiculaire AE au poinct F: donc par la 6. p. 1. les costez FA, FB, seront egaux: Partant le cercle descrit du centre F & de l'interuale FA, passera aussi par le poinct B; & apres auoir mené la ligne droicte BE, ie dis que l'angle E, qui est en la portion AEB est egal à l'angle donné C. Car d'autant que la ligne droi-

cte AE passe par le centre F, & qu'à icelle, DA est perpendiculaire ; par le Corol. de la 16. prop. de ce liure le cercle touchera icelle DA en A. Parquoy par la preced. prop, l'angle BAD, qui est egal à l'angle C, sera egal à l'angle E, descrit dans la portion AEB ; par consequent l'angle E sera egal à l'angle C : ainsi nous auons descrit vne portion de cercle sur la ligne donnee AB, capable d'vn angle egal à vn angle donné C.

Que si l'angle donné eust esté obtus, comme G, il eust fallu construire l'angle BAH egal à iceluy, & chercher le centre F comme dessus, pour describre le cercle AEBI, & par la prop. precedente la plus petite portion AIB eust compris vn angle egal à l'angle G.

Que si l'angle donné eust esté droict, il ne falloit que descrire vn demy cercle sur la ligne donnée. Or nous auons donc construit sur la ligne donnée AB, vn segment de cercle, &c. Ce qu'il falloit faire.

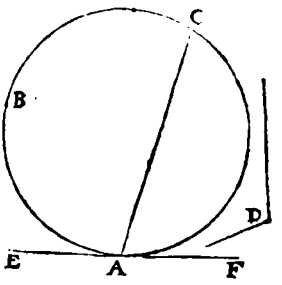
PROB. 6. PROP. XXXIV.

D'vn cercle donné, oster vne portion capable d'vn angle egal à vn angle rectiligne donné.

Soit le cercle donné ABC ; duquel il faut oster vne portion capable d'vn angle rectiligne egal à l'angle donné D.

Soit menee la ligne droicte EF touchant le cercle en A : puis par la 23. prop. 1. soit faict sur

icelle ligne, & au poinct A l'angle rectiligne FAC egal au donné D, faisant que la ligne droicte AC coupe le cercle en deux portions. Ie dis que tout angle qui sera fait en la portion ABC sera egal au donné D. Car il sera egal à l'angle FAC par la 32. pr. de ce liure, lequel est egal à D par la construction. Nous auons doc du cercle donné ABC couppé vne portion &c. Ce qu'il falloit faire.



THEOR. 29. PROP. XXXV.

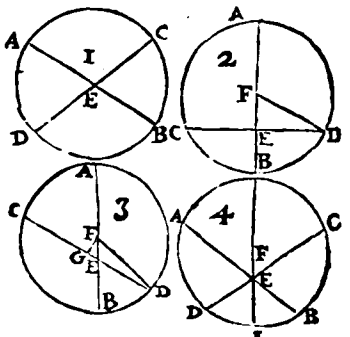
Si dans vn cercle, deux lignes droictes se coupent l'vne l'autre; le rectangle contenu des deux parties de l'vne, est egal au rectangle compris des deux parties de l'autre.

Soient deux lignes droictes AB, CD dans le cercle ACBD, s'entrecouppans en E. Ie dis que le rectangle compris des deux parties AE & EB, est egal au rectangle contenu des deux parties CE & ED.

Or les lignes qui se couppent dans le cercle, ou elles passent toutes deux par le centre, ou bien l'vne d'icelles seulement, ou ny l'vne ny l'autre.

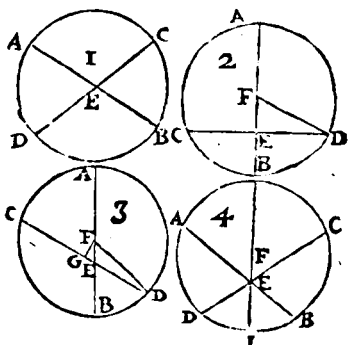
Que ſi elles paſſoient toutes deux par le centre, comme en la premiere figure, les quatre parties ſeront egales; & par ainſi la propoſition eſt euidente.

Que ſi la ſeule AB, paſſe par le centre F, & diuiſe DC en deux egalement, comme en la ſeconde figure elle la diuiſera auſſi à droicts angles, par la 3. prop. de ce liure. Et apres auoir mené FD, il eſt euident par la 5. pr. 2. que le rectangle de AE & EB auec le quarré de EF, ſeront egaux au quarré de FB, ou FD, (car la ligne AB eſt couppee en deux egalement au poinct F, & en deux inegalement en E) & par la 47. prop. 1. le quarré de FD eſtant egal aux deux quarrez de FE & ED, en oſtant le quarré commun de FE, le demeurant rectangle de AE & EB, ſe trouuera egal au quarré de ED, comme il a eſté demonſtré à la 14. prop. 2. ou au rectangle de CE, ED.



Que ſi la ligne AB paſſant par le centre F (cõme en la troiſieſme figure) diuiſe inegalement CD, ne paſſant point par le centre, il s'enſuiura la meſme choſe. Car apres auoir mené la perpendiculaire FG, & la ligne droicte FD: pourautant que AB eſt couppee en deux egalement en F, & en deux inegalement en E, le rectangle de AE & EB,

auec le quarré de EF, ſera egal au quarré de FB, ou de ſon egale FD par la 5. prop. 2. Mais le quarré de FE eſt egal aux deux de FG & GE par la 47. pr. 1. Pareillement le quarré de FD, eſt egal aux deux de FG & GD par la 47. prop. 1. Donc auſſi le rectangle de AE & EB, auec les deux quarrez de FG & GE, ſera egal aux deux quarrez de FG, & GD : & partant en oſtant le quarré commun de FG, le demeurant quarré de GD, ſera egal au rectangle de AE & EB, & quarré de GE. Par meſme diſcours, & par la meſme 5. pr. 2. le quarré de GD eſt egal au rectangle de CE & ED, & quarré de GE ; en oſtant donc le quarré commun de GE, le rectangle de AB, EB, ſe trouuera egal au rectangle de CE & ED.



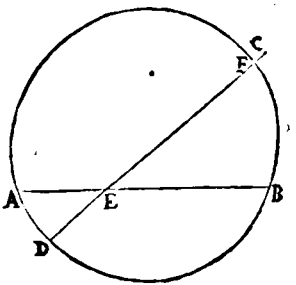
Que ſi ny l'vne ny l'autre des deux lignes ne paſſe par le céntre F, il s'enſuiura le meſme : car ſi on meine le diametre HI, paſſant par le poinct commun E de la 4. figure, le rectangle de IE & EH, ſera egal au rectangle de CE & ED, comme cy-deſſus a eſté dit ; & par meſme raiſon auſſi au rectangle de AE & EB ; & par la 1. com. ſent. les deux rectangles de AE & EB ; item de CE & ED ſeront egaux. Si donc dans vn cercle, deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous conuertirons cette 35. prop. ainſi.

Si deux lignes droictes s'entrecouppent, tellement que le rectangle compris des ſegmens de l'vne ſoit egal au rectangle contenu ſous les ſegmens de l'autre, le cercle deſcrit par trois des poincts extremes d'icelles lignes quels qu'ils ſoient, paſſera auſſi par le quatrieſme poinct.

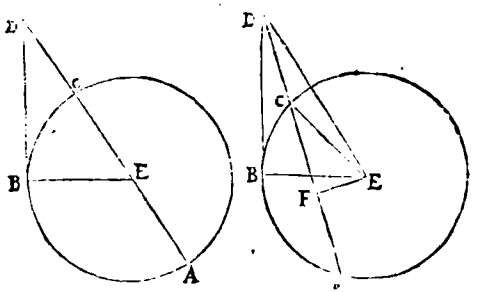
Que les lignes droictes AB, CD s'entrecouppent en E, & que le rectangle compris ſous AE, EB ſoit egal au rectangle compris des parties CE, ED. Ie dis que les quatre poincts A, D, B, C, tombent en la circonference d'vn cercle, c'eſt à dire qu'eſtant deſcrit vn cercle paſſant par les trois poincts A, D, B, il paſſera neceſſairement par l'autre poinct C. Car s'il n'y paſſe, il paſſera ou au delà de C, ou au deçà, comme par le poinct F. D'autant que par la 35. prop. 3. le rectangle compris ſous FE, ED eſt egal au rectangle compris de AE, EB, & que le rectangle contenu ſous CE, ED eſt auſſi poſé egal au meſme rectangle de AE, EB; les rectangles compris ſous CE, ED, & ſous FE, ED, ſeront egaux, la partie au tout: ce qui eſt abſurde. Par meſme raiſon le cercle ne paſſera pas au delà du poinct C. Donc le cercle deſcrit par les trois poincts A, D, B, paſſera par le quatrieſme poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 30. PROP. XXXVI.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy vers le cercle tombent deux lignes droictes, l'vne desquelles couppe le cercle, & l'autre le touche; le rectangle contenu de toute la couppante, & de sa partie prise dehors entre le poinct & la circonference conuexe, est egal au quarré de la touchante.

Hors le cercle ABC soit pris le poinct D, duquel soit menee la ligne DA, couppant le cercle



en C, & la ligne DB touchant iceluy cercle en B. Ie dis que le rectangle de la toute AD & de la partie CD, prise entre le poinct donné & le cercle, est egal au quarré de la touchante BD.

Qu'il ne soit ainsi: du centre E au poinct d'at-

touchement B, soit menee la ligne EB, laquelle par la 18. prop. de ce liure sera perpendiculaire à icelle touchante BD: & pourautant que la ligne AC est couppee en deux egalement au poinct E, & à icelle est adiouſtee directement CD, le rectangle de la totale AD, & de sa partie CD auec le quarré de CE, ou BE son egale, est egal au quarré de ED par la 6. p. 2. ou aux deux de DB & BE par la 47. p. 1. Que si on oste le quarré commun de BE, le demeurant quarré de BD, sera egal au demeurant rectangle de AD & CD, par la 2. com. sent.

Que si la ligne AD ne passe par le centre du cercle proposé, comme en la seconde figure, il faudra demonstrer en ceste sorte: du centre E soient menees les lignes EB, EC, ED, & la perpendiculaire EF, laquelle couppera AC en deux egalement par la 3. prop. de ce liure. Et par la 6. p. 2. comme cy dessus, le rectangle de AD & CD, auec le quarré de CF, sera egal au quarré de DF, ausquelles choses egales si on adiouſte le quarré commun de EF, le rectangle de AD & DC, auec les deux quarrez de CF & FE, ou le seul de CE par la 47. p. 1. sera egal aux deux quarrez de DF & FE, ou au seul de DE par la 47. p. 1. ou aux deux de DB & BE par la mesme 47. p. 1. Que si on oste les quarrez egaux de CE & BE, les demeurans quarré de DB, & le rectangle de AD & CD, seront egaux. Parquoy si hors le cercle on prend quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si d'vn poinct pris

hors le cercle, ſont tirees pluſieurs lignes droictes, coupant le cercle; les rectangles compris ſous chacune d'icelles & ſa partie exterieure, ſeront egaux entr'eux: pource que chacun de ces rectangles-la, ſera egal au quarré de la ligne touchante.

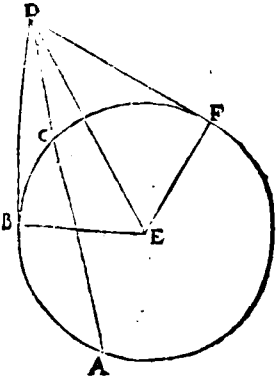
Appert auſſi que deux lignes droictes tirees d'vn meſme poinct, & touchant le cercle, ſont egales entr'elles: puis que le quarré de chacune d'icelles ſera egal au rectangle de la ligne tiree du meſme poinct, & couppant le cercle, & de la partie exterieure d'icelle.

Eſt auſſi euident que d'vn meſme poinct pris hors le cercle, peuuent eſtre ſeulement tirees deux lignes droictes qui touchent le cercle: Car il faudroit qu'elles fuſſent toutes egales entr'elles: & partant du poinct D pourroient eſtre menees plus de deux lignes droictes egales de part & d'autre de DE, contre la 8. propoſition de ce troiſieſme liure.

THEOR. 31. PROP. XXXVII.

Si dehors le cercle on prend quelque poinct, & d'iceluy poinct tombent deux lignes droictes au cercle, l'vne deſquelles couppe le cercle, & l'autre l'atteint: Si le rectangle compris de toute la couppante, & de la partie priſe entre le poinct & la circonference conuexe, eſt egal au quarré de celle qui atteint; celle qui atteint touchera le cercle.

Hors le cercle ABC ſoit pris le poinct D, & d'iceluy ſoit menee la ligne droicte DA qui couppe le cercle au poinct C, & la ligne DB qui atteint le cercle au poinct B : & ſoit le rectangle de la toute AD, & de la partie CD, egal au quarré de DB. Ie dis que DB touche le cercle en B.



Car du poinct D, eſtant menee la ligne DF touchant le cercle au poinct F, & du centre E les lignes EB, ED, EF, par la propoſition precedente, le quarré de DF ſera egal au rectangle de AD & CD. Mais par l'hypotheſe le quarré de DB, eſt auſſi egal à iceluy rectangle : & partant les quarrez, & les lignes DF & BD, ſeront egales. Item EF & EB, ſont auſſi egales par la def. du cercle, & ED à ſoy-meſme : ainſi les deux triangles DBE, & DFE ayans les trois coſtez egaux aux trois coſtez, chacun au ſien, les angles B & F, ſeront egaux par la 8. p. 1. & F eſtant droict par la 18. prop. de ce liure, auſſi B ſera droict ; & par le Cor. de la 16. prop 3. la ligne DB touchera le cercle. Parquoy ſi dehors le cercle on prend quelque poinct, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin du troiſieſme Element.

ELEMENT QVATRIESME.

DEFINITIONS.

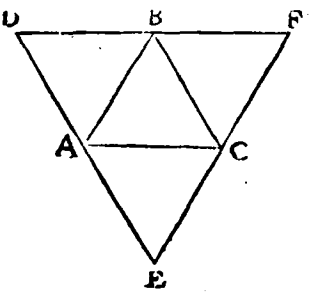


Ne figure rectiligne ſe dict eſtre inſcrite en vne figure rectiligne, lors qu'vn chacun des angles de la figure inſcrite, touche vn chacun coſté de la figure en laquelle elle eſt inſcrite.

2. Semblablement auſſi vne figure ſe dict eſtre circonſcrite à vne figure, quand vn chacun coſté de la circonſcrite touche vn chacun angle de l'inſcrite.

Ainſi le triangle ABC, duquel chaque angle touche vn chacun coſté du triangle DEF eſt dit eſtre inſcrit en iceluy triangle DEF. Et au contraire, à cauſe que

chaque costé d'iceluy triangle DEF touche chaque angle du triangle ABC, il est dit estre circonscrit à iceluy triangle ABC.



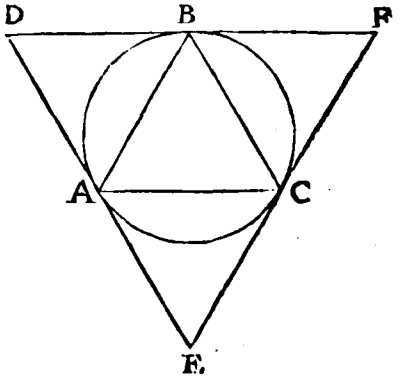
Il faut entendre le mesme des inscriptions & circonscriptions des autres figures rectilignes: & iaçoit qu'elles soient proprement dites estre inscrites, ou circonscrites quand le nombre des costés de l'inscrite est egal au nombre des costez de la circonscrite, & le nombre des angles aussi egal: si est-ce toutesfois qu'il n'est pas du tout necessaire, veu que plusieurs Geometres ont enseigné à inscrire vn quarré, vn pentagone, &c. dedans vn triangle, &c.

3. Mais vne figure rectiligne se dit estre inscrite au cercle, quand vn chacun angle de la figure inscrite, touche la circonference du cercle.

4. Et vne figure rectiligne se dit estre circonscrite au cercle, quand vn chacun des costez de la figure circonscrite, touche la circonference du cercle.

Ainsi le triangle ABC sera dit estre inscrit au cercle ABC, à cause que chaque angle d'iceluy triangle

touche la circonference dudit cercle ABC. Mais le triangle DEF ſera dit eſtre circonſcrit au cercle ABC, pource que chaque coſté d'iceluy triangle DEF touche la circonference dudit cercle ez poincts A, B, C.



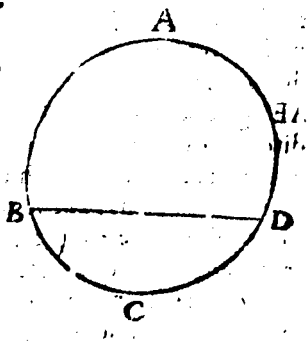
5. Semblablement auſſi le cercle ſe dit eſtre inſcrit en vne figure rectiligne, quand la circonference du cercle touche vn chacun coſté de la figure en laquelle il eſt inſcrit.

6. Mais le cercle ſe dit eſtre circonſcrit à vne figure, quand la circonference du cercle touche vn chacun des angles d'icelle figure à l'entour de laquelle il eſt deſcrit.

Comme par exemple, en la figure prec. le cercle ABC eſt dit eſtre inſcrit au triangle DEF, à cauſe qu'il touche chaque coſté d'iceluy triangle és poincts A, B, C: mais le meſme cercle ABC eſt dit eſtre circonſcrit au trian-

triangle ABC, pour ce qu'il touche chaque angle d'iceluy triangle.

7. Vne ligne droicte se dit estre accommodee dans le cercle, quand les extremitez d'icelle sont en la circonference du cercle.



Ainsi la ligne droicte BD sera dicte estre accommodee au cercle ABCD, à cause que les extremitez d'icelle ligne BD sont en la circonference dudit cercle.

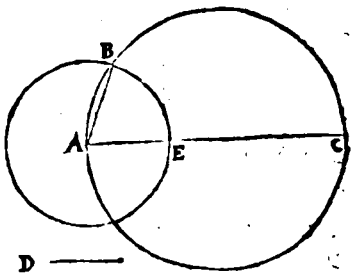
PROBL. 1. PROP. 1.

Au cercle donné, accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnee, laquelle ne soit pas plus grande que le diametre du cercle.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut accommoder vne ligne droicte egale à la ligne droicte donnee D, qui n'est pas plus grande que le diametre d'iceluy cercle.

Soit mené le diametre AC, & si la ligne donnee

eſt egale à iceluy diametre, on aura accommodé au cercle ABC la ligne AC egale à la donnee D. Mais ſi D eſt moindre que le diametre AC, d'iceluy ſoit retranchee la portion AE egale à ladite ligne D. En apres du centre A, & del'interuale AE ſoit deſcrit le cercle BE couppant le cercle donné au poinct B, & ſoit menee la ligne droicte AB: icelle ſera accommodee au cercle, & egale à D.



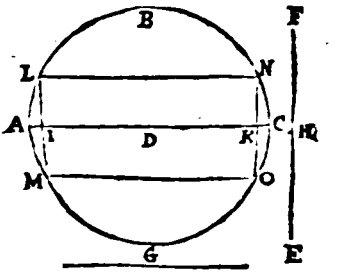
Car les extremitez d'icelle AB ſont en la circonference du cercle ABC, eſtant menee de l'extremité du diametre A au poinct de l'interſection B. Mais par la def. du cercle les lignes droictes AB & AE ſont egales, & par la conſtruction, icelle AE eſt egale à D: donc par la 1. com. ſent. AB & D ſeront egales entr'elles. Nous auons donc accommodé au cercle donné vne ligne draicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Commandin adiouſte en cet endroit le probl. ſuiuant.

En vn cercle donné accommoder vne ligne droicte egale à vne ligne droicte donnée, qui ne ſoit pas plus grande que le diametre du cercle, & parallele à vne autre ligne droicte donnée.

Soit le cercle donné ABC, duquel le centre est D, auquel il faut accommoder une ligne droicte egale à une donnee EF, qui n'est pas plus grande que le diametre du cercle, & laquelle soit parellele à la ligne droicte donnee G. Par le centre D soit tiré le diametre ADC parallele à la ligne donnee G. Que si EF est egale au diametre AC, sera fait ce qui estoit requis: Mais si elle n'est egale à iceluy diametre, soit icelle

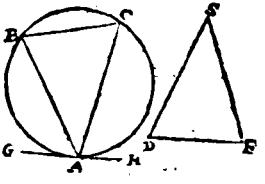


couppee en deux egalement au au poinct H, & soit prise DI egale à EH, & DK egale à HF, affin que la toute IK soit egale à la toute EF: puis par les poinctes I, K, soient tirees à angles droicts LM, NO, & soit ioinct MO: Icelle MO accommodee au cercle sera egale à EF, & parallele à G. Car puis que LM, NO, sont egalement distantes du centre D, elles seront egales entr'elles par la 14. p. 3. & par la 3. prop. 3. elles seront couppees en deux egalement en I & K, estans couppees à angles droicts par le diametre AC; & partant IM, KO sont egales entr'elles; & pource qu'elles sont aussi paralleles par la 28. p. 1. semblablement IK, MO seront egales & paralleles par la 33. p. 1. Parquoy veu que IK est egale à EF & parallele à G, aussi MO sera egale à icelle EF, & parallele à G par la 30. p. 1. Par mesme raison, si on tire LN, elle sera egale à EF, & parallele à G. Donc au cercle ABC, est accommodee la ligne droicte MO, ou LN, egale à EF & parallele à G. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. II.

Dans vn cercle donné, inscrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inscrire vn triangle equiangle au donné DSF.



Soit menee la ligne droicte GH, qui touche le cercle au poinct A, auquel poinct soient faicts les deux angles GAB egal à l'angle D, & HAC egal à l'angle F, par la 23. pr. 1. tirant les lignes AB, AC, iusques à ce qu'elles rencontrent la circonference en B & C: puis soit menee BC. Ie dis que le triangle inscrit ABC est equiangle au donné DSF.

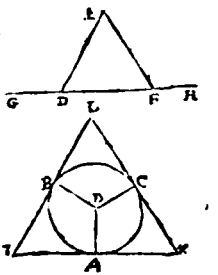
Car puis que la ligne GH touche le cercle, & la ligne AB le couppe en deux portions, l'angle C en la portion BCA sera egal à l'angle de l'attouchement GAB, & par consequent à l'angle D son egal par la 32. p. 3. & par la mesme raison, la ligne AC couppant le cercle, l'angle B sera aussi egal à l'angle F, & par la 32. p. 1. le troisiesme angle A sera aussi egal à l'angle S: & par consequent les triangles DSF, BAC seront equiangles. Au cercle donné nous auons donc descrit vn triangle equiangle à vn triangle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 3. PROP. III.

A l'entour d'vn cercle donné, descrire vn triangle equiangle à vn triangle donné.

Soit le cercle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn triangle equiangle au triangle donné DEF.

Soit prolongé le costé DF de part & d'autre iusques en G & H, & du centre D soit menee comme on voudra la ligne DA, sur laquelle & au poinct D, soient construits les deux angles ADB egal à EDG, & ADC egal à l'angle HFE par la 23. pr. 1. & aux trois lignes DA, DB, DC, soient menees les trois lignes perpendiculaires IK, IL, KL, lesquelles toucheront le cercle és poincts A, B, C, par le Corol. de la 16. p. 3. & icelles se rencontrans aux trois poincts I, K, L, feront le triangle IKL, lequel ie dis estre le triangle demandé.



Car il appert desia qu'il est circonscrit au cercle; puis que tous les costez d'iceluy le touchent és poincts A, B, C. Et d'autant que toute figure de quatre costez a les quatre angles egaux à quatre angles droicts (comme nous auons demonstré à la 32. p. 1.) le trapeze ADBI aura les quatre angles egaux à quatre droicts. Mais les deux A & B estans droicts par la construction, les deux autres D & I, seront egaux à deux droicts, c'est à dire egaux aux deux GDE & FDE, qui sont egaux à deux angles droicts par la 13. pr. 1. & par la construction ADB est egal à GDE: donc l'angle I sera egal à l'angle EDF. Par mesme discours l'angle K se trouuera egal à l'angle DFE. Et par la 32. p. 1. le troisiesme L

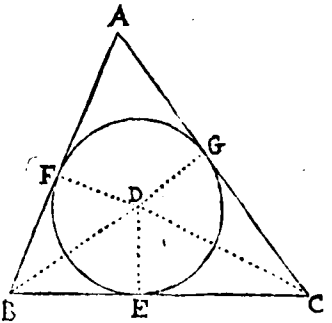
ſera egal au troiſieſme E : ainſi le triangle circonſcrit IKL ſera equiangle au triangle donné DEF: Parquoy nous auons fait ce qui eſtoit requis.

PROB. 4. PROP. IV.

Dans vn triangle donné, deſcrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, dans lequel il faut deſcrire vn cercle.

Soient les deux angles B & C couppez en deux egalement par la 9. pr.1. par les deux lignes BD & CD, ſe rencontrans au poinct D: Item d'iceluy poinct de rencontre D, ſoient menees les trois perpẽdiculaires DE, DF, DG, par la 12. p.1. & du centre D, & interualle DE ſoit deſcrit le cercle EFG. Ie dis qu'iceluy cercle eſt inſcrit au triangle donné ABC.



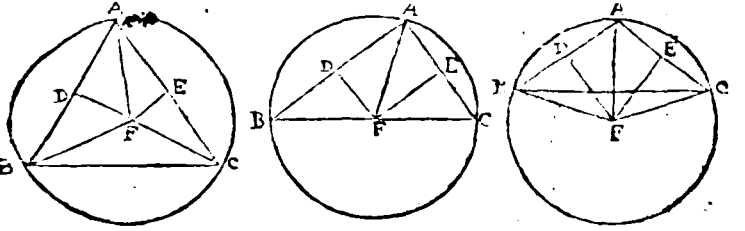
Car d'autant que l'angle DEB eſt droict, il ſera egal à l'angle DFB, qui eſt pareillement droict, & le total B eſtant couppé en deux egalement, les deux DEB & DBE, ſeront egaux aux deux DFB & FBD, & le coſté DB eſtant cõmun, le coſté FD ſera egal au coſté DE par la 26. p.1. Par meſme diſcours DG ſe prouuera egale à DE, & par la 1. com. ſent.

les trois lignes DE, DF, DG, seront egales entr'elles: ainsi le cercle EFG descrit de l'interualle DE, le sera aussi de l'interualle des deux autres: & par tant il passera par les poincts E, F, G, & en iceux touchera les trois costez du triangle par le Cor. de la 16. p. 3. pource qu'à iceux costez sont perpendiculaires les demy diametres DE, DF, DG. Donc par la 5. d. de ce liure, le cercle EFG sera inscrit au triangle donné: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. V.

A l'entour d'vn triangle donné, descrire vn cercle.

Soit le triangle donné ABC, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle,



Soient couppez en deux egalement les deux costez AB & AC aux poincts D & E par la 10. p. 1. & par la 11. p. 1. d'iceux poincts D & E, soiét leuees les perpendiculaires DF, EF, se rencontrans au poinct F, lequel sera ou dans le triangle, ou au costé BC, ou hors le triangle: & apres auoir mené les trois lignes FA, FB, FC, les deux triangles ADF, BDF, auront les costez AD, BD egaux, & DF commun, & les deux angles au poinct D

egaux pour estre droicts : donc les bases AF, BF, seront egales par la 4. prop. 1. Par mesme discours AF, CF, seront aussi egales : & par la 1. com. sent. les trois lignes FA, FB, FC, seront egales entr'elles : & partant le cercle descrit de F, & de l'interuale FA, passera aussi par les poincts B & C. Nous auons donc descrit vn cercle à l'entour du triangle donné ABC : Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par ces choses est manifeste, que si le centre tombe dans le triangle, les trois angles sont aigus : car ils sont tous en vne grande portion de cercle : mais s'il tombe en l'vn des costez, l'angle opposé à iceluy sera droict, attendu qu'il sera au demy cercle : si finalement il tombe hors le triangle, l'angle opposé sera obtus, car il sera en vne moindre portion de cercle.

Et au contraire, il est euident que si le triangle est oxigone, le centre tombera dedans iceluy : mais s'il est rectangle, il tombera au costé opposé à l'angle droict : & finalement s'il est ambligone, le centre tombera dehors.

SCHOLIE.

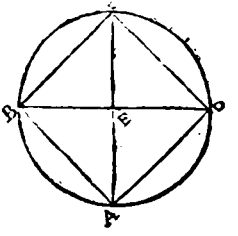
On peut aussi colliger de ce Probl. la maniere de descrire vn cercle par trois poincts donnez, lesquels ne soient en vne ligne droicte : car ayant ioinct iceux poincts par lignes droictes, on aura vn triangle, à l'entour duquel il faudra descrire vn cercle, comme il est enseigné en ce Prob. Ceey se practique aussi plus facilement, comme nous auons enseigné en nostre Geometrie practique, Probl. 21.

PROBL. 6. PROP. VI.

Dans vn cercle donné, descrire vn quarré.

Soit le cercle donné A B C, dans lequel il faut descrire vn quarré.

Soient menez les deux diametres A C & B D se couppans au centre E en angles droicts, & soient menees les quatre lignes droictes AB, BC, DC & DA. Ie dis que le quadrilatere A B C D est vn quarré inscrit au cercle donné.

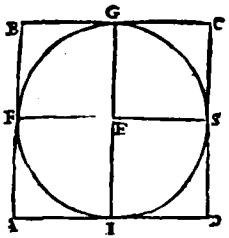


Car d'autant que les quatre angles au poinct E sont droicts, & egaux par la construction, les quatre arcs ausquels ils insistent seront egaux par la 26. pr. 3. & partant les lignes droictes qui soustendent iceux arcs seront aussi egales par la 29. p. 3. donc tous les costez du quadrilatere A B C D seront egaux entr'eux. Mais par la 31. prop. 3. les angles d'iceluy quadrilatere sont droicts, chacun d'iceux estant au demy cercle: donc le quadrilatere ABCD est vn quarré inscrit au cercle proposé. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 7. PROP. VII.

A l'entour d'vn cercle donné descrire vn quarré.

Soit le cercle donné FGSI à l'entour duquel il faut descrire vn quarré.



Soient menez les deux diametres FS & GI se coupans à angles droicts au centre E, & par la 31. p. 1. des poincts G & I, soient menees les deux lig. B C, AD paralleles au diametre FS: Item par les poincts F & S soient aussi menees les deux lignes AB, D C paralleles à G I: & icelles quatre lignes paralleles se rencontrans aux poincts A, B, C, D, feront le quadrilatere ABCD, lequel ie dis estre le quarré demandé.

Car en premier lieu, il est euident par la construction qu'il est parallelogramme, & par la 34. prop. 1. les quatre costez seront egaux, chacun d'iceux estant egal à l'vn des deux diametres FS, GI, qui sont egaux entr'eux. Pareillement par la mesme 34. prop. 1. les quatre angles A, B, C, D, sont egaux aux quatre qui sont au poinct E, chacun à son opposé, d'autant que ce sont parallelogrammes. Mais chacun d'iceux angles du poinct E estant droict, aussi chacun des quatre A, B, C, D, sera droict; & par consequent le parallelogramme ABCD, aura les quatre costez egaux, & les quatre angles droicts, & partant il sera quarré, les costez duquel touchent le cercle és poincts F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. Parquoy nous auons descrit vn quarré à l'entour d'vn cercle donné. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 8. PROP. VIII.

Dans vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné A B C D, (en la fig. prec.) dans lequel il faut descrire vn cercle.

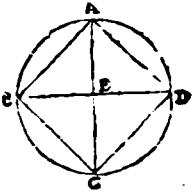
Soient couppez en deux egalement les quatre costez du quarré aux poincts F, G, S, I; & apres auoir mené les deux lignes F S & G I s'entrecouppans au poinct E, d'iceluy poinct E, & de l'interualle E F, soit descrit vn cercle F G S I, lequel sera le demandé.

Car d'autant que A D, B C sont egales & paralleles, leurs moitiez A I, B G seront aussi egales & paralleles, & par la 33. prop. 1. A B sera egale & parallele à I G. Semblablement C D sera egale & parallele à la mesme I G: & par mesmes raisons on demonstrera que A D, B C sont egales & paralleles à F S. Donc le quarré donné sera aussi diuisé en quatre parallelogrammes, lesquels par la 34. prop. 1. auront les costez opposez esgaux: ainsi A F & I E seront egaux; Item F E & A I; F B & E G; I D & E S: mais toutes icelles moitiez des costez du quarré sont egales entr'elles; partant E F, E G, E S, E I, seront aussi egales entr'elles. Parquoy le cercle descrit du poinct E, & de l'interuale de l'vne d'icelles, comme E F, passera aussi par les poincts G, S, I, & touchera le quarré aux mesmes poincts F, G, S, I, par le Corol. de la 16. prop. 3. pour ce que les angles à iceux poincts sont droicts. Nous auons donc descrit vn cercle dans le quarré donné A B C D: Ce qu'il failloit faire.

PROBL. 9. PROP. IX.

A l'entour d'vn quarré donné, descrire vn cercle.

Soit le quarré donné ABCD, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.



Soient menees les deux diagonales AC & BD, s'entrecoupans au poinct E: puis du centre E, & de l'interuale EA, soit descrit le cerle ADCB. Ie dis qu'il sera le demandé, c'est a dire qu'il passera par les quatre angles du quarré donné ABCD.

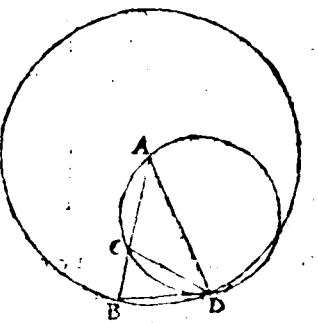
Car le costé AB estant egal au costé AD, le triangle BAD sera Isoscelle: & par la 5. prop. 1. les angles ABD & ADB, sur la base BD seront egaux, & chacun demy droict par la 32. prop. 1. estant l'angle BAD droict par la def. du quarré. Par mesme discours, nous demonstrerons que tous les autres angles des poincts A, B, C, D, seront aussi demy droicts: & partant egaux entr'eux: ainsi au triangle AED les deux angles EAD & EDA seront egaux, & par consequent les lignes droictes EA, ED, aussi egales par la 6. prop. 1. & par mesme discours ED sera egale à EC, & EC à EB: comme aussi EB à EA: & partant les quatre lignes droictes EA, ED, EC & EB, seront egales entr'elles. Parquoy le cercle descrit du centre E, & de l'interualle de l'vne d'icelles lignes passera par

l'extremité des autres, qui sont les angles du quarré donné ABCD. Nous auons donc d'escrit vn cercle à l'entour d'vn quarré donné : ce qu'il falloit faire.

PROBL. 10. PROP. X.

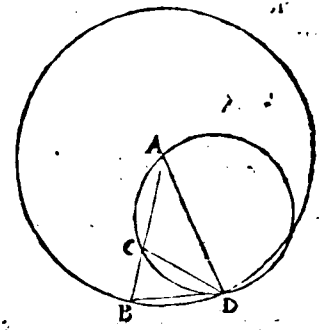
Descrire vn triangle Isoscelle, ayant vn chacun des angles de dessus la base double de l'autre.

Soit prise quelconque ligne droicte AB, laquelle par la 11. p. 2. soit coupée en C, en sorte que le rectangle compris de AB, BC, soit egal au quarré de AC: puis du centre A, & de l'interualle AB soit descrit vn cercle, dans lequel soit accommodee la ligne droicte BD egale à AC: & apres soit menée la ligne AD. Ie dis que ABD est vn triangle Isoscelle ayant chacun des angles ABD, ADB double de l'autre angle A, ainsi qu'il estoit requis.



Car en premier lieu, il appert assez qu'iceluy triangle ABD est Isoscelle, puis que les deux costez AB, AD, procedent du centre A à la circonference BD: & apres auoir mené CD, à l'entour du triangle ACD, soit descrit le cercle ACD par la 5 p. 4.

D'autant que par la construction le rectangle de AB & BC est egal au quarré de CA, ou de son egal DB; par la 37. prop. 3. la ligne DB touchera le cercle ACD en D, & par la 32. pr. 3. l'angle CDB sera egal à l'angle A, qui est au segment alterne CAD: & si à iceux angles on adiouste le commun ABC,



les tous seront egaux; sçauoir le total ADB, aux deux CAD & ADC: mais l'angle exterieur DCB, est aussi egal aux deux opposez iuterieurs CAD & ADC par la 32. pr. 1. partant il sera aussi egal à l'angle ADB, ou à ABD, qui luy est egal par la 5. p. 1. puis que le triangle est Isoscele: & par la 6. p. 1. le triangle DCB sera aussi Isoscele, & le costé CD egal à DB: partant aussi egal à CA; & le triangle DCA estant Isoscele, il aura les deux angles sur la base AD egaux par la 5. prop. 1. & l'angle exterieur DCB (qui est egal à tous les deux) sera double du seul A; aussi sera son egal B, & partant aussi son autre egal ADB. Nous auons donc construict le triangle Isoscele ABD, ayant chacun des angles de dessus la base BD double du troisiesme: Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Pource que les trois angles du triangle ABD, sont egaux à deux droicts, c'est à dire à cinq cinquiesmes de

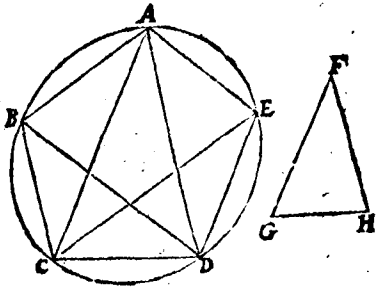
deux droicts: Il eſt euident que l'angle A eſt la cinquieſme partie de deux droicts, & chacun des autres B & D, les deux cinquieſmes parties: item A eſtre les deux quints d'vn droict; & chacun des deux B & D les quatre quints, puis que tous les trois ſont egaux à deux droicts, c'eſt à dire à dix quints d'vn droict.

SCHOLIE.

Or par quelle maniere on doit conſtruire vn triangle Iſoſcele, ayant vn chacun des angles de deſſus la baſe, non ſeulement double de l'autre, comme fait icy Euclide, mais auſſi ſelon quelconque raiſon donnee, nous l'auons enſeigné (apres Pappus & Clauius) en noſtre Geometrie practique Prob. 37. & Scholie du 126.

PROBL. II. PROP. XI.

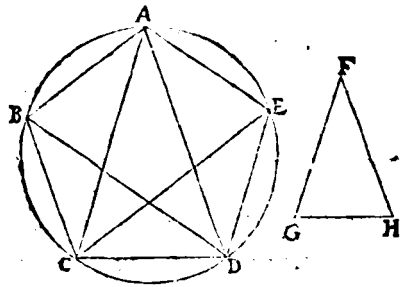
Dans vn cercle donné, deſcrire vn pentagone equiangle, & equilateral.



Soit le cercle dõné ABCDE dans lequel il faut inſcrire le pentãgone demandé.

Soit par la precedente propoſit. conſtruit le trian-

gle FGH Isoscelle, qui ait chacun des angles G & H double de l'angle F: puis au cercle donné soit inscrit le triangle ACD equiangle au triangle FGH par la 2. p. 4. Et ayant couppé les angles ACD, ADC en deux egalement par les lignes droictes



CE & DB par la 9. p. 1. soient menées les lignes droictes CB, BA, AE, ED. Ie dis que le pentagone ABCDE inscrit au cerle donné, est equiangle & equilateral.

Car puisque le triangle FGH à chacun des deux angles sur la basse GH, double du troisiesme F; le triangle ACD, qui est equiangle à icelluy FGH, aura aussi chacun des angles de dessus la base CD double du troisiéme A, lesquels estans couppez en deux egalement par les lignes droictes CE & DB, les cinq angles ADB, BDC, CAD, DCE, ACE seront egaux, & par la 26. prop. 3. ils auront circonferences egales pour basses: mais les egales circonferences comprennent lignes droictes egales par la 29. pr. 3. donc tous les cinq costez AB, BC, CD, DE & EA, estans egaux, le pentagone sera equilateral.

Aussi

Auſſi ſera-il bien aiſé de prouuer qu'il eſt equiangle par la 27. prop. 3. d'autant que chacun angle eſt ſouſtenu de circonferences egales, ſçauoir de trois arcs comprenans trois coſtez du pentagone, veu que nous auons prouué que tous iceux arcs ſont egaux. Nous auons donc deſcrit dans vn cercle donné vn pentagone equiangle, & equilateral: ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy il s'enſuit, que l'angle du pentagone equilateral & equiangle, comprend les trois cinquieſmes parties de deux droicts, ou bien les 6 quints d'vn droict. Car puis que les trois angles BAC, CAD, DAE ſont egaux par la 27. prop. 3, & CAD eſt le quint de deux droicts, ou les deux quints d'vn droict; le total BAE, qui eſt compoſé de ces trois, ſera les trois quints de deux angles droicts, ou bien les ſix quints d'vn droict.

SCHOLIE.

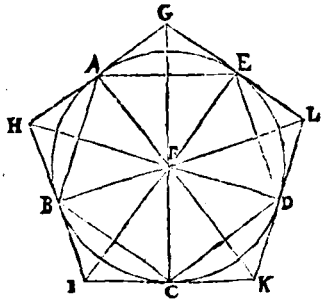
Clauius enſeigne en ce lieu-cy deux manieres pour deſcrire vn pentagone equilateral, & equiangle ſur vne ligne droicte donnee & terminee, la plus facile deſquelles nous auons enſeignee en noſtre Geometrie practique Prob. 38. c'eſt pourquoy nous n'en ferons icy repetition.

PROB. 12. PROP. XII.

A l'entour d'vn cercle donné, deſcrire vn pentagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire vn pentagone equileteral & equiangle.

Dans iceluy cercle soit descrit le pentagone A B C D E par la preced. prop. & apres auoir mené du centre F les cinq lignes F A, F B, F C, F D, F E, soient menees sur icelles les cinq lignes perpendiculaires G H, H I, I K, K L, L G par la 11. prop. 1. se rencontrans aux cinq poincts G, H, I, K, L: (elles se doiuent rencontrer; car puis que les angles G A E, G E A sont moindres que deux droicts, estans parties des angles droicts G A F, G E F par la 11. com. sent. les lignes droictes A G, E G se rencontreront de la part de G, & ainsi des autres.) Ie dis que G H I K L est le pentagone demandé.



Car il est euidemment circonscrit au cercle donné, puis que par le Coroll. de la 16. pr 3. les lignes droictes GH, HI, IK, KL, L G touchent ledit cercle és poincts A, B, C, D, E: En apres si on meine les cinq lignes F G, F H, F I, F K, F L; d'autant que les angles F A G, F E G sont droicts par la 47. prop. 1. le quarré de F G sera egal aux deux quarrez de F A, A G; il sera aussi egal aux deux de F E, E G,

& par conſequent les deux quarrez de F A, A G, ſeront egaux aux deux de F E, EG. Mais les quarrez de FA, FE ſont egaux (eſtans deſcrits ſur lignes egales.) Donc ceux de AG, & EG ſeront auſſi egaux; & les lignes AG & EG egales: Parquoy les deux coſtez AF, F G du triangle A G F ſont egaux aux deux coſtez EF, F G du triangle E G F, chacun au ſien, & la baſe AG egale à la baſe G E: & par la 8. prop. 1. les angles A F G, E F G ſeront egaux: & partant A F E ſera double de A F G. Par meſme diſcours AFB, qui eſt egal à AFE par la 27. p. 3. (car ils ont egales circonferences pour baſes) ſera auſſi double de A F H, & par conſequent A F G & A F H ſeront egaux: Donc les triangles A G F, A H F ont deux angles egaux à deux angles, chacun au ſien, & le coſté A F commun: & par la 26. prop. 1. A G ſera egale à A H. Par meſme diſcours G E & E L ſe trouueront egales: mais AG & E G eſtans egales, auſſi leurs doubles G H & G L ſeront egales. Par meſme diſcours on prouuera tous les autres coſtez egaux, & partant le pentagone GHIKL ſera equilateral.

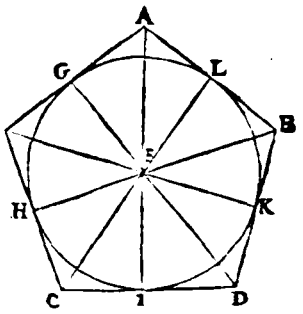
Qu'il ſoit auſſi equiangle, il eſt euident: car nous auons monſtré que les angles des triangles A G F, E G F ſont egaux, ſçauoir eſt, les angles A G F, E G F: Item A G F, A H F: & qu'on en pouuoit dire autant des autres: donc les deux angles ſous le poinct G, ſeront egaux aux deux angles ſous le poinct H, & ainſi des autres: partant le pentagone ſera equiangle & equilateral. Nous auons donc deſcrit à l'entour d'vn

cercle donné vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 13. PROP. XIII.

Dans vn pentagone donné equiangle, & equilateral, descrire vn cercle.

Soit donné vn pentagone equiangle, & equilateral ABCDE, dans lequel il faut inscrire vn cercle.



Par la 9 prop. 1. soient couppez en deux egalement deux des angles d'iceluy A & B, par les lignes AF & BF se rencontrans au poinct F, & par la 12. pr. 1. d'iceluy poinct F soient menées FG, FI, FH, FK, FL, perpendiculaires sur les costez du pentagone; puis du centre F, & interuale FG soit descrit le cercle GHIKL. Ie dis qu'il est inscrit au pentagone donné.

Car ayant mené les lignes droictes FC, FD, & FE: dautant que les deux costez A B, BF, du triangle ABF sont egaux aux deux costez CB, BF du triangle B F C, chacun au sien, & les angles ABF, CBF, contenus d'iceux costez, egaux par la construction; les bases AF, CF seront egales, & les angles BAF, BCF aussi egaux par la 4. p. 1. Mais puis que les angles du pentagone A & C sont

posez egaux, & que par la construction l'angle BAF est moitié de BAE; l'angle BCF sera aussi moitié de BCD, & consequemment iceluy BCD, est diuisé en deux egalement par la ligne FC. Par mesmes raison nous monstrerons que les deux autres angles du pentagone D & E, sont diuisés en deux egalement par les lignes FD & FE. Maintenant puisque par la construction les deux angles soubs le poinct A sont egaux ayant esté le total coupé en deux egalement, & que l'angle droict G est egal à l'angle droict L, & le costé FA commun aux deux triangles AGF, ALF, par la 26. prop. 1. les deux autres costez seront egaux, sçauoir AG à AL, & FG à FL: par mesme discours FH, FI, FK, se trouueront egales: & partant le cercle descrit de F & interualle FG, passe par les poincts G, H, I, K, L, esquels il touche les costez du pentagone proposé par le Coroll. de la 16. prop. 3. Le cercle GHIKL est donc inscrit au pentagone donné. Ce qu'il falloit faire.

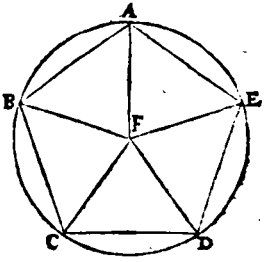
PROBL. 14. PROP. XIV.

A l'entour d'vn pentagone donné, lequel est equiangle, & equilateral, descrire vn cercle.

Soit le pentagone equiangle, & equilateral donné ABCDE, à l'entour duquel il faut descrire vn cercle.

Soient couppez les deux angles A & B en deux egalement par la 9. prop. 1. auec les lignes droictes AE & BF, se rencontrans au poinct F, & d'i-

celuy poinct F, & interuale de l'vne d'icelles deux lignes, ſoit deſcrit le cercle ABCDE. Ie dis qu'il ſera circonſcrit au Pentagone donné.



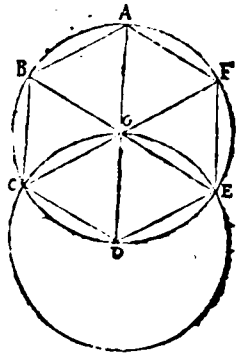
Car ayant mené les trois lignes FC, FD, FE, nous demonſtrerõs comme au precedent Probl. qu'elles coupperont en deux egalement les angles C, D, E. En apres, puis que le pentagone eſt equiangle, & chacun angle d'iceluy eſt couppé en deux egalement, au triangle AFB les deux angles ſur la baſe BA ſeront egaux, & par le 6. prop. 1. les deux coſtez AF & BF, ſeront auſſi egaux: par le meſme diſcours BF & FC ſeront auſſi egales, & ainſi des autres couppantes; & par la 1. com. ſent. il eſt euident qu'icelles cinq lignes FA, FB, FC, FD, FE ſeront egales entr'elles, & partant que le cercle deſcrit de l'interuale de l'vne d'icelles, paſſera par les extremitez des autres, qui ſont auſſi les cinq angles du pantagone donné. Parquoy nous auons deſcrit vn cercle à l'entour d'vn pentagone equiangle, & equilateral donné. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 15. PROP. XV.

Dans vn cercle donné, inſcrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit le cercle donné ABCDEF, dont le centre eſt G; dans lequel cercle il faut inſcrire vn hexagone equiangle, & equilateral.

Soit mené le diametre AD, puis du centre D, & interuale DG, soit descrit le cercle GCE couppant le donné aux poincts C & E, desquels poincts soient menées les deux lignes CGF, EGB: finalement soient menées les lignes droictes AB, BC, CD, DE, EF, FA; & on aura descrit au cercle donné l'hexagone ABCDEF, que ie dis estre equilateral, & equiangle.



Car il est euident (demonstrant comme en la 1. p. 1.) que les deux triangles CDG, DEG constructs sur la ligne DG sont equilateraux, & par le Cor. de la 5. p. 1. chacun d'iceux sera aussi equiangle, & par la 32. p. 1. vn chacun de leurs angles vaudra le tiers de deux angles droicts; & puis que par la 13. p. 1. les deux angles CGE, EGF sont egaux à deux droicts, l'angle EGF voudra aussi le tiers de deux angles droicts: donc tous les angles du poinct G seront egaux entr'eux, valãt chacun vn tiers de deux angles droicts; puis que par la 15. p. 1. les opposez au sommet sont egaux: partant les six bases AB, BC, CD, DE, EF, FA, seront egales, & les angles sur icelles aussi egaux par la 4. p. 1. Donc l'hexagone ABCDEF sera equilateral: mais il est aussi equiangle. Car puis que tous les angles des six triangles sont egaux, les deux du poinct A seront egaux aux deux du poinct B, & ainsi des autres. Nous auons donc descrit dans vn cercle donné vn hexagone equiangle & equilateral: ce qu'

COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte que le coſté de l'hexagone eſt egal au demy diametre du cercle ; car le coſté de l'hexagone DC, eſt egal au ſemidiametre DG par la def. du cercle.

PROB. 16. PROP. XVI.

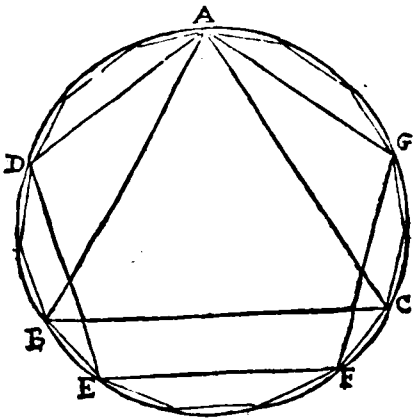
Dans vn cercle donné, deſcrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit le cercle donné ABC, dans lequel il faut inſcrire vn quindecagone equiangle & equilateral.

Soit premierement deſcrit dans iceluy le triangle equilateral ABC par la 2. prop. de ce liure; les trois coſtez eſtans egaux, la circonference ſera diuiſee en trois egalement par les 26. ou 28. pr. 3. pareillement, ſoit en iceluy cercle inſcrit le pentagone ADEFG par la 11. prop. de ce liure, ayant l'vn des angles au poinct A. Ie dis qu'ayant mené la ligne droicte BE, ce ſera le coſté du quindecagone demandé.

Car, comme il a eſté dit, l'arc ADB eſt le tiers de toute la circonference ; partant doit contenir cinq coſtez du quindecagone. Item la ligne droicte AD, coſté du pentagone, ſouſtient l'arc AD, cinquieſmé partie de la circonference : partant doit contenir trois coſtez du quinde-

cagone : & consequemment les deux arcs AD & DE contiendront six costez du quindecagone, Mais l'arc ADB en contient cinq : donc l'arc BE



sera la quinziesme partie de toute la circonference : & partant la ligne droicte BE sera le costé du quindecagone & si par la 1.p. de ce liure on accommode au cercle encores 14 lignes droictes egales à icelles BE, sera inscrit au cercle vn quindecagone equilateral, & aussi equiangle par la 27. pr. 3. puis que tous ses angles soustendent arcs egaux, chacun d'iceux angles estant composé de 13 arcs egaux. Nous auons donc au cercle donné descrit vn quindecagone, &c. Ce qu'il falloit faire.

Pareillement aussi, tout ainsi qu'au pentagone, si par les quinze poincts des diuisions egales du cercle, nous tirons des lignes droictes qui le touchent, se descrira vn quindecagone equilateral &

equiangle à l'entour dudit cercle : & dauantage nous deſcriroñs & circonſcrirons vn cercle à vn quindecagone equilateral & equiangle donné, ſuiuant la meſme methode practiquee au pentagone.

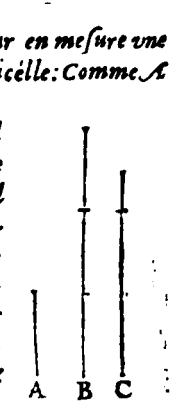
Fin du quatrieſme Element.

ELEMENT CINQVIESME.

DEFINITIONS.

PArtie, eſt vne grandeur tiree d'vne autre plus grande, lors que la plus petite meſure la plus grande.

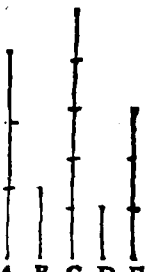
C'eſt à dire que lors qu'vne grandeur en meſure vne autre plus grande, elle eſt dicte partie d'icelle: Comme A qui eſt contenu 3 fois en B, eſt dit partie d'iceluy. Or entre les Mathematiciens il y a deux ſortes de partie: car il y en a vne qui meſure ſon tout; comme A, lequel repeté 3 fois conſtitue ſon tout B: & l'autre ſorte ne meſure pas ſon tout: mais priſe ie ne ſçay combien de fois excede iceluy, ou deffaut au meſme, comme A lequel eſtant pris 3 fois excede C, mais eſtant pris ſeulement 2 fois, il eſt excedé par le meſme C: Or la premiere eſt dicte partie aliquote; & l'autre, partie aliquante: de ceſte là ſeulement parle icy Euclide, puis que



ceſte-cy ne meſure ſon tout, & auſsi ne l'appelle-il pas partie au 7. liure, mais parties.

2. Multiplice, eſt vne grandeur plus grande qu'vne autre plus petite, quand la plus grande eſt meſuree de la plus petite.

C'eſt à dire que ſi la grandeur A eſt meſuree par B, moindre grandeur qu'icelle A, elle eſt dicte multiplice de B: Ainſi auſsi la grandeur C, qui eſt meſuree 5. fois par D, eſt dicte multiplice d'icelle D.



Or quand deux petites grandeurs en meſurent egalement deux autres plus grandes, c'eſt à dire, qu'vne moindre eſt contenue autant de fois en vne plus grande, qu'vne autre moindre en vne autre plus grande, ces deux plus grandes la ſont dictes equimultiplices d'icelles moindres: comme les grandeurs A & E ſont dictes equimultiplices de B & D, pource que tout ainſi que A contient trois fois B, ainſi auſsi E contient trois fois D. Et le meſme ſe doit entendre, ſi pluſieurs moindres grandeurs en meſurent egalement pluſieurs grandes.

3. Raiſon, eſt vne habitude de deux grandeurs de meſme genre, comparees l'vne à l'autre ſelon la quantité.

C'eſt à dire que quand deux quantitez de meſme genre, comme deux nombres, deux lignes, deux ſuperficies, deux ſolides, &c. ſont comparez entr'eux ſelon la quantité, c'eſt à dire ſelon que l'vne eſt plus grande que l'autre, ou moindre, ou egale, telle comparaiſon eſt appellée raiſon, & par quelqu'vns proportion: Parquoy on ne peut pas dire qu'il y ait quelque raiſon d'vne ligne à vne ſuperficie; ou d'vn nombre à vne ligne, puis que ny la ligne & la ſuperficie, ny le nombre & la ligne, ne ſont pas quantitez de meſme genre. Semblablement ſi on confere vne ligne auec vne ligne ſelon la qualité, c'eſt à dire, ſelon que l'vne eſt blanche, & l'autre noire; ou bien que l'vne eſt chaude, & l'autre froide, &c. encore que l'vne & l'autre ſoient de meſme genre, ceſte comparaiſon n'eſt pas dicte raiſon, pource qu'elle n'eſt pas faicte ſelon la quantité.

Or iaçoit que la raiſon ſe trouue proprement és ſeules quantitez, ſi eſt-ce toutesfois que toutes autres choſes, qui en quelque maniere prennent la nature de la quantité, comme ſont les temps, les ſons, les voix, les lieux, les mouuemens, les pois, & les puiſſances, ſont auſſi dictes auoir raiſon, ſi leur habitude eſt conſideree, ſelon la quantité, comme quand nous diſons vn temps eſtre plus grand qu'vn autre temps, ou moindre; ou deux temps eſtre egaux, &c. telle habitude ſera dite raiſon, pource qu'alors les temps ſont conſiderez ainſi que certaines quantitez.

En toute raiſon ceſte quantité-là, qui eſt referee à vne autre, eſt dicte par Euclide, & autres Geometres, antecedant de la raiſon; & celle-là à laquelle elle eſt referee, eſt dicte conſequent d'icelle raiſon: Comme en la raiſon de A à B; A eſt dict antecedant de la raiſon, & B conſequent: Que ſi au contraire B eſt comparé à A; B ſera appellé antecedant, & A conſequent.

A———
B———

Or ceſte raiſon definie par Euclide, eſt diuiſee en raiſon rationelle, & irrationelle.

La rationelle, eſt celle qui ſe peut exprimer en nombres : comme la raiſon d'vne ligne de 10 pieds à vne autre de 5 pieds, laquelle eſt exhibee par ces nombres 10 & 5. Mais l'irrationelle, eſt ceſte raiſon-là qui ne ſe peut exprimer en nombres : comme la raiſon du diametre d'vn quarré au coſté d'iceluy, laquelle ne ſe peut trouuer ny exprimer en nombre : comme eſt demonſtré par Euclide, en la derniere prop. du 10. liure.

Autres diſent que la raiſon ou proportion rationelle, eſt celle qui a les deux quantitez commenſurables, c'eſt à dire, qui ont vne commune partie aliquote, ou bien qui ſont meſurees par vne meſme commune meſure : comme la raiſon d'vne ligne de 20 pieds à vne autre de 8 pieds : car vne ligne de 4 pieds ou de 2, eſt partie aliquote de l'vne & l'autre de ces deux-là, & par conſequent meſure icelles. Mais la raiſon ou proportion irrationelle, eſt celle (diſent-ils) qui a les deux quantitez incommenſurables, c'eſt à dire, qui n'ont nulle partie aliquote, ou deſquelles on ne peut trouuer aucune commune meſure. Comme la raiſon du coſté d'vn quarré à ſa diagonalle, & de pluſieurs autres lignes dont eſt traicté au 10. liure.

Ceſte raiſon ſe diuiſe auſſi en raiſon d'egalité, & d'inegalité : La raiſon d'egalité, eſt quand deux quantitez egales ſe comparent entr'elles, comme 10 à 10 ; vne ligne de 12 pieds à vne autre ligne de 12 pieds, &c. Mais la raiſon d'inegalité, eſt quand deux quantitez inegales ſe comparent entr'elles, comme 10 à 4 eſt raiſon d'inegalité ; telle eſt auſſi celle de

5 à 9 ; celle d'vne ligne de 7 pieds à vne autre de 15 pieds, &c.

Ceste raison d'inegalité, est subdiuisee en raison d'inegalité maieure, & d'inegalité mineure. La raison d'inegalité maieure, est quand la plus grande quantité est comparee à la moindre : comme la raison de 8 à 5, est dicte raison d'inegalité maieure : item la raison d'vne ligne de 10 pieds à vne de 4, &c. Mais la raison d'inegalité mineure, est quand on compare la moindre quantité à la plus grande : comme la raison de 7 pieds à 9, s'appelle raison de moindre inegaleté : item celle d'vne ligne de 9 pieds à vne autre de 12 pieds, &c.

La raison rationelle d'inegalité maieure, est diuisee en cinq genres, sçauoir raison multiple, superparticuliere, superpartiente, multiple superparticuliere, & multiple superpartiente : les trois premieres desquelles sont simples, & les deux dernieres composees d'icelles premieres.

La raison multiple, est quand l'antecedant d'icelle contient le consequent plusieurs fois precisément : & ceste raison contient sous soy diuerses especes. Car si l'antecedant contient le consequent deux fois precisement, elle est dite double : si trois fois, triple : si 4, quadruple : si dix, decuple, &c. Comme la raison de 20 à 4 est dite quintuple, pource que l'antecedant 20 contient le consequent 4, cinq fois, & la raison d'vne ligne de 18 pieds à vne autre de 3 pieds, est dicte sextuple, d'autant que 18 contient 3 six fois, & ainsi des autres.

La raison superparticuliere, est quand l'antecedant contient le consequent vne fois, & en outre vne partie aliquote d'icelluy consequent : & ceste raison a diuerses especes. Car si ceste partie aliquote est moitié d'iceluy consequent, est constituee vne raison sesquialtere, comme la raison de 3 à 2, en laquelle l'antecedant 3, contient

le consequent 2, vne fois & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy; si elle est tierce partie, sesquitierce: si vne quarte partie, sesquiquarte: si vne cinquiesme partie, sesquiquinte, &c. commençant tousiours le nom de ladite raison par sesqui, *& se terminant par le denominateur de la partie aliquote.*

La raison superpartiente, est quand l'antecedant contient le consequent vne fois, & en outre plus d'vne partie aliquote d'iceluy: & a aussi ceste raison plusieurs especes. Car si l'antecedant contient le consequent vne fois, & encore $\frac{2}{3}$ parties d'iceluy, est constituee vne raison superbipartiente tierces, comme la raison de 20 à 12, en laquelle le nombre 20 contient 12, vne fois & $\frac{2}{3}$ d'iceluy: si $\frac{3}{4}$, sera constituée vne raison supertripartiente quarte, comme la raison d'vne ligne de 63 pieds à vne de 36, & ainsi des autres; le nom d'icelles commençant tousiours par super, *& prenant à son milieu le numerateur de la partie aliquote, & le denominateur à la fin d'iceluy.*

La raison multiple superparticuliere, est quand l'antecedant contient le consequent plusieurs fois, & encore vne partie aliquote d'iceluy: ceste-cy est composee de la premiere & de la deuxiesme: & tout ainsi que chacune d'icelles contient plusieurs especes, aussi fait celle-cy. Car si l'antecedant contient le consequent 2 fois, & encore $\frac{1}{2}$ d'iceluy, ceste raison sera appellee double sesquialtere, comme la raison de 5 à 2, en laquelle 5 contient 2, deux fois & $\frac{1}{2}$ d'iceluy: si $\frac{1}{3}$, comme d'vne ligne de 7 pieds à vne autre de 3 pieds, ceste raison s'appellera double sesquitierce: & la raison de 29 à 7, s'appellera quadruple sesquiseptuple, d'autant qu'en 29, 7 est contenu 4 fois & $\frac{1}{7}$ d'iceluy, & ainsi des autres.

La raison

La raiſon multiple ſuperpartiente, eſt quand l'antecedant contient le conſequent pluſieurs fois, & pluſieurs parties aliquotes d'iceluy: ceſte raiſon eſt compoſee de la premiere & troiſieſme; & tout ainſi que chacune d'icelles contient ſous ſoy pluſieurs eſpeces, auſſi faict ceſte-cy: comme ſi l'antecedant contient le conſequent, 2 fois, & encore $\frac{1}{3}$ parties d'iceluy, ceſte raiſon ſera appellee double ſuperbipartiente tierce, comme eſt la raiſon de 8 à 3: mais s'il le contient 3 fois, & encore $\frac{3}{4}$ d'icelluy, elle s'appellera triple ſuperpartiente quarte, comme eſt la raiſon de 15 à 4: s'il le contient 4 fois, & encore $\frac{6}{7}$ d'icelluy, elle ſera dicte quadruple ſuperſextupartiente ſeptuple, comme eſt la raiſon de 34 à 7, & ainſi des autres.

Or tout ce qui a eſté dit cy-deſſus des cinq eſpeces de raiſon rationelle d'inegalité maieure, ſe doit auſſi entendre des cinq eſpeces de l'inegalité mineure, excepté qu'il faut touſiours apposer ceſte ſyllabe sub, *diſant ſubmultiple au lieu de multiple, ſubſuperparticuliere, au lieu de ſuperparticuliere, & ainſi des autres.*

Et pource que les denominateurs des raiſons rationelles cy-deſſus expoſees ſont aſſez vtiles, nous enſeignerons icy par quels nombres elles ſe denomment. Nous appellons denominateur d'vne raiſon, le nombre qui exprime diſtinctement & apertement la quantité de la grandeur antecedante au reſpect de la conſequente: comme le dominateur de la raiſon quintuple eſt 5, pource que ce nombre là monſtre que la grandeur ou quantité antecedante contient 5 fois la conſequente. Semblablement le denominateur de la raiſon ſeſquiquarte eſt 1 $\frac{1}{4}$ pource qu'iceluy nombre ſignifie que la quantité antecedante contient la conſequente vne fois & $\frac{1}{4}$ d'icelle: Item le denominateur de la raiſon ſubtriple, eſt $\frac{1}{3}$, car il demonſtre que l'antecedant eſt la tierce partie du conſequent: & ainſi des autres. C'eſt pourquoy, comme

i'eſtime, Euclide au 6. liure, & autres Mathematiciens, appellent le denominateur de quelconque raiſon la quantité d'icelle, car il denomme & exprime comme nous auons dit, combien vne grandeur eſt au reſpect d'vne autre auec laquelle elle eſt conferee, ainſi qu'il appert par les exemples propoſez.

Or de ces choſes on peut facilement colliger le denominateur de quelconque raiſon. Car le denominateur de la raiſon multiple, eſt le nombre entier contenant autant d'vnitez, que l'antecedant de la raiſon contient de fois le conſequent. Comme le denominateur de la raiſon double, eſt 2, de la ſextuple, 6; de la centuple 100, &c. Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple, eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt touſiours l'vnité: mais le denominateur eſt le nombre denommant la raiſon multiple correſpondante. Comme le denominateur de la raiſon ſubdouble eſt $\frac{1}{2}$: de la ſubſextuple $\frac{1}{6}$: de la ſubcentuple $\frac{1}{100}$, &c. Il eſt donc facile de trouuer le denominateur de quelconque raiſon multiple ou ſubmultiple, puis que la prolation monſtre le denominateur de la raiſon, comme il eſt euident par les exemples propoſez cy-deſſus.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperparticuliere eſt l'vnité auec la partie aliquote que l'antecedant doit comprendre outre le conſequent. Comme le denominateur de la raiſon ſeſquialtere, eſt $1\frac{1}{2}$: de la ſeſquitierce $\frac{1}{3}$; &c. Il n'eſt donc pas difficile de trouuer le denominateur d'vne raiſon ſuperparticuliere, puis que la prolation d'icelle raiſon exprime le denominateur par ſa partie aliquote, comme il appert par les exemples propoſez. Et le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperparticuliere eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt moindre que le denominateur ſeulement d'vne vnité. Comme le dene-

minateur de la raiſon ſubſeſquialtere, eſt $\frac{2}{3}$ *: & celuy de la ſubſeſquitierce, eſt* $\frac{3}{4}$ *&c. Donc le denominateur de telle raiſon ſera aiſement trouué, car il n'y a qu'à prendre pour numerateur de la fraction, le denominateur de la partie aliquote : & pour le denominateur d'icelle fraction, le nombre plus grand de l'vnité. Comme le denominateur de la raiſon ſubſeſquiquinte eſt* $\frac{5}{6}$*: & celuy de la raiſon ſubſeſquiſeptieſme eſt* $\frac{7}{8}$ *: mais celuy-là de la raiſon ſubſeſquineufieſme, eſt* $\frac{9}{10}$.

Le denominateur de quelconque raiſon ſuperpartiente, eſt vne vnité auec les parties aliquotes que l'antecedant doit contenir outre le conſequant. Comme le denominateur de la raiſon ſupertripartiente quartes, eſt $1\frac{3}{4}$ *: celuy de la raiſon ſuperquadripartiente quintes, eſt* $1\frac{4}{5}$ *; & ainſi des autres Or les denominateurs de telles raiſons ſont faciles à trouuer, pource que la prolation meſmes de la raiſon exhibe le propre denominateur d'icelle, comme il appert és exemples cy-deſſus. Mais le denominateur de quelconque raiſon ſubſuperpartiente, eſt vn nombre rompu, duquel le numerateur eſt moindre que le denominateur, d'autant d'vnitez, que la quantité conſequente contient de parties aliquotes par deſſus l'antecedante. Comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quarte eſt* $\frac{4}{7}$ *: celuy de ſubſuperquadripartiente quinte, eſt* $\frac{5}{9}$ *, &c. On trouuera donc le denominateur de telle raiſon ; ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes exprimees en la raiſon propoſee, auquel ſi on adiouſte le nombre d'icelles parties, on aura le denominateur d'icelle fraction : comme le denominateur de la raiſon ſubſupertripartiente quinte eſt* $\frac{5}{8}$ *, pource que le numerateur de ceſte fraction eſt le nombre denommant les quintes, ſçauoir 5. auquel eſt*

adiouſté le nombre 3, des trois parties, a fin de faire 8, denominateur de la fraction : mais le denominateur de la raiſon ſubſuperquadripartiente neufieſme eſt $\frac{9}{13}$: & ainſi des autres.

Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperparticuliere eſt le nombre entier, denommant la raiſon multiple propoſee auec la partie que la quantité antecedante doit contenir outre la conſequente. Comme le denominateur de la raiſon triple ſeſquiſeptieſme eſt $3\frac{1}{7}$: mais celuy de la raiſon quadruple ſeſquiquinte, eſt $4\frac{1}{5}$, &c. Le denominateur de telle raiſon eſt aiſé à exhiber, pource que la prolation de la raiſon exprime diſtinctement tant le denominateur de la multiple raiſon, que la partie aliquote, comme il ſe voit ez exemples propoſez. Et le denominateur de quelconque raiſon ſubmultiple ſuperparticuliere eſt vne fraction dont le numerateur eſt le nombre denommant les parties aliquotes contenues en la raiſon. Comme le denominateur de la raiſon ſubtriple ſeſquiquarte, eſt $\frac{4}{13}$: de ſub quintuple ſeſquiſneufieme, $\frac{9}{46}$, &c. On trouuera le denominateur de telle raiſon, ſi pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur de la partie aliquote, & icelluy eſtant multiplié par le denominateur de la raiſon multiple, ſi on adiouſte 1 au produit, on aura le denominateur de la fraction, cõme il eſt manifeſte par les exemples cy-deſſus.

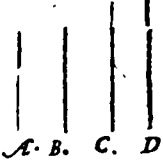
Le denominateur de quelconque raiſon multiple ſuperpartiente, eſt le nombre entier, denommant la raiſon multiple obtenuë en icelle, auec les parties aliquotes que la quantité antecedante doit contenir de la conſequente. Cõme le denominateur de la raiſon triple ſuperbipartiente tiercees, eſt $3\frac{2}{3}$: de quadruple ſupertripartiente quintes, $4\frac{3}{5}$, &c. Il eſt facile de trouuer le denominateur de telles raiſons, pource que la prolation exprime diſtinctement, tant le denominateur de la raiſon multiple, que les parties aliquotes, comme appert

és exemples cy-dessus : & le denominateur d'vne raison submultiple superpartiente, est vne fraction, dont le numerateur est le nombre denommant les parties aliquotes d'icelle raison: comme le denominateur de la raison subtriple superbipartiente tierces, est $\frac{3}{11}$: de subquadruple superpartipartiente quintes $\frac{5}{23}$, &c. Le denominateur de telles raisons sera trouué, si pour le numerateur de la fraction on prend le denominateur des parties aliquotes : lequel estant multiplié par le denominateur de la raison multiple, & au nombre produict adiousté le nombre des parties aliquotes, viendra le denominateur de la fraction, ainsi qu'il appert és exemples posez cy-dessus.

Finalement le denominateur de la raison d'egalité est tousiours l'vnité, pource que les termes ou quantitez d'icelle raison sont egales entr'elles ; & partant l'vne contient l'autre vne fois precisément.

4. Proportion, est vne similitude de raisons.

Tout ainsi que la comparaison de deux quantitez entr'elles est dicte raison, ainsi la compa raison & ressemblance de deux ou plusieurs raisons entr'elles, est dicte proportion : comme si la raison de A à B, est semblable à la raison de C à D, l'habitude d'entre ces raisons sera dicte proportion. Et c'est ce que les Grecs appellent analogie, *& quelques Latins* proportionalité : *selon*



Boëtius & Iordanus il y en a de plusieurs sortes, dont les principales qu'ils appellent Medietez, *sont la proportion*

Arithmetique, la Geometrique, & l'Harmonique: Mais Euclide ne traicte icy que de la Geometrique, laquelle est ou continue ou discrete: la proportion continuë, est celle de laquelle les grandeurs entre moyennes sont prises deux fois, tellement qu'il ne se faict nulle interruption de raisons, ains chaque quantité entre moyenne est antecedant & consequent, sçauoir antecedant de la quantité subsequente, mais consequent à la quantité antecedante: comme si on dit, que telle qu'est la raison de A à B, telle est celle de B à C, où la quantité B est antecedant de la quantité C, & consequent de la quantité A. Mais la proportion discrette ou non continuë, est celle en laquelle chaque quantité entremoyenne est prinse seulement vne fois, tellement qu'il se faict interruption de raisons, & aucune quantité n'est antecedant & consequent: mais seulement antecedant ou consequent: comme quand on dit que la raison de A à B, est comme celle de C à D.

5. Les grandeurs sont dictes auoir raison l'vne à l'autre, lesquelles estans multipliees se peuuent exceder l'vne l'autre.

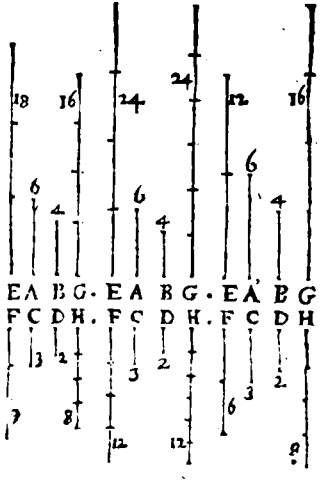
Euclide ayant en la 3. def. appellé raison l'habitude de deux grandeurs de mesme genre, il explique en ceste-cy quelle chose requierent deux quantitez de mesme genre, afin qu'elles soient dites auoir raison, sçauoir est, que l'vne ou l'autre d'icelles estant multipliee, elles s'augmente en sorte, que finalement elle surpasse l'autre: ainsi il y a raison entre le costé d'vn quarré, & le diametre d'iceluy, puis que le costé multiplié par 2, c'est à dire pris deux fois, excede le diametre. Car d'autant que deux costez du quarré & le diametre, constituent vn triangle Isoscelle, par la 20. p. 1. les deux costez du quarré seront plus grands que le diametre. Ainsi pareillement entre la circonference d'vn cercle & le diametre d'iceluy, il y a raison (laquelle toutesfois n'est encore cogneuë) puis que le diametre multiplié par 4, c'est à dire pris 4 fois, excede la

circonference : car toute la circonference, comme il eſt demonſtré par Archimede, ne contient que trois fois le diametre, & encore vne particule peu moindre qu'vne ſeptieſme partie d'iceluy diametre. Mais il s'enſuit de ceſte def. qu'vne ligne finie n'aura raiſon à vne infinie, encores qu'icelles deux lignes ſoient de meſme genre de quantité : car en quelque ſorte que ſoit multipliée la ligne finie elle ne pourra ſurpaſſer l'infinie. S'enſuit auſſi qu'il n'y a point de raiſon entre vn angle rectiligne, & vn angle contingent. Car il appert de la 16. prop. 3. qu'iceluy angle contingent, ne peut iamais exceder vn angle rectiligne.

6. Les grandeurs ſont dites eſtre en meſme raiſon, la premiere à la ſeconde, cõme la troiſiéme à la quatriéme, quãd les equimultiplices de la premiere & troiſiéme, aux equemultiplices de la ſeconde & quatriéme, en quelque multiplication que ce ſoit, deffaillent enſemble, ſont egaux, ou excedent, vn chacun à vn chacun, prenant ceux là qui s'entre reſpondent.

Ayant eſté dit par Euclide, que ceſt que raiſon, & quelles grandeurs ſont dites auoir raiſon l'vne à l'autre, maintenant il declare quelle condition requierent les grandeurs pour eſtre en meſme raiſon. Sçauoir eſt, que les equemultiplices de la premiere & troiſieſme grandeur excedent, ſoient egaux ou deffaillent aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme en quelque multiplication que ſoient pris iceux equemultiplices, comme appert en ces quatre quãtitez A, B, C, D,

où les equemultiplices de A & C, premiere & tierce, ſont E & F, & les equemultiplices de B & D, ſeconde & quatrieſme quantitez ſont G & H; tellement qu'il ſe voit qu'ayant multiplié A & C, par vn meſme nombre; & B, D, par quelconque meſme nombre, ſi le multiplice E excede le multiplice G qui luy correſpond, auſſi le multiplice F excede le multiplice H; s'il eſt egal, l'autre ſera auſſi egal; s'il defaut auſſi ſera l'autre, & ce en quelconque multiplication qu'on prenne les equemultiplices: & partant il y a meſme raiſon de A premiere quantité à B ſeconde, que de C troiſieſme à D quatrieſme.



Par la conuerſe de ceſte def. s'il y a telle raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la troiſieſme à la quatrieſme, il s'enſuit que les equimultiplices de la premiere & troiſieſme excedent, ſont egaux, ou defaillent aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme, engendrees de quelque multiplication que ce ſoit.

Et auſſi s'il n'y a meſme raiſon de la premiere à la ſeconde, que de la tierce à la quatrieſme, il s'enſuiura que les equemultiplices de la premiere & troiſiéme n'excederont, ne ſeront egaux, ou ne defaudront aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme produictes de quelque multiplication que ce ſoit.

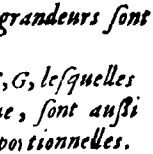
Or ce qui eſt dit icy de quatre grandeurs ſe doit auſſi

entendre de trois, prenant celle du milieu deux fois, à fin qu'il y en ait quatre.

7. Les grandeurs qui sont en mesme raison sont appellees proportionnelles.

Comme si des grandeurs A, B, C, D, il y a mesme raison de A à B, que de C à D, icelles grandeurs sont dites proportionnelles.

Et les grandeurs E, F, G, lesquelles sont en proportion continue, sont aussi dites continuellement proportionnelles.



8. Quand des equemultiplices, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la seconde, & le multiplice de la troisiesme n'excede celuy de la quatriesme, lors il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la troisiesme à la quatriesme.

Euclide declare icy quelle condition doivent auoir 4 grandeurs, à fin que la premiere soit dicte auoir plus grande raison à la seconde que la tierce à la 4e, disant qu'ayant pris les equemultiplices de la premiere & de la 3e, & les equemultiplices de la deuxiesme & 4e, si la multiplice de la premiere excede la multiplice de la 2e; mais la multiplice de la 3e n'excede la multiplice de la 4e; il y aura plus grande raison de la premiere grandeur à la seconde, que de la 3e à la 4e, comme il appert en l'exem-

ple icy posé, auquel sont prinses E & F, doubles de A & C, premiere & 3e grandeurs, mais G & H triples de B & D, deuxiesme & 4e grandeurs: & pource que E multiplice de A premiere est plus grand que G multiple de B 2e, & F multiplice de C 3e n'est pas plus grand que H multiplice de D 4e, la raison de A premiere grandeur à B 2e, est dicte plus grande que la raison de C 3e à D 4e.



Or afin que quatre grandeurs soient dictes estre en mesme raison, il est necessaire que les equemultiplices d'icelles, pris selon quelconques multiplications, excedent, soient egaux, ou defaillent, comme il a esté exposé en la 6. def. Mais à fin que la premiere grandeur soit dicte auoir plus grande raison à la 2e, que la 3e à la 4e: c'est assez que des equemultiplices pris selon quelque multiplication, celuy de la premiere grandeur excede celuy de la deuxiesme. & le multiplice de la troisiesme n'excede celuy de la quatriesme, encore que selon plusieurs autres multiplications ces equemultiplices ne soient tels. Parquoy pour conclurre en quelque demonstration qu'il y a plus grande raison d'vne grandeur à vne autre, que d'vne troisiesme à vne quatriesme. Il suffira de demonstrer que selon quelque multiplication, le multiplice de la premiere grandeur excedant celuy de la seconde, le multiplice de la troisiesme n'excede celuy de la quatriesme.

Et conuertissant cette 8. def. s'il y a plus grande raison de la premiere grandeur à la deuxiesme, que de la troisiesme à la quatriesme, le multiplice de la premiere excedant celuy de la deuxiesme, il se peut faire quelque multiplication par laquelle le multiplice de la troisiesme n'excede celuy de la quatriesme.

Que ſi au contraire d'icelle def. le multiplice de la premiere grandeur ne ſurmonte celuy de la deuxieſme, & le multiplice de la tierce excede celuy de la quarte, la premiere grandeur ſera dicte auoir moindre raiſon à la deuxieſme que la tiere à la quarte. La conuerſe a auſſi lieu.

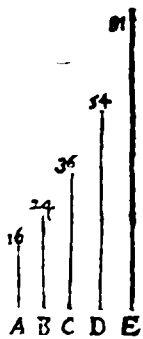
9. Proportion ne peut eſtre conſtituee ſur moins de trois termes.

Puis qu'il a eſté dit en la 3. def. que raiſon eſt l'habitude de deux quantitez, & que proportion par la 4. def. eſt vne ſimilitude de deux ou plusieurs raiſons: il s'enſuit qu'il n'y peut auoir moins de trois quantitez ou termes en vne proportion, ſi elle eſt proportion continue, mais il en faut quatre au moins, ſi elle eſt proportion diſcrette.

10. Quand trois grandeurs ſont proportionnelles, la premiere eſt dicte auoir à la troiſieſme la raiſon doublee de la premiere à la ſeconde : mais s'il y en a quatre, la premiere eſt dicte eſtre à la quatrieſme, en raiſon triplee de la premiere à la ſeconde : & touſiours d'vn meſme ordre vne plus, iuſques à ce que la proportion ſoit achéuee.

Comme ſi les grandeurs A, B, C, D, E, ſont continuellement proportionnelles, la premiere quantité A eſt dicte auoir à la 3e quantité C, la raiſon doublee de celle de A à la 2e B, pource qu'entre A & C ſont deux raiſons, qui ſont

egales à la raiſon de A à B, ſçauoir eſt la raiſon de A à B, & celle de B à C, tellement que la raiſon de A à C prend par ce moyen la raiſon doublee de A à B, c'eſt à dire poſee deux fois d'ordre. Mais la raiſon de la premiere grandeur A à la 4e D, eſt dicte triplee de celle de A à B, pource qu'entre A & D ſe trouuent trois raiſons, leſquelles ſont egales à celle de A à B; c'eſt à ſçauoir la raiſon de A à B, celle de B à C, & celle de C à D: & partant la raiſon de A à D encloſt par ce moyen la raiſon triplee de A à B, c'eſt à dire poſee trois fois d'ordre. Et ainſi pareillement la raiſon de A à E, eſt dicte quadruplee de la raiſon de A à B; pource qu'entre A & E ſont encloſes 4 raiſons, qui ſont egales à celle de A à B, & c.



11. Les grandeurs ſont dictes homologues, ou de ſemblables raiſons, les antecedans aux antecedans, & les conſequens aux conſequens.

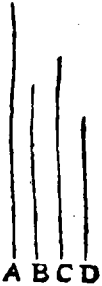
C'eſt à dire que ſi pluſieurs quantitez ſont proportionnelles, comme A, B, C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D, les quantitez A & C, antecedantes de chaſque raiſon, ſeront dictes homologues, ou de ſemblable raiſon, comme auſſi les quantitez conſequentes B & D. Ainſi pareillement, ſi les quantitez E, F, G, ſont proportionnelles aux quantitez H, I, K: les termes E



& H, seront dicts homologues, ou de semblable raison: comme aussi le terme F sera dict homologue au terme I: & aussi G à K: ainsi les costez des figures estans comparez entr'eux, on entend quels costez doiuent estre antecedans des raisons, & quels consequens.

12. Raison alterne, est prendre l'antecedant comparé à l'antecedant, & le consequent au consequent.

Euclide explique en ceste def. & és suiuantes, aucuns moyens d'argumenter és proportions, desquels l'vsage est fort frequent en la Geometrie. Il dit donc icy que la raison alterne ou permutee, est quand de quatre grandeurs proportionnelles proposees, comme A, B, C, D, sçauoir que comme A est à B, ainsi C est à D; on vient à conclurre qu'il y a mesme raison de l'antecedant A à l'antecedant C, que du consequent B au consequent D: & ceste maniere d'argumenter (laquelle est demonstree la 16. p. de ce liu.) se couche ordinairement ainsi: comme A est à B, ainsi C est à D: Donc en permutant comme A sera à C, ainsi B à D. Et est à noter qu'en ceste maniere d'argumenter, les quatre grandeurs doiuent estre de mesme genre.



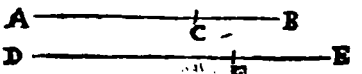
13. Raison inuerse ou transposee, est lors qu'on prend le consequent comme antecedant pour le comparer à l'antecedant, comme si c'estoit le consequent.

Comme si A est à B, ainsi que C à D, nous infererons que

par raiſon inuerſe, comme B eſt à A, ainſi A D eſt à C, c'eſt à dire les conſequens aux antecedans. En cette ſorte d'argumenter les Cantheurs parlent preſques touſiours ainſi: comme A eſt à B, ainſi C eſt à D: donc en changeant, ou au contraire, B ſera à A, comme D à C. Cette maniere d'argumenter ſera demonſtrée au Cor. de la 4. p. de ce liure.

14. Compoſition de raiſon, eſt lors qu'on prend l'antecedant auec le conſequent, comme vne ſeule choſe, pour le comparer au meſme conſequent.

Comme ſi AC eſt à CB, comme DF à FE, & on vient à conclure que la toute AB eſt à CB, comme la toute DE à FE; c'eſt à dire que la compoſee de l'antecedant AC & du conſequent CB, eſt au meſme conſeqnent CB, comme la compoſee de l'antecedant DF & du conſequent FE, eſt à iceluy conſequent FE; cette maniere d'argumenter ſera dicte compoſition de raiſon, & ſe prononce ainſi; comme AC eſt à CB, ainſi DF à FE: donc en compoſant AB ſera à CB, comme DE à FE: laquelle ſorte d'argumentation ſera demonſtrée en la 18. p. de ce liure.



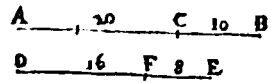
A ce moyen d'argumenter, par la compoſition de raiſon, en peuuent eſtre adouſtez deux autres: le premier peut eſtre dict compoſition conuerſe de raiſon: ſçauoir quand on prend l'antecedant & le conſequent comme vn ſeul, pour le comparer à l'antecedant. Comme ſi AC eſt à CB, comme [illegible] donc [illegible] AB compoſee de

l'antecedant & du conſequent, eſt à l'antecedant AC, ainſi DE compoſee de l'antecedant & du conſequent eſt à l'antecedant DF: laquelle argumentation nous demonſtrerons eſtre valable ſur la 18. p. 5.

L'autre moyen d'argumenter peut eſtre dit compoſition contraire de raiſon; c'eſt à ſçauoir quand l'antecedant eſt comparé à l'antecedant & conſequent comme vn ſeul. Comme ſi AC eſt à CB, ainſi que DF à FE, & nous infrons par compoſition contraire de raiſon: donc comme AC antecedant ſera à la toute AB, compoſee de l'antecedant & du conſequent, ainſi DF antecedant ſera à la toute DE, compoſee de l'antecedant & du conſequent. Nous demonſtrerons ſur la 18. p. de ce liure que cette forme d'argumenter eſt vallable.

15. Diuiſion de raiſon, eſt lors qu'on prend l'excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent, pour le comparer à iceluy meſme conſequent.

Comme ſi on dit qu'il y a telle raiſon de AB à CB, que de DE à FE: donc auſſi AC, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent, ſera à CB conſequent, comme DF excez par lequel l'antecedant excede le conſequent, ſera à FE conſequent. Or les autheurs concluent ordinairement auec cette raiſon ainſi: comme AB eſt à CB, ainſi DE eſt à FE: donc en deuiſant AC ſera auſſi à CB; comme DF à FE. Ce qui ſera demonſtré en la 17. p. de ce liure.



A ce moyen d'argumenter en peuuent auſsi eſtre adiouſtez deux autres: le premier peut eſtre appellé diuiſion conuerſe de raiſon, c'eſt à ſçauoir quand le conſequent eſt comparé à l'excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent: Comme ſi AB eſt à CB, comme DE à FE, & nous inferons; donc auſsi par diuiſion conuerſe de raiſon, comme CB conſequent ſera à AC, excez par lequel l'antecedant ſurmonte le conſequent, ainſi FE conſequent ſera à DF, excez par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent: laquelle maniere d'argumenter nous demonſtrerons pouuoir eſtre ſur la 17. pr. 5. Il eſt manifeſte qu'en l'vne & l'autre d'icelles argumentations par diuiſion de raiſon, l'antecedant doit eſtre plus grand que le conſequent.

L'autre moyen d'argumenter peut eſtre dit diuiſion contraire de raiſon, c'eſt à ſçauoir quand l'antecedant eſt conferé à l'excez par lequel le conſequent excede l'antecedant. Comme quand on dit, AC eſtre à AB, comme DF à DE: Donc auſsi par diuiſion contraire de raiſon AC antecedant ſera à CB, excez par lequel le conſequent ſurmonte l'antecedant, comme DF antecedant ſera à EF, excez par lequel le conſequent ſurpaſſe l'antecedant: lequel moyen d'argumenter nous demonſtrerons ſur la 17. prop. de celiure.

Il eſt euident qu'en ceſte diuiſion contraire de raiſon, le conſequent doit eſtre plus grand que l'antecedant.

16. Conuerſion de raiſon, eſt comparer l'antecedant à l'excez, par lequel l'antecedant ſurpaſſe le conſequent.

Comme ſi on dit, que comme AB eſt à CB, ainſi DE à FE: & on vient à conclurre que AB antecedant ſera auſsi à AC, excez par lequel il ſurmonte le conſequent,

comme

comme DE antecedant ſera à DF, excez par lequel l'antecedant excede le conſequẽt, cela ſera dit cõuerſion de raiſon. En ceſte ſorte d'argumenter les autheurs parlent ordinairement ainſi: comme AB eſt à CB, ainſi DE eſt à FE: Donc par conuerſion de raiſon AB ſera à AC, comme DE à DF: laquelle ſorte d'argumenter ſera demonſtree au Cor. de la 19. p. de ce liu.



17. Raiſon egale, eſt lors qu'il y a pluſieurs grandeurs d'vn coſté, & autant de l'autre en multitude, priſe de deux en deux en meſme raiſon, & que la premiere des premieres grandeurs, eſt à la derniere des meſmes, comme la premiere des ſecondes eſt à la derniere des meſmes.

Autrement, c'eſt lors qu'on prend les extremes par la ſouſtraction des moyennes.

Comme s'il y-a d'vn coſté quatre quantitez, A, B, C, D: & autant d'vn autre E, F, G, H, leſquelles ſoient priſes deux à deux en meſme raiſon, c'eſt à dire que A ſoit à B, comme E à F; & B à C, comme F à G; & C a D, comme G à H: ſi on inferre que comme A eſt à D, premiere & derniere des premieres grandeurs, ainſi E eſt à H, premiere & derniere des ſecondes. Ceſte maniere



d'argumenter eſt dicte raiſon egale, ou bien d'egalité. Et d'autant que ceſte maniere d'argumenter ſe prend ordinairement en deux ſortes, ſçauoir eſt quand les grandeurs qui ſont en meſme raiſon ſont priſes d'ordre: & quand l'ordre eſt peruerty: Euclide explique és deux def. ſuiuantes que c'eſt que proportion ordonnee, & perturbée.

18. Proportion ordonnée, eſt quand l'antecedant eſt au conſequent, comme l'antecedant eſt au conſequent : & que le conſequent eſt à quelque autre, comme le conſequent eſt auſſi à quelque autre.

Cecy eſt aiſé à entendre par l'exemple de la def. precedente, où nous auons poſé A eſtre à B, cõme E à F; & B à C, comme F à G, & C à D, comme G à H: Car ainſi les termes des 4 premieres quantitez ſont pris d'vn meſme ordre, que ceux des 4 dernieres; & partant ceſte proportion eſt dicte ordonnee. Or que le moyen d'argumenter par raiſon d'egalité, la proportion d'ordre eſtant obſeruee, ſoit bon, il ſera demonſtré en la 22. p. de ce liure.

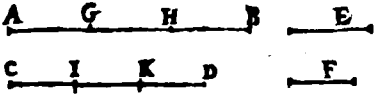
19. Proportion troublée, eſt quand trois grandeurs eſtans d'vn coſté, & autant d'vn autre, la premiere eſt à la ſeconde, comme la cinquieſme à la ſixieſme, & comme la ſeconde à la troiſieſme, ainſi la quatrieſme à la cinquieſme.

Comme ſi A eſt à B, ainſi que E eſt à F; & comme B eſt à C, ainſi D à E: ceſte proportion ſera dicte troublee ou perturbée, d'autant qu'vn meſme ordre n'eſt pas gardé en la comparaiſon des premieres grandeurs entr'elles, qu'és ſecondes auſſi entr'elles. Car és premieres quantitez, la premiere eſt comparée à la ſeconde, & ceſte-cy à la 3^e: mais és ſecondes quantitez la 2^e eſt comparée à la 3^e, & la premiere à la ſeconde. Or que le moyen d'argumenter par raiſon egale, la proportion troublée eſtant gardée, ſoit bon, il ſera demonſtré en la 23. p. de ce liure.



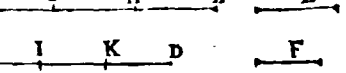
THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices d'autant d'autres grandeurs, chacune à la ſienne; comme l'vne ſera multiplice de l'vne, ainſi les toutes ſeront multiplices des toutes.



Soient tant de grandeurs qu'on voudra AB & CD, equemultiplices d'autant d'autres grandeurs E & F. Ie dis que les grandeurs AB & CD enſemble, ſeront autant multiplices de E & F enſemble, comme AB l'eſt de E, ou CD de F.

Car puis que AB eſt multiplice de E ; E meſurera AB certain nombre de fois par la 2. def. de ce liure, qu'elle la meſure donc trois fois, & ſoit icelle AB couppee en troisparties egales, AG, GH, HB, chacune deſquelles ſera egale à E. Le meſme ſe peut dire de la grandeur CD, laquelle on couppera auſſi en trois parties egales, CI, IK, KD, eſtant chacune d'icelles egale à F: mais qui a choſes egales, ſçauoir à AG & E, adiouſte choſes egales, ſçauoir CI & F, les toutes AG, CI enſemble, ſeront egales aux toutes E & F enſemble. Par meſme raiſon GH & IK enſemble, ſeront egales à icelles E & F enſemble : pareillement HB & KD, aux meſmes E & F. Autant donc qu'il y a de grandeurs en AB, egales à E ; & en CD egales à F: autant y en a-il en AB & CD priſes enſemble, qui ſont egales à E & F priſes enſemble : Parquoy les deux AB & CD enſemble, ſeront triples des deux enſemble E & F, comme la ſeule AB eſt triple de la ſeule E, ou la ſeule CD de la ſeule F. S'il y a donc tant de grandeurs qu'on voudra equemultiplices, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

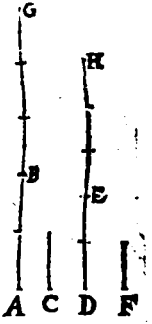


THEOR. 2. PROP. II.

Si la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, que la troiſieſme de la quarte, & la cinquieſme autant multi-

plice de la seconde, que la sixiesme de la quarte; la composee de la premiere & cinquiesme, sera autant multiplice de la seconde, comme la composee de la troisiesme & sixiesme, le sera de la quarte.

Soit la premiere grandeur AB, autant multiplice de la seconde C, comme la 3e DE l'est de la 4e F: & soit la 5e BG autant multiplice de la 2e G, comme la 6e EH de la 4e F: Ie dis que AG composee de la premiere & cinquiesme AB & BG, sera autant multiplice de la 2e C, comme DH composee de la tierce & sixiesme DE & EH, le sera de la quarte F.

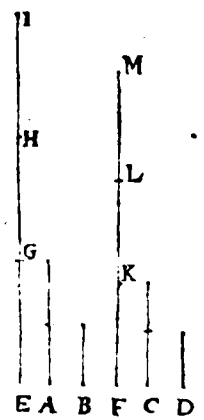


Car puis que AB est autant multiplice de C, comme DE de F, il y a en AB autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DE d'egales à F. Par mesme raison, il y aura aussi en BG autant de grandeurs egales à C, comme il y en a en EH d'egales à F. Il y aura donc en AG autant de grandeurs egales à C, qu'il y en a en DH d'egales à F: parquoy AG composee de la premiere & cinquiesme est autant multiplice de la seconde C, comme DH composee de la tierce & sixiesme l'est de la quarte F. Parquoy si la premiere est autant multiplice de la seconde, que la troisiesme de la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si la premiere eſt autant multiple de la ſeconde, comme la tierce de la quarte; & on prend des equimultiplices de la premiere, & troiſieſme: auſſi le multiplice de la premiere ſera autant multiplice de la ſeconde, que le multiplice de la tierce le ſera de la quarte.

Soit A autant multiplice de B, comme C l'eſt de D; & de la premiere & tierce A, C, ſoient pris les equemultiplices E & F. Ie dis que E ſera autant multiple de B 2e, que F de D 4e.



Car puis que E eſt autant multiplice de A, que F l'eſt de C: E contiendra autant de parties egales à A, comme F de parties egales à C. Soit donc E diuiſee en EG, GH & HI, chacune egale à A: Item F diuiſee en FK, KL & LM, chacune egale à C: & d'autant que EG & FK ſont egales à A & C, leſquelles ſont equemultiplices de B & D par l'hypotheſe, auſſi EG & FK ſeront equemultiplices des meſmes B & D. Par meſme raiſon GH

& KL: item HI & LM, ſeront equemultiplices d'icelles B & D. Veu donc que EG premiere grandeur eſt autant multiplice de la ſeconde B, que FK tierce l'eſt de D quarte. Item GH cinquieſme autant multiplice de la meſme ſeconde B, que KL ſixieſme de la quatrieſme D; auſſi EH compoſee de la premiere & cinquieſme ſera autant multiplice de la ſeconde B, que FL compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de la quatrieſme D, par la prec. prop. Derechef puis que EH premiere grandeur eſt autant multiplice de la ſeconde B, que FL tierce l'eſt de D quarte, & HI cinquieſme eſt auſſi autant multiplice de la ſeconde B, que LM ſixieſme l'eſt de la quatrieſme D: EI compoſee de la premiere & cinquieſme ſera auſſi autant multiplice de la ſeconde B, que FM compoſee de la tierce & ſixieſme l'eſt de D quatrieſme par la 2. p. de ce liure. *Si* donc la premiere eſt autant multiplice de la ſeconde, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, en meſme raiſon que la tierce à la quarte: auſſi les equemultiplices de la premiere & tierce, auront meſme raiſon aux equemultiplices de la ſeconde & quarte, en quelque multiplication que ce ſoit, ſi elles ſont

prises ainsi qu'elles s'entrerespondent.

Soit A à B en mesme raison que C à D, & soient prises E & F equemultiplices de A premiere & C tierce: Item G & H equemultiplices de B seconde & D quarte, selon quelque multiplication que ce soit. Ie dis qu'il y a mesme raison de E à G, que de F à H.



Car si on prend I & K equemultiplices de E & F, pareillement L & M equemultiplices de G & H: d'autant que E premiere, est autant multiplice de A seconde, que F tierce l'est de C quarte, & I, K sont prinses equemultiplices d'icelles E, F, premiere & tierce; aussi par la 3. prop. de ce liure I & K, seront equemultiplices de A & C, seconde & quarte. Par mesme raison L & M, seront aussi equimultiplices de B & D: & puis que A est à B comme C à D: & d'icelles A & C, premiere & tierce, ont esté demonstrees I & K equemultiplices; mais de B & D seconde & quarte, autres equemultiplices L & M: par la conuerse de la 6. def. de ce liure, si I deffaut, est egal, ou plus grand que L, aussi K deffaudra, sera egal, ou plus grand que M, selon quelconque multiplication que soient pris iceux equemultiplices. Et pour autant que I & K, sont equemultiplices de

E & F ; pareillement L & M de G & H: par la meſme 6. def. il y aura meſme raiſon de E à G, comme de F à H. Si donc la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon que la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte la preuue de la raiſon inuerſe, qu'Euclide a expliquee en la 13. def. de ce liure, ſçauoir eſt que ſi 4. grandeurs ſont proportionelles, elles le ſeront auſſi eſtans priſes à rebours, c'eſt à dire que E eſtant à G comme F à H, auſſi en changeant G ſera à E comme H à F. Car puis qu'il a eſté demonſtré que ſi I defaut, eſt egal ou plus grand que L, auſſi K defaudra, ſera egal, ou plus grand que M, ſelon quelconques multiplices. Il appert auſſi que ſi L defaut, eſt egal, ou plus grand que I, auſſi M defaudra, ſera egal, ou plus grand que K, ſelon quelconques multiplications : Et partant par la 6. def. il y aura meſme raiſon de G à E que de H à F.

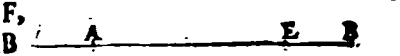
THEOR. 5. PROP. V.

Si vne grandeur eſt autant multiplice d'vne grandeur, que la retranchee de la retranchee : auſſi le reſte ſera autant multiplice du reſte, que la toute de la toute.

Soit la toute AB, autant multiplice de la toute CD, comme la retranchee AE, de la retranchee CF. Ie dis que le reſte EB ſera autant multiplice du reſte FD, que la toute AB l'eſt de la toute CD.

Car AG eſtant faicte autant multiplice de FD

comme AE l'eſt de CF, ou comme la toute AB l'eſt de la toute CD: d'autant que AE, AG



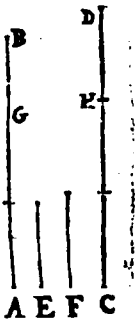
ſont equemultiplices de CF, FD : par la 1. pr. de ce liure, la toute GE, ſera autant multiplice de la toute CD, comme AE de CF : Mais auſſi AB, eſt autant multiplice de CD comme AE de CF : donc GE, AB, ſont equemultiplices de CD, & partant egales entr'elles par la 6. com. ſent. Parquoy en oſtant ce qui eſt commun, ſçauoir AE, demeureront egales GA, EB; & partant ſeront equemultiplices de FD, puis que GA a eſté poſée multiplice d'icelle FD, & autant comme AB l'eſt de CD : donc auſſi le reſte EB ſera autant multiplice du reſte FD, que la toute AB l'eſt de la toute CD. Parquoy ſi vne grandeur eſt autant multiplice d'vne grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont equemultiplices de deux autres grandeurs, & d'icelles on retranche des equemultiplices: ou les reſtes ſeront egaux aux meſmes, ou equemultiplices d'icelles.

Soient les grandeurs AB, CD, equemultiplices des grandeurs E, F, & les retranchees AG, CH auſſi equemultiplices des meſmes grandeurs E, F. Ie dis que les reſtes GB, HD, ſeront ou egaux aux meſmes E, F, ou equemultiplices d'icelles.

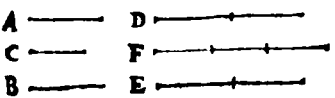
Car d'autant que AB & CD, ſont equemultiplices de E & F; en AB il y aura autant de grandeurs egales à E, comme en CD de grandeurs egales à F. Pareillement d'autant que la retranchee AG eſt autant multiplice de E, que la retranchee CH l'eſt de F; AG contiendra autant de grandeurs egales à E, que CH de grandeurs egales à F, par la 1. & 2. def. de ce liure. Si donc d'egales multitudes de grandeurs AB & CD, on oſte egales multitudes de grandeurs AG & CH, les multitudes reſtantes GB & HD ſeront egales: c'eſt à dire que GB contiendra autant de fois E, comme HD contiendra F; ou bien ſi GB eſt egale à E, auſſi HD ſera egale à F: & par ainſi iceux reſtes GB, HD ſeront egales à E & F, chacune à la ſienne, ou bien ſeront equemultiplices d'icelles. Parquoy ſi deux grandeurs ſont equemultiplices de deux autres grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 7. PROP. VII.

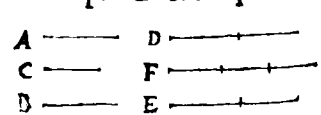
Les grandeurs egales, ont meſme raiſon à vne meſme grendeur; & ceſte cy aura meſme raiſon aux grandeurs egales.

Soient deux grandeurs egales A & B, & vne autre quelle qu'elle ſoit C. Ie dis



que A & B ont meſme raiſon l'vne que l'autre à C, & que C aura meſme raiſon à A qu'à B.

[Qu'il ne ſoit ainſi ; ſoient pris D & E equemultiplices de A premiere, & B tierce, ſoit auſſi pris F quelconque multiplice de C, ſeconde & quarte: donc puis que D eſt autant multiplice de A, que E eſt multiplice de B ; & que A & B ſont poſees egales : auſſi D & E ſeront egales par la 6. com. ſent. Si donc D eſt plus grande, egale, ou plus petite que F, auſſi E ſera plus grande, egale, ou plus petite que la meſme F, & par la ſuſdite 6. def. de ce liu. il y aura telle raiſon de A à C, comme de B à la meſme C.



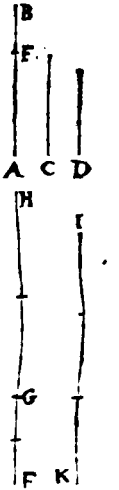
Quant à l'autre partie, elle ſe prouue tout de meſme par la ſuſdite def. en prenant les meſmes equemultiplices, & monſtrant l'excez, &c, ou bien plus facilement par la raiſon inuerſe. Car puis qu'il a eſté demonſtré que A eſt à C comme B à C, en changeant C ſera à A, comme C à B par le Cor. de la 4. p. de ce liure. Donc les grandeurs egales ont meſme raiſon à vne meſme, &c Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Des grandeurs inegales, la plus grande a plus grande raiſon à vne meſme grandeur, que la plus petite : & vne meſme grandeur a plus grande raiſon

à la plus petite grandeur, qu'à la plus grande.

Soient deux grandeurs inegales AB & C, desquelles AB est la plus grande, & vne troisiesme quelle qu'elle soit D. Ie dis que AB a plus grande raison à la troisiesme D, que non pas C: item, que D a plus grande raison à C, qu'à AB.



Qu'il ne soit ainsi: soit entendue AB premiere grandeur, D seconde, C tierce, & D quarte. D'autant que AB est plus grande que C, soit retranchee AE egale à icelle C, & soient pris des equemultiplices, à sçauoir FG de BE, & GH de EA, en sorte que FG & GH soient plus grandes chacune que D: & puis que les deux FG, GH, sont equemultiplices des deux BE, EA, par la 1. prop. de ce liure, la toute HF sera autant multiple de la toute AB, comme HG de AE, ou de C son egale: Maintenant soit prise I K aussi multiplice de D, en sorte qu'elle soit plus petite que HF, mais plus grande que HG: (ce qui est facile, puis que D est plus petite que ny FG, ny GH: si bien qu'il faut seulement adiouster tant de fois la grandeur D, iusques à ce que l'on ait ce que l'on cherche.) D'autant que FH, GH sont equemultiplices de AB premiere, & C troisiesme, si IK est prise pour l'equemultiplice, tant de D seconde, que D quatriesme, il est euident que HF multiplice de AB premiere, estant plus grande que IK multiplice de D seconde HG, multiplice de C tierce, n'est pas plus grande

que IK multiplice de D quarte : & partant par la huictieſme def. de ce liure, il y aura plus grande raiſon de AB à D, que de C à la meſme D.

Quant à la ſeconde partie : d'autant que IK multiplice de la premiere D, (car il faut maintenant poſer D premiere & troiſieſme, C ſeconde, & AB quatrieſme) eſt plus grande que HG multiplice de la ſeconde C ; & IK multiplice de la troiſieſme D, eſt moindre que FH multiplice de AB quatrieſme : Il y aura plus grande raiſon de D à C, que D à AB, par la 8. def. de ce liure. Parquoy des grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 9. PROR. IX.

Les grandeurs qui ont meſme raiſon à vne meſme grandeur, ſont egales entr'elles : & celles-là auſſi ſont egales, auſquelles vne meſme grandeur a meſme raiſon.

Soient premierement deux grandeurs A & B, leſquelles ayent meſme raiſon l'vne que l'autre à la troiſieſme C. Ie dis qu'elles ſont egales entr'elles.



Car ſi elles n'eſtoient egales, il faudroit que l'vne ou l'autre fuſt plus grande ; & par la precedente prop. icelle plus grande auroit plus grande raiſon a C, que la plus petite : ce qui eſt contre l'hypotheſe : donc A & B ne ſont pas inegales, mais egales.

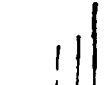
Soient maintenant A & B, à chacune deſquelles C

ait vne meſme raiſon. Ie dis qu'icelles A & B ſont auſſi egales entr'elles: car autrement il faudroit que l'vne fuſt plus petite que l'autre: & par la meſme 8. prop. à icelle plus petite, C auroit plus grande raiſon qu'à la plus grande: ce qui eſt contre l'hypotheſe: A & B ne ſont donc pas inegales, mais egales. Donc les grandeurs qui ont meſme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, celle qui a plus grande raiſon eſt la plus grande: & celle là à laquelle vne meſme grandeur a plus grande raiſon, eſt la plus petite.

Soient trois grandeurs A, B, C: & en premier lieu la raiſon de A à C ſoit plus grande que de B à la meſme C. Ie dis que A ſera plus grande que B.



Autrement, ſi A n'eſtoit plus grande que B, elle ſeroit egale, ou plus petite, ce qui eſt impoſſible: car ſi elles eſtoient egales, elles auroient meſme raiſon l'vne que l'autre à C, par la 7. prop. de ce liure, ce qui ſeroit contre l'hypotheſe: ſi auſſi elle eſtoit plus petite, elle auroit plus petite raiſon à C que non pas B, par la 8. prop. de ce meſme liure, ce qui eſt pareillement contre l'hypotheſe. Donc A ne ſera pas moindre ny egale à B: & par conſequent ſera plus grande.

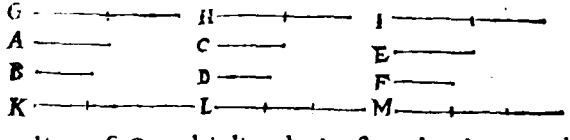
Maintenant que C aye plus grande raiſon à B, que non pas à A : Ie dis que B ſera plus petite que A. Autrement ſi B n'eſtoit moindre que A, elle ſeroit egale, ou plus grande, ce qui eſt impoſſible : car ſi A & B eſtoient egales, C auroit meſme raiſon à l'vne qu'à l'autre par la ſuſdite 7. prop. de ce liure : ce qui eſt contre noſtre hypotheſe : ſi auſſi elle eſtoit plus grande, C auroit plus grande raiſon à A qu'à B par la ſuſdite 8. prop. ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Donc B ſera moindre que A. Parquoy des grandeurs qui ont raiſon à vne meſme grandeur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Les raiſons qui ſont de meſme à vne autre, ſont auſſi de meſme entr'elles.

Soit A à B, comme C à D, & comme C à D, ainſi E à F : Ie dis que comme A eſt à B, ainſi E ſera à F.

Qu'il ne ſoit ainſi : de toutes les antecedantes A, C, E, ſoient priſes quelconques equemultiplices, G, H, I. Pareillement, des conſequentes B, D, F, quelconques equemultiplices, K, L, M. D'autant que A eſt à B comme C à D, par la conuerſe de la 6. def. de



ce liure, ſi G multiplice de A, eſt egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B : auſſi H multiplice de C, ſera egale, plus grande, ou plus petite que L,

que L, multiplice de D. Item, puis que comme C eſt à D, ainſi E eſt à F, ſi H multiplice de C eſt egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D, auſſi I multiplice de E, ſera egale, plus grande, ou plus petite que M multiplice de F: Parquoy ſi G multiplice de A premiere, eſt plus grande, egale, ou plus petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi I multiplice de E tierce, ſera plus grande, egale, ou plus petite que M multiplice de F quarte; & par la ſuſdite 6. def. comme A ſera à B, ainſi E ſera à F. Parquoy les raiſons qui ſont de meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre en ſuitte de ce, que les raiſons qui ſont de meſme à d'autres, ſont auſſi de meſme entr'elles: Comme ſi A eſt à B, ainſi que C à D, & que E ſoit à F, comme A à B; & G à H, comme C à D; Auſſi comme E ſera à F, ainſi G ſera à H. Car d'autant que les raiſons de E à F, & de C à D ſont de meſme à la raiſon de A à B, par la 11. p. 5. comme E ſera à F, ainſi C à D. Derechef, pour ce que les raiſons de E à F, & de G à H ſont de meſme à la raiſon de C à D: auſſi par la meſme 11. prop. 5. comme E ſera à F, ainſi G ſera à H.

A	B	C	D
3.	2.	6.	4.
E	F	G	H
9.	6.	12.	8.

Derechef, ſi les raiſons de A à B, de C à D, & de E à F ſont de meſme entr'elles; & que comme A eſt à B, ainſi G ſoit à H; & comme C à D, ainſi I à K, & comme E eſt à F, ainſi L ſoit à M: auſſi les raiſons de G à H, de I à K, & de L à M ſont de meſme entr'elles: Car ſuiuant ce que nous auons demonſtré cy-deſſus de quatre rai-

A	B	C	D	E	F
3.	2.	6.	4.	9.	6.
G	H	I	K	L	M
12.	8.	18.	12.	30.	20

ſons, comme G eſt à H, ainſi I eſt à K, pour ce que ces raiſons ſont ſemblables aux raiſons de A à B, & de C à D. Et en la meſme maniere, cõme I ſera à K, ainſi L ſera à M, d'autant qu'icelles raiſons ſont de meſme aux raiſons de C à D, & de E à F, leſquelles ſont ſemblables. Item, comme G ſera à H, ainſi L à M ; puis que ces raiſons ſont de meſme que les raiſons de A à B, & de E à F, qui ſont poſees egales : Le meſme ſeroit encores demonſtré s'il y auoit dauantage de raiſons.

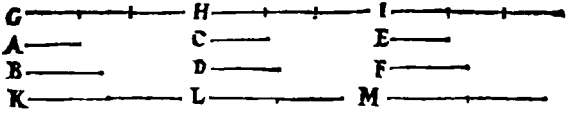
THEOR. 12. PROP. XII.

Si tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles : comme l'vne des antecedantes ſera à ſa conſequente, ainſi toutes les antecedantes ſeront à toutes les conſequentes.

Soient ſix grandeurs proportionnelles A, B, C, D, E, F, ſçauoir que A ſoit à B, comme C eſt à D, & E à F : Ie dis que comme l'vne des antecedantes eſt à ſa conſequente ; ſçauoir eſt A à B, ainſi toutes les antecedantes enſemble A, C, E, ſeront à toutes les conſequentes enſemble B, D, F.

Car eſtans priſes des antecedantes A, C, E, les equemultiplices G, H, I : item des conſequentes B, D, F, les equemultiplices K, L, M ; toutes les trois multiplices G, H, I enſemble, ſeront autant multiplice des trois grandeurs A, C, E enſemble, comme la ſeule G eſt multiplice de la ſeule A, par la premiere prop. de ce liure. Auſſi par la meſme raiſon toutes les trois multiplices K, L, M enſemble, ſeront

autant multiplice des trois grandeurs B, D, F enſemble, comme K ſera multiplice de B. Partant puis que A, B, C, D, E, F ſont proportionnelles, ſi G multiplice de A premiere, eſt plus grande, egale, ou plus

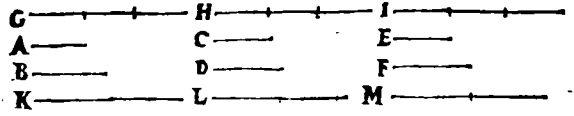


petite que K multiplice de B ſeconde, auſſi H multiplice de C troiſieſme, ſera plus grande, egale, ou plus petite que L, multiplice de D quatrieſme, par la conuerſe de la 6. def. de ce liure, & ainſi des deux autres: Partant ſi G eſt plus grande, egale, ou plus petite que K, le compoſé des trois G, H, I, ſera auſſi plus grand, egal, ou plus petit que le compoſé des trois K, L, M. Donc par la meſme 6. def. comme A ſera à B, ainſi les trois A, C, E enſemble, ſeront aux trois B, D, F enſemble. Parquoy ſi tant de grandeurs qu'on voudra ſont proportionnelles, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raiſon à la quarte, que la cinquieſme à la ſixieſme: auſſi la premiere aura plus grande raiſon à la ſeconde, que la cinquieſme à la ſixieſme.

Soit A premiere à B seconde, comme C tierce à D quarte, & qu'il y ait plus grande raison de C tierce à D quarte, que de E cinquiesme à F sixiesme.



Ie dis qu'il y aura aussi plus grande raison de A premiere à B seconde, que de E cinquiesme à F sixiesme.

Car estans prises des antecedantes A, C, E, les equemultiplices G, H, I, & des consequentes B, D, F, les equemultiplices K, L, M: D'autant que A est à B, comme C à D, si G multiplice de A est egale, plus grande, ou plus petite que K multiplice de B, aussi par la conuerse de la 6. def. de ce liure, H multiplice de C, sera egale, plus grande, ou plus petite que L multiplice de D. Pareillement, d'autant qu'il y a plus grande raison de C premiere à D seconde, que de E tierce à F quatriesme, si H multiplice de C, est plus grande que L multiplice de D, il n'est pas necessaire que I multiplice de E excede M multiplice de F, par la 8. def. de ce liure conuertie: donc aussi, si G excede K, necessairement I n'excede pas M: & partant par ladite 8. def. il y a plus grande raison de A à B, que de E à F. Si donc la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que si la tierce C a moindre raison à la quarte D, que la cinquiesme E à la sixiesme F: aussi la premiere A aura moindre raison à la seconde B, que la cinquiesme E à la

sixiesme F. Car si la raison de C à D est moindre que celle de E à F, c'est à dire, que la raison de E premiere à F seconde estant plus grande que celle de C tierce à D quarte, si I excede M, il n'est pas necessaire que H excede L, car quelquesfois elle defaut, ou est egale à icelle par la 8. def. de ce liure conuertie. Mais si H defaut, ou est egale à L, aussi G defaudra, ou sera egale à K par la 6. def. conuertie, parce qu'on a posé C 1. estre à D 2. comme A 3. à B 4. Parquoy si I excede M, necessairement G n'excedera pas K: & partant par la susdicte 8. def, il y aura plus grande raison de E à F, que de A à B, c'est à dire que la raison de A à B sera moindre que de E à F: ce qui estoit proposé.

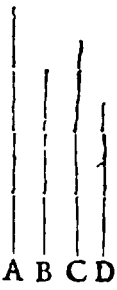
En la mesme maniere sera demonstré, que s'il y a plus grande raison de la premiere à la seconde, que de la tierce à la quarte: mais la tierce a plus grande raison à la quarte, que la cinquiéme à la sixiéme; pareillement la premiere aura beaucoup plus grande raison à la seconde, que la cinquiéme a la sixiéme.

Que si la premiere a moindre raison à la seconde, que la tierce à la quarte, & la tierce à moindre raison à la quatriéme que la cinquiéme à la sixiéme: aussi la premiere aura beaucoup moindre raison à la seconde, que la cinquiesme à la sixiesme.

THEOR. 14. PROP. XIV.

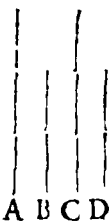
Si la premiere est à la seconde, comme la tierce à la quarte, & que la premiere soit plus grande que la tierce: aussi la seconde sera plus grande que la quarte: & si egale, egale: si plus petite, plus petite.

Soit A à B, comme C eſt à D, & que A premiere ſoit plus grande, egale, ou plus petite que C troiſieſme; Ie dis que B ſeconde ſera auſſi plus grande, egale, ou plus petite que D quatrieſme.

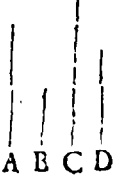


Soit premierement A plus grande que C: il y aura donc plus grande raiſon de A à B, que de C à la meſme B, par la 8. p. de ce liure, & par conſequent plus grande raiſon de C à D, que de C à B, eſtant icelle la meſme raiſon que de A à B, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera plus grande que D.

Soit puis apres A egale à C, & par la 7. prop. de ce meſme liure A ſera à B, comme C à B: & puis que les raiſons de C à D, & C à B, ſont les meſmes que de A à B, les raiſons de C à D & de C à B, ſeront de meſme entr'elles par la 11. pr. de ce liure, & partant par la 9. p. B & D ſeront egales.



Finalement ſoit A moindre que C, & par la ſuſdite 8. prop. il y aura plus grande raiſon de C à D, que de A à D; & par conſequent plus grande raiſon de A à B, que de A à D, puis qu'il y a meſme raiſon de A à B, que de C à D, & par la 10. prop. de ce meſme liure B ſera moindre que D. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la tierce à la quarte, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

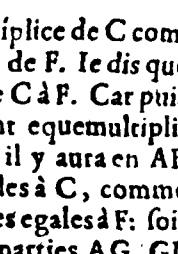
Que ſi la ſeconde eſt plus grande, ou egale, ou moindre que la quarte: auſſi la premiere ſera plus grande, ou egale, ou moindre que la tierce. Car puis que A eſt à B comme C à D, en changeant B ſera à A comme D à C par le Cor. de la 4. p. de ce liure. Donc ſi B eſt plus grande, ou egale, ou moindre que D, auſſi A ſera plus grande, ou egale, ou moindre que C par la ſuſdite 14. prop.

Or Euclide n'a pas demonſtré que ſi la premiere eſt plus grande, egale, ou plus petite que la ſeconde: auſſi la tierce ſera plus grande, egale, ou moindre que la quarte, pource que cela eſt euident à cauſe de la ſimilitude des raiſons. Ce que nous pourrions neantmoins demonſtrer apres Commandin: mais d'autant que ſa demonſtration ne compete qu'aux grandeurs de meſme genre, nous nous tiendrons à ce que la nature des proportions nous monſtre, encore que les grandeurs ſoient de diuers genres.

THEOR. 15. PROP. XV.

Les grandeurs ſont entr'elles, comme ſont leurs equemultiplices entr'elles eſtans priſes comme elles s'entrereſpondent.

Soit AB autãt multiplice de C comme DE eſt multiplice de F. Ie dis que AB ſera à DE, comme C à F. Car puis que AB & DE ſont equemultiplices d'icelles C & F, il y aura en AB autant de parties egales à C, comme DE contient de parties egales à F: ſoit donc diuiſee AB és parties AG, GB egales à C, & DE és parties DH, HE

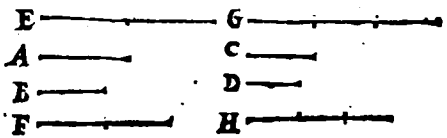


egales à F; & par la 7. prop. de ce liure vne chacune partie de AB, ſera à vne chacune partie de DE, comme C eſt à F; & par la 12. prop. toutes les antecedantes AB, ſeront à toutes les conſequentes DE, comme AG l'vne des antecedantes, eſt à DH ſa conſequente, c'eſt à dire comme C à F, puis que c'eſt la meſme raiſon. Parquoy les grandeurs ſont entr'elles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, elles le ſeront auſſi eſtans permutees.

Soit A à B, comme C à D. Ie dis qu'en permutant, A ſera à C, comme B eſt à D.



Car ſi on prend E & F equemultiplices de A & B; item G & H equemultiplices de C & D; E ſera à F, comme A à B par la prop. precedente, & G à H comme C à D; & par conſequent E eſtant à F, & C à D, en meſme raiſon que A à B, elles ſont de meſme entr'elles par la 11. p. de ce liure. Derechef, puis que les raiſons de E à F, & de G à H ſont les meſmes que de C à D, elles ſeront auſſi de meſme entr'elles par la ſuſdite 11. prop. c'eſt à dire, que comme E premiere eſt à F ſeconde, ainſi ſera G tierce à H quarte: parquoy par la 14. prop. de ce meſme liure

ſi E premiere eſt plus grande, egale, ou moindre que G tierce, auſſi F ſeconde ſera plus grande, egale, ou moindre que H quatrieſme, en quelconque multiplication que ſoient priſes les equemultiplices; & par la 6. def. d'iceluy cinquieſme liure A ſera à C, comme B à D: (puiſque E & F ſont equemultiplices de A premiere, & B troiſieſme; & G & H equemultiplices de C ſeconde & D quatrieſme, & celles-là defaillent, ſont egales, ou excedent celles-cy, &c.) Parquoy ſi quatre grandeurs ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or la demonſtration de ceſte propoſition a ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont de meſme genre. Car ſi les deux A & B eſtoient d'vn genre, & les deux C & D d'vn autre: auſſi les equemultiplices E & F ſeroient d'vn genre, c'eſt à ſçauoir duquel ſont A & B, & les equemultiplices G & H d'vn autre genre, c'eſt à ſçauoir de celuy duquel ſont C & D: Parquoy on ne pourroit pas dire E eſtre plus grande, egale, ou moindre que G: & partant rien ne ſe concluroit par la 6. def. de ce liure. La raiſon permutée a donc ſeulement lieu quand les quatre grandeurs ſont d'vn meſme genre.

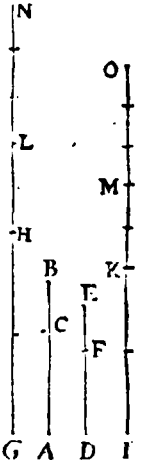
THEOR. 17. PROP. XVII.

Si les grandeurs compoſees ſont proportionnelles; icelles eſtans diuiſees, ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs compoſees AB, CB, & DE, FE, proportionnelles, c'eſt à dire, que AB ſoit à CB, comme DE à FE. Ie dis que les meſmes gran-

deurs eſtans diuiſees ſont auſſi proportionelles; c'eſt à dire que comme AC eſt à CB, ainſi DF eſt à FE.

Car d'icelles AC, CB, DF, FE ſoient priſes les equemultiplices GH, HL, IK, KM, chacune à chacune, & par la 1. prop. de ce liure GL ſera autant multiplice de AB, que GH de AC, c'eſt à dire comme IK de DF. Mais icelle IK eſt autant multiplice de DF, que IM de DE par la meſme 1. prop. donc GL, IM ſont equemultiplices de AB, DE. Derechef ſoient priſes LN, MO equemultiplices de CB, FE. Pour autant que HL premiere eſt autant multiplice de CB ſeconde, que KM tierce de la quarte FE, & LN cinquieſme autant multiplice de CB ſeconde, que MO ſixieſme de la quarte FE, par la 2. p. de ce liure, HN ſera autant multiplice de CB ſeconde, que KO de FE quatriéme. Et puis que AB eſt à CB, comme DE à FE: & ont eſté priſes GL, IM equemultiplices de AB, DE, mais HN, KO de CB, FE: par la 6. def. conuertie ſi GL multiplice de AB premiere excede, eſt egale, ou moindre que HN multiplice de CB ſeconde, auſſi IM, multiplice de DE tierce, excedera, ſera egale, ou moindre, que KO multiplice de FE quarte: oſtant donc les choſes communes HL, KM; ſi GH excede LN, auſſi IK excedera MO; & ſi egale, egale; & ſi moindre, moindre. Et d'autant que GH, IK ſont equimultiplices de AC premiere & DF tierce. Item LN, MO equemultipli-



ces de CB seconde & FE quarte, & il a esté demonstré (en quelconque multiplication qu'ayent esté prises icelles equemultiplices) que les equemultiplices de la premiere & troisiesme excedent, sont egales, ou moindres, que les equemultiplices de la seconde & quatriesme, par la susdite 6. def. de ce cinquiesme liure AC sera à CB, comme DF à FE: ce qui estoit proposé. Si donc les grandeurs composees sont proportionnelles. &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy ce moyen-là d'argumenter, lequel en la 15. def. nous auons dict conuerse de la raison diuisee: c'est à dire que si AB est à CB, comme DE à FE, aussi CB sera à AC, comme FE à DF. Car d'autant que comme AB à CB, ainsi DE à FE, en diuisant par la 17. p. 5. comme AC sera à CB, ainsi DE à FE: & en changeant, comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF: ce qui estoit proposé.

Par mesme maniere, sera demonstré ce moyen-là d'argumenter, lequel en la mesme 15. def. nous auons appellé contraire diuision de raison: c'est à dire que si AC est à AB, comme DF à DE: aussi AC sera à CB, ainsi que DF à FE. Car puis que AC est à AB, comme DF à DE: en changeant, comme AB sera à AC, ainsi DE à DF: donc en diuisant par la 17. p. 5. comme CB à AC: ainsi FE à DF: & en changeant derechef, comme AC à CB, ainsi DF à FE: ce qui estoit à demonstrer.

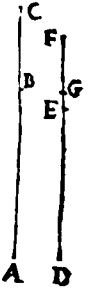
THEOR. 18. PROP. XVIII.

Si les grandeurs diuisees sont propor-

tionnelles ; icelles eſtans compoſees ſeront auſſi proportionnelles.

Soient les grandeurs diuiſees AB, BC, & DE, EF proportionnelles. Ie dis qu'en compoſant, AC eſt à CB, comme DF à EF.

Car ſi comme AC eſt à BC, ainſi DF n'eſt pas à EF ; DF aura à quelque grandeur moindre ou plus grande que EF, meſme raiſon que AC à BC. Soit donc premierement DF à GF, moindre que EF, en meſme raiſon que AC à BC, s'il eſt poſſible : & en diuiſant par la precedente propoſition, DG ſera à GF comme AB à BC. Mais comme AB à BC, ainſi DE eſt à EF : donc auſſi comme DG ſera à GF, ainſi DE ſera à EF par la 11. prop. de ce liure. Mais DG premiere eſt plus grande que DE troiſieſme : donc par la 14. propoſition de ce meſme liure GF ſeconde, ſera auſſi plus grande que EF quatrieſme, la partie que le tout : ce qui eſt abſurde. Il n'y aura donc pas de DF à GF, moindre que EF, meſme raiſon que de AC à BC.



Par meſme diſcours on demonſtrera que DF n'aura pas à vne grandeur plus grande que EF, meſme raiſon que AC à BC. Donc comme AC eſt à BC, ainſi DF eſt à EF, puiſque DF ne peut eſtre à vne grandeur moindre, ou plus grande que EF, en meſme raiſon que AC à BC. Parquoy ſi les grandeurs diuiſées ſont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons icy ces deux moyens-là d'argumenter és proportions, leſquels nous auons deſcrits en la 14. def. de ce liure. Quant au premier, que nous auons nommé conuerſe compoſition de raiſon: ſoit comme AB à BC ainſi DE à EF. Ie dis, que comme AC eſt à AB, ainſi DF à DE. Car puis que comme AB eſt à BC, ainſi DE à EF, en changeant comme BC ſera à AB, ainſi EF à DE: donc en compoſant par la 18. p. cy deſſus, comme AC ſera à AB, ainſi DF à DE: Ce qu'il falloit prouuer.

Quant à l'autre moyen que nous auons appellé contraire compoſition de raiſon: ſoit derechef comme AB à BC, ainſi DE à EF: Ie dis que par le contraire de compoſition de raiſon, comme AB à AC, ainſi DE à DF. Car puis que comme AB eſt à BC, ainſi DE à EF, en changeant comme BC ſera à AB, ainſi EF à DE: donc auſſi en compoſant par la meſme prop. comme AC ſera à AB, ainſi DF à DE: & partant en changeant derechef, comme AB ſera à AC, ainſi DE ſera à DF: Ce qui eſtoit propoſé à prouuer.

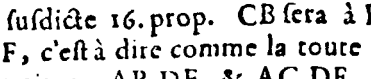
THEOR. 19. PROP. XIX.

Si le tout eſt au tout, comme le tetranché au retranché; le reſte ſera auſſi au reſte, comme le tout eſt au tout.

Soit la toute AB à la toute DE, comme le retranché AC, au retranché DF. Ie dis que le reſte CB eſt auſſi au reſte FE, comme la toute AB à la toute DE.

Car puis que AB eſt à DE, comme AC à DF, auſſi en permutant par la 16. prop. de ce liure AB ſera

à AC, comme DE à DF ; & par la 17. prop. de ce mesme liure, en diuisant comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF : parquoy en permutant derechef par la susdicte 16. prop. CB sera à FE, comme AC à DF, c'est à dire comme la toute AB à la toute DE, puis que AB, DE, & AC, DF, ont esté posees en mesme raison. Parquoy si le tout est au tout comme le retranché au retranché, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

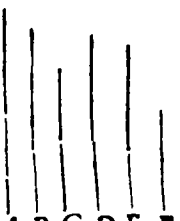
Nous demonstrerons icy ce moyen là d'argumenter és proportions, qui est pris par la conuersion de raison. Car soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis par conuersion de raison, AB estre aussi à AC, comme DE a DF. Car puis que comme AB est à CB, ainsi DE est à FE en diuisant par la 17. prop. de ce liure, comme AC à CB, ainsi DF à FE : donc aussi en changeant comme CB à AC, ainsi EF à DF : & partant en composant par la 18. prop. de ce cinquiesme liure, comme AB sera à AC, ainsi DE sera à DF : ce qui estoit proposé.

THEOR. 20. PROP. XX.

Si trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, estans prises de deux en deux, sont en mesme raison, & qu'en raison egale la premiere soit plus

grande que la troiſieſme; auſſi la quatrieſme ſera plus grande que la ſixieſme; & ſi egale, egale; ſi plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & comme A à B, ainſi D à E, & comme B à C, ainſi E à F: & que A premiere ſoit plus grande que C troiſieſme. Ie dis que D 4e ſera auſſi plus grande que F 6e.



Car puis que A eſt plus grande que C, il y aura plus grande raiſon de A à B que de C à B par la 8. prop. de ce cinquieſme liure. Mais comme A eſt à B ainſi D à E, & par la 13. p. 5. il y aura plus grande raiſon de D à E, que de C à B. Item comme C eſt à B, ainſi F à E: (car puis que B eſt à C, comme E à F, en changeant comme C ſera à B, ainſi F à E.) il y aura donc auſſi plus grande raiſon de D à E, que de F à E, & par la 10. pr. 5. D ſera plus grande que F.

Que ſi A eſt egale à C; ie dis auſſi que D ſera egale à F. Car puis que A eſt egale à C, par la 7. p. de ce liure, A ſera à B comme C à B. Mais comme A eſt à B, ainſi D à E: & par la 11. pr. 5. D ſera à E, comme C à B: & comme C eſt à B, ainſi F à E. Donc D ſera auſſi à E comme F à E. & partant D & F ſeront egales par la 9. p. de ce meſme liure.



En troiſieſme lieu, ſi A eſt moindre que C, ie dis auſſi que D eſt moindre que F. Car puiſque A eſt moindre que C, il y aura moindre raiſon de A à B, que de C à B par la 8. p. 5. Mais comme A eſt à B, ainſi D eſt à E : il y aura donc auſſi moindre raiſon de D à E, que de C à B, par la 13. prop. de ce cinquieſme liure. Mais en changeant comme deſſus, C eſt à B, comme F à E. Il y a donc pareillement moindre raiſon de D à E, que de F à E : & partant par la 10. p. 5. D ſera moindre que F. Parquoy ſi trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

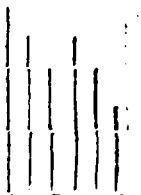


THEOR. 21. PROP. XXI.

Si trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, eſtant leur proportion ſans ordre, & qu'en raiſon egale la premiere ſoit plus grande que la troiſieſme ; auſſi la quatrieſme ſera plus grande que la ſixieſme ; & ſi egale, egale ; ſi plus petite, plus petite.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, leſquelles priſes de deux en deux ſoient en meſme raiſon, eſtant leur proportion troublée,

troublée, ſçauoir que comme A à B, ainſi E à F, & comme B à C, ainſi D à E. Ie dis que comme A ſera egale, plus grande, ou plus petite que C, auſſi D ſera egale, plus grande, ou plus petite que F.



Car ſi A eſt plus grande que C, il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à B par la 8. pr. de ce liure. Mais comme A à B, ainſi E à F; il y aura donc plus grande raiſon de E à F, que de C à B par la 13. prop. d'iceluy cinquieſme liure. Et d'autant que comme B eſt à C, ainſi D eſt à E, en changeant comme C ſera à B, ainſi E à D. Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de E à F, que de E à D: & partant par la 10. prop. 5. D ſera plus grande que F.

On peut prouuer comme en la precedente, ſi A eſt egale, ou plus petite que C; auſſi D eſtre egale, ou moindre que F. Parquoy ſi trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

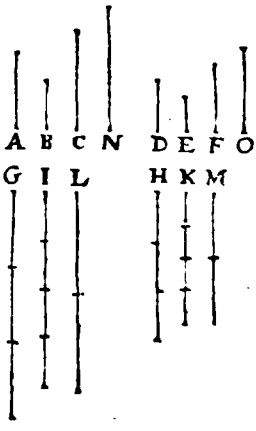
THEOR. 22. PROP. XXII.

S'il y-a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles eſtans priſes de deux en deux ſoient en meſme raiſon; icelles en raiſon egale ſeront proportionnelles.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn autre D, E, F, & ſoit A à B comme D à E, &

B à C comme E à F. Ie dis qu'en raiſon egale comme A eſt à C, ainſi D à F.

Car eſtans priſes G, H equemultiplices de A, D: Item I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M, equemultiplices de C, F: puiſque A eſt à B, comme D à E, auſſi G multiplice de A premiere ſera à I multiplice de B deuxieſme, comme H multiplice de D troiſieſme à K multiplice de E quatrieſme par la 4. p. de ce cinquieſme liure. Par meſme raiſon I ſera à L, comme K à M. Veu donc que les trois grandeurs, G, I, L, & les trois autres H, K, M, eſtans priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, par la 20. pr. 5. ſi G excede L, auſſi H excedera M; & ſi egale, egale; & ſi plus petite, plus petite: & partant puis que G, H, equemultiplices de A & D defaillent, ſont egales, ou excedent L, M, equemultiplices quelconques de C & F, par la 6. def. A ſera à C, comme D à F: ce qu'il falloit prouuer.



Maintenant ſoient plus de trois grandeurs, tellement que C ſoit auſſi à N, comme F à O. Ie dis que A eſt encore à N comme D à O. Car puiſque nous venons de demonſtrer que A eſt à C, comme D à F; & on a poſé C eſtre à N, comme F à O, il y aura trois grandeurs A, C, N, & trois autres D, F, O, leſquels ſont pris de deux en deux en meſme raiſon. Donc comme il a eſté demonſtré és trois grandeurs cy deſ-

comme E à F. Ie dis qu'en raison egale com-
eſt à C, ainſi D à F.
s eſtans priſes G, H equemultiplices de A, D
I, K, equemultiplices de B, E: Item L, M,
ultiplices de C, F: puiſque A eſt à B, comme
auſſi G multiplice de A premiere ſera à
lice de B deuxieſme,
H multiplice de D
me à K multiplice
atrieſme par la 4. p.
nquieſme liure. Par
raiſon I ſera à L,
K à M. Veu donc
trois grandeurs,
& les trois autres
, eſtans priſes de
deux ſont en meſ-
n, par la 20. pr. 5.
de L, auſſi H exce-
& li egale, egale;
petite, plus petite:
puis que G, H, equemultiplices de A
ent, ſont egales, ou excedent L, M, equ
es quelconques de C & F, par la 6. def.
comme D à F: ce qu'il falloit prouuer.
nant ſoient plus de trois grandeurs, tell
C ſoit auſſi à N, comme F à O. Ie dis que
ere à N comme D à O. Car puiſque
demonſtrer que A eſt à C, comme D
C eſtre à N, comme F à O, il y aura trois
A, C, N, & trois autres D, F, O, ſeſquel
deux en deux en meſme raiſon. Dont
demonſtré és trois grandeurs q

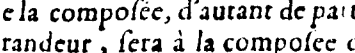
ſus, A ſera derechef à N, comme D à O. En la meſme maniere ſera demonſtré en tant de grandeurs qu'on voudra. Si donc il y-a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

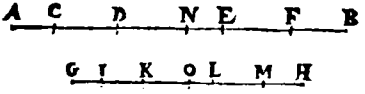
Le docte Steuin en la 29. def. de ſes Probl. Geomet. explique vne ſorte d'argumenter és proportions, qu'il appelle proportion transformée, qui peut eſtre reduicte en vn tel theoreme que le ſuiuant.

S'il y-a deux grandeurs, deſquelles chacune ſoit couppée en tant de parties qu'on voudra egales en multitude, & proportionnelles: la compoſée de tant de parties qu'on voudra de la premiere grandeur, ſera à la compoſée des parties reſtantes, en meſme raiſon que la compoſée, d'autant de parties de la derniere grandeur, ſera à la compoſee des parties reſtantes d'icelle. Et ſi quelconque partie de l'vne eſt couppée en deux autres parties, & la partie de l'autre correſpondante à ceſte partie-là, eſt auſſi couppée en deux autres parties proportionnelles â ces deux-là: les totales grandeurs ſeront auſſi couppées proportionnellement.

Soit vne grandeur AB couppée en tant de parties qu'on voudra AC, CD, DE, EF, FB; & vne autre grandeur GH, couppée en autant de parties que AB, ſçauoir és cinq GI, IK, KL, LM, MH, proportionnelles à celles là de AB. Ie dis que AD compoſée des deux parties AC, CD, eſt à DB compoſée des trois parties reſtantes, comme GK compoſée des deux parties GI, IK, eſt à KH com-



posée des trois autres parties restantes. Car puis que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, en composant par la 18. p. de ce liure AD sera à CD, comme GK à IK. Mais comme CD à DE, ainsi IK à KL: donc par la 22. prop. de ce mesme liure, en raison egale, comme AD sera à DE, ainsi GK sera à KL. Derechef, pource qu'en changeant, BF est à FE, comme HM à ML, aussi en composant BE sera à FE, comme HL à ML. Mais FE est à ED, comme ML à LK: donc en raison egale, BE sera à ED comme HL à LK; & en composant, BD sera à ED, comme HK à IK; & en changeant, DE à DB, comme KL à KH. Parquoy puis qu'il a esté demonstré que AD est à DE, comme GK à KL, & DE est à DB, comme KL à KH, par la susdicte 22. prop. 5. en raison egale comme AD sera à DB, ainsi GK sera à KH.



Nous demonstrerons en la mesme maniere, que comme AC est à CB, ainsi GI est à IH. Car derechef en changeant, composant, & par egalité de raison, comme BC sera à DC, ainsi HI à KI: & en changeant, comme CD sera à CB, ainsi IK sera à IH. Veu donc que comme AC est à CD, ainsi GI est à IK, & comme CD à CB, ainsi IK à IH: en raison egale, comme AC sera à CB, ainsi GI sera à IH.

Par mesme raison, comme AF sera à FB, ainsi GM sera à MH: Car derechef en composant, & par egalité de raison, comme AF sera à EF, ainsi GM sera à LM, par les susdictes 18, & 21. prop. de ce liure. Mais aussi comme EF est à FB, ainsi LM à MH: Donc en raison egale, comme AE est à EB, ainsi GM est à MH, &

ainſi des autres: appert donc ce qui eſtoit premierement propoſé.

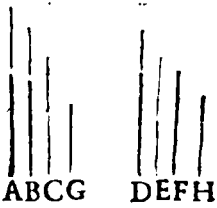
Maintenant ſoit couppée, (comme pour exemple) la troiſieſme partie DE en deux quelconques parties DN, NE; & auſſi la troiſieſme KL en deux parties KO, OL proportionnelles à celle-là. Ie dis que comme AN à NB, ainſi GO à OH. Car en changeant, comme EN ſera à ND, ainſi LO à OK: & en compoſant par la 18. prop. 5. comme ED ſera à DN, ainſi LK à KO. Parquoy puis que comme CD eſt à DE; ainſi IK à KL: & comme DE à DN, ainſi KL à KO: par la 22. prop. 5. en raiſon egale, comme CD ſera à DN, ainſi IK à KO: donc les parties AC, CD, DN, ſont proportionnelles aux parties GI, IK, KO. Derechef, pource qu'en changeant, comme FE eſt à ED, ainſi ML à LK: & en compoſant, comme DE à NE, ainſi KL à OL, en raiſon egale, comme FE ſera à EN, ainſi MI, à LO, & en changeant, comme NE à EF, ainſi OL à LM: & partant toutes les parties AC, CD, DN, NE, EF, FB, ſont proportionnelles à toutes les parties GI, IK, KO, OL, LM, MH. Donc comme il a eſté demonſtré en la premiere partie, AN ſera à NB comme GO à OH: appert donc ce qui eſtoit propoſé en ſecond lieu.

A ce Theoreme nous en ioindrons deux autres, le premier deſquels eſt tel.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, & autant d'autres, leſquelles priſes de deux en deux, ſoient en meſme raiſon: toutes les grandeurs d'vn ordre, ſeront à laquelle on voudra d'icelles en meſme raiſon, que toutes les grandeurs de l'autre ordre ſeront à la correſpondante.

Soient trois grandeurs d'vn coſté A, B, C, & trois d'vn

autre D, E, F, & ſoit A à B, comme D à E, & B à C, comme E à F : ie dis, que comme toutes les grandeurs A, B, C enſemble, ſeront a laquelle on voudra d'icelles, par exemple à la derniere C, ainſi toutes les grandeurs D, E, F enſemble, ſeront à la derniere F. Car puiſque comme A eſt à B, ainſi D à E, en compoſant A, B ſont à B, comme D, E, à E. Mais B eſt à C, comme E à F : donc en raiſon egale A, B, ſeront à C, comme D, E à F : & en compoſant A, B, C, ſeront à C, comme D, E, F à F. Ce qu'il falloit prouuer.



Que s'il y auoit dauantage de grandeurs, la demonſtration ne ſeroit diſſemblable à celle-cy deſſus : car il n'y auroit qu'à repeter la compoſition & egalité de raiſon autant de fois qu'il ſeroit de beſoin : Comme par exemple, ſoient encore G & H, tellement que C ſoit à G, comme F à H. D'autant que A, B eſt à C, comme D, E eſt à F, & C à G, comme F à H : en raiſon egale A, B, ſont à G, comme D, E à H : & en compoſant A, B, G, ſont à G, comme D, E, H à H. Mais puis que comme C eſt à G, ainſi F à H, en changeant, comme G ſera à C, ainſi H à F : donc en raiſon egale, comme A, B, G ſont à C, ainſi D, E, H à F ; & en compoſant comme toutes les grandeurs A, B, G, C enſemble, ſeront à la ſeule C, ainſi toutes les grandeurs D, E, H, F enſemble, ſeront à la ſeule F.

Mais ſi on vouloit prouuer, que comme toutes les quatre grandeurs A, B, C, G, ſont à la derniere G, ainſi les quatres autres D, E, F, H, ſont à la derniere H, il ſeroit bien plus bref : Car puis que nous auons demonſtré, que comme A, B, C, ſont a C, ainſi D, E, F à F, & que comme C eſt à G, ainſi F eſt à H ; en raiſon egale, comme A, B, C ſeront

à G, ainſi D,E, F à H: donc en compoſant, toutes les grandeurs A,B,C,G, ſeront à G, comme toutes les grandeurs D,E,F,H ſeront à H.

En la meſme ſorte on demonſtrera, que toutes leſdites grandeurs A,B,C,G ſeront à A, comme toutes les grandeurs D,E,F,H, ſeront à D, n'y ayant autre difference, ſinon qu'il faut prendre au contraire de ce que deſſus.

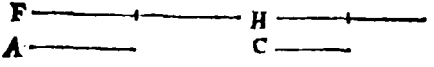
Et de ce eſt manifeſte, que comme laquelle on voudra des grandeurs du premier ordre, eſt à ſa correſpondante du ſecond ordre, ainſi toutes les grandeurs du premier ordre ſeront à toutes les grandeurs de l'autre ordre.

Le ſecond Theoreme eſt demonſtré par Clauius au ſcholie de cette 22. prop. & eſt tel,

Si la premiere eſt à la ſeconde en meſme raiſon qne la tierce à la quarte: les equemultiplices de la premiere & troiſieſme auront auſſi vne meſme raiſon à la ſeconde & quatrieſme. Item les equemultiplices de la ſeconde & quatrieſme, auront vne meſme raiſon à la premiere & troiſieſme. Et au contraire, la ſeconde & quatrieſme auront vne meſme raiſon aux equemultiplices de la premiere & troiſieſme. Item la premiere & troiſieſme auront vne meſme raiſon aux equemultiplices de la deuxieſme & quatrieſme.

Soit A à B, comme C à D, & ſoient F,H, equemultiplices de A,C: item G, I, equemultiplices de B,D. Ie dis que F eſt à B, comme H à D: item que G eſt à A, comme I à C. Et au contraire que B eſt à F, comme D à H: item A à G, comme C à I. Car puis que F eſt autant multiplice de A, que H l'eſt de C, comme F eſt à A, ainſi H à C, & par l'hypotheſe A eſt à B, comme C à D; donc en raiſon egale par la 22. pr. 5. comme F ſera à B, ainſi H ſera à D. Derechef, pource que G eſt à B, comme

I à D, & comme B à A, ainſi D à C : (car puis que A eſt à B comme C à D par l'hypotheſe, en changeant comme B à A, ainſi D à C) en raiſon egale, comme G ſera à A, ainſi I à C par la ſuſdicte 22. prop. 5.



Maintenant pource que B eſt à A, comme D à C par raiſon inuerſe : & comme A à F, ainſi C à H : en raiſon egale, comme B ſera à F, ainſi D à H. Derechef, puis que A eſt à B, comme C à D : & comme B eſt à G, ainſi D à I ; en raiſon egale, comme A ſera à G, ainſi C à I, par ladicte 22. pr. 5. Ce qui eſtoit propoſé.

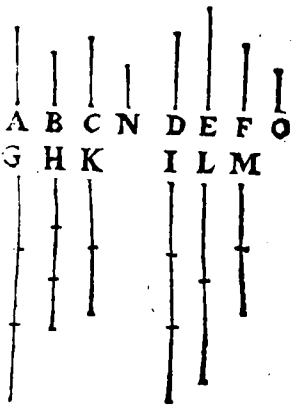
Par cecy eſt manifeſte vn moyen d'argumenter, dont les Geometres s'aident ſouuent, principalement Archimedes, Apolonius Pergeus, & autres : ſçauoir eſt comme A à B, ainſi C eſt à D : donc comme F double, ou triple, ou quadruple, &c. de A eſt à B, ainſi auſſi H double, ou triple, ou quadruple, &c. de C eſt à D : Item comme A eſt à B, ainſi C à D : donc cõme A eſt au double, triple, ou quadruple, &c. de B, ſçauoir à G ; ainſi auſſi C ſera au double, au triple, ou quadruple, &c. de D, ſçauoir à I.

THEOR. 23. PROP. XXIII.

Si trois grandeurs, & autant d'autres, priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublee : icelles en raiſon egale ſeront proportionnelles.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres

D, E, F, & soient prises de deux en deux en mesme raison, estant leur proportion troublee, sçauoir que comme A à B, ainsi E à F, & comme B à C, ainsi D à E. dis E. qu'en raison egale A sera à C, comme D à F.



Car estans prises G, H, I, equemultiplices de A, B, D: item K, L, M, quelconques autres equemultiplices de C, E, F. Par la 15. p. de ce liure comme A sera à B, ainsi G à H, puis que G, H, sont equemultiplices d'icelles A, B, Mais comme A est à B, ainsi est E à F: donc par la 11. p. 5. comme G est à H, ainsi E est à F. Mais comme E est à F, ainsi aussi L est à M, par la susdite 15. pr. 5. pource que L, M, sont equemultiplices d'icelles E, F: donc aussi comme G est à H, ainsi L est à M, par la 11. p. 5. & puis que comme B est à C, ainsi D à E, par la 4. pr. 5. comme H multiplice de la premiere B, sera à K multiplice de la seconde C, ainsi I multiplice de la troisiesme D, sera à L multiplice de la quatriesme E: donc les trois grandeurs G, H, K, & les trois autres I, L, M, estans prises de deux en deux sont en mesme raison, & la proportion d'icelles sans ordre, puis qu'il a esté demonstré, que comme G est à H, ainsi L est à M, & comme H est à K, ainsi I à L; & partant par la 21. p. 5. si G est plus grande, egale, ou moindre que K, aussi I sera plus grande, egale, ou moindre que M, & par la 6. def. 5. comme A sera à

C, ainſi ſera D à F. Parquoy ſi trois grandeurs, & autant d'autres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

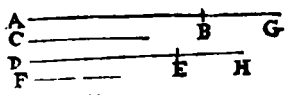
SCHOLIE.

Que s'il y auoit plus de trois grandeurs, & que leur proportion ſoit troublee, ſçauoir eſt que comme A eſt à B, ainſi F ſoit à O, & comme B eſt à C, ainſi E ſoit à F, & comme C à N, ainſi D à E. Ie dis que A ſera à N, comme D à O. D'autant qu'il a eſté demonſtré en trois grandeurs que comme A eſt à C, ainſi F eſt à O, & que par l'hypotheſe comme C eſt à N, ainſi D eſt à E, il y aura trois grandeurs d'vn coſté A, C, N, & trois d'vn autre D, E, O, leſquelles priſes de deux en deux ſont en meſme raiſon, & en proportion troublee. Donc derechef en raiſon egale demonſtree en trois grandeurs A ſera à N, comme D à O. Le meſme ſera auſſi demonſtré en cinq grandeurs par quatre, comme il a eſté demonſtré en quatre par trois, & ainſi ſemblablement de dauantage.

THEOR. 24. PROP. XXIV.

Si la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, & la cinquieſme à la ſeconde, comme la ſixieſme à la quatrieſme; la compoſée de la premiere & cinquieſme, ſera à la ſeconde, comme la compoſée de la troiſieſme & ſixieſme, ſera à la quatrieſme.

Soit la premiere AB à la ſeconde C, comme la troiſieſme DE eſt à la quatrieſme F; & la cinquieſme BG à la deuxieſme C, comme la ſixieſme EH à la quatrieſme F. Ie dis que la toute AG, ſera à C, comme la toute DH à F.



Car puiſque comme BG à C, ainſi EH à F, auſſi en changeant, comme C ſera à BG, ainſi F à EH. Veu donc que AB eſt à C, comme DE à F, & C à BG, comme F à EH, en raiſon egale, AB ſera à BG, comme DE à EH, par la 22. p. 5. & en compoſant, comme la toute AG ſera à BG, ainſi la toute DH ſera à EH, par la 18. pr. d'iceluy 5. liure: & derechef puis que AG eſt à BG, comme DH à EH, & BG à C, comme EH à F, en raiſon egale, AG ſera à C, comme DH à F. Si donc la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſieſme à la quatrieſme, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Preſque en la meſme maniere ſera demonſtré en tout genre de proportion, ce qui a eſté demonſtré à la 6. pr. de ce 5. liure, tant ſeulement aux grandeurs multiplices, ſçauoir eſt,

Si deux grandeurs ont meſme proportion à deux autres grandeurs, & que des retranchees ayent meſme proportion à icelles; les reſtantes auront auſſi meſme proportion à icelles.

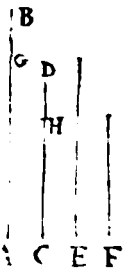
Que AG & DH ayent meſme proportion à C & F, c'eſt à dire que comme AG eſt à C, ainſi DH ſoit à F. Item les retranchez AB & DE ayent meſme proportion à icelles C & F, tellement que comme AB eſt

à C, ainsi DE soit aussi à F: Ie dis que les restantes BG, EH ont mesme proportion à icelles C, F, c'est a dire que comme BG est à C, ainsi EH est à F. Car d'autant que comme AB est à C, ainsi DE est à F, par raison inuerse, comme C à AB, ainsi F à DE: donc puis que AG est à C, comme DH à F, & C à AB, comme F à DE, en raison egale AG sera à AB, comme DH à DE: & en diuisant comme BG sera à AB, ainsi DH a DE. Et derechef, puis que BG est à AB comme EH à DE; & AB à C, comme DE à F, en raison egale BG sera à C, comme EH à F. Ce qui est proposé.

THEOR. 25. PROP. XXV.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, la plus grande & la plus petite, sont plus grandes que les deux autres.

Soient quatre grandeurs proportiõnelles AB, CD, E, F, desquelles AB soit la plus grande, & F la plus petite. Ie dis que AB & F ensẽble, sont plus grandes que les deux autres CD & E ensemble.



Car si de AB on retranche AG egale à F, & de CD on retrãche CH egale à E: AG sera à CH, comme E à F, c'est à dire comme AB à CD. Et puisque la toute AB est à la toute CD, comme la retranchée AG à la retranchée CH; par la 19. prop. de ce liure, comme la toute AB sera à la toute CD, ainsi le reste GB sera au reste HD: Parquoy icelluy

reſte GB ſera plus grand que le reſte HD, comme la toute AB eſt plus grande que la toute CD. Et pour autant que AG & E ſont egales, ſi on adiouſte à icelles, les grandeurs egales F & CH, c'eſt à ſçauoir, F à icelles AG, & CH à E; viendront AG & F enſemble, egales à E & CH enſemble. Et adiouſtant à ces choſes egales, les inegales GB, & HD, ſeront faictes AB & F enſemble plus grandes que GE & CD enſemble, puis que GB eſt plus grande que HD. Parquoy ſi quatre grandeurs ſont porportionnelles, &c. Ce qu'il failloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or il s'enſuit neceſſairement que ſi la grandeur antecedante d'vne raiſon, eſt la plus grande de toutes celles de la propotion, que la conſequente de l'autre raiſon, ſera la plus petite de toutes, comme on peut voir en l'exemple propoſé. Car d'autant que comme AB eſt à CD, ainſi E à F; & que AB premiere eſt plus grande que E tierce, par la 14. p. 5. CD ſeconde ſera auſſi grande que F quatrieſme.

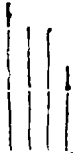
Semblablement, pource que AB eſt plus grande que CD, auſſi E ſera plus grande que F a cauſe de la ſimilitude des raiſons, comme nous auons dit au Scholie de la meſme 14. prop. Que ſi au contraire la grandeur antecedante d'vne raiſon eſt la plus petite de toutes, la conſequente de l'autre ſera la plus grande, comme il appert, ſi on dit que F eſt à E, comme CD à AB.

Commandin adiouſte en ce lieu, le theoreme ſuiuant.

Si trois grandeurs ſont proportionnelles, la plus grande & la plus petite d'icelles, ſeront plus grandes que le double de l'autre.

Soient trois grandeurs proportionnelles A, B, C, telle-

ment que comme A eſt à B, ainſi B à C, & ſoit A la plus grande, & D la plus petite: Ie dis que A & D enſemble, ſont plus grandes que le double de B. Car ayant pris D egale à B, comme A ſera à B, ainſi D ſera à C; & partant A & C enſemble, ſeront plus grandes que B & D enſemble par la 25. prop. 5. c'eſt adire que le double de B. Ce qui eſt propoſé.

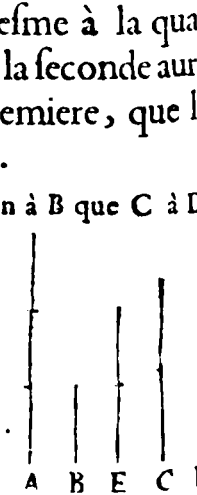


Euclide finit icy ſon 5. liure des Elemens; mais d'autant que Campanus, Commandin & Clauius y adiouſtent quelques autres propoſitions, dont les bons Autheurs s'aident fort ſouuent, & les citent, comme ſi elles eſtoient d'Euclide, nous les adiouſterons auſſi icy.

THEOR. 26. PROP. XXVI.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme: en changeant, la ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la quatrieſme à la tierce.

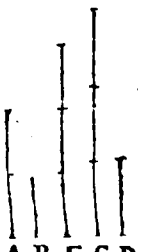
Que A ait plus grande raiſon à B que C à D: Ie dis que la raiſon de B à A eſt moindre que la raiſon de D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C eſt à D. Donc auſſi la raiſon de A à B ſera plus grande que celle de E à B; & par la 10. prop. 5. A ſera plus grande que E; & partant B aura moindre raiſon à A qu'à E par la 8. prop. 5. Mais



comme B eſt à E, ainſi eſt en changeãt D à C. Donc auſſi la raiſon de B à A eſt moindre que celle de D à C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons preſque en la meſme maniere que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; en changeant, la ſeconde aura plus grande raiſon à la premiere, que la quarte à la tierce.



Que A ait moindre raiſon à B, que C à D; Ie dis qu'en changeant B a plus grande raiſon à A, que D à C. Car ſoit entendu E eſtre à B, comme C à D: & la raiſon de A à B ſera pareillement moindre que celle de E à B: par ce que nous auons demonſtré au Scholie de la 13. prop. 5. Donc par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E: & par la 8. prop. 5. la raiſon de B à A ſera plus grande que de B à E. Mais comme B eſt à E, ainſi eſt en changeant D à C: Donc auſſi la raiſon de B à A ſera plus grande que de D à C.

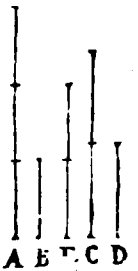
Autrement. *Dautant que la raiſon de A à B, eſt moindre que de C à D: la raiſon de C à D ſera plus grande que celle de A à B: donc en changeant par la 26. prop. 5. la raiſon de D à C, ſera moindre que de B à A: & partant il y aura plus grande raiſon de B à A que de D à C. Ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 27. PROP. XXVII.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde, que la tierce à la quarte; auſſi en permutant la premiere aura plus

grande raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

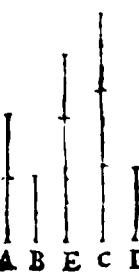
Que A ait plus grande raiſon à B que C à D. Ie dis qu'en permutant A aura plus grande raiſon à C, que B à D. Car ſoit entendu E eſtre à B comme C à D : & la raiſon de A à B ſera auſſi plus grande que de E à B : & partant A ſera plus grande que E par la 10. prop. 5. donc la raiſon de A à C ſera plus grande que de E à C par la 8. prop. 5. Mais pour ce qu'en changeant comme E eſt à C, ainſi B eſt à D. (car E eſt poſée à B, comme C à D,) il y aura auſſi plus grande raiſon de A à C, que de B à D. Ce qui eſt propoſé.



SCHOLIE.

Nous demonſtrerons ſemblablement, que ſi la premiere a moindre raiſon à la ſeconde, que la troiſieſme à la quatrieſme; en permutant la premiere aura moindre raiſon à la tierce, que la ſeconde à la quarte.

Car ſoit la raiſon de A à B moindre que de C à D: Ie dis qu'en permutant A aura moindre raiſon à C, que B à D. Car ſoit entendu E eſtre à B comme C à D, & la raiſon de A à B ſera pareillement moindre que de E à B: & par la 10. prop. 5. A ſera moindre que E: parquoy la raiſon de A à C ſera moindre que de E à la meſme C par la 8. prop. 5. Et puis que E eſt poſée eſtre à B, comme C à D; en permu-



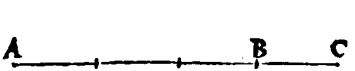
tant comme E à C, ainſi B à D. Donc auſſi la raiſon de A à C ſera moindre que de B à D. Ce qui eſt propoſé.

Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raiſon de A à B, que de C à D, il y aura plus grande raiſon de C à D que de A à B: donc en permutant par la 27. p. 5. il y aura auſſi plus grande raiſon de C à A que de D à B: & par la 26. prop. 5. en raiſon inuerſe, il y aura moindre raiſon de A à C, que de B à D. Ce qui eſt proposé.*

THEOR. 28. PROP. XXXVIII.

Si la premiere a plus grande raiſon à la ſeconde que la tierce à la quarte : la compoſée de la premiere & de la ſeconde aura auſſi plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſée de la tierce & de la quarte à la quarte.

Que AB ait plus grande raiſon à BC, que DE à EF: ie dis qu'en compoſant AC aura plus grande raiſon à BC, que DF à EF. Car ſoit

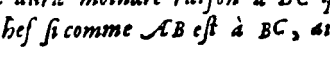


entendu comme AB eſt à BC, ainſi quelque autre GE ſoit à EF; & il y aura auſſi plus grande raiſon de GE à EF, que de DE à FF; & par la 10. prop. 5. GE ſera plus grande que DE. Donc puis que comme AB eſt à BC, ainſi GE eſt à EF: en compoſant comme AC ſera à BC, ainſi

GF ſera à EF : Mais il y a plus grande raiſon de GF à EF, que de DF à EF, par la 8. p. 5. (car GF eſt plus grande que DF) Donc auſſi AC aura plus grande raiſon à BC que DF à EF. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Que ſi AB a moindre raiſon à BC que DE à EF, auſſi en compoſant AC aura moindre raiſon à BC que DF à EF. Car derechef ſi comme AB eſt à BC, ainſi quelque autre GE eſt à EF : Icelle GE ſera moindre que DE par la 10. prop. 5. Et en compoſant AC ſera à BC, comme GF, à EF. Mais GF a moindre raiſon à EF que DF à EF par la 8. pr. 5. attendu que GF eſt moindre que DF : donc auſſi AC aura moindre raiſon à CB, que DF à EF.



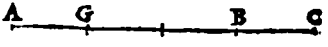
Autrement. *D'autant qu'il y a moindre raiſon de AB à BC, que de DE à EF, il y aura plus grande raiſon de DE à EF, que de AB à BC ; & par la 28. p. 5. en compoſant il y aura auſſi plus grande raiſon de DF à EF, que de AC à BC : & partant il y aura moindre raiſon de AC à BC, que de DF à EF.*

THEOR. 29. PROP. XXIX.

Si la compoſee de la premiere & ſeconde a plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſee de la tierce & quarte à la quatrieſme : Auſſi en diuiſant

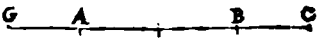
la premiere aura plus grande raiſon à la deuxieſme, que la troiſieſme à la quatrieſme.

Que AC ait à BC plus grande raiſon que DF à EF : ie dis qu'en diuiſant AB, aura auſſi à BC plus grande raiſon que DE à EF. Car ſoit entendu que comme DF eſt à EF, ainſi quelque autre GC ſoit à CB; & il y aura auſſi plus grande raiſon de AC à BC que de GC à BC : & partant AC ſera plus grande que GC par la 10. p. 5. Oſtant donc BC commun, reſtera AB plus grande que GB : & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raiſon de AB à BC, que de GB à BC. Mais en diuiſant par la 17. p. 5. comme GB eſt à BC, ainſi DE eſt à EF: (car on a poſé GC eſtre à BC, comme DF à EF.) Donc auſſi la raiſon de AB à BC ſera plus grande : que celle de DE à EF. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

Que ſi AC a moindre raiſon à BC que DF à EF, auſſi en diuiſant AB aura moindre raiſon à BC que DE à EF. Car ſi on entend GC eſtre à BC, comme DF à EF, la raiſon de AC à BC ſera pareillement moindre que celle de GC à BC: & par la 10. p. 5. AC ſera moindre que GC. Oſtant donc BC commune, reſtera AB moindre que GB; & par la 8. pr. 5. la raiſon de AB à BC ſera moindre que de GB à BC. Mais puis



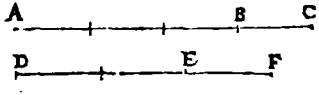
que GC eſt à BC comme DF à EF, en diuiſant GB ſera à BC comme DE à EF: Il y aura donc auſſi moindre raiſon de AB à BC que de DE à EF.

Autrement. *D'autant que la raiſon de AC à BC eſt moindre que de DF à EF, il y aura plus grande raiſon de DF à EF, que de AC à BC: donc auſſi en diuiſant il y aura plus grande raiſon de DE à EF, que de AB à BC par la 29. p. 5. & partant la raiſon de AB à BC ſera moindre que de DE à EF.*

THEOR. 30. PROP. XXX.

Si la compoſee de la premiere & ſeconde a plus grande raiſon à la ſeconde, que la compoſee de la tierce & quarte à la quarte: par conuerſion de raiſon la premiere & ſeconde aura moindre raiſon à la premiere, que la tierce & quarte à la tierce.

Que AC ait plus grande raiſon à BC que DF à EF: Ie dis par conuerſion de raiſon que AC a moindre raiſon à AB, que DF à DE. Car AC ayant plus grande raiſon à BC que DF à EF, en diuiſant AB aura plus grande raiſon à BC

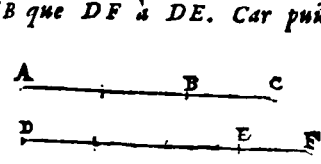


que DE à EF par la 29. p. 5. Donc par raiſon inuerſe il y aura moindre raiſon de BC à AB que de EF à DE par la 26. pr. 5. Et partant en compo-

ſant il y aura auſſi moindre raiſon de la toute AC à AB, que de la toute DF à DE. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

SCHOLIE.

Semblablement ſi AC a moindre raiſon à CB que DF à EF, auſſi par conuerſion de raiſon AC aura plus grande raiſon à AB que DF à DE. Car puis qu'il y a moindre raiſon de AC à BC que de DF à EF, par la 29. p. 5. en diuiſant il y aura moindre raiſon de AB à BC que de DE à EF, & en changeant par la 26. p. 5. il y aura pareillement moindre raiſon de BC à AB, que de EF à DE: donc en compoſant par la 28. p. 5. il y aura plus grande raiſon de AC à AB que de DF à DE.



Autrement. *D'autant que la raiſon de AC à BC eſt moindre que celle de DF à EF, il y aura plus grande raiſon de DF à EF que de AC à BC: donc par conuerſion de raiſon, il y aura moindre raiſon de DF à DE, que de AC à AB, c'eſt à dire qu'il y aura plus grande raiſon de AC à AB, que de DF à DE.*

THEOR. 31. PROP. XXXI.

S'il y a trois grandeurs d'vn coſté, & trois d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la ſeconde, que de la premiere des dernieres à la ſeconde, & auſſi

plus grande raiſon de la ſeconde des premieres à la tierce, que de la ſeconde des dernieres à la tierce : En raiſon egale il y aura pareillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D, E, F, & la raiſon de A à B ſoit plus grande que celle de D à E: Item, la raiſon de B à C ſoit auſſi plus grande que de E à F: Ie dis qu'en raiſon egale, il y aura plus grande raiſon de A à C que de D à F.



Car ſoit entendu G eſtre à C, comme E à F; & il y aura plus grande raiſon de B à C, que de G à C: Donc par la 10. p. 5. B ſera plus grande que G; & par la 8. p. 5. il y aura plus grande raiſon de A à G, que de A à B: Mais la raiſon de A à B eſt poſée plus grãde que de D à E: Il y aura dõc beaucoup plus grande raiſon de A à G, que de D à E. Soit derechef poſée H eſtre à G, comme D à E: Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G: & par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H; & partant A aura plus grande raiſon à C, que H à la meſme C, par la 8. p. 5. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F, (pource que comme

D eſt à E, ainſi H à G, & comme E eſt à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C, que de D à F. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Nous demonſtrerons en la meſme maniere, que ſi la raiſon de A à B eſt la meſme que de D à E, & celle de B à C plus grande que de E à F: ou au contraire, ſi la raiſon de A à B eſt plus grande que de D à E, & celle de B à C la meſme que de E à F: en raiſon egale, il y aura pareillement plus grande raiſon de A à C, que de D à F: car ſoit premierement A à B, comme D à E, mais la raiſon de B à C plus grande que de E à F. Soit poſee G à C comme E à F; & la raiſon de B à C ſera plus grande que de G à C, & conſequemment B plus grande que G, par la 10. p. 5. Parquoy il y aura plus grande raiſon de A à G que de A à B. Mais A eſt poſee à B, comme D à E. Donc auſſi la raiſon de A à G ſera plus grande que de D à E. Soit poſee derechef H à G, comme D à E; & il y aura plus grande raiſon de A à G que de H à G; & par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H: Parquoy la raiſon de A à C ſera plus grande que de H à C. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F: (attendu que comme D à E, ainſi H à G, & comme E à F, ainſi G à C.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C que de D à F.

Maintenant la raiſon de A à B ſoit plus grande que celle de D à E, mais B ſoit à C, comme E à F. Soit poſee G à C, comme E à F; & B ſera auſſi à C, comme G à C: & par la 9. p. 5. B ſera egale à G. Parquoy A ſera à G, comme A à B par la 7. p. 5. Mais la raiſon de A à B eſt poſee plus grande que de D à E. Donc auſſi la raiſon de A à G ſera plus grande que de D à E. Soit derechef

posée H à G, comme D à E; & il y aura plus grande raison de A à G, que de H à G: & partant A sera plus grande que H par la 10. p. 5. & il y aura plus grande raison de A à C que de H à C. Mais comme H est à C, ainsi en raison egale D est à F: (car comme D à E, ainsi H à G, & comme E est à F, ainsi G à C.) Il y aura donc pareillement plus grande raison de A à C, que de D à F.

Nous demonstrerons semblablement que si A a moindre raison à B, que D à E; & B à C moindre raison que E à F: aussi en raison egale A aura moindre raison à C, que D à F. Et le mesme aduiendra encore, si A estant à B comme D à E, la raison de B à C est moindre que de E à F.

Ou au contraire, si la raison de A à B estant moindre que de D à E, B est à C comme E à F: Car il est manifeste que la demonstration sera touſiours la mesme que dessus.

THEOR. 32. PROP. XXXII.

S'il y a trois grandeurs d'vn costé, & trois d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raison de la premiere des premieres à la seconde, que de la seconde des dernieres à la tierce: Semblablement, qu'il y ait plus grande raison de la seconde des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la seconde: En raison egale, il y aura pa-

reillement plus grande raiſon de la premiere des premieres à la tierce, que de la premiere des dernieres à la tierce.

Soient trois grandeurs A, B, C, & trois autres D E, F, & que A ait plus grande raiſon à B, que E à F, & B à C que D à E : ie dis qu'en raiſon egalle, A aura plus grande raiſon à C, que D à F.



Car ſoit entendu que G eſt à C, comme D à E ; & il y aura auſſi plus grande raiſon de B à C, que de G à C : partant B ſera plus grande que G, par la 10. p. 5. Parquoy la raiſon de A à G ſera plus grande que de A à B, par la 8. p. 5. Mais la raiſon de A à B eſt plus grande que de E à F : il y aura donc encore beaucoup plus grande raiſon de A à G que de E à F. Soit derechef entendu H eſtre à G, cõme E eſt à F, & il y aura auſſi plus grande raiſon de A à G, que de H à G. & par la 10. p. 5. A ſera plus grande que H : parquoy il y aura plus grande raiſon de A à C que de H à la meſme C. Mais comme H eſt à C, ainſi eſt en raiſon egale D à F : (car comme D eſt à E, ainſi G eſt à C. & comme E eſt à F, ainſi H à G.) Il y aura donc auſſi plus grande raiſon de A à C que de D à F. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

On demonſtrera ſemblablement, que ſi A a meſme raiſon à B que E à F, & B à C plus grande que D à E : on

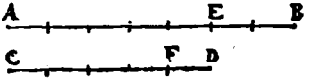
au contraire, ſi la raiſon de A à B eſt plus grande que de E a F, mais celle de B à C la meſme que de D à E; en raiſon egale, la raiſon de A à C ſera plus grande que de D à F.

Par meſme raiſon on demonſtrera auſſi, que ſi les raiſons des premieres grandeurs ſont moindres; auſſi la raiſon des extremes ſera moindre; c'eſt à dire, que ſi A a moindre raiſon à B que E à F, & B à C que D à E: auſſi A aura moindre raiſon à C, que D à F.

THEOR. 33. PROP. XXXIII.

S'il y a plus grande raiſon du tout au tout, que du retranché au retranché, il y aura auſſi plus grande raiſon du reſte au reſte, que du tout au tout.

Que la toute AB ait plus grande raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF: Ie dis que le reſte EB aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB à la toute CD.



Car d'autant qu'il y a plus grande raiſon de AB à CD, que de AE à CF, en permutant, il y aura auſſi plus grande raiſon de AB à AE, que de CD a CF par la 27. p. 5. & par conuerſion de raiſon il y aura moindre raiſon de AB à EB, que de CD à FD, par la 30. p. 5. Donc en permutant, il y aura auſſi moindre raiſon de AB à CD, que de EB à FD par la 27. p. 5. c'eſt à dire, que le reſte EB aura plus grande raiſon au reſte FD, que la toute AB,

à la toute CD. Ce qu'il faloit demonſtrer.

SCHOLIE.

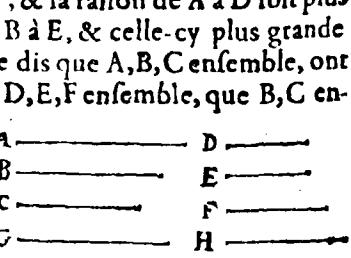
Que ſi la toute AB a moindre raiſon à la toute CD, que la retranchée AE à la retranchée CF : auſſi le reſte EB aura moindre raiſon au reſte FD, que la toute AB à la toute CD, comme il appert par la demonſtration cy-deſſus.

THEOR. 34. PROP. XXXIV.

S'il y a tant de grandeurs qu'on voudra d'vn coſté, & autãt d'vn autre, & qu'il y ait plus grande raiſon de la premiere des premieres à la premiere des dernieres, que de la ſeconde à la ſeconde; & ceſte-cy ſoit auſſi plus grande que de la tierce à la tierce, & ainſi de ſuitte : Toutes les premieres enſemble auront plus grande raiſon à toutes les dernieres enſemble, que toutes les premieres, la premiere oſtée, à toutes les dernieres, la premiere auſſi oſtée ; mais moindre raiſon que la premiere des premieres à la premiere des dernieres ; Et finalement auſſi plus grande raiſon que la derniere des premieres à la derniere des dernieres.

Soient premierement trois grandeurs A, B, C,

& trois autres D,E,F; & la raison de A à D soit plus grande que celle de B à E, & celle-cy plus grande que celle de C à F: Ie dis que A,B,C ensemble, ont plus grande raison à D,E,F ensemble, que B,C ensemble à E,F ensemble: mais moindre que A à D, & aussi plus grãde que C à F.



Car puis qu'il y a plus grande raison de A à D que de B à E, en permutant, il y aura aussi plus grande raison de A à B que de D à E par la 27. p. 5. Donc en composant A & B ensemble, auront plus grande raison à B, que D & E ensemble à E par la 28. p. 5. Et en permutant derechef A & B ensemble, auront plus grande raison à D & E ensemble que B à E. Et puis que la toute A,B, à plus grande raison à la toute D,E, que la retranchée B à la retranchée E, la restante A aura aussi plus grande raison à la restante D, que la toute A,B, à la toute D,E, par la prec. prop. Par mesme raison, il y aura plus grande raison de B à E, que de la toute B,C, à la toute E, F. Il y aura donc encore bien plus grande raison de A à D, que de la toute B,C à la toute E,F. Donc en permutant il y aura plus grande raison de A à B,C ensemble, que de D à E, F ensemble par la 27. p. 5. Et en composant il y aura plus grande raison de A,B,C à B, C, que de D, E, F à E,F, par la 28. p. 5. Et en permutant derechef il y aura plus grande raison des toutes A,B,C ensemble, aux toutes D,E,F ensemble, que de B, C à E,F: ce qui est premierement proposé.

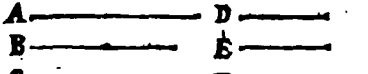
Et puis qu'il y a plus grande raiſon de la toute A,B,C à la toute D, E, F, que de la retranchee B,C à la retranchee E, F, il y aura auſſi plus grande raiſon de la reſtante A à la reſtante D, que de la toute A, B, C, à la toute D,E,F, par la prop. prec. Ce qui eſt ſecondement proposé.

Mais d'autant qu'il y a plus grande raiſon de B à E, que de C à F : en permutant il y aura auſſi plus grande raiſon de B à C, que de E à F par la 27. prop.5. Et en compoſant la toute B,C aura plus grande raiſon à C, que la toute E,F, à F par la 28.p.5. Donc en permutant derechef, il y aura plus grande raiſon de B, C à E, F, que de C à F. Mais il a eſté demonſtré que A, B, C enſemble ont plus grande raiſon à D, E, F, enſemble, que B, C, à E, F: Il y aura donc encore bien plus grande raiſon des toutes A, B, C, aux toutes D, E, F, que de la derniere C à la derniere F. Ce qui eſt tiercement propoſé.

Soient maintenant quatre grandeurs de part & d'autre, auec la meſme hypotheſe, c'eſt à dire que la raiſon de C tierce à F tierce ſoit plus grande, que de G quarte à H quatrieſme. Ie dis que la meſme choſe s'enſuit. Car comme il a deſia eſté demonſtré en trois grandeurs, il y a plus grande raiſon de B à E que de B,C,G enſemble à E, F, H enſemble. Donc il y aura encore plus grande raiſon de A à D, que de B,C,G, à E,F,H. Et en permutant il y aura plus grande raiſon de A à B,C,G que de D à E, F, H. Parquoy en compoſant il y aura auſſi plus grande raiſon de A, B, C, G à B,C,G, que de D, E, F, H à E,F,H: & en permutant il y aura plus grande raiſon de A, B, C, G à

D,E,F, H, que de B,C,G à E,F,H,. Ce qui eſt premierement propoſé.

Et veu qu'il y a plus grande raiſon de la toute A,B,C,G, à la toute D,E,F,H, que de la retranchee B, C, G, à la retranchee E, F, H, la reſtante A aura plus grande raiſon à la reſtante D, que la toute A.B,C,G, à la toute D,E,F,H. Ce qui eſt ſecondement propoſé.



Mais comme il a eſté demonſtré en trois grandeurs, B, C, G ont plus grande raiſon à E, F, H, que G à H: & A, B, C, G plus grande à D, E, F, H que B, C, G, à E, F, H: Il y aura donc beaucoup plus grande raiſon de A,B,C, G à D, E, F, H, que de la derniere G à la derniere H: ce qui eſt tiercement propoſé.

En la meſme maniere on conclurra le meſme en 5 grandeurs par 4: & en 6 par 5, &c. tout ainſi qu'il eſt demonſtré en 4 par trois. Parquoy s'il y a tant de grandeurs qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

Fin du cinquieſme liure.

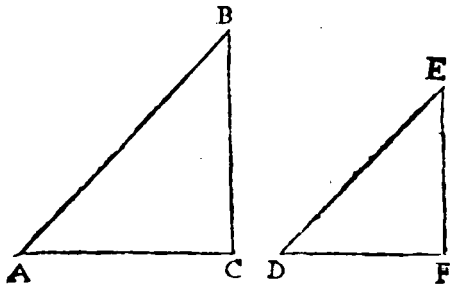
ELEMENT SIXIESME.

DEFINITIONS.

EMBLABLES figures rectilignes, ſont celles qui ont les angles egaux, vn chacun au ſien, & les coſtez qui contiennent les angles egaux, proportionnaux.

C'eſt à dire, que toutes figures rectilignes ſont dittes ſemblables, ſi eſtans equiangles elles ont les coſtez d'alentour leurs angles egaux proportionnaux : comme les deux triangles ABC, DEF, ſeront dits ſemblables, ſi l'angle A eſtant egal à l'angle D, l'angle B egal à l'angle E, & l'angle C à l'angle F; les coſtez qui ſont & conſtituent iceux angles egaux, ſont proportionnaux; c'eſt à ſçauoir, que comme AB eſt à AC, ainſi DE ſoit à DF, & comme AB eſt à BC, ainſi DE ſoit à EF, & comme AC

eſt à BC, ainſi DF ſon à EF.

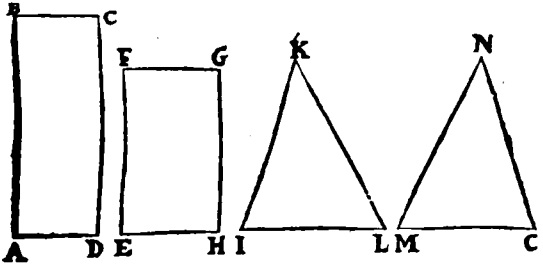


Que ſi l'vne ou l'autre des deux conditions ſuſdites manque, c'eſt à dire, que chacun des angles de l'vne des figures eſtant egal à chacun des angles de l'autre, ſi les coſtez d'alentour leurs angles egaux ne ſont proportionnaux; ou au contraire: telles figures ne ſeront dittes ſemblables, comme ſont le quarré, & le quarré long: car ces deux figures ont bien les angles egaux, ſçauoir droicts: mais les coſtez de l'vne ne ſont pas en meſme raiſon que les coſtez de l'autre: car ceux du quarré ſont en raiſon d'egalité, & ceux d'alentour l'angle droict du quarré long, ſont en raiſon d'inegalité, puis que l'vn eſt plus grand que l'autre. D'où eſt manifeſte, que toutes figures rectilignes equiangles & equilaterales, leſquelles ont les angles & les coſtez egaux en nombre, ſont ſemblables, combien qu'elles ſoient inegales.

2. Les figures ſont reciproques, quand les termes antecedans & conſequens des raiſons, ſont en l'vne & en l'autre figure.

C'eſt à dire, que s'il y a deux figures ſemblables ou non,

dont le premier & dernier des termes proportionnaux soient en l'vne des figures, & le second & troisiesme terme en l'autre; icelles figures seront dictes reciproques. Comme si aux deux parallelogrammes ABCD, EFGH, les costez AB, BC, sont porportionnaux aux costez EF,

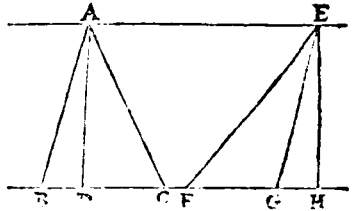


FG; tellement qu'il y ait mesme raison de AB à EF, que de FG à BC; ou bien que AB soit à FG. comme EF à BC: Iceux parallelogrammes seront dicts figures reciproques, d'autant qu'en chacun d'iceux est le terme antecedant de l'vne des raisons, & le consequent de l'autre. Item les triangles IKL, MNC, seront aussi dicts reciproques, si IK est à MN, comme MC à IL; ou bien IK à MC, comme MN à IL.

3. Vne ligne droicte est dicte estre diuisee en la moyenne & extreme raison, quand la toute est au plus grand segment, comme le plus grand segment est au moindre.

Quand quelque ligne droicte, comme AB, est couppee inegalement en C, de telle sorte que la toute AB, soit au plus grand segment AC, comme iceluy plus grand seg-

ment AC, eſt au moindre ſegment BC: ceſte ligne AB ſera dicte eſtre couppee en C ſelon la moyenne & extreme raiſon. Or comme cela ſe fait, Euclide l'enſeignera en la 30. p. de ce liure, combien que ſous autres paroles il l'ait deſia enſeigné à la 11. p. 2.



4. La hauteur d'vne chacune figure, eſt la perpendiculaire tirée du ſommet à la baſe.

Si de A ſommet du triangle ABC, l'on mene AD perpendiculaire à la baſe BC, icelle perpendiculaire ſera la hauteur d'iceluy triangle ABC: tellement que ledict triangle ſera dict auoir autant de hauteur qu'eſt icelle perpendiculaire AD. Semblablement la perpendiculaire EH tiree de E, ſommet du triangle EFG, ſur la baſe FG, prolongee de la part de G, ſera la hauteur d'iceluy triangle EFG. Parquoy ſi les perpendiculaires de deux figures menees des ſommets d'icelles ſur leurs baſes (ſoit qu'icelles baſes ſoient prolongees, ou non) ſont egales; icelles figures ſeront dictes auoir meſme hauteur. Or telles perpendiculaires ſeront egles, quand les baſes des figures & leurs ſommets ſeront conſtituez en meſmes paralleles: Comme ſont les perpendiculaires AD, EH, des triangles ABC, EFG, conſtituez entre meſmes paralleles. Car puis que les deux angles ADH, EHD, interieurs, & de meſme part, ſont droicts, les lignes AD, EH, ſeront pa-

ralleles par la 28. p. 1. Mais AE, DH, ſont auſſi paralleles, puis que les triangles ABC, EFG, ſont poſez eſtre conſtituez entre meſmes paralleles: Donc le quadrilatere ADHE, ſera parallelogramme, & partant les coſtez oppoſez AD, EH, ſeront egaux par la 34. prop. 1. Ce qui eſtoit à prouuer.

5. Vne raiſon eſt dicte eſtre compoſee de raiſons, quand les quantitez des raiſons multipliées entr'elles font quelque raiſon.

C'eſt à dire, que quand les quantités de deux ou pluſieurs raiſons multipliées entr'elles, produiſent quelque quantité de raiſon: icelle raiſon eſt dicte eſtre compoſee de celles-là. Or la quantité d'vne raiſon eſt le denominateur d'icelle, comme nous auons ia dit ſur la 3. def. 5. tellement que la quantité de la raiſon triple eſt 3: mais de la ſubtriple c'eſt $\frac{1}{3}$, & c. Ainſi la raiſon double ſe dit eſtre compoſee de la ſeſquialtere, & de la ſeſquitierce, pource que les quantitez ou denominateurs d'icelles, ſçauoir eſt $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{3}$, eſtans multipliés entr'eux produiſent 2, denominateur ou quantité de la raiſon double.

Derechef, la meſme raiſon double ſera dicte eſtre compoſee de la double ſeſquialtere, & de la ſubſeſquiquarte: car les quantitez ou denominateurs de ces deux raiſons, eſtans multipliez entr'eux, produiſent encore 2, denominateur de la meſme raiſon double. Pareillement la raiſon trigecuple ſe dit eſtre compoſee des raiſons double, triple & quintuple; d'autant que les denominateurs d'icelles raiſons, ſçauoir eſt 2, 3, & 5, eſtans multipliez entr'eux produiſent 30, denominateur d'icelle raiſon trigecuple. Parquoy eſtans poſees tant de grandeurs qu'on

voudra par ordre, la raiſon des extremes ſera compoſee des raiſons entre-moyennes, pource que le denominateur ou quantité de la raiſon de la premiere grandeur a la derniere, eſt produite & procreée par les denominateurs des raiſons entre-moyennes multipliés entr'eux: comme pour exemple, ſoit A à B en raiſon ſeſquialtere; B à C en raiſon double, & C à D en raiſon ſuperbipartiente tierce: la raiſon des extremes A D, qui eſt quintuple, eſt compoſee des trois raiſons ſuſdites. Car il eſt euident

A. B. C. D.	
30 20. 10. 6.	

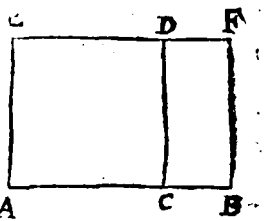
que multipliant le denominateur de la raiſon de A à B, par celuy de B à C, ſçauoir 1 $\frac{1}{2}$ par 2 viendront 3: & partant A eſt à C en raiſon triple, & multipliant le denominateur d'icelle, ſçauoir eſt 3 par le denominateur de la raiſon de C à D, qui eſt 1 $\frac{2}{3}$ prouiennent 5; & partant A qui eſt à D en raiſon quintuple, eſt produite & compoſee des raiſons entremoyennes.

Quelques interpretes afin de rendre plus intelligibles, tant les 27, 28 & 29 prop. de ce liure, que pluſieurs du 10. adiouſtent icy ceſte def.

6. Vn parallelogramme eſtant appliqué ſelon quelque ligne droicte donnee, eſt dict defaillir d'vn parallelogramme, lors qu'il n'occuppe pas toute ladicte ligne: mais il eſt dit exceder, quand il en occuppe vne plus grande; en ſorte toutesfois qu'iceluy parallelogramme defaillant, ou excedant ait deux angles communs auec

le parallelogramme appliqué sur toute la ligne proposee ; & la difference de ces deux parallelogrammes est dicte defaut, ou excez.

Soit vne ligne droicte AB sur laquelle soit constitué le parallelogramme ACDE, qui n'occupe pas toute ladite ligne AB, ains laisse CB ; & soit acheué le parallelogramme ABFE tirant BF parallele à CD iusques à ce qu'elle rencontre ED prolongee en F. Or le parallelogramme AD appliqué selon la ligne droicte AB, ayant les deux angles A, E communs auec le parallelogramme AF, appliqué & descrit sur toute ladite ligne AB, est dict defaillant du parallelogramme CF ; & iceluy parallelogramme CF sera appellé le defaut.



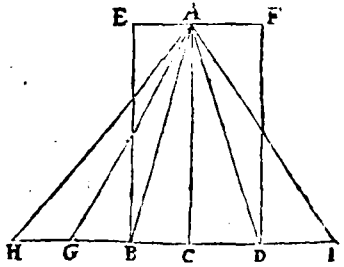
Derechef, soit vne ligne droicte AC, sur laquelle soit constitué le parallelogramme AF, ayant le costé AB plus grand que la ligne proposee AC, & soit tiree CD parallele à BF. Donc le parallelogramme AF appliqué selon la ligne droicte AC, & qui auec le parallelogramme AD descrit sur toute ladicte ligne AC a les deux angles A, E communs, sera dit exceder AD du parallelogramme CF, tellement qu'iceluy CF est dit l'excez.

THEOR. 1. PROP. I.

Les triangles, & les parallelogrammes

de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soient deux triangles ABC & ACD de mesme hauteur, sur les bases BC & CD : soient aussi deux parallelogrammes CE, CF de mesme hauteur, les bases desquels soient les mesmes BC, CD. Ie dis premierement que le triangle ABC, est au triangle ACD, comme la base BC, est à la base CD: c'est à sçauoir que si on pose pour premiere grandeur la base BC, pour seconde la base CD, pour troisiesme le triangle ABC, pour quatriesme le triangle ACD ; les equemultiplices de la premiere & troisiesme seront plus petites, egales, ou plus grandes, que les equemultiplices de la seconde & quatriesme, ainsi que le requiert la 6. definition du 5. liure.



Qu'il ne soit ainsi ; qu'on prolonge BD de part & d'autre, & apres auoir pris d'vn costé BG & GH, chacune egale à BC: item de l'autre costé, DI egale à CD, soient menees les lignes droictes AG, AH, AI. Donc par la 38. pr. 1. les trois triangles ABC, ABG, AGH, estans sur bases egales & entre mesmes paralleles, seront egaux : aussi par les mesmes raisons les deux triangles ACD & ADI seront egaux ; ainsi il est euident qu'autant de fois que la base HC contiendra la base BC, autant de

fois le triangle ACH contiendra le triangle ABC. Pareillement, autant de fois que la baſe CI contiendra la baſe CD, autant de fois le triangle ACI contiendra le triangle ACD. Parquoy ſi la baſe CH, eſt egale à la baſe CI, le triangle ACH ſera auſſi egal au triangle ACI, par la 38. p. 1. Mais ſi la baſe eſt plus grande, conſequemment le triangle ſera plus grand; ſi plus petite, plus petit, & par la 6. def. 5. comme la baſe BC ſera à la baſe CD, ainſi le triangle ABC ſera au triangle ACD: ce qui eſtoit à demonſtrer pour la premiere partie.

Quant à la ſeconde partie touchant les parallelogrammes CE, CF, le meſme ſe peut dire que des triangles, parce qu'iceux parallelogrammes ſont doubles des triangles ABC, ACD par la 41. prop. 1 & par la 15. prop. 5. ce qui eſt prouué d'iceux triangles s'entendra des parallelogrammes. Donc les triangles, & les parallelogrammes de meſme hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes. Ce qu'il falloit demonſtrer.

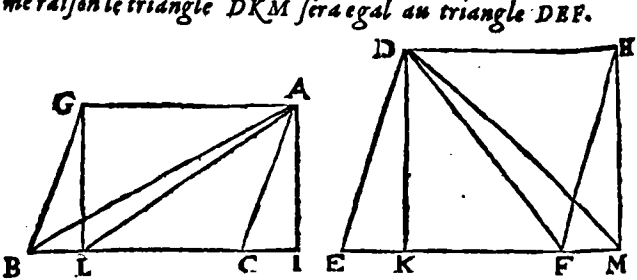
SCHOLIE.

Commandin adiouſte en ce lieu ceſt autre Theoreme.

Les triangles, & les parallelogrammes, deſquels les baſes ſont egales, ou vne meſme, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient deux triangles ABC, DEF, & les parallelogrammes AGBC, DEFH, ayans les baſes BC, EF egales: Ie dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF, & le parallelogramme AGBC au parallelogramme DEFH, comme la hauteur AI eſt à la hauteur DK. Car ſi on prend les lignes IL, KM egales aux baſes BC, EF, & on tire les lignes LA, MD, le triangle ALI ſera egal au

triangle ABC par la 38. p. 1. puis qu'ils sont sur baſes egales LI, BC, & entre meſmes paralleles AG, IB : Par meſme raiſon le triangle DKM ſera egal au triangle DEF.



Parquoy par la 7. p. 5. comme ABC ſera à DEF, ainſi ALI ſera à DKM. Mais par la 1. p. 6. comme ALI eſt à DKM, ainſi AI à DK. (car ſi AI, DK ſont poſees les baſes, les lignes droictes egales LI, KM ſeront les hauteurs.) Donc auſſi ABC ſera à DEF, comme AI à DK.

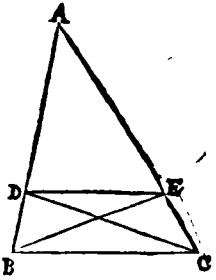
Et d'autant que par la 15 p. 5. comme ABC eſt à DEF, ainſi le parallelogr AGBC au parallelogramme DEFH: (car iceux parallelogrammes ſont doubles des triangles par la 41. p. 1.) auſſi AGBC ſera à DEFH, comme AI à DK. Le meſme s'enſuiura ſi les triangles, & les parallelogrammes ont vne meſme baſe.

THEOR. 2. PROP. II.

Si on meine vne ligne droicte parallele à l'vn des coſtez d'vn triangle, laquelle couppe les deux autres coſtés; elle les couppera proportionnellement: & ſi deux coſtés d'vn triangle ſont couppez proportionnellement, la ligne couppante ſera parallele à l'autre coſté.

Soit le triangle ABC, dans lequel soit menee la ligne droicte DE parallele au costé BC, couppant les deux autres costez AB & AC aux poincts D & E. Ie dis que les costez AB, AC sont couppez proportionellement aux poincts D & E, c'est à dire que AD sera à DB, comme AE est a EC.

Car estans menees les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC, estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux ; & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'vn comme l'autre au troisiesme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA, estans de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme la base BD à la base DA : & par la mesme proposition, le triangle CDE, estant de mesme hauteur qu'iceluy triangle EDA, ils seront aussi l'vn à l'autre, comme CE est à EA : & partant par la 11. p. 5. BD sera à DA, comme CE à EA : (puisque ces deux raisons sont les mesmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au mesme triangle DEA.) Ce qui estoit proposé.



Pour la seconde partie : ie dis que si DB est à DA, comme CE à EA, la ligne couppante DE sera parallele au costé BC.

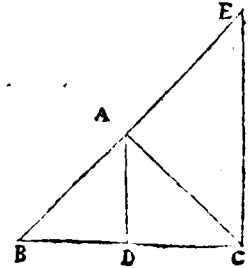
Car les triangles DEB & DEA, seront par la 1. p. 6. l'vn à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres triangles CDE, EDA, seront aussi l'vn à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. p. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA, comme le triangle

CDE est au mesme triangle DEA: & par la 9. p. 5. les deux triangles BED, & EDC seront egaux, lesquels estans sur mesme base DE, par la 39. p. 1. ils seront entre mesmes paralleles: & partant DE sera parallele à BC. Parquoy si l'on meine vne ligne parallele à l'vn des costez d'vn triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'vn triangle est couppé en deux egalement par vne ligne droicte, laquelle couppe aussi la base; les segmens de la base seront l'vn à l'autre comme les autres costez du triangle: Et si les segmens de la base sont l'vn à l'autre comme les autres costez du triangle: la ligne droicte tiree du sommet à la section de la base, couppe l'angle en deux egalement.

Au triangle ABC, soit l'angle BAC couppé en deux egalement par la ligne AD, laquelle couppe aussi la base BC au poinct D: ie dis premierement, que BD est à DC, comme AB à AC.



Qu'il ne soit ainsi: apres auoir du poinct C mené CE parallele à DA, soit continué BA directement

iuſques à ce qu'il rencontre CE en E; (Or BA, CE ſe rencontreront, d'autant que les deux angles B & BCE ſont moindres que deux droicts, eſtans egaux aux deux B & BDA, qui ſont moindres que deux droicts par la 17. p. 1.) & parce que DA & CE ſont paralleles, l'angle CAD ſera egal à ſon alterne ACE par la 29. p. 1. Et ſi l'exterieur DAB ſera egal à l'oppoſé interieur AEC. Mais BAD, CAD eſtans egaux par l'hypotheſe, auſſi par les com. ſent. AEC, ACE ſeront egaux: & partant par la 6. p. 1. les coſtez AE & AC ſeront egaux. Mais par la precedente prop. BA eſt à AE, comme BD à DC; (eſtant AD parallele à CE) & par conſequent BA ſera auſſi à AC, (egale à AE) comme BD à DC. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la ſeconde partie: ie dis que ſi BA eſt à AC, comme BD à DC, que l'angle CAB ſera couppé en deux egalement par la ligne droicte AD.

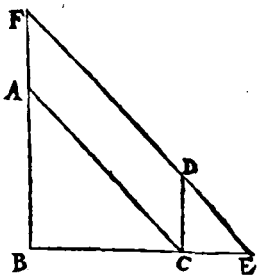
Car apres auoir conſtruit comme deſſus, BA ſera à AE, comme BD à DC, par la precedente prop. Et partant par la 11. p. 5. BA ſera à AE, comme le meſme BA eſt à AC, & par la 9. p. 5. AE & AC ſeront egaux; & partant par la 5. p. 1. les deux angles AEC, ACE, ſeront auſſi egaux; & par la 29. p. 1. ils ſont egaux, l'vn à DAB, & l'autre à DAC, leſquels par ce moyen ſeront auſſi egaux; ce qui eſtoit propoſé. Parquoy ſi l'angle d'vn triangle eſt couppé en deux egalement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Des triangles equiangles, les coſtez qui

ſont au long des angles egaux, ſont proportionnaux; & les coſtez qui ſouſtiennent les angles egaux, ſont de meſme raiſon.

Soient deux triangles ABC, DCE, equiangles: c'eſt à dire, que l'angle ABC ſoit egal à l'angle DCE, & l'angle ACB à l'angle E, & le troiſieſme au troiſieſme. Ie dis que comme AB eſt à BC, ainſi DC à CE; & comme BC à CA, ainſi CE à ED; & finablement comme AB à AC, ainſi DC à DE. Car ainſi les coſtez d'alentour les angles egaux, ſont les proportionnaux, & les coſtez hómologues, ou de meſme raiſon, ſont ceux-là qui ſouſtiennent les angles egaux, c'eſt à dire, que tous les antecedans. & ſemblablement les conſequens regardent les angles egaux.



Soient conſtituez les coſtez BC, CE ſelon vne ligne droicte, tellement que l'angle externe DCE ſoit egal à l'interne ABC, & pareillement l'externe ACB à l'interne DEC: & d autant que par la 17. p. 1. les deux angles ABC, ACB ſont moindres que deux droicts, & l'angle DCE eſt egal à l'angle ACB, auſſi les angles B & E ſeront moindres que deux droicts: & partant les lignes BA & ED eſtans produittes de la part de A & D, ſe rencontreront: Qu'elles ſoient donc prolongees & conuiennent en

F. Il eſt euident que l'angle exterieur ECD, eſtant, par l'hypotheſe egal à ſon oppoſé interieur CBA, DC ſera parallele à FB par la 28. p. 1. Pareillement l'angle exterieur ACB eſtant egal à ſon oppoſé interieur DEC, auſſi par la meſme 28. p. 1. CA, & EF ſeront paralleles. Partant ACDF ſera parallelogramme, & par la 34. p. 1. il aura les angles, & les coſtez oppoſez egaux. Mais AC eſtant parallele à EF, par la 2. p. 6. AB ſera à AF, ou CD ſon egale, comme BC à CE; & en permutant par la 16. p. 5. AB ſera à BC, comme DC à CE. Pareillement CD eſtant parallele à BF, comme BC ſera à CE, ainſi FD, ou CA ſon egale, ſera à ED par la 2. p. 6. & en permutant BC ſera à AC, comme CE à ED.

Veu donc que AB eſt à BC, comme DC à CE, & BC à CA comme CE à ED, auſſi en raiſon egale AB ſera à AC, comme DC à ED. Parquoy des triangles equiangles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLAIRE.

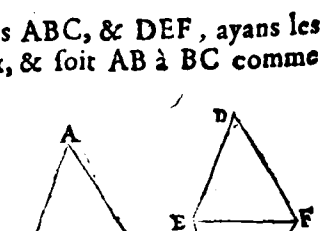
De cecy reſulte, que ſi vne ligne droicte parallele a vn coſté d'vn triangle, couppe les deux autres coſtez d'iceluy; elle eſtera vn triangle ſemblable au tout. Comme au triangle BFE eſtant menée la ligne droicte AC parallele au coſté FE, qui couppe les deux autres coſtez en A & C: Ie dis que le triangle ABC retranché par icelle ligne AC, eſt ſemblable au triangle BFE. Car d'autant que par la 29 p. 1. l'angle externe BAC eſt egal à l'interne de meſme coſté F, & que l'angle B eſt commun a tous les deux triangles BAC, BFE, ils ſeront equiangles par le Corol. de la 32. p. 1. Parquoy, comme il a eſté demonſtré cy-deſſus, ils ont les coſtez autour des angles egaux pro-

portionnaux: & partant selon la 1. def. 6. iceux triangles BAC & BFE seront semblables.

THEOR. 5. PROP. V.

Si deux triangles ont les costez proportionnaux, ils seront equiangles, & auront les angles egaux, soubs lesquels les costez de mesme raison seront subtendus.

Soient deux triangles ABC, & DEF, ayans les costez proportionnaux, & soit AB à BC comme DE à EF, & BC à CA, comme EF à FD, & encore AB à AC comme DE à DF. Ie dis que les triangles sont equiangles, sçauoir l'angle A estre egal à l'angle D, & l'angle B à l'angle E, & l'angle C à l'angle F: car ainsi les angles egaux regardent les costez de mesme raison.



Qu'il ne soit ainsi: sur la ligne EF, & aux deux poincts E & F soient construits deux angles, sçauoir FEG egal à l'angle B, & EFG egal à l'angle C, tirant les lignes EG, & FG iusques à ce qu'elles se rencontrent en G: Et par la 32. p. 1. le troisiesme angle G sera egal au troisiesme angle A. Parquoy les triangles ABC, GEF sont equiangles: & par la 4. prop. 6. comme AB est à BC, ainsi GE à EF. Mais comme AB est à BC, ainsi aussi a esté posé

DE à EF: Donc par la 11.p.5.comme GE à EF, ainsi DE à la mesme EF: & partant par la 9. p. 5. GE, DE seront egales. Et d'autant que par la proposition precedente, comme BC est à CA, ainsi EF est à FG; & par l'hypothese comme BC est à CA, ainsi EF est à FD: par la 11. p. 5. comme EF sera à FG, ainsi la mesme EF sera à FD: & par la 9. p. 5. FG, FD seront egales. Veu donc que les costez EG, FG du triangle GEF, sont egaux aux costez DE, DF du triangle DEF, chacun au sien, & la base EF commune aux deux triangles, les angles G & D seront egaux par la 8. p. 1. & partant par la 4. p. 1. les autres angles GEF, GFE seront aussi egaux aux autres DEF, DFE, chacun au sien. Parquoy l'angle G estant egal à l'angle A, aussi l'angle D sera egal au mesme angle A: & ainsi l'angle DEF sera egal à l'angle B, & l'angle DFE à l'angle C, ainsi qu'il estoit proposé. Si donc deux triangles ont les costez proportiõnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

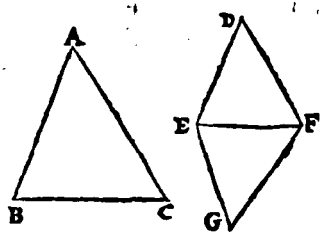
THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'iceux angles egaux, proportionnaux: ils seront equiangles, & auront les angles egaux sous lesquels les costez de mesme raison sont subtendus.

Soient les deux triangles ABC & DEF, ayans l'angle B egal à l'angle E, & comme AB à BC, ainsi DE soit à EF. Ie dis que les triangles sont equian-

gles, sçauoir que l'angle A est egal à l'angle D, & l'angle C à l'angle F, car ainsi les angles egaux sont subtendus des costez homologues.

Qu'il ne soit ainsi; sur la ligne EF soit construit comme en la propos. precedente, le triangle GEF equiangle au triangle ABC: & par la 4. p. 6. GE sera à EF, comme AB à BC, ou DE à EF, (car ils sont en la mesme raison) & par la 9. p. 5. GE & DE (qui ont vne mesme raison à EF) seront egaux; &



partant les deux triangles GEF & DEF, auront deux costez egaux à deux costez, sçauoir GE, EF, à DE, EF, chacun au sien, & les deux angles au poinct E, egaux (car ils sont chacun egal à l'angle B) & par la 4. p. 1. ils auront la base egale à la base, & les autres angles egaux aux autres angles, chacun au sien: & partant iceux triangles seront equiangles. Mais l'vn d'iceux triangles, sçauoir GEF, est equiangle au triangle ABC par la construction. Donc l'autre triangle DEF sera aussi equiangle au mesme triangle ABC. Parquoy si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

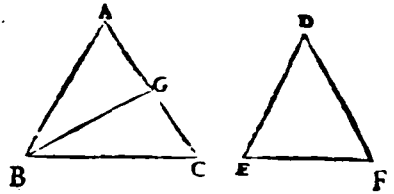
THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux triangles ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long d'vn

autre

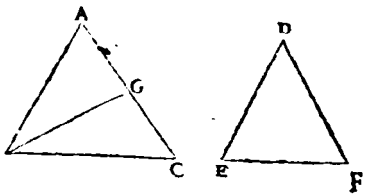
autre angle, proportionnaux, eſtans les troiſieſmes angles de meſme eſpece : Iceux triangles ſeront equiangles, & auront les angles egaux, au long deſquels les coſtez ſeront proportionnaux.

Soient deux triangles ABC, & DEF, deſquels les deux angles A & D ſoient egaux, & les coſtez AB, BC d'alétour l'angle ABC, proportionnaux aux coſtez DE, EF d'alentour l'angle E, c'eſt à dire que comme AB eſt à BC, ainſi DE ſoit à EF : mais les autres angles C & F ſoient de meſme eſpece, c'eſt à dire aigus, droicts, ou obtus : & ſoient premierement aigus. Ie dis que les triangles ſont equiangles, ſçauoir eſt, que les angles ABC & E, à l'entour deſquels ſont les coſtez proportionnaux, & les angles C & F, ſont egaux.



Car ſi l'angle B eſt egal à l'angle E, il appert par la precedente prop. que les triangles ſeront equiangles. Mais ſi leſdits angles ne ſont egaux, ſoit B plus grand que E, & ſoit fait ABG egal à E par la 23. p. 1. Donc le troiſieſme angle AGB, ſera egal au troiſieſme F, & partant aigu comme iceluy ; & es deux triangles ABG & DEF ſeront equiangles ;

& par la 4. p. 6. comme AB sera à BG, ainsi DE à EF. Mais par l'hypothese, cõme AB est à BC, ainsi DE à EF: donc par la 11. p. 5. comme AB sera à BG, ainsi la



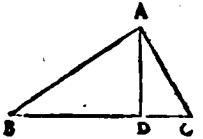
mesme AB sera à BC; & partant par la 9. p. 5. BG, & BC seront egaux, & par la 5. p. 1. les deux angles C & BGC sur la base CG, serõt egaux, & tous deux aigus, & par consequent l'angle BGA sera plus grãd qu'vn droict, puis que par la 13. p. 1. les deux BGC, AGB sont egaux à deux droicts: Mais l'angle AGB a esté demonstré egal à l'angle F: donc F seroit aussi plus grãd qu'vn droict, & on l'a posé aussi moindre: ce qui est absurde. Maintenant, tant l'angle C que F ne soit aigu; & comme dessus l'angle C sera egal à l'angle BGC; & partant iceluy BGC ne sera aussi aigu, & les deux C & BGC ne seront moindres que deux droicts, mais egaux, ou plus grands que deux droicts: ce qui est absurde: car par la 17. p. 1. ils sont moindres que deux droicts. Les angles ABC & E ne sont donc pas inegaux, ains egaux; & partant par la 32. p. 1. le troisiesme C sera aussi egal au troisiesme F: ce qui est proposé. Si donc deux triangles ont vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si de l'angle droict d'vn triangle rectan-

gle on tire vne perpendiculaire sur la base ; elle couppera iceluy triangle en deux autres triangles semblables entr'eux, & au total.

Soit le triangle rectangle ABC, & l'angle droict A, duquel soit menée à la base BC la perpendiculaire AD. Ie dis que les triangles ABD & ADC, ausquels est diuisé iceluy triangle ABC par la perpendicul. AD, sont semblables entr'eux, & au total ABC.



Qu'ainsi ne soit : d'autant que AD est perpendiculaire, l'angle BDA est droict, & egal à l'angle droict BAC, du triangle total ABC, & l'angle B est commun à tous les deux triangles BAD & ABC, & par la 32. p. 1. le troisiesme angle BAD, sera egal au troisiesme ACB : & partant les deux triangles BAD & ABC, seront equiangles ; & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux, c'est à dire, que comme CB sera à AB, ainsi AB à BD ; & comme BA à AC, ainsi BD à DA ; & comme BC à CA, ainsi BA à AD : & partant par la 1. def. de ce liure les triangles ABC, ABD seront semblables.

Par mesme discours, on prouuera que les deux triangles ABC & ADC, sont aussi equiangles, & semblables : car l'angle C estant commun à tous les deux triangles, & l'angle droict BAC egal à l'angle droict ADC, le troisiesme angle CAD sera egal au troisiesme angle B, par la 32. p. 1. & par la 4. p. 6.

comme BC ſera à CA, ainſi CA à CD : & comme CA à AB, ainſi CD à DA, & comme CB à BA, ainſi CA à AD.

On demonſtrera en la meſme maniere, les triangles ADB, ADC eſtre ſemblables entr'eux, puiſque les angles au poinct D ſont droicts, & tant les angles ABD, CAD, que BAD, ACD, ont eſté demonſtrez egaux : & partant par la 4. p. 6. comme BD ſera à DA, ainſi DA à DC : & comme DA à AB, ainſi DC à CA : & comme AB à BD, ainſi CA à AD. Si donc de l'angle droict d'vn triangle rectangle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que la perpendiculaire tirée de l'angle droict d'vn triangle rectangle à la baſe, eſt moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens de la baſe: & chacun des coſtez comprenant l'angle droict, eſtre auſſi moyen proportionnel entre toute la baſe, & le ſegment qui le touche.

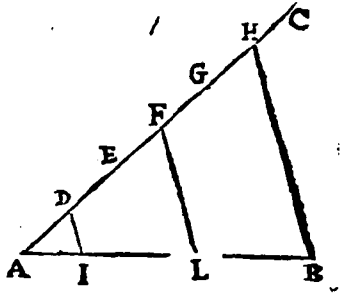
Car il a eſté demonſtré, que comme BD eſt à DA, ainſi DA eſt à DC: & partant DA eſt moyenne prop. entre BD & DC : item que comme CB eſt à BA, ainſi BA à BD : & par ainſi BA eſt moyenne prop. entre CB & BD: finalement que comme BC eſt à CA, ainſi CA à CD : & partant CA eſt moyenne proportionnelle entre BC & CD.

PROB. 1. PROP. IX.

D'vne ligne droicte donnée, oſter vne partie demandée.

Soit la ligne droicte donnée AB, de laquelle il faut oſter la cinquieſme partie, ou autre telle qu'on voudra.

Du poinct A soit menée la ligne droicte AC, interminement, faisant quelconque angle auec AB, comme BAC, & en icelle AC, soient prises à l'aduanture autant de parties egales que denotte la partie qu'on veut oster, comme en l'exemple proposé, il faut prendre cinq parties egales AD, DE, EF, FG, GH: & apres auoir conjoinct les poincts B & H par la ligne BH, du poinct D soit menée DI, parallele à HB: Ie dis que AI est la cinquiesme partie requise de AB.



Car puis qu'au triangle ABH, la ligne DI est parallele au costé HB, par la 2. p. 6. comme HD sera à DA, ainsi BI à IA: & en composant par la 18. p. 5. comme HA sera à DA, ainsi BA à IA: mais par la construction HA est quintuple de AD: donc aussi BA sera quintuple de AI: & partant AI sera la cinquiesme partie de la ligne droicte AB, laquelle auoit esté demandée. Donc d'vne ligne droicte donnée, &c. Ce qu'il faloit faire.

SCHOLIE.

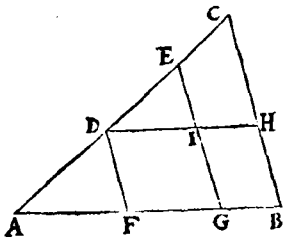
Que si de AB il falloit coupper plusieurs parties, comme pour exemple les trois cinquiesmes, il est euident par ce qui a esté demonstré cy dessus, qu'estant tirée la ligne FL parallele à HB, le segment AL sera les trois cinquiesmes de AB, tout ainsi que AF est les trois cinquiesmes de AH. Et pour promptement practiquer cecy, il faut descrire du centre F, & de l'interualle HB vn arc au dessous

de la ligne donnee AB, mais de B & de l'interualle FH d'escrire vn autre arc qui couppe le precedent, puis tirer vne ligne droicte de la section d'iceux arcs à F, & icelle couppera la partie requise AL.

PROBL. 2. PROP. X.

Coupper vne ligne droicte donnée non couppée, semblablement à vne autre ligne droicte donnée & couppée.

Soient données les lignes droictes AB, AC, desquelles AC est couppée en D & E: & il faut coupper AB en parties semblables & proportionnelles à celles de AC.



Soient accommodees icelles lignes données en sorte qu'elles facent quelconque angle BAC; & apres auoir mené BC, des poincts D & E, soient menees DF, EG, paralleles à icelle BC, par la 31. p. 1. Ie dis que la ligne AB est semblablement couppée en F & G, comme la ligne AC est couppée en D & E. Car par la 2. p. 6. comme AD est à DE, ainsi AF à FG. Que si on tire DH parallele à AB couppãt EG en I. Derechef, par la susdicte 2. p. 6. comme DE sera à EC, ainsi DI à IH, c'est à dire, ainsi FG à GB, pource que par la 34. p. 1. FG est egale à DI, & GB à IH. Parquoy les parties FG, GB seront aussi proportionnelles aux parties DE, EC. Les trois parties AF, FG, GB, sont donc proportionnelles aux trois par-

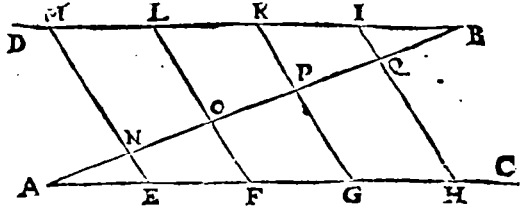
ties AD, DE, EC : & partant AB eſt couppée ſemblablement à AC, ainſi qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Nous adiouſterons icy deux Probl. fort vtiles, & neceſſaires aux choſes geometriques.

1. Eſtant donnée vne ligne droicte, la couppper en tant de parties egales qu'on voudra.

Soit la ligne donnée AB, qu'il faut coupper en cinq parties egales. De l'extremité A, ſoit menée la ligne AC,

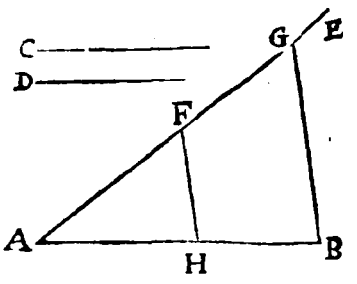


tant qu'il ſera de beſoin, faiſant quelconque angle auec AB; puis de l'extremité B, ſoit menée BD parallele à AC, & d'icelle AC ſoient couppées quatre parties egales AE, EF, FG & GH, qui eſt vne partie moins que le nombre des parties eſquelles il faut coupper la ligne donnée; en apres, du poinct B en BD, ſoient auſſi priſes les quatre parties BI, IK, KL, & LM egales a celles de la ligne AC; puis eſtans menées les lignes EM, FL, GK, & HI, elles couppperont la ligne donnée AB en cinq parties egales. Car puis que par la cõſtruction les lignes EF, ML, ſont egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. ME, LF, ſeront auſſi paralleles entr'elles: Et par meſme raiſon LF, KG, HI, ſeront pareillement paralleles. Veu donc que AH eſt couppée en quatre parties egales, AQ le ſera auſſi. Par meſme raiſon BN ſera encore diuiſée en qua-

tre parties egales, parce que BM a eſté couppée en autant de parties egales. Parquoy veu que tant AN que BQ, ſont egales à chaſque partie NO, OP, PQ; toutes les cinq parties AN, NO, OP, PQ, & QB, ſeront egales entr'elles. Ce qu'il falloit faire.

2. Couppper vne ligne droicte donnée en deux parties, qui ſoient entr'elles ſelon vne raiſon donnée.

Soit la ligne droicte donnée AB, qu'il faut couppper en deux parties, qui ayent telle raiſon entr'elles que C à D: Du poinct A, ſoit menée AE faiſant quelconque angle auec AB; & d'icelle AE, ſoit couppée AF egale à C, & puis FG egale à D: en apres ſoit menée BG, & du poinct F tiré FH parallele à icelle BG, laquelle couppe AB en H: & icelle AB ſera couppée à iceluy poinct H, ſelon la raiſon de C à D, puis que par la 2. prop. de ce liure, AH eſt à HB, comme AF à FG, qui ſont egales à C & D. Ce qu'il falloit faire.

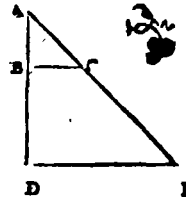


PROBL. 3. PROP. XI.

A deux lignes droictes données, en trouuer vne troiſieſme proportionnelle.

Soient deux lignes droictes données AB & AC, auſquelles il en faut trouuer vne troiſieſme proportionnelle.

Soient diſpoſées icelles lignes en vn angle CAB; & apres auoir prolongé AB interminement, ſoit faicte BD egale à AC, & mené CB, puis du poinct D, ſoit tirée DE parallele à BC, rencontrant AC prolongée en E. Ie dis que CE eſt la troiſieſme proportionnelle requiſe, c'eſt à dire que comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE. Car puis qu'au triangle



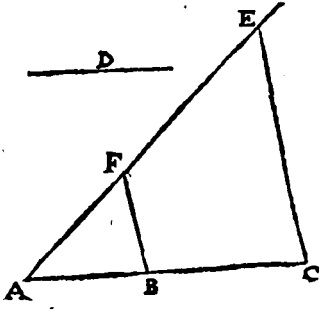
ADE, la ligne droicte BC eſt parallele au coſté DE, par la 2. p. 6. comme AB ſera à BD, ainſi AC à CE: mais par la 7. p. 5. comme AB eſt à BD, ainſi la meſme AB eſt à AC, egale à icelle BD. Donc comme AB eſt à AC, ainſi AC à CE. Partant à deux lignes droictes données, nous en auons trouué vne troiſieſme proportionnelle. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 4. PROP. XII.

A trois lignes droictes donnees, en trouuer vne quatrieſme proportionnelle.

Soient les trois lignes droictes données AB, BC, & D, auſquelles il en faut trouuer vne quatrieſme proportionnelle.

Soient diſpoſées les deux premieres AB, BC, ſelon vne

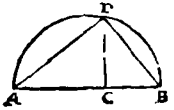


ligne droicte AC; & ayant tiré de A vne ligne droicte interminée AE, faisant auec la premiere AB, quelconque angle, comme A; d'icelle AE, soit couppée AF egale à D, & menée BF: en apres, de C, soit menée CE parallele à icelle BF, rencontrant AE en E. Ie dis que FE est la quatriesme proportionnelle requise. Car puis qu'au triangle AEC, la ligne BF est parallele à CE, par la 2. p. 6. comme AB est à BC, ainsi AF où D est à FE. Nous auons donc trouué vne quatriesme ligne proportionnelle à trois données: Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. XIII.

Entre deux lignes droictes données, trouuer vne moyenne proportionnelle.

Soient les deux lignes droictes données AC & CB, entre lesquelles il en faut trouuer vne moyenne proportionnelle.



Soient icelles lignes AC, CB, disposées en vne ligne droicte AB, sur laquelle soit descrit vn demy cercle ADB: & apres auoir du poinct C leué la perpendiculaire CD, qui rencontre la circonference en D: Ie dis qu'icelle CD est la moyenne proportionnelle demandée.

Car estans menées les deux lignes droictes AD & BD, l'angle ADB dãs le demy cercle, sera droict par la 31. p. 3. Veu donc que de l'angle droict ADB du triangle rectangle ADB, est tirée DC perpendiculaire à la base AB, par le Corol. de la 8. p. 6. icelle CD sera moyenne proportionnelle entre AC,

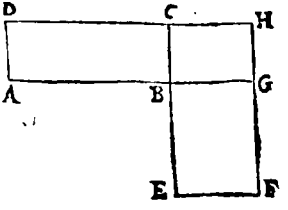
CB. Nous auons donc trouué vne moyenne proportionnelle entre les deux lignes données : Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

De cecy eſt euident qu'vne ligne droicte tirée perpendiculairement de quelconque poinct du diametre d'vn cercle, iuſques à la circonference d'iceluy, eſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens du diametre faicts par icelle perpendiculaire. Car de quelconque poinct pris au diametre AB, eſtant leuée vne perpendiculaire iuſques à la circonference, par les meſmes raiſons que deſſus, icelle perpend. ſera moyenne prop. entre les deux ſegmens du diametre AB.

THEOR. 9. PROP. XIV.

Des parallelogrammes egaux, qui ont vn angle egal à vn angle; les coſtez au long des angles egaux, ſont reciproques: & les parallelogrammes qui ont vn angle egal à vn angle, & les coſtez au long des angles egaux reciproques, ſont egaux.

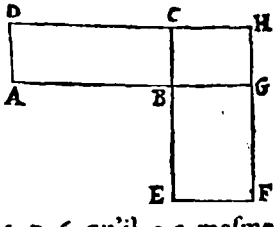


Soient deux parallelogrammes egaux ABCD, & BEFG, deſquels les deux angles ABC & EBG ſoient egaux: Ie dis que les coſtez qui ſont autour d'iceux angles

egaux, ſant reciproques: c'eſt à dire, que AB eſt à BG, comme EB à BC.

Car les parallelogrammes AC, BF, eſtans diſpoſez de telle façon que les deux coſtez AB & BG, facent vne ligne droicte AG; les deux coſtez EB, BC, feront auſſi vne ligne droicte EC, à cauſe des angles egaux ABC, EBG, comme il eſt euident par la 2. com. ſent. 13. & 14. p. 1. & ſoient prolongez DC, FG, iuſques à ce qu'ils ſe rencontrent en H. Puis donc que les deux parallelogrammes AC, EG, ſont egaux, ils auront vne meſme raiſon au parallelogramme BH, par la 7. p. 5. Mais la raiſon du parallelogramme AC au parallelog. BH, eſt par la 1. p. 6. comme celle de la baſe AB à la baſe BG. Item celle des parallelogrammes EG, BH, eſt comme celle de EB à BC: & partant par la 11. p. 5. comme AB à BG, ainſi EB à BC. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la ſeconde partie; ſi AB eſt à BG, comme EB à BC, & que les angles ABC & EBG ſoient egaux: Ie dis que les parallelogrammes AC & EG, ſeront auſſi egaux.



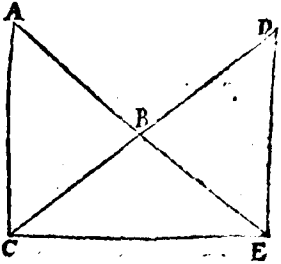
Car ayant fait la meſme conſtruction que deuant, on prouuera par la 1. p. 6. qu'il y a meſme raiſon du parallelogramme AC au parallelogramme BH, que de la baſe AB à la baſe BG: pareillement qu'il y a meſme raiſon du parallelogramme EG au parallelogramme BH, que de EB à BC: mais les raiſons des baſes ſont poſees ſemblables: donc auſſi les raiſons des parallelogrammes AC & EG, au troiſieſme BH ſeront ſemblables par la 11. p. 5.

& partant par la 9. p. 5. ils seront egaux. Parquoy des parallelogrammes egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. XV.

Les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, ont les costez au long des angles egaux reciproques: & les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, & les costez au long des angles egaux reciproques, sont egaux.

Soient deux triangles egaux ABC, & DBE, ayans les angles au poinct B egaux. Ie dis que les costez qui sont au long d'iceux angles egaux, sont reciproques: c'est à dire, que comme AB est à BE, ainsi DB sera à BC.



Car les triangles estans disposez en sorte que les deux lignes AB & BE se rencontrent directement, & facent vne seule ligne droicte AE, les deux lignes DB, BC, feront aussi vne ligne droicte CD par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. & soit menée la ligne CE. Pour-autant que les deux triangles ABC & DBE sont egaux, ils auront vne mesme raison au triangle BEC par la 7. p. 5. mais par la 1. p. 6. la raison du triangle ABC au triangle EBC, (estant de mesme hauteur) est comme de la base AB à la base BE: pareillement par la mesme 1. p. 6. le triangle DBE

ſera au triangle ECB, comme DB eſt à BC : & partant par la 11. p. 5. AB ſera à BE, comme DB à BC. Ce qui a eſté propoſé.

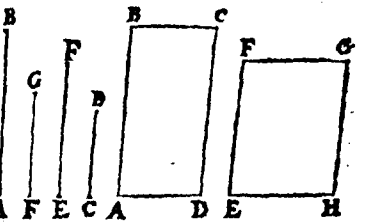
Pour la ſeconde partie : ſoient les coſtez d'alentour les angles egaux au poinct B, reciproques, c'eſt à ſcauoir, que comme AB eſt à BE, ainſi DB à BC. Ie dis que les triangles ABC, DBE, ſont egaux. Car ayant fait la meſme conſtruction que cy-deſſus, par la 1. p. 6. comme AB ſera à BE, ainſi le triangle ACB au triangle BCE, & comme DB à BC, ainſi le triangle BED au meſme triangle BEC : mais par l'hypotheſe les raiſons des baſes ſont ſemblables : donc auſſi les raiſons des triangles ACB, BED, au troiſieſme CBE ſeront ſemblables par la 11. p. 5. & partant ils ſeront egaux par la 9. p. 5. Donc les triangles egaux ayans vn angle egal à vn angle, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XVI

Si quatre lignes droictes ſont proportionnelles ; le rectangle compris des extremes, eſt egal à celuy des moyennes : & ſi le rectangle compris des extremes, eſt egal au rectangle compris des moyennes ; les quatre lignes ſont proportionnelles.

Soient quatre lignes droictes proportionnelles AB, FG, EF, BC, ſcauoir eſt que AB ſoit à FG, comme EF à BC, & ſoit le rectangle ABCD compris des extremes AB, BC ; & le rectangle EFGH com-

pris sous les moyennes EF, FG. Ie dis qu'iceux rectangles AC, EG, sont egaux.



Car puis que les angles droits B & F sont egaux : & que comme AB est à FG, ainsi EF à BC, les costez au long des angles egaux B & F, seront reciproques par la 2. def. 6. & partant par la 14. p. 6. les parallelogrammes AC & EG seront egaux. Ce qui a esté proposé.

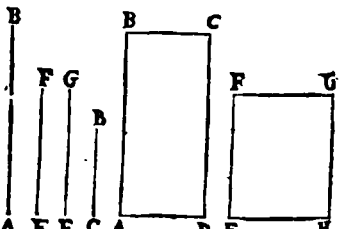
Quant à la seconde partie : soient les rectangles AC, EG egaux. Ie dis que les quatre lignes AB, FG, EF, BC, sont proportionnelles : c'est à dire, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Car puis que les rectangles sont egaux, & ont les angles B & F aussi egaux, scauoir droicts, ils auront les costez au long d'iceux angles egaux, reciproques par la 14. p. 6. scauoir est, que comme AB est à FG, ainsi EF à BC. Si donc quatre lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XVII.

Si trois lignes droictes sont proportionnelles ; le rectangle compris des extremes, sera egal au quarré de la moyenne : & si le rectangle compris des extremes est egal au quarré de la

moyenne; les trois lignes seront proportionnelles.

Soient trois lignes droictes ptoportionnelles AB, EF, BC, & soit le rectangle ABCD compris soubs les extremes AB, BC, & le quarré de la moyenne EF soit EFGH. Ie dis que le rectangle AC est egal au quarré EG.



Car estant prise FG egale à EF, les quatre ligne AB, EF, FG, BC, seront proportionnelles, & le quarré EG sera compris soubs les moyennes EF, FG, à cause de l'egalité d'icelles. Parquoy par la prec. pro. le rectangle AC compris des deux extremes AB, BC, est egal au rectangle des moyennes EF, FG, c'est à dire au quarré EG. Ce qui estoit proposé.

Pour la seconde partie; le rectangle AC soit egal au quarré EG: Ie dis que comme AB est à EF, ainsi EF à BC. Car puis que les rectangles AC, EG sont egaux, par la 16. p. 6. comme AB sera à FE, ainsi FG à BC: mais par la 7. p. 5. comme FG est à BC, ainsi EF egale à icelle FG, est à la mesme BC: & partant comme AB est à EF, ainsi EF est à BC. Si donc trois lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

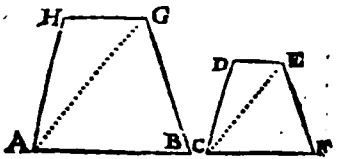
Il est manifeste par la derniere partie de ce Theoreme, qu'une

qu'vne ligne droicte eſt moyenne proportionnelle entre deux autres lignes droictes, qui comprennent vn rectangle egal au quarré d'icelle ligne. Car pource que le rectangle de AB, BC eſt egal au quarré de EF, il a eſté demonſtré, que comme AB à EF, ainſi EF à BC; & partant EF eſt moyenne prop. entre AB & BC.

PROBL. 6. PROP. XVIII.

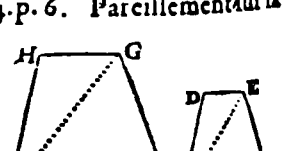
Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire vne figure rectiligne ſemblable, & ſemblablement poſee à vne figure rectiligne donnee.

Soit la ligne droicte donnee AB, ſur laquelle il faut conſtruire vne figure ſemblable, & ſemblablement poſee à la figure rectiligne donnee CDEF.



De quelque angle que ce ſoit de la figure donnee ſoient menees des lignes droictes à chacun des angles oppoſez, afin de diuiſer icelle figure en triangles; comme icy de l'angle C, ſoit menee à l'angle oppoſé E, la ligne droicte CE, laquelle diuiſe la figure donnee en deux triangles CEF, CDE: eſ apres par la 23. p. 1. ſoit deſcrit ſur la ligne AB, & aux poincts extremes A & B, les deux angles BAG & ABG, egaux, ſçauoir l'vn à l'angle FCE, & l'autre à l'angle CFE. Il eſt euident par la 32. p. 1. que le troiſieſme AGB ſera egal au troiſieſ-

me CEF, & les triangles CEF, AGB seront equiangles, & auront les costez au long des angles egaux proportionnaux par la 4. p. 6. Pareillement sur la ligne AG, & aux deux poincts A & G, soient descrits les deux angles GAH & AGH, egaux aux deux DCE & CED chacun au sien : aussi par la 32. p. 1. le troisiesme H sera egal au troisiesme D, & les triangles CDE & AHG seront equiangles, & par la 4. p. 6. ils auront les costez au long des angles egaux proportionnaux: ainsi l'angle D estant egal à l'angle H, & l'angle F à l'angle B, les deux de C aux deux de A, & les deux de E aux deux de G: les deux figures CDEF, ABGH, seront equiangles: & pourautant qu'elles sont composees de triangles equiangles, lesquels ont les costez au long des angles egaux proportionnaux, comme CF sera à FE, ainsi AB à BG : item comme CF est à CE, ainsi AB à AG; & comme CE à CD, ainsi AG a AH : & en raison egale, comme CF sera à CD, ainsi AB sera à AH; par ainsi les costez au long des angles egaux F, B, & FCD, BAH, seront proportionnaux, & ainsi des autres. Parquoy les figures CDEF, AHGB seront semblables, & semblablement descrites. Nous auons donc faict ce qui estoit requis.



SCHOLIE.

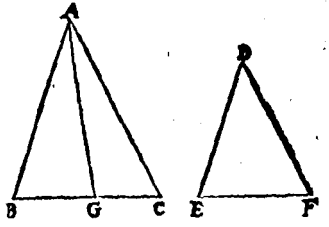
Il est euident par ce que nous auons dit sur la 31. pr. 1. que si la figure donnee auoit plus de quatre costez, elle se-roit diuisee en plus de deux triangles : & alors il fau-droit pour les deux premiers operer ainsi que dessus, puis

apres proceder de triangle en triangle iusques à la fin, descriuant touſiours ſur & aux extremitez de la derniere ligne deux angles egaux aux deux de deſſus la diagonalle correſpondante, ainſi qu'il a eſté fait icy ſur AG, homologue & correſpondante à la diagonale CE.

THEOR. 13. PROP. XIX.

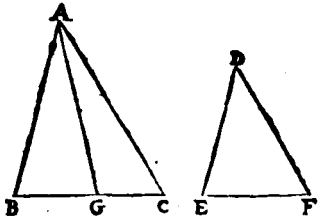
Les triangles ſemblables, ſont l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.

Soient deux triangles ſemblables ABC & DEF, ayans les angles B & E egaux: item C & F, mais cõme AB eſt à BC ainſi DE à EF, &c. Ie dis qu'ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon AB & DE ou AC & DF, ou BC & EF, c'eſt à dire que ſi à deux quelconques de ces coſtez de meſme raiſon, comme par exemple BC & EF, on trouue la troiſieſme proportionnelle BG; le triangle ABC ſera au triangle DEF, comme la ligne BC eſt à la troiſieſme proportionnelle BG: car telle eſt la raiſon doublee par la 10. def. 5.



Car eſtant tiree la ligne AG: d'autant que les triangles ABC, DEF ſont ſemblables, & que comme AB eſt à BC, ainſi DE eſt à EF, en permutant par la 16. p. 5. comme AB ſera à DE, ainſi BC ſera à EF: mais comme BC eſt à EF, ainſi EF eſt à BG par

la conſtruction. Donc comme AB ſera à DE, ainſi EF ſera à BG par la 11.p.5 & par ainſi les deux triangles ABG, DEF, auront les coſtez au long des angles egaux B & E, reciproques: & par la 15.p. 6. iceux triangles ABG, DEF, ſeront egaux entr'eux:



& partant comme le triangle ABC ſera au triangle DEF, ainſi ſera le meſme triangle ABC au triangle ABG par la 7.p 5. Mais comme le triangle ABC eſt au triangle ABG de meſme hauteur, ainſi eſt la baſe BC à la baſe BG par la 1.p.6. Donc comme le triangle ABC eſt au triangle DEF, ainſi eſt BC à BG. Mais BC, EF, BG, eſtans continuellement proportionnelles, BC eſt à BG en raiſon doublee de BC à EF par la 10. def.3. donc auſſi le triangle ABC eſt au triangle DEF en raiſon doublee du coſté BC au coſté EF. Donc les triangles ſemblables &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

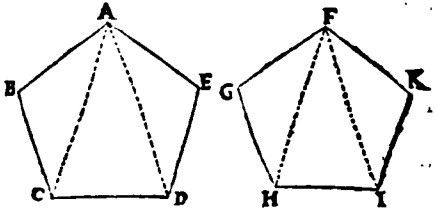
COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, qu'eſtans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere ſera à la troiſieſme, ainſi le triangle deſcrit ſur la premiere ſera au triangle ſemblable, & ſemblablement poſé ſur la ſeconde. Car il a eſté demonſtré, que comme BC 1. eſt à BG 3. ainſi le triangle ABC au triangle DEF.

THEOR. 14 PROP. XX.

Les polygones ſemblables peuuent eſtre

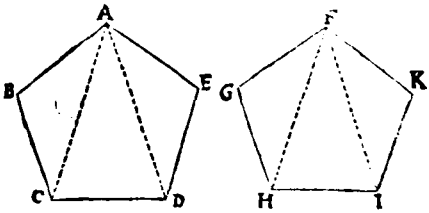
diuiſez en nombre egal de triangles ſemblables entr'eux, & proportionnaux à leur tout : & les polygones ſont l'vn à l'autre en raiſon doublee de leurs coſtez de meſme raiſon.



. Soient deux polygones ſemblables AB CDE, & FGHIK, ayans les angles A, F, egaux. Item B, G, &c. Ie dis premierement qu'iceux polygones peuuent eſtre diuiſez en nombre egal de triangles ſemblables.

Car apres auoir mené les lignes AC, AD, FH, FI, il eſt euident que l'vne des figures eſt diuiſee en autant de triangles que l'autre. Et d'autant que l'angle B eſt poſé egal à l'angle G, & que comme BA eſt à BC, ainſi GF à GH: par la 6. pr. de ce liure les triangles ABC & FGH ſeront equiangles, & par la 4. pr. de ce meſme liure, ils auront les coſtez au long des angles egaux proportionnaux, & par conſequent ils ſeront ſemblables: par meſme diſcours, les triangles AED & FKI, ſeront auſſi ſemblables. Pareillement par ce qui a eſté dit cy deſſus AC eſt à CB, comme FH à HG: mais BC eſt à CD comme GH à HI: car ce ſont coſtez de figures ſemblables: donc en raiſon egale par la 22. p. 5. AC ſera

à CD, comme FH à HI : & d'autant que les angles BCD, GHI ſont egaux, & les angles BCA, GHF auſſi egaux ; ceux-cy eſtans oſtez de ceux-là,



les reſtans ACD, FHI, ſeront pareillement egaux : & partant par la 6. p. 6. les triangles ACD, & FHI, ſeront equiangles, & par conſequent ſemblables.

Ie dis ſecondement, qu'iceux triangles ſont proportionnaux à leur tout : c'eſt à dire, que chaſque triangle de l'vn des polygones a telle raiſon à ſon triangle correſpondant de l'autre polygone, que tout le polygone a tout le polygone. Car d'autant que les trois triangles de l'vne des figures ſont ſemblables aux trois triangles de l'autre, chacun au ſien, & que par la prop. preced. ils ſont l'vn à l'autre, en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon : les triangles ABC & FGH, ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée de AC à FH : auſſi en la meſme raiſon doublée ſeront les triangles ACD, FHI : & le troiſieſme AED eſtant au troiſieſme FKI en raiſon doublée de AD à FI, qui eſt la meſme que de AC à FH, eſtans coſtez de triangles ſemblables : auſſi les triangles AED, FKI, ſeront l'vn à l'autre en raiſon doublée de AC à FH : & par la 12. p. 5. tous les triangles du premier polygone, ſeront à tous les triangles de l'autre polygone, comme l'vn des triangles de l'vn d'iceux, à ſon reſpondant de l'autre.

Ie dis tiercement, que le polygone eſt au polygo-

ne en raiſon doublée des coſtez de meſme raiſon, comme CD & HI : car puiſque toute la figure ABCDE, eſt à toute la figure FGHIK, comme l'vn des triangles de l'vne, ſcauoir ACD, eſt à l'vn des triangles de l'autre, ſcauoir FHI, leſquels triangles par la prop. prec. ſont en raiſon doublée de CD à HI, par la 11. p. 5. le polygone ſera au polygone, en raiſon doublée des meſmes coſtez CD & HI. Parquoy les polygones ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

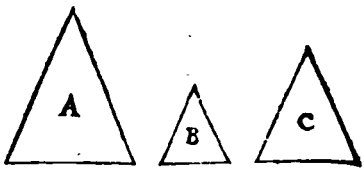
COROLLAIRE.

Par cecy eſt manifeſte, qu'eſtans trois lignes droictes proportionnelles, comme la premiere ſera à la tierce, ainſi ſera le polygone deſcrit ſur la premiere au polygone ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde; puis qu'il a eſté demonſtré que les polygones ſont entr'eux en raiſon doublée de leurs coſtez de meſme raiſon, c'eſt à dire, comme le coſté du premier a vne troiſieſme proportionnelle auſdits coſtez de meſme raiſon.

THEOR. 15. PROP. XXI.

Les figures rectilignes ſemblables à vne meſme figure rectiligne, ſont auſſi ſemblables entr'elles.

Soit la figure rectiligne A ſemblable à la figure rectiligne B, & la figure rectiligne C, auſſi ſemblable à la meſme B: Ie dis que les figures A & C ſeront ſemblables entr'elles.

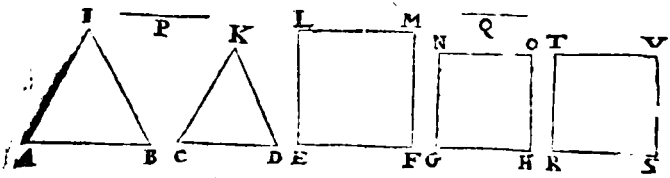


Car d'autant que chacune d'icelles figures A & C eſt ſemblable à B, elle a les angles egaux aux angles de B, & les coſtez d'autour iceux angles egaux, proportionnaux par la 1. def. 6. & partant par la 1. com. ſent. les angles de A, ſeront auſſi egaux aux angles de C; & par la 11. prop. 5. les coſtez au long des angles egaux ſeront proportionnaux: & par la 1. def. 6. A & C ſeront ſemblables: donc les figures rectilignes ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demõſtrer.

THEOR. 16. PROP. XXII.

Si quatre lignes droictes ſont proportionnelles; les figures rectilignes ſemblables, & ſemblablement deſcrites ſur icelles, ſeront auſſi proportionnelles: & ſi icelles figures ainſi deſcrites ſont proportionnelles, icelles lignes droictes ſeront auſſi proportionnelles.

Soient quatre lignes droictes proportionnelles AB, CD, EF, GH: & ſur AB, CD, ſoient conſti-



tuees deux quelconques figures rectilignes ABI, CDK ſemblables, & ſemblablement deſcrites: item ſur EF & GH deux autres quelconques figures re-

ctilignes semblables, & semblablement descrites EFML, GHON. Ie dis premierement que ces quatre figures rectilignes sont proportionnelles, c'est à dire, que comme ABI est à CDK, ainsi EFML est à GHON.

Qu'il ne soit ainsi: aux deux lignes AB & CD, soit trouuée P troisiesme proportionnelle par la 11. p. 6. & aux deux EF & GH, soit trouuée Q aussi troisiesme proportionnelle: & d'autant que AB est à CD, comme EF est à GH: Item CD à P, comme GH à Q: en raison egale AB sera à P, comme EF à Q par la 22. p. 5. Mais comme AB est à P, ainsi le rectiligne ABI est au rectiligne CDK par le coroll. de la 19. ou 20. p. 6. Item comme EF est à Q, ainsi le rectiligne EM est au rectiligne GO. Donc comme ABI est à CDK, ainsi EM est à GO par la 11. p. 5.

Ie dis pour la seconde partie, que si icelles figures semblables, & semblablement descrites sont proportionnelles, que les lignes sur lesquelles elles sont descrites, seront aussi proportionnelles, c'est à scauoir, que cõme AB est à CD, ainsi EF est à GH.

Car ayant trouué RS quatriesme proportionnelle aux trois lignes AB, CD, EF par la 12. p. 6. sur icelle RS soit descrit le rectiligne RV semblable, & semblablement posé au rectiligne EM par la 18. p. 6. & partant aussi semblable au rectiligne GO par la prop. prec. & d'autant que comme AB est à CD, ainsi EF est à RS, par ce qui a esté demonstré cy dessus, cõme le rectiligne ABI sera au rectiligne CDK, ainsi le rectiligne EM sera au rectiligne RV. Mais comme ABI est à CDK, ainsi aussi a esté posé EM à GO: donc par la 11. p. 5. comme EM sera à RV, ainsi EM sera à GO; & partant par la 9. p. 5. les rectili-

gnes RV, GO seront egaux : lesquels estans semblables, & semblablement descrits, consistent necessairement (comme nous demonstrerons incontinent) sur lignes droictes egales RS, GH. Parquoy par la 7. p. 5. comme EF sera à RS, ainsi EF sera à GH. Mais par l'hypothese EF est à RS, comme AB à CD : donc par la 11. p. 5. comme AB sera à CD, ainsi aussi EF sera à GH. Parquoy si quatre lignes sont proportionnelles, les figures rectilignes semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Or que les rectilignes egaux semblables & semblablement descrits, tels que sont GO, RV, consistent sur lignes droictes egales, on le prouuera ainsi. Si les lignes GH, RS peuuent estre inegales, soit GH la plus grande : & puis que les rectilignes sont semblables, comme GH est à HO, ainsi RS à SV : & GH ayant esté posee plus grande que RS, par la 14. p. 5. HO sera aussi plus grande que SV : & partant le rectiligne GO plus grand que le rectiligne RV, puis que cestuy cy peut estre constitué dans celuy-là : ce qui est absurde, ayans esté posez egaux. Les lignes GH, RS ne sont donc pas inegales, mais egales. Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

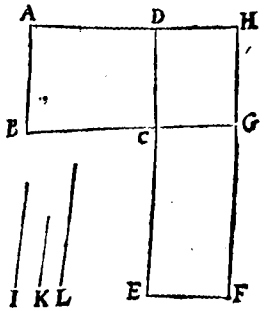
Il est euident, que s'il y a aussi trois lignes droictes proportionnelles, les figures rectilignes semblables, & semblablement descrites sur icelles, seront pareillement proportionnelles, &c. Car la ligne moyenne, & son rectiligne estant prise deux fois, on aura quatre lignes proportionnelles : donc aussi quatre rectilignes proportionnaux, comme il a esté cy dessus demonstré. Veu donc que le recti-

ligne qui sera descrit sur la seconde ligne, sera egal à celuy descrit sur la troisiesme. Est manifeste ce qui estoit proposé.

THEOR. 17. PROP. XXIII.

Les parallelogrammes equiangles, sont l'vn à l'autre en la raison composee de celles de leurs costez.

Soient deux parallelogrãmes equiangles ABCD, & CEFG, ayans les deux angles BCD, ECG egaux: Ie dis que la raison du parallelogr. AC au parallelogramme CF est composee de celles de leurs costez, scauoir est composée de la raison qui est de BC à CG, & de celle qui est de DC à CE.



Car soient disposez les deux parallelogrammes l'vn contre l'autre, en sorte que BC & CG se rencontrent directement, & ne facent qu'vne seule ligne droicte, & alors DC & CE feront aussi vne ligne droicte, puis que les angles BCD, ECG sont egaux, comme il est euident par les 2. com. sent. 13. & 14. p. 1. Soient prolongez les costez AD, FG, qui se rencontrant en H, facent le parallelogramme DCGH; puis soit prise quelconque ligne droicte I; & aux trois BC, CG & I, soit trouuuée la 4. proportionnelle K. Item aux trois DC, CE & K, la 4. prop. L. Veu donc que par la 1. p. 6. comme BC est à CG, ainsi AC à DG; & comme BC à CG,

ainsi aussi I est à K par l'hypothese: pareillement comme AC sera à DG, ainsi sera I à K, par la 11. p. 5. Mais par mesme raison DG est à CF, comme K à L, (attendu que comme DG à CF, ainsi DC à CE, par la 1. p. 6. qui est la mesme raison que de K à L.) Donc en raison egale, comme AC sera à CF, ainsi I sera à L par la 22. p. 5. Mais la raison de I à L est composee de la raison de BC à CG, & de celle de DC à CE par la 5. def. de ce liure. Donc aussi d'icelles raisons est composee la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF. Parquoy les parallelogrammes equiangles sont l'vn à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

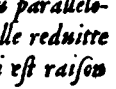
Le mesme sera encore demonstré plus briefuement, ainsi qu'il ensuit, Les parallelogrammes AC, CF estans disposez comme auparauant, AC sera à CH, comme BC à CG; & CH à EG comme DC à EC par la 1. p. 6. Mais la raison de AC à EG, est composee des raisons entre-moyennes, sçauoir de AC à CH, & de CH à EG par la 5. def. 6. Donc la mesme raison de AC à EG sera aussi composee des raisons de BC à CG, & de DC à CE, qui sont egales à icelles entre-moyennes. Ce qui est proposé.

Or il est facile de colliger des choses cy-dessus dittes & demonstrees par Euclide en cette 23. p. comment on compose en lignes, ou en nombres vne raison de deux ou de dauantage de raisons. Car des raisons de BC à CG, & DC à CE, a esté composée la raison de I a L en lignes: mais de 3 à 2 en nombres. Que s'il faut composer vne raison de trois autres proposees; ayant trouué celle composee de deux, d'icelle & de la troisiesme nous en composerons vne autre en la mesme maniere, laquelle sera com-

posee de trois : & ainsi consequemment des autres.

Cette 23. prop. est aussi veritable en nombres, comme le demonstre Euclide au 8. l. p. 5. C'est pourquoy nous enseignerons icy comme il faut trouuer la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, les raisons de leurs costez, estans cognues en nombres. Comme par exemple, si la raison de BC à CG est la mesme que de 5 à 2, & celle de DC à CE, la mesme que de 3 à 5, nous trouuerons la raison d'iceux parallelogrammes ainsi. Ayant posé la premiere raison estre 5 à 2, soit fait que comme 3 est à 5, (qui est la derniere raison) ainsi 2 soit à vn autre nombre, qui sera trouué estre $3\frac{1}{3}$: Cela fait, nous aurons les trois nombres 5, 2, $3\frac{1}{3}$, lesquels auront entr'eux les deux raisons proposees, & consequemment en delaissant le nombre entre-moyen 2, demeurera 5 à $3\frac{1}{3}$ pour la raison composee d'icelles : & telle sera la raison du parallelogramme AC au parallelogramme CF, laquelle reduitte en nombres entiers, sera 15 à 10, ou 3 à 2, qui est raison sesquialtere.

On peut aussi en la mesme maniere que dessus oster vne raison d'vne autre raison plus grande : comme par exemple, soit la raison de A à B, qu'il faut oster d'vne plus grande raison C à D. Soit fait que comme A est à B, ainsi C soit à quelque autre, sçauoir E, qui soit posée moyenne entre C & D : & la raison de E à D sera la raison restante de la soustraction requise. Car puisque la raison de C à D est composee de celle de C à E, & de E à D ; si on en oste celle-là de C à E, ou de A à B, qui luy est egale, restera la susdite raison de E à D.



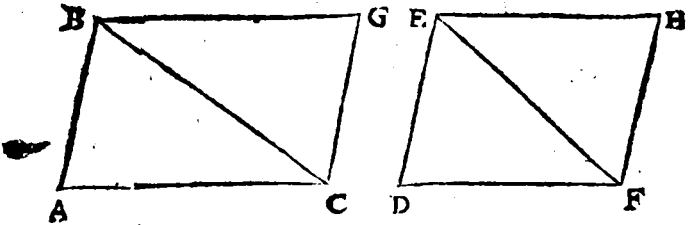
Qu'il faille encore oster la raison de 4 à 3, de celle 6 à 2, soit fait que comme 4 est à 3, ainsi 6 soit à vn au-

tre nombre, ſçauoir $4\frac{1}{2}$: *& la raiſon de* $4\frac{1}{2}$ *à* 2, *ſera le reſte requis. Car il eſt euident que la raiſon de* 6 *à* 2, *eſt compoſee de celles de* 6 *à* $4\frac{1}{2}$, *& de* $4\frac{1}{2}$ *à* 2: *& partant en oſtant de ces deux raiſons celle de* 6 *à* $4\frac{1}{2}$, *ou de* 4 *à* 3, *qui luy eſt egale, reſtera la ſuſdite raiſon de* $4\frac{1}{2}$ *à* 2, *qui eſt double ſeſquiquarte.*

Commandin demonſtre en ce lieu les trois Theor. ſuiuans.

1. Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont en raiſon compoſee des coſtez, qui comprenant l'angle egal.

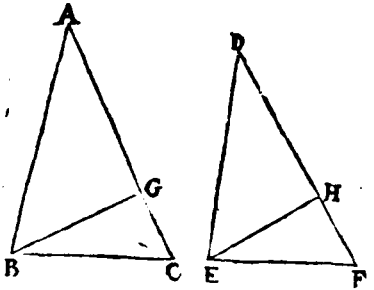
Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle B egal à l'angle E: Ie dis que le triangle ABC eſt au triangle DEF en raiſon compoſee des coſtez comprenans les angles



egaux B & E. Car ayant acheué les parallelogrammes AG, DH, ils ſeront equiangles: & partant par la 23. *p.* 6. *la raiſon d'iceux ſera compoſee de celle de leurs coſtez: Veu donc que les triangles ABC, DEF, deſquels ils ſont moitiez par la* 34. *p.* 1. *ſont en la meſme raiſon qu'iceux par la* 15. *p.* 5. *auſſi iceux triangles ſeront l'vn à l'autre en icelle raiſon compoſee des coſtez.*

2. Les triangles qui ont vn angle egal à vn angle, ſont l'vn à l'autre, en la meſme raiſon que les rectangles compris ſous les coſtez, qui contiennent l'angle egal.

Soient les triangles ABC, DEF, ayans l'angle A egal à l'angle D : ie dis que le triangle ABC eſt au triãgle DEF, comme le rectangle de AB, AC, eſt au rectangle de DE, DF. Car eſtans tirees ſur AC, DF, les perpendiculaires BG, EH ; les triangles ABG, DEH, ſeront equiangles, comme appert par le Corol. de la 32. p. 1. Donc par la 4. p. 6. comme GB eſt à BA, ainſi HE à ED. Mais par la 1. p. 6. comme GB eſt à BA, ainſi le rectangle de BG, AC, au rectangle de BA, AC, pource que poſant GB, BA, baſes, la hauteur d'iceux rectangles ſera vne meſme, ſçauoir AC. Semblablement comme HE à ED, ainſi eſt le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF. Donc par la 11. p. 5. le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de AB, AC, comme le rectangle de EH, DF au rectangle de DE, DF ; & en permutant le rectangle de BG, AC ſera au rectangle de EH, DF, comme le rectangle de AB, AC au rectangle de DE, DF. Mais le rectangle de BG, AC, eſt au rectangle de EH, DF, ainſi que le triangle ABC au triangle DEF par la 15. p. 5. pource que ces triangles ſont moitiez d'iceux rectangles, par la 41. p. 1. (Car ils ont meſmes baſes qu'iceux AC, DF, & meſmes hauteurs BG, EH : & partant entre meſmes paralleles) donc auſſi le triangle ABC ſera au triangle DEF, comme le rectangle de AB, AC, eſt au rectangle de DE, DF. Ce qui eſtoit propoſé.

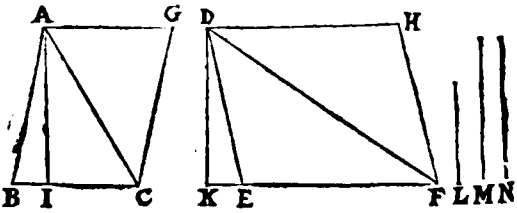


COROLLAIRE.

De cecy reſulte que les parallelogrammes equiangles ſont auſsi entr'eux, en la meſme raiſon que les rectangles compris ſous les coſtez des angles egaux, puis qu'ils ſont doubles d'iceux triangles.

3. Les triangles, & les parallelogrammes, ſont entr'eux en la raiſon compoſée de la raiſon des baſes, & de celle des hauteurs.

Soient les triangles ABC, DEF; & les parallelo-

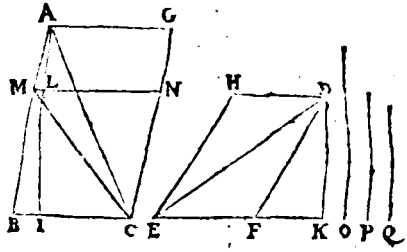


grammes BG, EH; & les hauteurs d'iceux ſoient AI, DK. Ie dis que la raiſon tant d'iceux triangles, que des parallelogrammes, eſt compoſee de la raiſon de la baſe BC à la baſe EF, & de celle de la hauteur AI à la hauteur DK. Car premierement ſoient les hauteurs egales, mais les baſes, ou auſsi egales, ou inegales: & ſoit faict comme BC à EF, ainſi L à M: & comme AI à DK, ainſi M à N, leſquelles ſeront egales, puis que AI, DK, ſont poſees egales: & partant par la 7. p. 5. L ſera à N, comme L à M, c'eſt à dire comme BC à EF. Mais par la 1. p. 6. comme BC eſt à EF, ainſi eſt le triangle ABC au triangle DEF; & le parallelogramme BG au parallelogramme EH: Donc par la 11. p. 5. comme L ſera à N, ainſi le triangle au triangle, & le parallelogramme au parallelogramme: Mais la raiſon de L à N eſt compoſee de la

raiſon

raison de L à M, c'est à dire de la raison de BC à EF, & de la raison de M à N, c'est à dire de AI à DK: donc la la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme BG au parallelogramme EH, est aussi composee des mesmes raisons.

Soient maintenant les hauteurs AI, DK inegales, & AI la plus grande: mais les baſes BC, EF, egales, ou aussi inegales. Soit fait que comme AI est à DK, ainsi O à P; & comme BC à EF, ainsi P à Q: puis ayant couppé IL egale à DK, par L, soit tiree MN parallele à BC, & ioincte CM. D'autant que le triangle ABC est au triangle MBC, & le parallelogramme BG au parallelogramme BN, comme la hauteur AI a la hauteur IL ou DK qui luy est egale, c'est à dire comme O à P, par le Scholie de la 1. p. 6. & comme le triangle MBC est au triangle DEF, & le parallelogramme BN au parallelogramme FH, ainsi est la baſe BC à la baſe EF. (pource qu'ils sont de mesme hauteur) c'est à dire ainsi P à Q: en raison egale ABC sera à DEF, & BG à FH, comme O à Q. Parquoy puis que la raison de O à Q est composee de la raison de O à P, c'est à dire de AI à DK, & de la raison de P à Q, c'est à dire de la baſe BC à la baſe EF: la raison du triangle ABC au triangle DEF, & du parallelogramme BG au parallelogramme FH, sera composee des mesmes raisons. Ce qui estoit proposé.



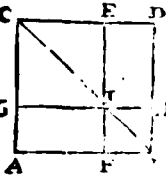
On peut demonstrer en la mesme maniere, que le triangle

DEF, qui à la moindre hauteur, eſt au triangle ABC, & le parallelogramme FH au parallelogramme BG en la raiſon compoſee de celle de la baſe EF à la baſe BC, & de celle de la hauteur DK à la hauteur AI; & ce enſaiſant que comme EF à BC ainſi Q à P; & puis comme DK à AI, ainſi P à O; & tout le reſte comme deſſus. Appert donc ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 18. PROP. XXIV.

En tout parallelogramme, les parallelogrammes qui ſont à l'entour du diametre, ayans vn angle commun au total, ſont ſemblables entr'eux, & au total.

Soit le parallelogramme ABDC, duquel le diametre eſt BC, & à l'entour d'iceluy diametre ſoient les deux parallelogrammes GE & FH, ayans les angles B & C communs auec le total: Ie dis qu'iceux parallelogrammes GE & FH ſont ſemblables entr'eux, & au total ABDC.



Car d'autant que les lignes AB & GH ſont paralleles, ſur leſquelles tombent les lignes CB & CA par la 29. p. 1. l'angle externe CIG ſera egal à l'interne IBF, & l'externe CGI à l'interne A, auquel eſt auſſi egal l'externe IFB, attendu que BA tombe ſur les deux paralleles EF & CA. Parquoy les trois triangles CAB, CGI & IFB ayans chacun deux angles egaux à deux angles,

chacun au sien, les troisiesmes angles seront aussi egaux, & consequément iceux triangles seront equiangles entr'eux. Et par mesme raison les trois autres triangles CDB, CEI & IHB, quipar la 34. pr. 1. sont egaux aux trois precedents seront aussi equiangles entr'eux: Donc les parallelogr. composez d'iceux triangles, sçauoir AD, GE & FH, seront pareillement equiangles entr'eux. Dauantage, puis que le triangle CAB est equiangle au triangle CGI, & le triangle CDB au triangle CEI, par la 4. pr. 6. comme CA sera à AB, ainsi CG à GI: & par ainsi les costez d'autour les angles egaux A & G, sont proportionnaux. Derechef, comme AB est à BC, ainsi GI est à IC, & comme GB est à BD, ainsi CI est à IE. Donc en raison egale, comme AB sera à BD, ainsi GI sera à IE: & partant les costez d'alentour les angles egaux ABD, GIE sont proportionnaux. On prouuera en la mesme maniere que les costez d'alentour les autres angles egaux d'iceux parallelogrammes AD & GE sont aussi proportionnaux. Donc par la 1. def. 6, le parallelogramme GE sera semblable au parallelogramme total AD. Et par mesmes raisons, le parallelogramme FH se prouuera aussi semblable au mesme parallelogramme AD. Donc par la 21. p. 6. tous les trois parallelogrammes AD, GE & FH seront semblables entr'eux. Parquoy en tous parallelogrammes; les parallelogrammes qui sont à l'entour du diametre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

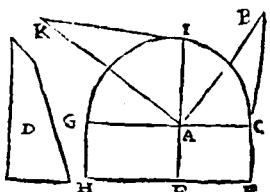
PROB. 7. PROP. XXV.

Descrire vne figure rectiligne, sembla-

ble à vne figure rectiligne donnee, & egale à vne autre proposee.

Soient deux figures rectilignes A B C & D : il faut faire vne autre figure rectiligne egale à D, & semblable à ABC.

Sur la ligne AC (qui est l'vn des costez du rectiligne ABC, auquel on en doit faire vn semblable) soit faict le rectangle ACFE egal à ladite figure ABC : Item sur la ligne AE, soit construit le rectangle GE egal à la figure donnee D, le tout par les 44. & 45. p. 1. & apres auoir trouué AI, moyenne proportionnelle entre GA & AC : Sur icelle AI, soit descrite la figure AIK semblable & semblablement posee à la figure ACB, par la 18. p. 6. Ie dis qu'icelle figure AKI sera aussi egale à la figure donnee D.



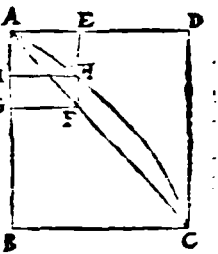
Car par la construction le rectangle GE est egal au rectiligne D, & le rectangle AF au rectiligne ABC, & par la 1. pr. 6. AF est à GE, comme CA à AG : Mais les deux figures semblables ABC & AKI sont l'vne à l'autre en la mesme raison de AC à AG, par le Corol. de la 19. ou 20. p. 6. attendu qu'icelles figures sont descrites sur les deux premieres lignes des trois proportionnelles CA, AI & AG. Donc par la 11. p. 5. ACB sera à IKA, comme AF à GE : & en permutant ACB sera à AF, comme IKA à GE, par la 16. p. 5. & parrant ACB estant egal à AF : aussi IKA sera egal à GE, & par consequent egal à D : & par la construction, iceluy rectiligne IKA est aussi sem

blable & semblablement posé au rectiligne ABC. Nous auons donc descrit vne figure rectiligne semblable à vne autre donnee, & egale à vne proposee. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 19. PROP. XXVI.

Si d'vn parallelogramme on oste vn parallelogramme semblable & semblablement posé au tout, ayant vn angle commun auec le tout; l'osté sera auec le tout à l'entour d'vn mesme diametre.

Du parallelogramme ABCD soit retranché le parallelogrãme AEFG semblable & semblablement posé au total BD, & ayant l'angle A commun auec iceluy: Ie dis qu'ils sont tous deux constituez à l'entour d'vn mesme diametre, c'est à dire qu'ayant mené au parallelogramme total BD le diametre AC, il passera par F, comme AFC.



Autrement, soit (s'il est possible) vn autre diametre AHC, qui ne passe par l'angle F du parallelogramme retranché EG: ains couppe le costé EF en H, & d'iceluy poinct soit menee HI parallele à AE, par la 31. prop. 1. donc le parallelogramme IE estant à l'entour d'vn mesme diametre auec le total DB sera semblable à iceluy, par la 24. p. 6. auquel

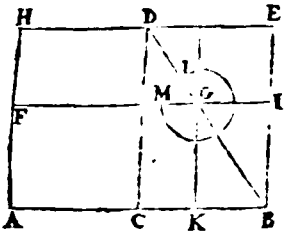
total, GE est aussi semblable par l'hypothese: & partant par la 21. p. 6. les parallelogrammes GE & IE seront semblables entr'eux: & par le 1. def. 6. AE sera à EF comme AE à EH: mais AE estant egal à soy mesme, il faudroit aussi par la 14. prop. 5. que EF 2e fust egale à EH 4e, c'est à sçauoir le tout à la partie, ce qui est absurde: donc le parallelogramme total BD, & le retranché GE, estoient constituez à l'entour d'vn mesme diametre: car il aduiendra tousiours la mesme absurdité, si on dit que le diametre de BD couppe à quelconque autre poinct, soit le costé EF ou FG, du parallelogramme retranché GE. Si donc d'vn parallelogramme on oste vn paralelogramme, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 20. PROP. XXVII.

De tous les parallelogrammes appliquez selon vne mesme ligne droicte, & defaillans de parallelogrammes semblables & semblablement posez à vn autre descrit sur la moitié de la mesme ligne; le plus grand est celuy-là qui est descrit sur l'autre moitié de la ligne, & semblable au defaut.

Soit la ligne droicte AB couppee en deux egalement en C, & sur CB moitié d'icelle, soit constitué quelconque parallelogramme BCDE,

duquel le diametre eſt BD : Si donc on accomplit tout le parallelogramme A B E H, le parallelogramme AD conſtitué ſur la moitié A C, ſera appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme CE, & ſemblable à iceluy defaut CE. Ie dis que de tous les parallelogrammes qui peuuent eſtre appliquez ſelon icelle ligne AB, & defaillans d'vne figure ſemblable & ſemblablement poſée à CE, le plus grand eſt AD, qui eſt deſcrit ſur la moitié AC, & defaillant du parallelogramme CE.



Car eſtant pris au diametre BD quelconque poinct G, & tirees par iceluy poinct les lignes droictes FGI, KG, paralleles aux lignes droictes AB, BE ; le parallelogramme A K G F appliqué ſelon la ligne A B, ſera defaillant du parallelogramme KI, lequel par la 24. prop. 6. eſt ſemblable & ſemblablement poſé à CE. Et d'autant que par la 43. prop. 1. les complemens CG, GE, ſont egaux, ſi on leur adiouſte KI commun ; auſſi CI, K E ſeront egaux. Mais CI, C F, eſtans ſur baſes egales, ſont pareillement egaux par la 36. prop. 1. donc auſſi CF, KE ſeront egaux, & leur adiouſtant CG commun, le parallelogramme AG ſera egal au gnomon L M. Parquoy puis que CE eſt plus grand qu'iceluy gnomon L M : (car CE, outre le gnomon, contient encore le parallelogramme D G) auſſi A D qui eſt egal à CE,

par la 36. prop. 1. ſera plus grand que le parallelogramme AG, du meſme parallelogramme DG. Et en la meſme maniere ſera demonſtré que AD eſt plus grand que tous autres parallelogrammes, qui ſeront appliquez ſelon la meſme ligne droicte AB, & defaillans de figures parallelogrammes ſemblables & ſemblablement poſees à CE. Parquoy de tous les parallelogrammes appliquez ſelon vne meſme ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

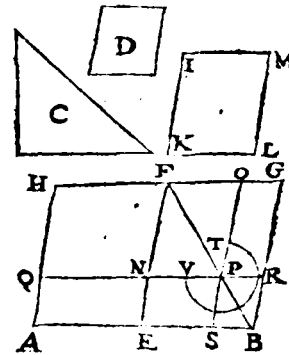
PROB. 8. PROP. XXVIII.

A vne ligne droicte donnee, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnee, & defaillant d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné, mais il faut que la figure rectiligne donnee ne ſoit plus grande que le parallelogramme, qui eſtant appliqué à la moitié de la ligne donnee, eſt ſemblable au parallelogramme donné.

Soit la ligne droicte donnee AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal à la figure rectiligne donnee C, defaillant d'vn parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

Ayant couppé AB en deux egalement en E,

ſur la moitié EB ſoit deſcrit le parallelogramme EFGB ſemblable & ſemblablement poſé à iceluy D, par la 18. pr. 6. & ſoit accomply le parallelogramme AHGB.



Maintenant, ſi AF eſt egal à C, on a ce que l'on demande: car il eſt appliqué ſelon la ligne AB, & defaillant du parallelogramme EG, qui eſt fait ſemblable à D. Mais ſi C eſt plus petit que AF, (car par l'hypotheſe il ne peut eſtre plus grand) il ſera auſſi plus petit que EG egal à iceluy AF: ſoit donc trouué l'excez de EG par deſſus C, [ceſte egalité ou inegalité, & excez ſera cogneu par ce que nous auons dit à la 45. p. 1.) lequel excez par la 25. p. 6. ſoit reduit en parallelogramme IKLM, ſemblable & ſemblablement poſé à EG: & veu que EG eſt plus grand que KM, il eſt euident que les coſtez EF, FG, ſeront auſſi plus grands que les coſtez homologues KI, IM: parquoy d'iceux EF, FG ſoient couppez FN, FO, egaux à iceux KI, IM, à fin qu'eſtant accomply le parallelogramme NFOP, il ſoit egal à KM, & ſemblable & ſemblablement poſé au meſme KM; & partant auſſi à EG: & par conſequent qu'eſtant tiré le diametre BF, iceux parallelogrammes EG, NO, ſoient autour d'iceluy diametre par la 26. p. 6. & apres auoir continué de part & d'autre les coſtez NP, OP, tant qu'il ſera de beſoin,

ſera conſtitué le parallelogramme AP, lequel ie dis eſtre le parallelogramme demandé.

Car il eſt appliqué à la ligne AB, & defaillant du parallelogramme SR, lequel par la 24. p. 6. eſt ſemblable à EG, partant auſſi à D. Item puis que IL eſt l'excez par lequel EG excede C, & qu'à iceluy excez eſt egal NO: Il eſt euident que le gnomon TV ſera egal à la figure C. Mais il eſt auſſi egal à AP, comme il a eſté prouué à la precedente: donc auſſi AP ſera egal à C. Mais il eſt appliqué à la ligne donnée AB, & defaillant du parallelogramme SR ſemblable au donné D. Nous auons donc à vne ligne droicte donnée appliqué vn parallelogramme, &c. Ce qu'il falloit faire.

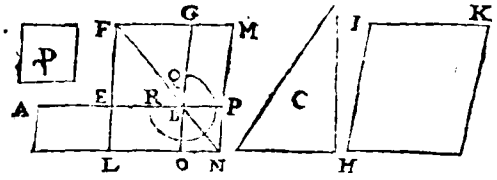
PROBL. 9. PROP. XXIX.

A vne ligne droicte donnée, appliquer vn parallelogramme egal à vne figure rectiligne donnée, excedant d'vn parallelogramme ſemblable à vn autre donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, à laquelle il faut appliquer vn parallelogramme egal au rectiligne donné C, mais excedant d'vn parallelogramme ſemblable au parallelogramme donné D.

La ligne AB ſoit couppée en deux egalement au poinct E, & ſur la moitié EB ſoit deſcrit le parallelogramme EFGB ſemblable, & ſemblablement poſé à D par la 18. p. 6. En apres, ſoit deſcrit le parallelogramme HK egal aux deux figures C & EG, & ſemblable, & ſemblablement poſé à EG par la

15. p. 6. & partant à cause de la similitude d'iceux parallelogrammes HK, EG, comme HI sera à IK, ainsi EF sera à FG; & par consequent HK estant plus grand que EG, aussi les costez HI, IK seront



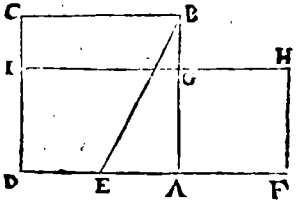
plus grands que les costez EF, FG: estans donc prolongez les costez FE, FG, tellement que FL, FM, soient egales aux lignes IH, IK, & acheué le parallelogramme LM N, il sera semblable, & semblablement posé à EG. Parquoy par la 26. p. 6. les parallelogrammes LM, & EG seront constituez à l'entour d'vn mesme diametre, lequel soit FN. Maintenant estans prolongez AB & GB iusques en P & O; & acheué le parallelogramme LA: le parallelogramme AN sera appliqué à la ligne AB, l'excedant du parallelogramme OP, qui est semblable à EG par la 24. p. 6. & partant à D. Mais ie dis aussi qu'iceluy parallelogramme AN est egal au rectiligne C; car puisque par la 36. p. 1. AL, EO sont egaux, & par la 43. p. 1. EO est egal au complement BM, aussi AL sera egal à iceluy BM: leur adiouſtant donc LP commun; le parallelogr. AN sera egal au gnomon QR, lequel est egal au rectiligne C: (car puisque HK, c'est à dire LM, est egal aux rectilignes C & EG ensemble: si on oste EG commun, resteront egaux le gnomon QR, & le rectiligne C.) Donc aussi le parallelogramme AN

ſera egal au rectiligne C. A la ligne droicte AB, nous auons donc appliqué le parallelogramme AN egal au rectiligne C, excedant du parallelogramme OP, qui eſt ſemblable à vn autre donné D : Ce qu'il falloit faire.

PROB. 10. PROP. XXX.

Coupper vne ligne droicte donnée & terminée, ſelon la moyenne & extreme raiſon.

Soit la ligne droicte donnée AB, laquelle il faut coupper ſelon la moyenne & extreme raiſon.



Ayant deſcrit ſur icelle ligne AB, le quarré AC, au coſté DA ſoit appliqué par la 29. p. 6. le rectangle DH egal à iceluy quarré AC, excedant du parallelogr. AH, ſemblable à iceluy AC; & la ligne AB ſera couppée en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon.

Car premierement l'exceds AH ſera quarré, puis qu'il eſt ſemblable au quarré AC; & d'autant que DH eſt fait egal à AC, ſi d'iceux on oſte le parallelogramme commun AI, reſteront egaux les parallelogrammes CG & AH, leſquels ont auſſi les angles au poinct G egaux. Donc par la 14. p. 6. les coſtez d'alentour iceux angles ſeront reciproques, tellement que comme IG eſt à GH, ainſi AG eſt à GB. Mais par la 34. p. 1. IG eſt egale à BC, c'eſt à dire à AB; & GH à AG : Donc comme AB ſera à AG, ainſi

AG sera à GB. Et puisque AB 1. est plus grande que AG 3. par la 14. p. 5. AG 2. est aussi plus grande que GB 4. Veu donc que la toute AB est au plus grand segment AG, comme iceluy plus grand segment AG est au plus petit GB; icelle AB est couppée en G, selon la moyenne & extreme raison, par la 3. def. 6. Ce qu'il falloit faire.

Autrement. La ligne donnée AB soit couppée en G, par la 11. p. 2. en sorte que le quarré de la partie AG soit egal au rectangle de la toute AB, & de la partie GB. *Ie dis* que AB sera couppée *selon la* moyenne & extréme raison au poinct G.

Car puis que le quarré de AG est egal au rectangle de AB & GB, les trois lignes AB, AG & GB, seront continuellement proportionnelles, par la 17. p. 6. c'est à dire que la toute AB sera au plus grand segment AG, comme iceluy segment AG est au plus petit segment GB; & par la 3. d. 6. AB est couppée en G, selon la moyenne & extréme raison. Ce qu'il falloit faire.

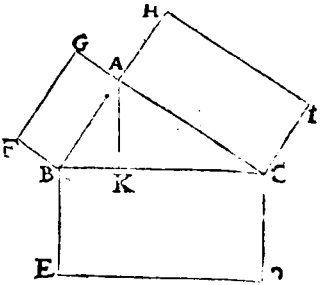
THEOR. 12. PROP. XXXI.

Aux triangles rectangles, la figure descrite sur le costé qui soustient l'angle droict, est egale aux deux autres figures qui luy sont semblales, & semblablement descrites sur les deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, ayant l'angle BAC, droict, & sur le costé BC, qui soustient iceluy angle, soit descrite quelconque figure rectiligne

BD, & sur les deux autres costez AB, AC, soient constituees les deux figures AF, AI semblables, & semblablement posees à BD : Ie dis qu'icelle figure BD est egale aux deux autres AF, AI.

Car si du poinct A, on meine sur BC la perpendiculaire AK, par la 8. p. 6. elle fera deux triangles semblables entr'eux, & au total ; & par ainsi les trois triangles BAK, ABC, CAK, seront semblables entr'eux, & par la 19. p. 6. ils seront l'vn à l'autre en raison doublée des costez de mesme raison AB, BC, CA. Mais par la 20. p. 6. les trois figures AF, BD & AI, estans semblables, & semblablement posees, elles seront aussi l'vne à l'autre en raison doublee de leurs costez de mesme raison AB, BC, CA, qui sont les mesmes costez des triangles: donc par la 11. p. 5. les rectilignes AF, BD, AI, seront entr'eux, comme les triangles BAK, BAC, CAK entr'eux, c'est à dire que comme le triangle BAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AF est au rectiligne BD, & comme le triangle CAK est au triangle ABC, ainsi le rectiligne AI est au rectiligne BD: Donc par la 24. p. 5. comme le composé des triangles BAK, CAK, 1. & 5. grandeurs, sera au triangle ABC, 2. grandeur, ainsi le composé des rectilignes AF, AI, 3. & 6. grandeurs, sera au rectiligne BD, 4. grandeur : mais le triangle BAC, est egal aux deux autres ABK, ACK : donc la figure BD se-



ra auſſi egale aux deux autres AF, AI. Parquoy aux triangles rectangles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

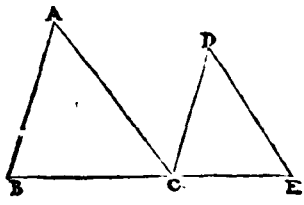
Autrement. D'autant que par la 20. p. 6. les figures ſemblables ſont en raiſon doublee de leurs coſtez homologues, comme le quarré de AB 1. grandeur, eſt au quarré de BC 2. grandeur, ainſi la figure AF 3. grandeur, eſt à la figure BD 4. grandeur: Mais auſſi comme le quarré de AC 5. grandeur, eſt au quarré de BC 2. grandeur, ainſi la figure AI 6. grandeur, eſt à la figure BD 4. grandeur. Donc par la 24. p. 5. le compoſé de la 1. & 5. grandeur, ſçauoir le quarré de AB auec celuy de AC, ſera à la 2. grandeur BC, comme le compoſé de la 3. & 6. grandeur, ſçauoir la figure AF auec la figure AI, ſera à la 4. grandeur BD. Mais par la 47. p. 1. les deux quarrez de AB, AC, ſont egaux au ſeul quarré de BC: donc auſſi les deux figures AF, AI enſemble, ſeront egales à la figure BD. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 22. PROP. XXXII.

Si deux triangles ayans deux coſtez proportionnaux à deux coſtez, ſont diſpoſez ſelon vn angle, tellement que les coſtez de meſme raiſon ſoient parallels; les deux autres coſtez ſe rencontreront directement.

Soient deux triangles ABC & CDE, ayans les coſtez BA & AC proportionnanx aux coſtez CD

& DE, disposez de telle façon qu'ils facent l'angle ACD, & que BA soit parallele à CD, & AC à DE: Ie dis que les deux autres costez BC & CE se rencontreront directement.



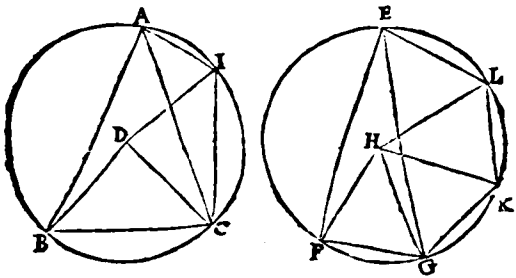
Car puisque BA & CD sont paralleles, l'angle ACD sera egal à son alterne A, par la 29. p. 1. aussi AC estant parallele à DE, l'angle D sera egal à son alterne ACD: parquoy l'angle D sera egal à l'angle A. Mais par l'hypothese les costez qui constituent iceux angles egaux, sont proportionnaux: donc par la 6. p. 6. les deux triangles ABC, DCE, seront equiangles; & auront les angles B & DCE egaux: leur adiousstant donc les egaux A & ACD, les deux B & A ensemble, seront egaux aux deux DCE, & ACD ensemble; c'est à dire au seul angle ACE: parquoy adiousstant derechef à ces angles egaux, le commun ACB; les deux angles ACE, ACB, seront egaux aux trois angles du triangle BAC, c'est à dire à deux droicts par la 32. p. 1. & par la 14. p. 1. les deux lignes BC & CE se rencontreront directement: Si donc deux triangles ayans deux costez proportionnaux à deux costez, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. XXXIII.

Aux cercles egaux, les angles constituez tant aux centres qu'aux circonferences, sont entr'eux, comme les circonference

ferences qui les soustiennent. Et les secteurs sont aussi de mesme entr'eux.

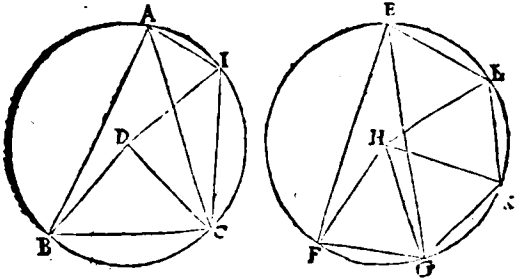
Soient deux cercles egaux ABC & EFG, des-



quels les centres sont D & H; & soient les deux angles BDC, FHG aux centres; mais les deux BAC, FEG, aux circonferences. Ie dis premierement, que comme la circonference BC est à la circonference FG, ainsi l'angle BDC est à l'angle FHG, & l'angle BAC à l'angle FEG.

Car ayant mené les deux lignes droictes BC, FG, soient accõmodees aux cercles des lignes droictes, sçauoir CI egale à BC; & GK, KL, chacune egale à FG: puis soient menées les lignes ID, KH & LH. Veu donc que les deux lignes droictes BC & CI sont egales, les arcs BC & CI seront aussi egaux par la 28. p. 3. & partant les angles BDC & CDI, seront egaux par la 27. p. 3. Pour mesmes raisons, tant les trois arcs FG, GK & KL, que les trois angles FHG, GHK, & KHL sont egaux entr'eux, donc l'arc FGKL est autant multiplice de l'arc FG, comme l'angle FHL est multiplice de l'angle FHG: & l'arc BCI autant multiplice de l'arc BC, comme l'angle

BDI, eſt multiplice de l'angle BDC, puiſque les angles BDI, FHL ſont diuiſez chacun en autant de parties egales, que les arcs BCI, FGKL, ſur leſquels ils s'appuient : partant ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, l'angle BDI ſera egal à l'angle FHL par la



27. p. 3. ſi plus grand, plus grand, & ſi plus petit, plus petit : donc puiſque BCI, BDI, ſont equemultiplices de BC, BDC, premiere & troiſieſme grandeur ; & FGKL, FHL equemultiplices de FG, FHG 2^e & 4^e grandeur ; par la 6. d. 5. comme l'arc BC eſt à l'arc FG, ainſi l'angle BDC eſt à l'angle FHG.

Et d'autant que par la 15. p. 5. l'angle BDC eſt à l'angle FHG, comme l'angle BAC eſt à l'angle FEG ; (car ceux là ſont doubles de ceux-cy par la 20 p. 3.) il eſt euident par la 11 p. 5. que l'angle BAC eſt auſſi à l'angle FEG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG. Ce qu'on peut encore demonſtrer par les meſmes raiſons, & argumens employez pour les angles du centre, ſi on tire les lignes droictes IA, KL, LE, &c.

Secondement, Ie dis que le ſecteur BDC eſt au ſecteur FHG, comme l'arc BC eſt à l'arc FG : Car (demeurant la meſme conſtruction que deſſus) il eſt manifeſte que les cordes BC & CI eſtans egales,

& leurs arcs auſſi egaux, les angles BAC, & CAI ſeront pareillement egaux par la 27. p. 3. & conſequemment que les ſegmens ſur leſquels ils inſiſtent & s'appuient, ſont ſemblables & egaux entr'eux. Mais les deux triangles BDC, CDI, ſont auſſi egaux par la 4. p. 1. leur adiouſtant donc les deux ſegmens egaux, les deux ſecteurs BDC, CDI ſeront egaux: Parquoy l'arc BCI ſera autant multiplice de l'arc BC, que le ſecteur BDI le ſera du ſecteur BDC: & par meſme diſcours, l'arc FGKL ſera monſtré autant multiplice de l'arc FG, que le ſecteur FHL l'eſt du ſecteur FHG. Partant ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI ſera egal au ſecteur FHL; & ſi plus grand, plus grand; & ſi plus petit, plus petit. Donc les deux arcs BC, FG, auec les deux ſecteurs BDC, FHG, ſont quatre grandeurs, de la 1. & 3^e deſquelles BCI, BDI, ſont equimultiplices, mais de la 2^e & 4^e ſont auſſi equimultiplices FGKL, FHL. Et puis que nous auons prouué que ſi l'arc BCI eſt egal à l'arc FGKL, auſſi le ſecteur BDI eſt egal au ſecteur FHL; & ſi plus grand, plus grand; & ſi moindre, moindre: par la 6. def. 5. comme l'arc BC ſera à l'arc FG, ainſi le ſecteur BDC, ſera au ſecteur FHG. Parquoy aux cercles egaux, les angles conſtituez tant aux centres qu'aux circonferences, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De cecy il s'enſuit que comme le ſecteur eſt au ſecteur, ainſi l'angle eſt à l'angle. Car l'vne & l'autre raiſon eſt la meſme que de l'arc à l'arc; & partant par la 11. p. 5. ils ſeront auſſi entr'eux en la meſme raiſon.

Il eſt auſsi euident que comme vn angle au centre, eſt à quatre angles droicts, ainſi eſt l'arc ſouſtendant iceluy angle, à toute la circonference : & au contraire, que comme quatre angles droicts ſont à vn angle au centre, ainſi toute la circonference eſt à l'arc ſouſtendant iceluy angle.

Car comme l'angle au centre eſt à l'angle droict au centre, ainſi l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt au quadrant qui ſouſtient l'angle droict par la 33. p. 6. Parquoy comme l'angle au centre ſera au quadruple de l'angle droict, c'eſt à ſçauoir à quatre angles droicts, ainſi l'arc ſouſtendant iceluy angle, ſera au quadruple du quadrant, c'eſt a dire à toute la circonference, par les choſes demonſtrées à la fin du Scholie de la 22. p. 5. Puis apres, d'autant qu'vn angle au centre eſt à quatre angles droicts, comme l'arc qui ſouſtient iceluy angle, eſt a toute la circonference ; auſsi en permutant, comme quatre angles droicts ſeront à vn angle au centre, ainſi toute la circonference ſera à l'arc ſouſtendant l'angle au centre : Ce qui a eſté propoſé.

Fin du ſixieſme Element.

ELEMENT SEPTIESME.

DEFINITIONS.

L'VNITE', eſt ſelon laquelle vne chacune des choſes qui ſont, eſt appellée vne.

Euclide ayant traicté és 6. liures precedents de la premiere partie de Geometrie, ſçauoir eſt de celle-là qui conſidere les plans, auparauant que venir à l'autre partie, laquelle traicte des ſolides, il explique en ce ſeptieſme liure & és deux ſuiuans, les proprietez & affections des nombres, pour puis apres traicter au 10. liure des lignes commenſurables & incommenſurables, neceſſaires pour auoir entiere & parfaicte cognoiſſance des proprietez des ſolides. Euclide commençant donc ſelon ſa couſtume par les principes, il deſfinit premierement que c'eſt que l'vnité, & dit que c'eſt cela ſelon quoy toute choſe qui eſt ſe nomme vne: & ſelon ceſte vnité nous auons de couſtume de dire vne pierre, vn animal, vn corps, &c. Mais eſt à noter que tout ainſi qu'en la Geometrie le poinct n'a aucune partie eſtant indiuiſible, auſſi és nombres l'vnité ne reçoit aucune diuiſion, mais eſt indiuiſible ſelon noſtre Autheur, lequel n'a eſgard

en ces Elemens-cy qu'aux nombres entiers: mais nous y icindrons auſsi quelque choſe des fractions & nombres rompus, afin de faire voir que toutes les reigles enſeignees en noſtre Arithmetique Practique, ne ſont moins veritables & certaines, que ſi elles eſtoient reſtraintes ſeulement aux nombres entiers dont traicte icy Euclide.

2. Nombre, eſt vne multitude compoſee de pluſieurs vnitez.

C'eſt à dire qu'eſtans aſſemblees pluſieurs vnitez enſemble, leur aggregé & collection s'appelle nombre: dont s'enſuit qu'en tout nombre il y a autant de parties qu'il y a d'vnitez qui le conſtituent: de ſorte que l'vnité eſt la partie de chaque nombre deſnommée par le meſme nombre duquel elle eſt partie: comme le nombre 4 compoſé de quatre vnitez, ſe diuiſe en autant de parties, ſçauoir en quatre vnitez, chacune deſquelles eſt ditte quatrieſme partie du nombre 4. Ainſi auſsi le nombre 20 compoſé de vingt vnitez ſe diuiſe en autant de parties, chacune deſquelles eſt dicte vingtieſme partie d'iceluy nombre 20, &c. D'où reſulte que tous les nombres ſont commenſurables entr'eux, puis qu'ils ſont tous meſurez par vne meſme & commune meſure, ſçauoir par l'vnité, comme il eſt dict: ce qui ne peut pas conuenir à toutes grandeurs, puis que pluſieurs d'icelles n'ont point de commune meſure, mais ſont incommenſurables, comme il ſera demonſtré au 10. liure.

3. Vn nombre eſt partie d'vn autre nombre, le plus petit du plus grand, lors que le plus petit meſure le plus grand.

C'eſt à dire, que lors qu'vn nombre en meſure ou diuiſe exactement vn plus grand, ſans qu'il reſte rien, il eſt dict

partie d'iceluy: comme 4 eſt dict partie de 12, d'autãt qu'iceluy nombre 12 eſt diuiſé exactement par 4 ſans qu'il reſte rien: ſemblablement chacun de ces nombres 2, 3, 6 & 9, eſt partie du nombre 18, puis que chacun le meſure ou diuiſe exactement. Or toute partie, comme nous auons dict à la 1. def. 5. eſt appellee aliquotte, & prend ſon nom du nombre par lequel elle en meſure vn autre, tellement que 2 eſt dit partie aliquotte de 4, & ſe nomme $\frac{1}{2}$: pource que 2 meſure 4 par 2: & cinq eſt dict partie aliquotte de 15, c'eſt à ſçauoir $\frac{1}{3}$, pource que 5 meſure 15 par 3: ainſi 4 qui meſure 28 par 7, eſt dict $\frac{1}{7}$, &c.

4. Mais vn nombre eſt dict parties d'vn autre plus grand, lors que le plus petit ne meſure pas le plus grand.

C'eſt à dire que lors qu'vn petit nombre n'en meſure pas vn plus grand, il n'eſt pas dict partie d'iceluy, mais parties. Comme 6 eſt dict parties de 9: car il ne le meſure pas preciſemẽt, mais eſt deux parties d'iceluy, ſçauoir eſt $\frac{2}{3}$: ainſi 12 eſt parties de 16, ſçauoir $\frac{3}{4}$ pource que 4, qui meſure l'vn & l'autre nombre eſt 3 fois en 12, & 4 fois en 16: auſſi 15 eſt parties de 24, ſçauoir eſt $\frac{5}{8}$, puis que 3, qui eſt commune meſure, eſt 5 fois en 15, & 8 fois en 24. Semblablement 5 eſt parties de 7, ſçauoir eſt $\frac{5}{7}$: & 4 eſt parties de 9, ſçauoir eſt $\frac{4}{9}$, &c.

5. Mais vn grand nombre eſt dict multiple d'vn petit, lors que le petit meſure le grand.

Tout ainſi que tout petit nombre n'eſt pas dict partie d'vn plus grand, ains ſeulement de celuy-là qu'il meſure preciſe-

ment; ainſi auſſi tout grand nõbre n'eſt pas dict multiple, ou le pluſieurs ſon de tout autre nombre plus petit, mais ſeulement de ceux-là qui le peuuent preciſément meſurer: tellement que de deux nombres inegaux, ſi le petit meſure preciſément le grand, ce moindre eſt dict partie du grand, mais celuy-cy eſt auſſi dict multiple de ceſtuy-là: Ainſi 4 eſt bien dict partie de 12, mais auſſi iceluy 12 eſt dict multiple de 4. Pareillement 30 eſt dict multiple tant de 5 que de 6, qui ſont parties d'iceluy, puis que l'vn & l'autre le meſure.

6. Nombre pair, eſt celuy qui peut eſtre diuiſé en deux egalement.

Comme tous ces nombres 2, 4, 8, 20, 50, ſont appellez nombres pairs, pource que chacun d'iceux peut eſtre diuiſé en deux egalement, c'eſt à dire en deux parties egales: car leurs moitiez ſont 1, 2, 4, 10, 25. &c.

7. Mais l'impair, eſt celuy qui ne peut eſtre diuiſé en deux egalement: ou bien celuy qui eſt different du nombre pair de l'vnité.

Comme tous ces nombres cy 3, 5, 7, 9, 11, 13, 51, ſont nommez impairs, pource qu'ils ne peuuẽt eſtre diuiſez en deux egallement: Ou bien d'autant qu'ils ſont differens de l'vnité des nombres pairs, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 50. &c.

8. Nombre pairement pair, eſt celuy qu'vn nombre pair meſure par vn nombre pair.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre pair en meſure vn autre par vn nombre qui ſoit auſſi pair, le nombre meſuré ſera dit pairement pair: comme 32, lequel 8 meſuré par 4, eſt dict nombre pairement pair: ſemblablement 24 ſera dit nombre pairement pair, pource que 6 nombre pair le meſure par 4 nombre pair, &c.

9. Et pairement impair, eſt celuy qu'vn nombre impair meſure par vn nombre pair.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre pair en meſure vn autre par vn nombre impair, le meſuré ſera dit pairement impair: comme 42 eſt dit nombre pairement impair, pource que 6, nombre pair le meſure par 7, nombre impair. ſemblablement 24 ſera dit nombre pairement impair, d'autant que 3, nombre impair le meſure par 8, nombre pair. Et eſt à noter, qu'il y a pluſieurs nombres qui ſont pairement pair, & pairement impair, comme 12, 24, 48, 96, &c. Et que ce ſoit l'intention d'Euclide, les 32, 33, & 34. prop. 9. le monſtrent aſſez.

10. Mais nombre impairement impair, eſt celuy qui eſt meſuré d'vn nombre impair par vn nombre impair.

Comme 15, lequel eſt meſuré de 5 par 3, eſt dict nombre impairement impair: & tels ſont auſſi les nombres ſuiuans, 9, 21, 25, 27, 33, 35. &c.

11. Nombre premier, eſt celuy qui eſt meſuré par la ſeule vnité.

C'eſt à dire, que ſi vn nombre n'eſt meſuré par aucun

nombre, mais seulement par soy-mesme, & l'vnité, il est nombre premier, & tels sont ceux-cy 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, &c. Car chacun d'iceux n'est mesuré par aucun autre nombre, mais par la seule vnité.

12. Nombres premiers entr'eux, sont ceux-là qui n'ont autre commune mesure que l'vnité.

C'est à dire, que si deux ou dauantage de nombres n'ont autre commune mesure que l'vnité ils seront dits premiers entr'eux, iaçoit que chacun d'iceux puisse estre mesuré par quelque nombre outre l'vnité. Comme ces deux nombres 15 & 8, sont dits premiers entr'eux, pource qu'il n'y a que l'vnité qui les puisse mesurer tous deux : car encore que le premier soit mesuré par 5 & 3 ; & le dernier par 4 & 2, si est-ce toutesfois qu'aucun d'iceux quatre nombres ne peut mesurer l'vn & l'autre des proposez, ains la seule vnité est leur commune mesure.

13. Nombre composé, est celuy qui est mesuré par quelque autre nombre.

Comme 15 est appellé nombre composé, pource qu'il est mesuré par 5 & 3 : Aussi 27 est nombre composé, d'autant qu'il est mesuré par 9 & 3, &c.

14. Mais les nombres composez entre eux, sont ceux-là qui ont autre commune mesure que l'vnité.

C'est à dire, que si deux ou dauantage de nombres sont mesurez par quelque nombre outre l'vnité, comme par leur commune mesure, ils seront dits nombres composez entr'eux :

ainſi les nombres 9 & 15 ſont compoſez entr'eux ; d'autant que 3 meſure l'vn & l'autre d'iceux, comme leur commune meſure. Auſſi 7, 21, & 28, ſont compoſez entr'eux, pource que le premier d'iceux meſure ſoy-meſme, & les deux autres.

15. Vn nombre eſt dict multiplier vn nombre, lors qu'il en eſt procreé vn autre, qui eſt autant de fois compoſé de celuy qui eſt multiplié qu'il y-a d'vnitez au multipliant.

Comme 4 ſera dit multiplier 6, ſi iceluy nombre 6 eſt prins ou compoſé quatre fois, c'eſt à ſcauoir autant de fois qu'il y-a d'vnitez au multipliant 4; & le nombre procreé, qu'on appelle vulgairement produict, *ſera 24. Auſſi le nombre 6 ſera dit multiplier le nombre 4, ſi nous prenons iceluy nombre 4, ſix fois; c'eſt aſſauoir autant de fois qu'il y-a d'vnitez en 6, nombre multipliant; & en ſera procreé le meſme nombre 24. Ainſi vn nombre ſera dit eſtre procrée ou produict de deux nombres, quand il ſera produit en multipliant l'vn d'iceux nombres par l'autre. Comme le nombre 36 ſera dit eſtre le produict de ces deux nombres 4 & 9, pource qu'il eſt procreé en multipliant le nombre 4 par le nombre 9, ou au contraire le nombre 9 par le nombre 4.*

Or de ce que deſſus il s'enſuit que le nombre produict de la multiplication d'vn nombre par vn autre, a meſme raiſon auquel on voudra d'iceux nombres que l'autre à l'vnité. Car puis que ſelon la def. d'Euclide, pour auoir le produict de deux nombres il faut prendre autant de fois l'vn d'iceux, qu'il y-a d'vnités en l'autre, iceluy produict

contiendra autant de fois l'vn ou l'autre des nombres multiplians qu'il y a d'vnitez en l'autre: & partant il y aura mesme raison du nombre produict à l'vn ou l'autre des multiplians, que de l'autre multipliant à l'vnité: parquoy la multiplication d'vn nombre en vn autre peut estre definie ainsi:

La multiplication d'vn nombre par vn autre, est l'inuention d'vn nombre qui ait mesme raison auquel on voudra des nombres multiplians, que l'autre à l'vnité.

Ainsi tu vois que de la multiplication de 5 par 7, est produict le nombre 35, lequel est à 5, comme 7 à 1; ou à 7, comme 5 à 1.

A ceste definition Clauius adiouste la suiuante.

Vn nombre est dit diuiser vn nombre, quand on en prend vn autre, qui contient autant d'vnité que le nombre diuisant est contenu de fois au nombre diuisé.

Comme le nombre 6 sera dit diuiser le nombre 24, si on prend le nombre 4; qui monstre par ses quatre vnitez, que le nombre 6 est contenu 4 fois au nombre diuisé 24. Aussi le nombre 4 sera dit diuiser le mesme nombre 24, si on prend le nombre 6, lequel denotte par ses six vnitez, que le nombre diuisant est contenu six fois au diuisé 24.

De cecy il aduient que le nombre prouenant de la diuision, lequel on appelle vulgairement quotient, *a mesme raison à l'vnité, que le nombre diuisé au diuiseur. Car puis que, comme nous auons dit en la def. le quotient doit monstrer & indiquer par ses vnitez, combien de fois le nombre diuiseur est contenu au diuisé, iceluy quotient contiendra autant de fois l'vnité, que le nombre diuisé contient le diuiseur; & partant il y aura mes-*

me raiſon du quotient à l'vnité, que du nombre diuiſé au diuiſeur : Parquoy la diuiſion d'vn nombre par vn autre ſe peut auſſi definir ainſi.

La diuiſion d'vn nombre par vn nombre, eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vnité, que le nombre diuiſé au diuiſant.

Ainſi appert que de la diuiſion du nombre 24 par 6 eſt prouenu le nombre 4, lequel eſt à 1, comme 24 à 6. Item de la diuiſion du meſme nombre 24 par 4, eſt produict le nombre 6, qui eſt à 1, comme 24 à 4.

De cecy il aduient qu'eſtant diuiſé vn nombre par vn nombre, le nombre diuiſé ſera procreé de la multiplication du nombre trouué, c'eſt à dire du quotient, par le nombre diuiſeur. Car ayant diuiſé le nombre A par B, le quotient ſoit C. Ie dis que le nombre A ſera produict de la multiplication du nombre C par le nombre B. D'autant que par la def. de la multiplication le nombre procreé de C multiplié par B, eſt à B, comme C à l'vnité D; & que par la def. de la diuiſion A eſt auſſi à B, comme C à l'vnité D; il eſt manifeſte que le nombre procreé par la multiplication de C en B eſt le nombre A, veu que tant iceluy nombre procreé, que le diuiſé A, a meſme raiſon a B, que C à l'vnité D.

A.	B.	C.	D.
48.	8.	6.	1.

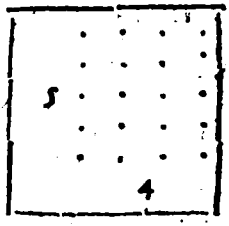
Or ce que nous auons dict cy-deſſus touchant la multiplication & diuiſion des nombres entiers, conuient auſſi aux nombres rompus; tellement que le nombre $\frac{1}{2}$ ſera dit multiplier le nombre 20, ſi le nombre 20 eſt pris autant de fois qu'il y a d'vnitez en $\frac{1}{2}$, & ſera procreé le nombre 10: car d'autant que l'vnité eſt ſeulement par ſa moitié en $\frac{1}{2}$ il faut auſſi prendre le nombre 20 par ſa moitié,

qui eſt 10. *Semblablement le nombre* 20, *ſera dit multiplier* $\frac{1}{2}$, *ſi* $\frac{1}{2}$ *eſt pris vingt fois, c'eſt à ſçauoir autãt de fois que l'vnité eſt en* 20; *& le produict ſera le meſme nõbre* 10. *Item,* $\frac{1}{4}$ *&* $\frac{1}{3}$ *ſeront dits s'entremultiplier, ſi on prend la troiſieſme partie de* $\frac{1}{4}$, *tout ainſi que* $\frac{1}{3}$ *contient ſeulement la troiſieſme partie de l'vnité: ou bien ſi on prend la moitié de* $\frac{1}{3}$, *parce que* $\frac{1}{2}$ *contient ſeulement la moitié de l'vnité: & par ainſi le produict ſera* $\frac{1}{6}$; *car c'eſt la troiſieſme partie du nombre* $\frac{1}{2}$, *ou de* $\frac{3}{6}$, *& la moitié du nombre* $\frac{2}{3}$, *ou* $\frac{2}{6}$.

Mais le nombre $\frac{1}{2}$ *ſera dit diuiſer le nombre* 10, *ſi on prend le nombre* 20, *qui monſtre que le nombre diuiſant* $\frac{1}{2}$ *eſt contenu vingt fois au nombre diuiſé* 10; *tellement qu'il y ait la meſme raiſon du nombre procreé* 20 *à* 1, *que du nombre diuiſé* 10 *au diuiſant* $\frac{1}{2}$. *Ainſi auſſi* $\frac{1}{2}$ *ſera dit diuiſer* $\frac{1}{6}$, *ſi on prend le nombre* $\frac{1}{3}$, *lequel monſtre que le nombre diuiſant* $\frac{1}{2}$, *n'eſt pas tout contenu au diuiſé* $\frac{1}{6}$, *ains ſeulement la troiſieſme partie d'iceluy: car puis que le nombre* $\frac{1}{2}$ *eſt le meſme que* $\frac{3}{6}$, *il eſt euident que la troiſieſme partie d'iceluy, c'eſt à ſçauoir* $\frac{1}{6}$, *eſt contenu en* $\frac{1}{6}$. *Or comme il faut faire & prattiquer non ſeulement la multiplication & diuiſion en nombres rompus, mais auſſi toutes les autres regles & operations d'Arithmetique, nous l'auons enſeigné en noſtre Pratique d'Arithmetique, & à la fin de ce* 7. *liure d'Euclide nous en ferons les demonſtrations.*

16. Lors que deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé plan; & les nombres multiplians ſont dicts coſtez d'iceluy plan.

C'eſt à dire que tout le nombre produict de la mutuelle multiplication de deux nombres eſt appellé nombre plan, d'autant que chaque vnité de l'vn d'iceux nombres eſtant poſée & eſtendue d'ordre autant de fois qu'il y a d'vnités en l'autre nombre, eſt repreſenté vn parallelogramme rectangle, duquel les coſtez ſont les deux nombres ſe multiplians, comme il a eſté dict au 2. liure. Ainſi le nombre 20 produict de 5 par 4 eſt dict nombre plan, & iceux nombres 5 & 4 ſont dicts coſtez d'iceluy plan.



17. Mais quand trois nombres ſe multiplient l'vn l'autre, le produict eſt appellé ſolide, & les multiplians ſont dicts coſtez d'iceluy.

Comme ſi on multiplie 6 par 5, & leur produict 30 par 4, ſera procreé le nombre 120, lequel s'appellera nombre ſolide, & les trois nombres multiplians 6, 5 & 4, ſeront dicts coſtez d'iceluy ſolide.

18. Nombre quarré, eſt celuy qui eſt egalement egal: ou bien c'eſt le produict de deux nombres egaux.

Comme le nombre plan 16 eſt appellé quarré, pource qu'il eſt procreé de la multiplication de 4 par 4, & conſequemment egal de tous coſtez. Ainſi auſſi 49, produict de la multiplication de 7 par 7, ſera appellé nombre quarré.

19. Nombre cube, eſt celuy qui eſt egalement egal egalement: ou bien c'eſt le produict de trois nombres egaux.

Comme ſi le nombre 4 eſt multiplié par 4, & puis leur produict 16 encore par 4, ſera procreé le nombre 64, qui s'appellera nombre cube.

20. Les nombres ſont proportionnaux, quand le premier eſt autant multiple, ou meſme partie, ou meſmes parties du ſecond, comme le troiſieſme du quatrieſme.

C'eſt à dire, que quand vn nombre eſt meſme partie, ou meſmes parties d'vn nombre, qu'vn autre d'vn autre, iceux quatre nombres ſont dits proportionnaux. Ainſi pource que le nombre A eſt meſme partie du nombre B, que le nombre C du nombre D, c'eſt à ſçauoir la moitié, iceux quatre nombres A, B, C, D, ſont proportionnaux. Auſſi les quatre nombres E, F, G, H ſont proportionnaux, puis que E eſt meſmes parties de F, que G de H, c'eſt à ſçauoir deux troiſieſmes parties. Item les quatre nombres I, K, L, M, ſont auſſi proportionnaux, d'autant que comme I eſt quadruple de K, auſſi L eſt quadruple de M; ou bien pource que M eſt telle partie de L que K de I: Car il eſt euident que ſi le premier nombre I eſt autant multiple du ſecond

A	B	C	D
5.	10.	4.	8.

E	F	G	H
6.	9.	4.	6.

I	K	L	M
20.	5.	8.	2.

K, que le troiſieſme L, l'eſt du quatrieſme M : en prenant les meſmes nombres par ordre contraire, M ſera telle partie de L, que K de I, c'eſt à ſcauoir le quart. Parquoy on peut aſſeurement conclurre que quatre nombres ſont proportionnaux, quand le moindre des deux premiers eſt meſme partie, ou meſmes parties de l'autre, que le moindre des deux derniers eſt de l'autre, moyennant qu'ils ſoient pris d'vn meſme ordre, c'eſt à dire que ſi le moindre des deux premiers eſt antecedant, le moindre nombre des deux derniers ſoit auſsi antecedant ; & ſi conſequent, conſequent. Et c'eſt à mon aduis ainſi qu'il faut entendre ceſte 20. def. pour la rendre vniuerſelle, car autrement on ne pourroit pas conclurre par icelle la proportionnalité de pluſieurs nombres, comme par exemple de ces quatre N, O, P, Q, veu que les prenans ſelon l'ordre qu'ils ſont poſez, le premier N n'eſt pas multiple du ſecond O, ny auſsi partie ou parties, puis qu'il eſt plus grand qu'icelluy ; & neantmoins ils ſont proportionnaux, veu que le moindre des deux premiers, c'eſt aſſauoir O, contient autant de parties de l'autre N, que le moindre des deux autres, qui eſt Q, en cõtient de l'autre P, c'eſt aſſauoir quatre cinquieſmes parties. Semblablement ces quatre autres nõbres R, S, T, V, ſõt proportionnaux, puis que V contient autant de parties de T, que S en contient de R ; ou bien à cauſe que S eſt meſmes parties de R, que V de T, c'eſt aſſauoir les troisquarts.

N	O	P	Q
15.	12.	25.	20.

R	S	T	V
36.	27.	24.	18.

Clauius eſtimant que ceſte def. a eſté corrompue, pour la reſtituer y a adiouſté ces mots : Ou bien quand le premier contient eſgalement le ſecond, & le troiſieſme le quatrieſme, & en outre vne meſme partie

ou mesmes parties d'iceluy. *Mais ie n'estime pas que ceste addition y soit necessaire, puis que le moindre nombre de chaque raison estant conferé à l'autre ladite def. conuient à toutes sortes de proportions: & que ce soit l'intention d'Euclide, il appert assez par les demonstrations des 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 & 13. prop. de ce 7. liure.*

Or Euclide definit seulement icy les nombres proportiennaux, qui ont vne mesme raison d'inegalité: Car de la raison d'egalité, il est euident que le premier nombre estant egal au second, aussi le troisiesme doit estre egal au quatriesme, afin qu'ils soient dits proportionnaux.

De ceste 20. def. resulte appertement, que les nombres egaux ont mesme raison à vn mesme nombre; & au contraire qu'vn mesme nombre a aussi mesme raison à des egaux: Ce qui a esté demonstré en toutes grandeurs à la 7. prop. 5. Il en resulte encore que les nombres qui ont mesme raison à vn mesme nombre, ou ausquels vn mesme nombre a mesme raison, sont egaux entr'eux. Ce qui a aussi esté demonstré en toutes sortes de grandeurs en la 9. p. 5.

De ceste mesme def. on collige aussi que de deux nombres inegaux le plus grand a plus grande raison à vn mesme nombre, que le plus petit; & au contraire qu'vn mesme nombre a plus grande raison à vn petit nombre, qu'à vn plus grand. Item que des nombres inegaux, celuy qui a plus grande raison à vn mesme, est le plus grand: & celuy auquel vn mesme nombre a plus grande raison, est le plus petit: Toutes lesquelles choses sont claires & euidentes, si ceste def. est bien entendue. Cecy a aussi esté demonstré és grandeurs au 5. liure prop. 8. & 10.

Or ceste definition, & tout ce que nous auons dit cy-dessus, conuient aussi aux nombres rompus: Car ces quatre

nombres $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}$, *ſont proportionnaux, attendu que le premier eſt autant multiple du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir double; ainſi qu'il appert en reduiſant les deux premiers en meſme denomination, ſçauoir à* $\frac{6}{8}$ *&* $\frac{3}{8}$, *mais les deux autres à* $\frac{2}{4}$ *&* $\frac{1}{4}$. *Semblablement ces quatre nombres* $2\frac{1}{8}$, $4\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, *ſont proportionnaux, puis que le premier eſt telle partie du ſecond, que le troiſieſme du quatrieſme, ſçauoir la moitié, &c.*

21. Les nombres plans, ou ſolides ſemblables, ſont ceux qui ont les coſtez proportionnaux.

Comme 24 & 6, ſont nombres plans ſemblables, pource que 6 & 4, coſtez de ceſtuy-là ſont proportionnaux à 3 & 2, coſtez de celuy-cy: ainſi auſſi 192 & 24, ſont nombres ſolides ſemblables, pource que 8, 6, 4, coſtez de ceſtuy-là ſont proport. à 4, 3, 2, coſtez de celuy-cy. Et eſt à noter que ces nombres plans, & ſolides ſemblables peuuent bien eſtre auſſi compris ſous des coſtez non proportionnaux; mais toutes-fois nous ne les conſiderons icy qu'entant qu'ils ſont contenus ſous leurs coſtez proportionnaux.

22. Nombre parfaict, eſt celuy qui eſt egal à toutes ſes parties aliquotes.

Comme 6 eſt dict nombre parfaict, pource que les parties aliquotes d'iceluy, ſçauoir 1, 2, 3, priſes enſemble, luy ſont egales. Ainſi auſſi 28, duquel les parties aliquotes, ſçauoir eſt 1, 2, 4, 7, 14, eſtans priſes enſemble, luy ſont egales; ſera dict nombre parfaict: & tels ſont auſſi 496, 8128, &c.

Mais quand toutes les parties aliquotes d'vn nombre prises ensemble, sont plus grandes qu'iceluy, il est dict abondant; & quand elles sont moindres, il est appellé diminué.

A ces definitions d'Euclide, Clauius en adiouste quelques autres, touchant les raisons & proportions des nombres, comme de la raison egale, de l'alterne, de l'inuerse, & autres dont est traicté en general au 5. liure: Mais pource que nous les auons tellement expliquees en ce lieu là, qu'on les peut entendre & adapter, non seulement aux lignes, superficies & solides, mais aussi aux nombres, & en general à toutes sortes de grandeurs & quantitez, soient continues ou discrettes; ie n'estime pas qu'il soit besoin de les repeter icy, c'est pourquoy nous viendrons aux

PETITIONS OV DEMANDES.

1. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre tant qu'on voudra d'egaux, ou multiples.

2. Qu'à tout nombre donné on en puisse prendre vn plus grand.

Combien que selon nostre Autheur le nombre ne puisse estre diminué infiniment, ains seulement iusques à l'vnité qu'il fait indiuisible, si est-ce toutesfois qu'il peut estre augmenté infiniment par la continue addition de l'vnité: Parquoy estant proposé quelconque nombre, on en peut trouuer vn plus grand, c'est assauoir celuy qui est produict de l'addition d'vne ou de plusieurs vnitez au nombre donné.

AXIOMES

AXIOMES OV COMMVNES SENTENCES.

1. LEs nombres equemultiplices de nombres egaux, ou d'vn meſme nombre, ſont egaux entr'eux.

2. Et ceux deſquels vn meſme nombre eſt equemultiplice, ou deſquels les equemultiplices ſont egaux, ſont auſſi egaux entr'eux.

3. Mais les nombres qui ſont vne meſme partie, ou meſmes parties de nombres egaux, ou d'vn meſme, ſont egaux entr'eux.

4. Et ceux deſquels vn meſme nombre, ou nombres egaux, ſont meſme partie, ou meſmes parties; ſont auſſi egaux entr'eux.

5. L'vnité meſure tout nombre par les vnitez qui ſont en iceluy, c'eſt à dire par le meſme nombre,

6. Tout nombre mesure soy-mesme par l'vnité.

7. Si vn nombre multipliant vn nombre, en produict quelqu'vn, le multipliant mesurera le produict par le multiplié: mais le multiplié mesurera le mesme produict par le multipliant.

8. Si vn nombre mesure vn nombre; aussi celuy par lequel il le mesure, mesurera le mesme par les vnitez qui sont au mesurant, c'est à dire par iceluy nombre mesurant.

9. Si vn nombre mesurant vn nombre, multiplie celuy par lequel il le mesure, ou est multiplié par iceluy, sera produict celuy lequel est mesuré.

10. Le nombre qui en mesure deux ou dauantage, mesure aussi le composé d'iceux.

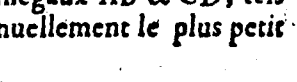
11. Mais celuy qui mesure le mesureur, mesure aussi le mesuré.

12. Et celuy qui mesure le tout, & le retranché, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Si de deux nombres inegaux proposez, on soustraict tousiours alternatiuement le plus petit du plus grand, & que le plus petit reste ne mesure iamais le precedant iusques à ce qu'on ait pris l'vnité; les nombres proposez au commencement, seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres inegaux AB & CD, tels que si on soustraict continuellement le plus petit du plus grand; le plus petit reste ne mesure iamais le precedant, iusques à ce qu'on paruienne à l'vnité: Ie dis qu'iceux nombres AB & CD, seront premiers entr'eux, c'est à dire qu'ils ont pour commune mesure la seule vnité. Autrement, s'ils ne sont premiers, il seront composez, & par la 14. def. de ce liure ils seront mesurez par quelque nombre: soit iceluy E commune mesure à tous les deux: ainsi CD plus petit nombre estant soustraict de AB, soit le reste FB plus petit que CD: Item FB estant soustraict de CD, soit le reste HD plus petit que FB: Pareillement HD estant soustraict de FB, soit le reste GB, vnité. Puis donc que E mesure CD, il mesurera aussi



ſon egal AF; & d'autant qu'il meſure le tout AB, par la 12. com. ſent. il meſurera auſſi le reſte FB, lequel meſure CH; & partant par la 11. com ſent. E meſurera auſſi CH; & puis qu'il meſure le tout CD, par la 12. com. ſent. il meſurera auſſi le reſte HD, & par conſequent ſon egal FG: mais il meſure auſſi le tout FB: E meſurera donc pareillement l'vnité reſtante GB, ſçauoir le tout la partie: ce qui eſt impoſſible. Donc AB & CD ne peuuent eſtre meſurez par aucun nombre, ains par l'vnité ſeulement: & partant ils ſont nombres premiers entr'eux par la 12. def. de ce liure. Si donc de deux nombres inegaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Commandin demonſtre icy la propoſition ſuiuante.

Eſtans propoſez deux nombres compoſez entr'eux, ſi on ſouſtrait touſiours alternatiuement le moindre du plus grand, la ſouſtraction ne paruiendra pas iuſques à l'vnité.

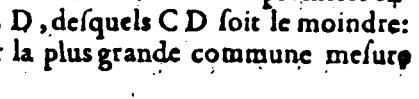
Ce qui eſt euident, car ſi on paruenoit à l'vnité, les nombres propoſez ſeroient premiers entr'eux, comme il a eſté demonſtré en la propoſ. cy-deſſus: & ils ſont poſez compoſez.

Or il eſt manifeſte par ces choſes, qu'eſtans propoſez deux nombres, nous cognoiſtrons facilement s'ils ſont premiers entr'eux, ou non. Car eſtant faicte la ſouſtraction, comme dit eſt, ſi on paruient iuſques à l'vnité, leſdits nombres propoſez ſeront premiers entr'eux: mais ſi on n'y paruient pas, ils ſeront compoſez.

PROBL. 1. PROP. II.

Estans donnez deux nombres non premiers entr'eux; trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.

Soient donnez deux nombres non premiers entr'eux A B & C D, desquels C D soit le moindre: il faut trouuer la plus grande commune mesure d'iceux.



Soit soustraict le plus petit nombre C D, tant de fois que faire se pourra du plus grand A B: s'il reste quelque chose, comme E B; iceluy soit osté de C D, tellement qu'il reste encor F D: & ainsi soit soustraict continuellement le plus petit du plus grand, iusques à ce qu'on paruienne à vn nombre qui mesure le precedent: ce qui aduiendra necessairement: car si on paruenoit iusques à l'vnité, les nombres A B, B D, par la prec. prop. seroient premiers entr'eux, contre l'vpothese. Donc que F D mesurant E B, il ne reste rien. Ie dis que F D est la plus grande commune mesure de A B & C D.

Car qu'il les mesure tous deux, nous le prouuerons ainsi. D'autant que FD mesure EB; & EB mesure CF, par la 11 com. sent. FD mesurera aussi le mesme CF; & mesurant soy-mesme, il mesurera le tout C D, composé des deux C F, FD par la 10. com. sent. Mais iceluy CD mesure A E: donc F D mesurera aussi AE: Et puis qu'il mesure aussi EB;

il mesurera le tout A B composé d'iceux A E, E B. Par ainsi F D mesure tous les deux nombres A B & C D.

Il est aussi leur plus grande commune mesure: autrement en soit (s'il est possible) vne autre plus grande, comme G. Veu donc que G mesure C D, il mesurera aussi A E: & mesurant le tout A B par la 12 com. sent. il mesurera aussi le reste E B; & par consequent il mesurera C F. Mais il mesure aussi le tout C D: il mesurera donc aussi le reste F D, scauoir le plus grand nombre le plus petit: ce qui est impossible. Donc vn plus grand nombre que F D ne mesure pas les nombres A B, C D: partant iceluy nombre F D est leur plus grande commune mesure.

A.....8B
C....4D

Que si le moindre nombre C D mesuroit le plus grand A B; il est manifeste qu'il seroit la plus grande commune mesure, attendu qu'il mesure soy-mesme, ainsi qu'il appert icy. Nous auons donc trouué la plus grande commune mesure de deux nombres, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy est euident que qui mesure deux nombres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure, puis qu'il a esté demonstré que si G mesure A B, & C D, il mesurera aussi F D leur plus grande commune mesure.

SCHOLIE.

Par les choses cy-dessus dictes, nous cognoistrons facilement si trois ou dauantage de nombres proposez sont pre-

miers entr'eux, ou non. Car soient donnez les trois nombres A, B, C. Premierement donc soit veu par ce qui est dict à la 1. prop. si les deux nombres A & B sont premiers entr'eux, ou non: Que s'ils sont premiers, il est evident que les nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux. Mais si A & B estoient composez entr'eux, soit trouvée par la 2. prop. leur plus grande commune mesure D; que si elle mesure aussi le nombre C, il est manifeste que les trois nombres A, B, C, sont composez entr'eux, puis qu'ils ont le nombre D pour commune mesure.

A 12
B 9
C 6
D . . . 3

Que si D plus grande commune mesure de A & B, ne mesure C: C & D seront premiers entr'eux, ou non: s'ils sont premiers, les trois nombres A, B, C, ne seront composez entr'eux, mais premiers: Car s'ils estoient composez, ils auroient une commune mesure, laquelle mesureroit aussi le nombre D plus grande commune mesure de A & B, par le Corol. de ceste prop. & partant C & D ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Mais si C & D ne sont premiers entr'eux, les trois nombres A, B, C, seront composez entr'eux. Car estant trouvée par la 2. prop. 7. E la plus grande commune mesure de C & D: icelluy nombre E mesurera aussi A & B par la 11. com. sent. puis que D les me-

A 9
B 6
C 5
D . . . 3

A 12
B 8
C 6
D . . . . 4 E . . 2

sure. Parquoy veu que le mesme E mesure aussi C; il mesurera les trois A, B, C: & partant iceux seront composez entr'eux. Ce qui estoit proposé.

En la mesme maniere sera examiné & cogneu si plus de trois nombres sont premiers entr'eux, ou non. Car s'il y a quatre nombres donnez, il en faudra esprouuer premierement trois; si cinq, quatre, &c. & acheuer comme nous auons dict, de trois nombres proposez.

PROBL. 2. PROP. III.

Estans donnez trois nombres non premiers entr'eux; trouuer leur plus grande commune mesure.

Soient donnez trois nombres non premiers entr'eux A, B, C; desquels il faut trouuer la plus grande commune mesure.

A.....12	D....4
B.....8	E..2
C.....6	F...3

Soit trouué par la prec. prop. la plus grande commune mesure des deux nombres A & B, qui soit D. Si donc D mesure aussi C, nous auons ce que nous demandons: car si vn plus grand nombre que D mesuroit A, B, C, par le Corol. de la prop. precedente, il mesureroit aussi D, la plus grande commune mesure de A & B, scauoir est, vn grand nombre, vn moindre: ce qui est absurde. Que si D ne peut mesurer C, si est-ce que D & C seront composez entr'eux, tant par l'ypothese, que par le susdit Corol. de la 2. prop. donc par icelle

meſme propoſition ſoit trouuee E plus grande commune meſure de C & D. Il eſt euident par la 11. com. ſent. que E meſurera tous les trois nombres A, B, C, d'autant qu'elle meſure C & D; lequel D meſure B & A. Ie dis d'auantage que E eſt auſſi la plus grande commune meſure. Autrement ſi elle n'eſt la plus grande, en ſoit vne autre plus grande, ſcauoir F, s'il eſt poſſible. Or meſurant A, & B, elle meſurera auſſi D, leur plus grande commune meſure par le meſme Corol. de la 2. prop. & par la meſme raiſon meſurant C & D, elle meſurera auſſi leur plus grande commune meſure E, ſçauoir le plus grand, le plus petit: ce qui eſt impoſſible. Donc vn plus grand nombre que E ne meſure pas les nombres donnez A, B, C; & partant iceluy nombre E ſera leur plus grande commune meſure. Parquoy nous auons trouué la plus grande commune meſure de trois nombres propoſez, non premiers entr'eux. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Par tecy il eſt manifeſte qu'vn nombre qui en meſure trois, meſurera auſſi la plus grande commune meſure d'iceux.

SCHOLIE.

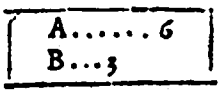
En la meſme maniere, eſtans donnez plus de trois nombres non premiers entr'eux, ſera trouuée leur plus grande commune meſure de trois; C'eſt à dire, que s'il y a quatre nombres, il faudra premierement trouuer la plus grande commune meſure de trois: ſi 5, de quatre: ſi 6, de cinq, &c. puis acheuer, comme il a eſté dict de trois nombres donnez. Et aura auſſi lieu le Corol. precedent; tellement

que le nombre qui en mesure quatre, mesurera aussi leur plus grande commune mesure, &c.

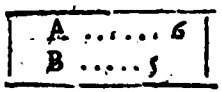
THOR. 2. PROP. IV.

Tout nombre moindre, est partie ou parties de tout nombre plus grand.

Soient deux nombres A & B inegaux, desquels A soit le plus grand. Ie dis que le plus petit B, est ou partie ou parties du plus grand A.

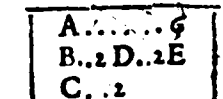


Car ou B mesure A, ou non. S'il le mesure, il est partie par la 3. def. de ce liure: s'il ne le mesure pas, ou bien A & B, seront entr'eux nombres premiers, ou composez.



Premierement, qu'ils soient premiers: d'autant que chaque vnité de B est partie de A, il est euident que B est parties de A, assauoir autant de parties qu'il y a d'vnitez en B.

Secondement, A & B soient composez entr'eux: & puis que B ne mesure pas A, soit trouuée C leur plus grande commune mesure par la 2. p. 7. & soit diuisé B, en parties BD, DE, chacune egale à C. Veu donc que C est partie de A, car il le mesure, BD sera aussi partie de A; item DE. Parant tout le nombre B est parties de A, assauoir autant de parties que C est contenu de fois en BE. Parquoy tout nombre moindre est partie,

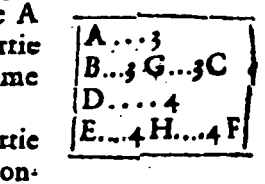


ou parties, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 3. PROP. V.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart, le premier & tiers ensemble, seront telle partie du second & du quart ensemble, qu'est le premier du second.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A 1. est telle partie de BC 2e, que D 3e, l'est de EF 4e. Ie dis que A & D ensemble sont telle partie de BC & EF ensemble, comme A l'est de BC.



Car puis que A est telle partie de BC, que D de EF; BC contiendra A autant de fois, comme EF contiendra D par la 3. def. Ayant donc diuisé BC en autant de parties qu'il contient de fois A, sçauoir en BG & GC; EF se diuisera aussi en autant de parties egales à D, sçauoir en EH & HF: & d'autant que BG est egal à A, & EH à D, si à choses egales A & BG, on adiouste choses egales, D & EH; A & D ensemble, seront egaux à BG & EH ensemble: semblablement A & D ensemble, seront egaux à GC & HF ensemble, & ainsi de suitte, s'il y auoit dauantage de parties en BC & EF: & partant autant de fois que BC contient A, autant de fois BC & EF ensemble, contiendront A & D ensemble: Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie du second, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

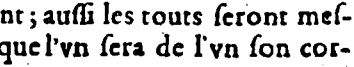
Le mesme est aussi veritable en nombres rompus, ainsi qu'il appert en cet exemple, où le nombre A est telle partie du nombre BC, que le nombre D du nombre EF: & partant sera demonstré comme dessus A, D, ensemble estre la mesme partie de BC, EF ensemble, que A de BC: Sçauoir est, si BC, EF sont diuisez és parties BG, GC; EH, HF, egales à iceux nombres A & D, &c.



Or ceste 5. prop. peut estre transferée à tant de nombres qu'on voudra ainsi:

S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient mesme partie d'autant d'autres nombres, chacun du sien correspondant; aussi les touts seront mesme partie des touts, que l'vn sera de l'vn son correspondant,

Soient les nombres A, B, C, vne mesme partie des nombres DE, FG, HI, chacun de son correspondant. Ie dis que tous les nombres A, B, C ensemble, sont la mesme partie de tous les nombres DE, FG, HI ensemble, que A de DE. Car estans diuisez les nombres DE, FG, HI en parties egales à iceux A, B, C; il y aura en DE autant de parties egales à A qu'en FG d'egales à B, & qu'en HI d'egales à C. Veu donc que A & DK, sont egaux, si on leur adiouste les egaux B & FL; A, B ensemble seront egaux à DK, FL ensemble; & si à iceux on adiouste en-



cores les egaux C & HM; aussi A, B, C ensemble, seront egaux à DK, FL, HM ensemble. Par mesme raison A, B, C ensemble seront egaux à KE, LG, MI ensemble; & ainsi de suitte, s'il y auoit dauantage de parties en DE, FG, HI: donc l'aggregé des nombres A, B, C sera autant de fois egal à l'aggregé des parties des nombres DE, FG, HI, que A sera contenu de fois en DE. Parquoy A, B, C ensemble, seront la mesme partie de DE, FG, HI ensemble, que A de DE.

Or cecy conuient aussi aux nombres rompus, soit qu'ils le soient tous, soit qu'auec iceux il y ait aussi quelque nombre entier, voire mesme l'vnité, ainsi qu'en ceste autre figure. Car il est euident que ceste diuersité de nombres ne peut apporter aucun changement en la demonstration cy-dessus.

A $\frac{2}{5}$	B. 1	C. $1\frac{1}{2}$
D $\frac{2}{5}$ K $\frac{2}{5}$ E	F. 1 L. 1 G	H. $1\frac{1}{2}$ M. $1\frac{1}{2}$ I

Commandin a demonstré en ce lieu le theoreme suiuant.

Si vn nombre est autant multiple d'vn nombre qu'vn autre l'est d'vn autre; l'vn & l'autre ensemble sera autant multiple de l'vn & l'autre ensemble, qu'vn seul l'est d'vn seul.

Soit le nombre A autant multiple du nombre B, que le nombre C, l'est du nombre D: Ie dis que A & C ensemble sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Car puis que A est multiple de B, & C autant multiple de D; B sera telle partie de A, que D de C: & par la 5. prop. 7. B & D ensemble, sera telle partie de A & C ensemble, que A de E: partant A

A	8
B	4
C	6
D	3

& C ensemble, sera autant multiple de B & D ensemble, que A de B. Ce qu'il falloit demonstrer.

Ce qui est icy demonstré de deux nombres, se doit aussi entendre de dauantage: tellement que la prop. se peut rendre vniuerselle disant ainsi:

S'il y-a tant de nombres qu'on voudra equemultiples d'autant d'autres nombres, chacun du sien correspondant: les touts seront autant multiple des touts, que l'vn sera multiple de l'vn, son correspondant.

Ce qui correspond à ce qui a esté demonstré en toutes sortes de grandeurs à la 1. p. 5. Et neantmoins nous le demonstrerons encor ainsi.

A.....8	B.....6	C....4
D....4	E...3	F..2

Soient trois autres nõbres A, B, C, equemultiplices de trois autres D, E, F, chacun de son correspondant: Ie dis que les touts A, B, C ensemble, sont autant multiple des touts D, E, F ensemble, que A est multiple de D. Car puis que A est autant multiple de D, que B de E, & C de F; au contraire D sera telle partie de A, que E de B, & F de C. Donc par les choses cy-dessus demonstrees, D, E, F ensemble, seront telle partie de A, B, C ensemble, que D de A: & par le contraire, les touts A, B, C ensemble, seront autant multiples des touts D, E, F ensemble, que A de D. Et n'importe que les nombres proposez soient nombres entiers, ou nombres rompus: car il est euident que la demonstration des vns est la mesme que des autres.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si de quatres nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart: le premier & tiers ensemble, seront telles parties du second & quart ensemble, que le premier du second.

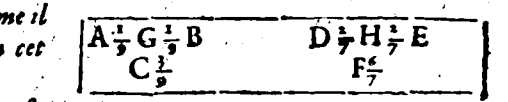
Soient quatre nombres AB, C, DE & F, desquels le premier AB contient autant de parties du second C, que le troisiesme DE en contient du quatriesme F. Ie dis que AB & DE ensemble, contiennent autant de parties de C & F ensemble, que AB de C.



Car d'autant que AB contient telles parties de C, que DE de F: estans AB & DE diuisez en AG, GB; & DH, HE, selon qu'ils sont parties de C & F, il y aura autant de parties de C en AB, comme de F en DE, & par la prop. preced. AG & DH ensemble, sera telle partie de C & F ensemble, que AG de C. Item GB & HE ensemble, sera telle partie de C & F ensemble, que GB de C: & ainsi de suite, s'il y auoit dauantage de parties en AB & DE. Parquoy iceux AB & DE ensemble, seront telles parties de C & F ensemble, que AB de C. Donc si de quatre nombres, le premier contient telles parties, &c. Ce qu'*il falloit* demonstrer.

SCHOLIE.

Ceste mesme prop. auec sa demonstration a aussi lieu en nombres rompus, comme il appert en cet exemple.



* *Mais ceste 6. prop. peut aussi estre estendue à tant de nombres qu'on voudra, soient entiers, ou rompus, ainsi qu'il enfuit.*

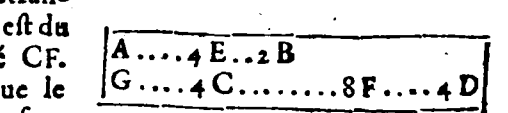
S'il y a tant de nombres qu'on voudra, qui soient mesmes parties d'autant d'autres nombres, chacun d'vn chacun; aussi les touts seront mesmes parties des touts, que l'vn de l'vn son correspondant.

Car c'est la mesme demonstration que dessus; obseruant seulement qu'au lieu de la 5. prop. il se faut seruir icy de l'vniuerselle demonstrée au Scholie d'icelle 5. prop.

THEOR. 5. PROP. VII.

Si vn nombre est telle partie d'vn autre nombre, que le retranché du retranché; le reste sera aussi telle partie du reste, comme le tout est du tout.

Soit le nombre AB telle partie du nombre CD que le retranché AE est du retrãché CF. Ie dis que le reste EB, sera telle partie du reste FD, que le tout AB est du tout CD.



Car

Car estant pris le nombre GC, en sorte que telle partie qu'est le retranché AE du retranché CF, telle partie le reste EB soit d'iceluy GC: par la 5. pr. les deux nombres AE & EB ensemble, seront telle partie des nombres GC & CF ensemble, qu'est AE de CF, c'est à dire qu'est le tout AB du tout CD: & partant puis que le nombre AB est telle partie du nombre CF que de CD: iceux nombres GF, CD seront egaux entr'eux par la 4. com. sent. en ostant donc le nombre commun CF, les demeurans GC & FD seront egaux: & partant le reste EB sera telle partie du reste FD, que de GC: c'est à dire que le tout AB du tout CD, puis que EB a esté posé telle partie de GC, que AE de CF; qui par l'hypothese est la mesme que AB de CD. Si donc vn nombre est telle partie d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Ceste prop. auec sa demonstration conuient aussi aux nombres rompus: Et encore le theoreme suiuant, lequel Commandin demonstre en ceste endroict.

Si vn nombre est autant multiple d'vn autre nombre que le retranché du retranché: aussi le reste sera autãt multiple du reste, que le tout du tout.

Soit le nombre AB autant multiple du nombre CD, que le retranché AE du retranché CF: Ie dis aussi que le reste EB est autant multiple du reste FD, que le tout AB l'est du tout CD. Car puis que AB, AE sont equemultiplices de CD, CF, par le contraire le tout CD sera telle partie

A.....6 E....4 B
C...3 F..2 D

du tout AB, que le retranché CF du retranché AE: & partant par la susdite prop. 7. aussi le reste FD, sera telle partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc au contraire EB sera autant multiple de FD, que le tout AB est multiple du tout GD. Ce qui estoit proposé à demonstrer.

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, que le retranché du retranché: aussi le reste contiendra telles parties du reste, que le tout du tout.

Si le nombre total A B contient telles parties du total C D, que le retranché A E du retranché C F : Ie dis que le reste E B contiendra telles parties du reste F D, que le total A B, du total C D.

G..2 A.....6 E..2 B
C.....9 F...3 D

Car si on pose G A contenir telles parties de F D, que A E de C F, ou A B de C D, par la 6. pr. les deux nombres G A, A E ensemble, seront telles parties des deux C F, F D ensemble, (c'est à dire le tout G E du tout C D) que G A de F D, ou A B de C D: & partant puis que G E & A B contiennent telles parties de C D, l'vn que l'autre, ils seront egaux : parquoy en ostant le nombre commun A E, resteront G A & E B egaux. Mais G A contient telles parties de F D, que A B de C D : Donc aussi E B contiendra telles parties d'iceluy F D, que A B de C D. Parquoy si vn nombre contient telles parties d'vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Que si aux nombres entiers cy-dessus apposez l'on substitue des nombres rompus, tu demonstreras en la mesme maniere ceste 8. prop. estre aussi veritable en fractions: & semblablement les 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, &c.

THEOR. 7. PROP. IX.

Si de quatre nombres, le premier est telle partie du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier sera telle, ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres A, BC, D & EF, desquels A soit telle partie de B C que D est de E F. Ie dis qu'en permutant, A sera telle partie, ou contiendra telles parties de D, que BC de EF; pourueu que A & B G soient plus petits que D & EF, chacũ au sien; car ainsi se doit entẽdre ceste proposition:

A...3	
B...3	G...3 C
D....4	
E....4	H....4 F

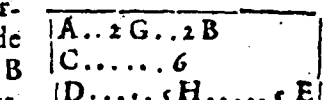
Qu'ainsi ne soit: d'autant que par l'hypothese, A est telle partie de BC comme D de EF: BC contiendra autant de parties egales à A que E F en contient d'egales à D: soit donc diuisé le nombre B C és parties BG, GC, chacune egale à A; & le nombre EF és parties EH, HF chacune egale à D. Et puis que A est posé moindre que D, par la 4. pr. de ce liure, A est partie ou parties de D, & ainsi consequẽment des autres, sçauoir BG de EH, & GC de HF: mais parce que BG est egale à GC, & EH à HF; BG sera telle ou telles parties de EH, que GC

de HF: & partant par la 5. ou 6. prop. BG, GC ensemble, c'est à dire BC, sera telle ou telles parties de EH, HF ensemble, sçauoir EF, que BG de EH, c'est à dire que A de D. Parquoy si de quatre nombres le premier est telle partie, &c. Ce qu'il failloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Si de quatre nombres, le premier contient telles parties du second, que le tiers du quart; aussi en permutant le premier contiendra telle ou telles parties du tiers, que le second du quart.

Soient quatre nombres AB, C, DE & F. desquels AB contienne telles parties de C, que DE de F. Ie dis qu'en permutãt, AB sera telle ou telles parties de DE, que C est de F, moyennant que AB & C soient plus petits que DE & F, chacun au sien, car ceste prop. aussi bien que la precedente se doit ainsi entendre.



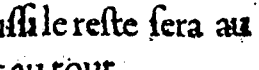
Car AB estant diuisé en AG, GB parties de C, & DE en DH, HE parties de F: AB sera diuisé en autant de parties que DE, & tant AG que GB, sera telle partie de C, que DH & HE de F: donc en permutant par la 9. prop. de ce liure, AG sera telle partie ou parties de DH, & GB de HE, que C de F: & partant AG sera telle partie, ou parties de DH,

que GB de HE. Donc par la 5. ou 6. prop. AG, GB enſemble, ſçauoir eſt le premier nombre AB, ſera auſſi telle partie, ou parties de DH, HE enſemble, c'eſt à dire du troiſieſme nombre DE, que AG de DH, c'eſt à dire que le ſecond nombre C du quart F. Parquoy ſi de quatre nombres, le premier contient telles parties du ſecond, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Si le tout eſt au tout, comme le retranché au retranché; auſſi le reſte ſera au reſte, comme le tout au tout.

Soit le tout AB au tout CD, comme le retranché AE au retranché CF: Ie dis que le reſte EB eſt au reſte FD, comme le tout AB au tout CD.



Car puis que AB eſt à CD, comme AE à CF, AB eſtant plus petit nombre que CD, il ſera telle ou telles parties d'iceluy CD, que AE de CF, & par la 7 ou 8. prop. le reſte EB ſera telle ou telles parties du reſte FD, que le tout du tout: & partant par la 20. def. le reſte EB ſera au reſte FD, comme le tout AB au tout CD. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Or combien qu'en ceſte demonſtration Euclide poſe le nombre AB plus petit que le nombre CD: ſi eſt-ce toutesfois qu'elle auroit auſſi lieu, ſi AB eſtoit plus

grand que CD. Car ou icelluy nombre CD mesureroit AB, ou il ne le mesureroit pas. Que CD mesure donc premierement AB; & d'autant que comme AB est à CD, ainsi AE est à CF, par la 20. def.

A.....8	E.....6 B
C....4	F...3 D

AB, AE, seront equemultiplices de CD, CF, c'est à dire que CD sera telle partie de AB, que CF de AE; & par la 7. prop. le reste FD sera aussi mesme partie du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par le contraire AB, EB, seront equemultiplices d'icelles CD, FD: & par la 20. def. conuertie, comme le tout AB sera au tout CD, ainsi le reste EB sera au reste FD.

Maintenant que CD ne mesure pas AB: derechef puis que comme AB est à CD, ainsi AE est à CF, telles parties que CD est de AB, telles parties CF est aussi de AE par la susdite 20. def. & par la 8. prop. le reste FD sera mesme parties du reste EB, que le tout CD du tout AB: donc par la mesme def. conuertie, le reste EB sera au reste FD, comme le tout AB sera au tout CD. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....6	E...3 B
C....4	F..2 D

THEOR. 10. PROP. XII.

S'il y-a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux; comme l'vn des antecedans sera à son consequent, ainsi tous les antecedans seront à tous les consequens.

Soient tant de nombres qu'on voudra propor-

tionnaux A,B:C,D:E,F: c'eſt à ſçauoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D, & que de E à F. Ie dis que tous les antecedans A,C,E enſemble, ſeront à tous les conſequens B, D, F enſemble, comme A, l'vn des antecedans, eſt à B ſon conſequent.

A.....6	C....4	E..2
B.....9	D.....6	F...3

Car puis que les ſuſdits nombres ſont proportionnaux, & A, C, E, ſont moindres que B, D, E; par la 20. def. A ſera telle ou telles parties de B, que C de D, & E de F; & par la 5. ou 6. prop. de ce meſme liure A & C enſemble ſeront telle, ou telles parties de B & D enſemble, que A de B, ou E de F. Derechef, puis que A, C enſemble comme vn ſeul, eſt telle partie, ou parties de B, D enſemble cõme vn ſeul, que E de F, auſſi par les meſmes propoſitions A, C enſemble auec E, ſeront telle ou telles parties de B, D enſemble auec F, que A de B: parquoy par la ſuſdite 20. def. conuertie tous les antecedans A, C, E enſemble, auront meſme raiſon à tous les conſequens B, D, F enſemble, que A à B: Si donc il y a tant de nombres qu'on voudra proportionnaux, comme l'vn des antecedans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Euclide n'ayant demonſtré ceſte prop. qu'en quatre nombres, nous auons delaiſſé ſa demonſtration pour prendre celle-cy, qu'on peut eſtendre à tant de nombres qu'on voudra: & combien qu'en ceſte demonſtration nous ayons poſé, comme il a faict, les nombres antecedans moindres que les conſequens, ſi eſt-ce toutesfois qu'eſtans plus

grands la demonſtration n'en ſera differente, ſinon en ce qu'il faudra, comme au Scholie precedent, prendre iceux antecedans equemultiplices des conſequens: & puis apres iceux conſequens meſmes parties de faicts antecedãs, &c.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si quatre nombres ſont proportionnaux: auſſi en permutant ils ſeront proportionnaux.

Soient quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, ſçauoir qu'il y ait telle raiſon de A à B, que de C à D: Ie dis qu'en permutant, il y aura telle raiſon de A à C, que B à D.

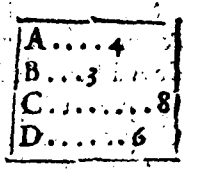
A	6
B	9
C	8
D	12

Car puis que comme A eſt à B, ainſi C à D, par la 20. def. A eſtant plus petit que B, & C que D: A ſera telle ou telles parties de B, que C eſt de D: & partant en permuttant par la 9. ou 10. prop. de ce liure A ſera telle ou telles parties de C, que B eſt de D, & par la ſuſdite 20. def. conuertie, il y aura meſme raiſon de A à C que de B à D. Parquoy ſi quatre nombres ſont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

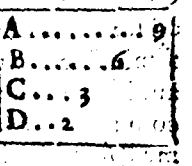
SCHOLIE.

Ceſte demonſtration d'Euclide a ſeulement lieu, quand les nombres antecedans ſont moindres que les conſequens, & que A eſt moindre que C: mais s'ils ſont plus grands, & que A ſoit plus grand que B, & moindre que C, la demonſtration s'en fera ainſi. D'au-

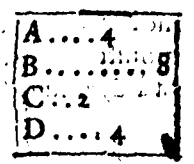
tant que comme A est à B, ainsi C est à D, par la 20. def. B sera mesme partie, ou mesmes parties de A, que D de C: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. B sera mesme partie ou parties de D, que A de C: & par la susdite 20. def. A sera à C, comme B à D.



Que si A est plus grand que B, & que C: on argumentera ainsi. D autant que comme A est à B, ainsi C est à D, par la 20. def. D sera mesme partie ou parties de C que B de A: donc en permutant par la 9. ou 10. prop. 7. C sera telle partie, ou telles parties de A, que D de B: & partant par la mesme def. A sera à C, comme B à D.



Finalement si A est moindre que B, & plus grand que C, on dira ainsi: d'autant que comme A est à B, ainsi C est à D, par la 20. def. 7. C est mesme partie ou parties de D, que A de B: Donc en changeant par la 9. au 10. p. 7. C sera mesme partie, ou parties de A, que D de B: & par la susdite 20. def. conuertie, A sera à C, comme B à D.



THEOR. 12. PROP. XIV.

S'il y-a tant de nombres qu'on voudra d'vn costé, & autant d'vn autre, qui soient prins de deux en deux, & en mesme raison; iceux en raison egale, seront aussi en mesme raison.

Soient tant de nombres qu'on voudra A, B, C, & autant d'autres D, E, F: & qu'il y ait telle raison de A à B, que de D à E, & de B à C, que de E à F. Ie dis qu'en raison egale, il y aura telle raison de A à C, que de D à F.

Car puis que comme A est à B, ainsi D à E, en permuttant par la preced. prop. comme A sera à D, ainsi B à E: semblablement aussi puis que comme B est à C, ainsi E à F, en permuttant comme B sera à E, ainsi C à F. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à F (car puis que A est à D, & C à F, en mesme raison que B à E, aussi A sera à D en la mesme raison que C à F, comme sera incontinent demonstré) & partant en permuttant, comme A sera à C, ainsi D sera à F: ce qu'il falloit prouuer.

A.....9	D.....6
B.....6	E....4
C...3	F..2

LEMME.

Or que A estant à D, & C à F, en mesme raison que B à E, ils soient de mesme raison entr'eux, nous le demonstrerons ainsi. D'autant que comme A est à D, ainsi B à E; E plus petit sera telle ou telles parties de B, que D de A: Derechef puis que comme B à E, ainsi C à F; F, moindre sera telle, ou telles parties de C, que E de B: Parquoy F sera telle ou telles parties de C, que D de A: & partant par la 20. def. conuertie, comme A sera à D, ainsi C sera à F. Donc les raisons des nombres qui sont de mesme à vne, sont aussi de mesmes entr'elles. Ce qui a esté demonstré en toutes grandeurs au 5. liure prop. 11.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si l'vnité meſure quelque nombre autant de fois qu'vn tiers meſure vn quart; auſſi en permutant le ſecond meſurera le quart autant de fois que l'vnité meſure le tiers.

Soit l'vnité A, qui meſure BC autant de fois que D meſure EF: Ie dis qu'en permutant BC meſurera EF autant de fois que A meſure D.

Car ayant diuiſé BC ſelon les vnitez BG, GH, HC: il y aura en EF autant de parties egales à D, leſquelles ſoient EI, IK, KF: & partant BG ſera meſme partie de EI, que GH de IK, & HC de KF: donc par la 20. def. BG eſt à EI, comme GH à IK; & HC à KF: & partant par la 12. prop. tous les antecedans BC, ſeront à tous les conſequents EF, comme BG à EI, ou leurs egaux A à D: & par la ſuſdite 20. def. conuertie BC ſera meſme partie de EF que A de D; & par conſequent BC meſure EF autant de fois que A meſure D. Parquoy ſi l'vnité meſure quelque nombre, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

A. 1
B. 1 G. 1 H. 1 C
D. . 2
E. . 2 I. . 2 K. . 2 F

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux nõbres ſe multiplient l'vn l'autre, leurs produicts ſeront egaux entr'eux.

Soient deux nombres A & B: & que A multipliant B produise C: & B multipliant A produise D: Ie dis qu'iceux deux produicts C & D sont egaux entr'eux.

	Vnité.
A	3
B	4
C	12
D	12

Car puis que A multipliant B produict C: B sera autant de fois en C, que l'vnité en A par la 15. def. & partant mesurera C autant de fois que l'vnité mesure A, & par la 15. prop. en permutant A mesurera C autant de fois que l'vnité mesurera B. Item B multipliant A & produisant D, A sera autant de fois en D, qu'il y a d'vnitez en B par la mesme 15. def. & par consequent mesurera D autant de fois que l'vnité mesure B: mais nous auons prouué que A mesureroit aussi C autant de fois que l'vnité mesure B: donc A mesure C & D egalement, & partant par la 1. com. sent. C & D seront egaux entr'eux: Parquoy si deux nombres se multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

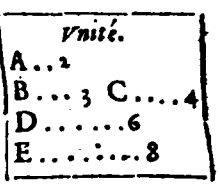
On demonstrera ceste prop. en nombres rompus ainsi. D'autant que A multipliant B produict C: par la def. de la multiplication C sera à B comme A à l'vnité: & en permutant C sera à A comme B à l'vnité. Mais par la mesme def. comme B est à l'vnité, ainsi aussi D est à A, pource que B multipliant A a produict D. Donc comme C sera à A ainsi D sera au mesme A, par le Lemme de la 14. prop. &c. partant C & D sont egaux entr'eux.

	Vnité.
A	$\frac{2}{3}$
B	$4\frac{5}{7}$
D	$3\frac{1}{7}$
C	$3\frac{1}{7}$

THEOR 15. PROP. XVII.

Si vn nombre en multiplie deux autres, les produicts seront entr'eux en mesme raison que les multipliez.

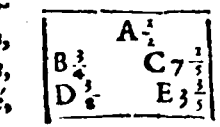
Soit le nombre A, lequel multipliant les nombres B & C faſſe D & E: Ie dis que les deux produicts D & E ſont entr'eux, comme B à C.



Car par la 15. def. B multiplié par A eſt autant de fois contenu en ſon produict D, que l'vnité en A: & C dans ſon produict E, comme la meſme vnité en A: & partant B meſurera autant de fois D, que C meſure E. Donc B ſera telle partie de D, que C de E: & par la 20. def. B ſera à D, comme C à E: & en permutant par la 13. prop. 7. comme B ſera à C ainſi D ſera à E: Si donc vn nombre en multiplie deux autres, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Ceſte prop. a auſſi lieu en nombres rompus: & ſe demonſtre ainſi. D'autant que A multipliant B & C, produict D & E: par la def. de la multiplication, il y aura telle raiſon tant de D à B, que de E à C, comme de A à l'vnité, & partant par le Lemme de la 14. prop. 7. comme D ſera à B, ainſi E à C: donc en permutant comme D ſera à E, ainſi B à C.



THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si deux nombres en multiplient vn autre, les produicts ſeront entr'eux, en meſme raiſon que les multiplians.

Soient deux nombres A & B, qui multiplians C produiſent D & E. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi D eſt à E.

Car puis que A multipliant C produict D, auſſi C multipliant A produict le meſme D par la 16. p. Semblablement, puis que B multipliãt C produict E, auſſi C mulipliant B produira le meſme E: veu donc qu'vn meſme nombre C multipliant A & B, produict D & E, comme A eſt à B, ainſi D eſt à E par la prop. prec. Parquoy ſi deux nombres en multiplient vn autre, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

A...3	B....4
C..2	
D.....6	E.....8

SCHOLIE.

Veu que la demonſtration tant de ceſte prop. que des deux ſuiuantes, eſt la meſme en nombres rompus, qu'en nombres entiers, nous ne nous y arreſterons dauantage; mais dirons icy que Clauius a accommodé (apres Campanus) tant ceſte prop. que la precedente à tant de nombres qu'on voudra, en ceſte ſorte.

Si vn nombre multiplie tant de nombres qu'on voudra, ou quelconques nombres en multiplient quelque autre: les produicts ſeront entr'eux en meſme raiſon que les multipliez, ou multiplians.

Car le nombre A multipliant les nombres B, C, D, ou eſtant multiplié par iceux, ſoient produicts les nombres E, F, G. Ie dis que E, F, G, ſont entr'eux comme les nombres multipliez ou multiplians B, C, D; c'eſt à dire, que comme B eſt à C, ainſi E à F; & comme C à D, ainſi F à G. Car puis que E, F ſont produicts de A multipliant



B, C ou de B, C multipliez par A, comme B ſera à C, ainſi E ſera à F par la 17. ou 18. prop. ſemblablement pource que F, G, ſont produicts de A en C, D, ou de C, D par A, auſſi comme C ſera à D, ainſi F à G, & ainſi des autres. Appert donc ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier multiplié par le quart, ſera egal au produict du ſecond par le tiers: Et ſi le produict du premier multiplié par le quart, eſt egal au produict du ſecond par le tiers; iceux quatre nombres ſont proportionnaux.

Soient quatre nombres proportiõnaux A, B, C, D, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; &

que le premier A multiplié par le dernier D produiſe E, & le ſecond B par le tiers C produiſe F. Ie dis que E & F ſont egaux.

A.....6	B....4
C...3	D..2
E.....12	
F.....12	
G.....18	

Qu'ainſi ne ſoit: Soit multplié A par C, & le produit ſoit G: d autant que A multiplié par C & D, produict G & E, il y aura telle raiſon de G a E que de C à D, par la prop. pr. Pareillemẽt d'autant que C multipliant A & B, produict G & F, il y aura telle raiſon de G à F, que de A à B, par la 17. pr. ou de C à D, qui ſont en meſme raiſon que A & B. Parquoy G eſtãt à E, & G à F en meſme raiſon que C à D, par le Lemme de la 14. prop. comme G ſera à E, ainſi G ſera à F: parquoy G aura meſme raiſon à E qu'à F: & partant E & F ſeront nombres egaux, ainſi que nous auons dit ſur la 20. def.

Pour la ſeconde partie, ſoit E produict de A multiplié par D, egal à F, produict de B multiplié par C: Ie dis que A eſt à B comme C eſt à D.

Car ſi G eſt produict de A multiplié par C: E & F nombres egaux, auront meſme raiſon à G, comme nous auons dit en la ſuitte de la 20. def. Mais il y a telle raiſon de G à E, comme de C à D, par la preced. prop. & telle raiſon de G à F, comme de A à B par la 17. prop. & partant par le Lemme de la 14. p. A ſera à B, comme C à D. Si donc quatre nombres ſont proportionnaux, le produict du premier & quart, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Clauius adiouſte icy cet autre Theoreme, la demonſtra-

tion

tion duquel a lieu tant en nombres entiers qu'en fractions.

Si de quatre nombres, le premier à plus grande raiſon au ſecond, que le troiſieſme au quatrieſme; le produict du premier multiplié par le quatrieſme ſera plus grand que le produict du ſecond multiplié par le troiſieſme; & ſi le produict du premier & quatrieſme eſt plus grand, que celuy du ſecond & troiſieſme; il y aura plus grande raiſon du premier au ſecond que du troiſieſme au quatrieſme.

Soient quatre nombres A, B, C, D, & qu'il y ait premierement plus grande raiſon du premier A au ſecond B, que du troiſieſme C au quatrieſme D: Ie dis que le nombre procreé de A en D eſt plus grand que celuy fait de B en C. Car ſi on poſe que E ſoit à B, comme C à D; il y aura auſſi plus grande raiſon de A à B, que de E à B; & partant A ſera plus grand que E, comme nous auons annotté ſur la 20. def. 7. Parquoy il ſe fera vn plus grand nombre de A en D, que de E par le meſme D. Mais par la 19. prop. 7. le produict de E en D eſt egal à celuy de B en C: donc auſſi le nombre procreé de A en D ſera plus grand que celuy fait de B en C. Ce qu'il falloit prouuer.

A.....7 E.....6
B....4
C.....9
D.....6

Maintenant que le nombre procreé de A en D, ſoit plus grand, que celuy fait de B en C: Ie dis qu'il y a plus grande raiſon de A à B, que de C à D. Car ſi on entend que le nombre E en D faſſe le meſme nombre que de B en C: le produict de A en D ſera auſſi plus grand que celuy de E par le meſme D: & par-

A.....5 E.....6
B....4
C...3
D..2

tant A sera plus grand que E. Parquoy il y aura plus grande raiſon de A à B, que de E au meſme B. Mais par la 19. prop. 7. comme E eſt à B, ainſi C eſt à D: donc auſſi la raiſon de A à B ſera plus grande que de C à D. Ce qu'il falloit prouuer.

Que s'il y auoit moindre raiſon du premier nombre au ſecond, que du troiſieſme au quatrieſme, le nombre faict du premier multiplié par le quatrieſme ſeroit moindre, que celuy faict du ſecond par le troiſieſme: Et ſi le nombre procreé du premier multiplié par le quatrieſme eſtoit moindre que celuy fait du ſecond par le troiſieſme: il y auroit moindre raiſon du premier nombre au ſecond, que du troiſieſme au quatrieſme. La demonſtration n'eſt differente à la precedente, ſinon en ce qu'il faut changer plus grand *en* moindre.

A ce Theoreme nous en adiouſterons vn autre fort vtil, qui eſt tel.

Si trois ou dauantage de nombres ſe multiplient entr'eux, le produict ſera touſiours le meſme, en quelque façon & ordre qu'on les multiplie.

Soient trois nombres A, B, C, & le produict de A multiplié par B ſoit D, lequel multiplié par C produiſe E: Mais changeant d'ordre le produict de B par C ſoit F, & celuy multiplié par A produiſe G: Changeant derechef d'ordre, le produict de A en C ſoit H, qui multiplié par B faſſe I. Ie dis que les trois produicts E, G, I, ſont vn meſme nombre. Car puis que B multipliant A & C produict D, F, par la 17. prop. 7. comme A eſt à C, ainſi D à F, & par la 19. prop. 7. le produict de A en F, qui eſt G, ſera egal

A 3.	B 4.	C 5.
D 12.	F 20.	H 15.
E 60	G 60	I 60.

un produict de C en D, qui eſt E. Item puiſque C multipliant A & B, produict H & F, comme A eſt à B, ainſi H à F: & partant le produict de A en F, qui eſt G, ſera egal au produict de B en H, qui eſt I. Par ainſi les deux nombres E & I eſtans egaux au nombre G, tous les trois E, G, I, ſont egaux entr'eux, c'eſt à dire vn meſme nombre: Ce qu'il falloit prouuer.

Maintenant ſoient quatre nombres A, B, C, D, & multipliant A par B, & le produict par C, ſoit faict E, qui multiplié par D produiſe F: Mais changeant d'ordre, & multipliant D par C, & le produict par B, ſoit faict G, qui multiplié par A, faſſe H: Ie dis que F & H ſont vn meſme nombre, & qu'en quelque autre façon qu'on multiplie entr'eux les quatre nombres propoſez A, B, C, D, ſera touſiours produict le meſme nombre. Car puis que multipliant d'vn coſté les trois nombres A, B, C entr'eux, & d'vn autre coſté les trois D, C, B, auſſi entr'eux ſont produicts les deux E & G ſoient multipliez E & C entr'eux, & le produict ſoit I. Or par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus de trois nõbres, le nombre E qui ſe fait multipliant A par B, & le produict par C, ſe fera auſſi multipliant B par C, & le produict (ſçauoir I) par A. Par meſme diſcours, on prouuera que G ſeroit produict multipliant D par I. Veu donc que I multipliant A & D, produict E & G, comme A eſt à D, ainſi E eſt à G, par la 17. prop. 7. & partant le produict des extremes A & G ſera le meſme que des moyens D & E par la 19. prop. 7. donc F & H ſont vn meſme nombre. Et par ſemblable diſcours on prouuera touſiours le meſme: Car de

A 2.	B 3.	C 4.	D 5.
E 24.	I 12.	G 60.	
F 120.		H 120.	

quatre nombres en multipliant trois entr'eux d'vn coſté, & trois d'vn autre, il ſe rencontrera que de trois pris d'vn coſté, & d'autre, il y en aura touſiours deux qui ſeront communs de part & d'autre, & par ainſi la meſme demonſtration aura touſiours lieu.

Que ſi l'on propoſe cinq nombres, on en prendra quatre d'vn coſté, & quatre d'vn autre, & s'en trouuera touſiours trois qui ſeront communs d'vn coſté & d'autre: tellement que s'aydant de ce qui a eſté demonſtré en trois, & en quatre nombres, on accomplira la demonſtration en la meſme ſorte. Et ſi on propoſe ſix nombres, l'on ſe ſeruira de ce qui aura eſté demonſtré en cinq, & ainſi touſiours en augmentant de nombre en nombre, ſi on en propoſe dauantage. Ce que le docte Bachet a auſſi demonſtré en ſes Problemes plaiſans: & eſt veritable en toutes ſortes de nombres ſoient entiers ou fractions.

THOR. 18. PROP. XX.

Si trois nombres ſont proportionnaux le produict des extremes eſt egal au produict du milieu: & ſi le produict des extremes eſt egal à celuy du milieu, iceux trois nombres ſeront proportionnaux.

Soient trois nombres proportionnaux A, B, C, ſçauoir que comme A eſt à B, ainſi B à C: Ie dis que le produict de A 1, multiplié par C, 3e, eſt egal au produict du moyen B multiplié par ſoy-meſme.

A	9
B	6
D	6
C	4

Car estant pris D egal à B, comme A sera à B ainsi D sera à C; & par la prec. prop. le produict de A par C, sera egal au produict de B par D, c'est à dire, de B par soy mesme.

Pour la seconde partie; soit le produict de A 1. multiplié par C 3^e, egal au produict de B moyen multiplié par soy-mesme: Ie dis que les nombres A, B, C, sont proportionnaux.

Car derechef estans pris D egal à B, comme A sera à B, ainsi D sera à C; & par la prop prec. le produict de A par C sera egal au produict de B par D, c'est à dire de B par soy-mesme, puis que D luy est egal: partant les trois nombres A, B, C, sont proportionnaux. *Si* donc trois nombres sont proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Que s'il y a plus grande raison du premier nombre au second, que du second au troisiesme; le nombre procreé du premier multiplié par le troisiesme sera plus grand, que celuy faict du second multiplié par soy-mesme: & si le nombre faict du premier multiplié par le troisiesme est plus grand que du second en soy-mesme, il y aura plus grande raison du premier au second, que du second au troisiesme.

A 8	A 4
B 6	B 6
D 6	D 6
C 5	C 7

Item s'il y a moindre raison du premier au second, que du second au troisiesme, le produict du premier par le troisiesme sera moindre que le produict du second par soy-mesme: & si un moindre nombre est faict du premier multiplié

par le troiſieſme, que du ſecond en ſoy; il y aura moindre raiſon du premier nombre au deuxieſme, que du deuxieſme au troiſieſme: Ce qui ſera evident par ce qui eſt demonſtré au ſcholie precedent, ayant poſé le nombre D egal au ſecond nombre B, afin qu'il y ait quatre nombres: Car alors il y aura plus grande raiſon du premier au deuxieſme, que du troiſieſme au quatrieſme, ou moindre, &c. comme il appert aux exemples cy appoſez, ſoit que les nombres ſoient entiers ou rompus.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont la meſme raiſon auec iceux, meſurent egalement les nombres qui ont la meſme raiſon, ſçauoir le plus grand, le plus grand; & le plus petit, le plus petit.

Soient deux nombres A & B, les plus petits en leur raiſon, & deux autres nombres plus grands C & D en meſme raiſon qu'iceux A & B, c'eſt à dire que comme A eſt à B, ainſi C à D: Ie dis que A & B meſurent egalement C & D, c'eſt à dire que A meſure C autant de fois que B meſure D.

A...3	B....4
C.....6	D.....8

Car puis que iceux A, B, C, D, ſont proportionnaux, en permutant par la 13. prop A ſera à C comme B à D; & puis que A & B ſont plus petits que C & D, par la 20. def. ils ſeront meſme partie ou parties d'iceux C & D. Or ils ne peuuent eſtre

parties ; car il eſt euident qu'ils ne ſeroient les plus petits nombres de leur raiſon; contre l'hypotheſe. Donc A eſt meſme partie de C, que B de D: & partant A meſure C, autant de fois que B meſure D: parquoy les plus petits nombres de tous ceux qui ont, &c. Ce qu'il fallott demonſtrer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois nombres d'vn coſté, & autant d'vn autre, leſquels pris de deux en deux ſoient en meſme raiſon, la proportion eſtant troublée, en raiſon egale, ils ſeront proportionnaux.

Soient trois nombres d'vn coſté A, B. C, & trois d'vn autre D, E, F, leſquels pris de deux en deux ſoient en meſme raiſon, & leur proportion troublée, ſçauoir que A ſoit à B, comme E à F, & B à C, comme D à E: Ie dis qu'en raiſon egale A ſera à C, comme D à F.

A....4	D.....12
B...3	E.....8
C...2	F.....6

Car puis que A eſt à B, comme E à F le produict de A multiplié par F, ſera egal au produict de B multiplié par E, par la 19. prop. Item, puis que B eſt à C, comme D à E: le meſme produict de B multiplié par E, ſera egal au produict de C multiplié par D, par la meſme propoſition, & partant le produict de A par F, ſera egal au produict de C par D, & par la ſuſdite 19. prop. il y aura

meſme raiſon de A à C que de D à F: Parquoy s'il y-a trois nombres d'vn coſté, & autant d'vn autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Il eſt euident que ceſte demonſtration conuient auſſi aux nombres rompus. Et d'autant que de ſix moyens d'argumenter és proportions, leſquels Euclide a expliqué en grandeur, & demonſtré au cinquieſme liure, il en demonſtre en celuy-cy ſeulement deux en nombres; il ne ſera hors de propos de demonſtrer auſſi en nombres les quatre autres moyens, comme ont faict pluſieurs Interpretes.

1. Si quatre nombres ſont proportionnaux; par raiſon inuerſe, ou en changeant, ils ſeront auſſi proportionnaux.

Soit A à B comme C à D. Ie dis qu'en changeant comme B à A, ainſi D à C. Car puis que comme A à B, ainſi C à D; en permutant par la 13. prop. comme A ſera à C, ainſi B à D. Derechef puis que B eſt à D comme A à C, par la meſme prop. B ſera à A comme D à C. Ce qui eſtoit propoſé.

A 6	C ... 3
B 4	D .. 2

2. Si les nombres compoſez ſont proportionnaux; iceux diuiſez ſeront auſſi proportionnaux.

Soit A B à C B comme D E à F E. Ie dis qu'auſſi en diuiſant, comme A C à C B, ainſi D F à F E; Car puis que comme A B à C B, ainſi D E à F E; en permutant par la 13. prop. comme le tout A B au tout D E, ainſi le retranché C B au retranché F E: & partant par la 11. p. comme le tout A B eſt au tout D E, ainſi le reſte

A 6	C ... 3	B
D 4	F .. 2	E

AC sera au reste DF: c'est à dire AC à DF, comme CE à FE: donc en permuttant comme AC sera à CE, ainsi DF sera à FE. Ce qui estoit proposé.

Par la mesme maniere nous demonstrerons comme au liure 5. la diuision conuerse, & contraire de raison. Car soit premierement comme AB à CB, ainsi DE à FE: Ie dis que par diuision conuerse de raison, comme CB à AC, ainsi FE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE: en diuisant, comme AC sera à CB, ainsi DF à FE: & en changeant, comme CB sera à AC, ainsi FE sera à DF.

Soit maintenant comme AC à AB, ainsi DF à DE. Ie dis par diuision contraire de raison, que comme AC à CB, ainsi DF à FE. Car puis que comme AC à AB, ainsi DF à DE: en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF. Donc en diuisant comme CB à AC, ainsi FE à DF; & en changeant, comme AC sera à CB, ainsi DF à FE. Ce qui estoit proposé.

3. Si les nombres diuisez sont proportionnaux: iceux composez seront aussi proportionnaux.

Soit AB à BC, comme DE à EF. Ie dis qu'en composant comme AC est à BC, ainsi DF, à EF. Car puis que comme AB à BC, ainsi DE à EF, en permutant par la 13. prop. comme AB à DE, ainsi BC à EF, & partant par la 12. pr. comme AB, CB ensemble à DE, EF ensemble, c'est à dire le tout AC au tout DE, comme BC à EF: & en permutant par la 13. prop. comme AC à BC, ainsi DF, à EF. Ce qui estoit proposé.

A.....6 B...3 C
D....4 E..2 F

Semblablement nous demonstrerons icy comme au 5. liure la composition conuerse & contraire de raison. Car

soit premierement comme AB à BC, ainsi DE à EF. Ie dis par composition cõuerse de raison, que cõme AC est à AB, ainsi DF à DE. Car veu que AB est à BC, comme DE à EF: en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE; & en cõposant cõme AC sera à AB, ainsi DF sera à DE.

Maintenant soit derechef AB à BC, comme DE à EF. Ie dis que par composition contraire de raison, comme AB est à AC, ainsi DE à DF: car puis que comme AB à BC, ainsi DE à EF: en changeant comme BC sera à AB, ainsi EF à DE. Donc en composant, comme AC à AB, ainsi DF à DE, & en changeant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF.

4 Si les nombres composez sont proportionnaux; ils le seront aussi par conuersion de raison.

Soit comme AB à CB, ainsi DE à FE. Ie dis que par conuersion de raison, comme AB est à AC, ainsi DE à DF. Car puis que comme AB à CB, ainsi DE à FE: en permutant par la 15. prop. comme le tout AB sera au tout DE, ainsi le retranché CB sera au retranché FE: & partant par la 11. prop. comme le tout AB au tout DE, ainsi le reste AC au reste DF. Donc en permutant comme AB sera à AC, ainsi DE à DF. Ce qui estoit proposé.

A.....6 C...3 B
D....4 F..2 E

A *ces quatre theoremes nous adiousterons les quatre suiuans.*

5 S'il y-a tant de nombres qu'on voudra d'vn costé, & autant d'vn autre, lesquels prins de deux en deux soient en mesme raison: comme tous les nõbres du premier ordre ensemble seront à l'vn d'iceux, ainsi tous les nombres de l'autre ordre ensemble seront au correspondant à celuy pris du premier ordre.

Soient quatre nombres A,B,C,D d'vn coſté, & quatre d'vn autre E,F,G,H, & que A ſoit à B, comme E à F; & B à C comme F à G: & C à D comme G à H: Ie dis que comme tous les nombres A,B,C, D, enſemble, ſeront au dernier D, ainſi tous les nombres E,F,G,H, enſemble ſeront au dernier H. Car d'autant que comme A, eſt à B, ainſi E eſt à F: en compoſant comme A, B, enſemble ſeront à B, ainſi E, F enſemble ſeront à F. Mais comme B eſt

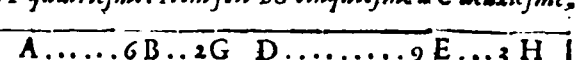
A...3	B....4	C..2	D.....5
E.....6	F.....8	G....4	H.....10

à C, ainſi F à G: donc en raiſon egale, comme A, B enſemble ſont à C, ainſi E, F enſemble ſont à G: parquoy, en compoſant comme A, B, C enſemble ſeront à C, ainſi E, F, G, enſemble ſeront à G. Mais comme C à D, ainſi G à H: donc en raiſon egale comme A, B, C enſemble ſeront à D, ainſi E, F, G enſemble ſeront à H: Et en compoſant comme A, B, C, D enſemble ſont à D, ainſi E, F, G, H enſemble ſeront à H. Ce qu'il falloit prouuer.

D'où eſt manifeſte que comme l'vn des nombres du premier ordre eſt à ſon correſpondant de l'autre ordre, ainſi tous les nombres du premier ordre enſemble ſeront à tous ceux du ſecond ordre enſemble. Car puis que comme A, B, C, D enſemble ſont à D, ainſi E, F, G, H enſemble ſont à H: en permutant A, B, C, D enſemble ſont à E, F, G, H enſemble, comme D à H.

6 Si le premier à meſme raiſon au ſecond, que le troiſieſme au quatrieſme, & que le cinquieſme ayt auſſi meſme raiſon au ſecond, que le ſixieſme au quatrieſme: le compoſé du premier & cinquieſme aura meſme raiſon au ſecond, que le compoſé du troiſieſme & ſixieſme au quatrieſme.

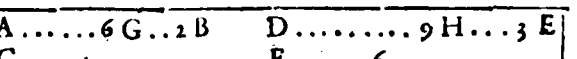
Soit AB premier à C deuxieſme, comme DE troiſieſme à F quatrieſme: Item ſoit BG cinquieſme à C deuxieſme,



comme EH ſixieſme à F quatrieſme. Ie dis que AG, compoſé du premier & du cinquieſme eſt à C deuxieſme, comme DE compoſé du troiſieſme & ſixieſme eſt à F quatrieſme. Car puis que comme BG eſt à C, ainſi EH à F, en changeant comme C ſera à BG, ainſi F à EH. Veu donc que comme AB à C, ainſi DE à F, & comme C à BG, ainſi F à EH: en raiſon egale, comme AB eſt à BG, ainſi DE eſt à EH: & en compoſant, comme AG à BG, ainſi DH à EH; partant puis que derechef comme AG à BG, ainſi DH à EH, & comme BG à C, ainſi EH à F: en raiſon egale, comme AG ſera à C, ainſi DH à F. Ce qui eſt propoſé.

7. Si le premier à meſme raiſon au ſecond, que le troiſieſme au quatrieſme, & que le premier ayt auſſi la meſme au cinquieſme, que le troiſieſme au ſixieſme; auſſi le premier aura meſme raiſon au compoſé du ſecond & cinquieſme, que le troiſieſme au compoſé du quatrieſme & ſixieſme.

Soit le tout AB à C, comme le tout DE à F: Item le retranché AG ſoit à C, comme le retranché DH à F: Ie



dis que le reſte GB eſt à C, cõme le reſte HE à F. Car puis que comme AG à C ainſi DH à F, en changeant comme C ſera à AG ainſi F à DH. Veu donc que comme AB à C, ainſi DE à F, & comme C à AG, ainſi F à DH;

en raison esgale : comme A B à A G, ainsi D E à D H. Parquoy en diuisant comme G B à A G, ainsi H E à D H. Mais puis que derechef, comme G B à A G, ainsi H E à D H, & comme A G à C, ainsi D H à F ; en raison egale, comme G B sera à A C, ainsi H E sera à F ; ce qui est proposé.

8 Si deux nombres, & des retranchez d'iceux, ont vne mesme raison à deux nombres: aussi les restes auront mesme raison aux mesmes nombres.

Soit A premier à B C deuxiesme, comme D troisiesme à E F quatriesme: & comme A premier à C G cinquiesme, ainsi D troisiesme à F H sixiesme. Ie dis que comme A premier est à B G, composé du deuxiesme & cinquiesme, ainsi D troisiesme à E H composé du quatriesme & sixiesme. Car puis que comme A est à B C, ainsi D à E F, en

A.....6	D.....9
B....4 C..2 G	E.....6 F....4 H

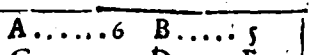
changeant comme B C sera à A, ainsi E F à D. D'autant donc que comme B C à A, ainsi E F à D, & comme A à C G, ainsi D à F H ; en raison egale, comme B C à C G, ainsi E F à F H: & en cõposant comme B G à C G, ainsi E H à F H, & en changeant comme C G à B G, ainsi F H à E H. Veu donc que comme A à C G, ainsi D à F H, & comme C G à B G, ainsi F H à E H; en raison esgale, comme A sera à B G, ainsi D à E H. Ce qui est proposé.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Les nombres premiers entr'eux, sont les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison auec iceux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B. Ie dis qu'ils ſont les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon qu'eux.

Car s'il n'eſt ainſi, ſoient, s'il eſt poſsible, C & D plus petits en la meſme raiſon : & par la 21. prop. ils meſureront A & B, l'vn comme l'autre : qu'ils les meſurent donc par le nombre E. Donc E ſera commune meſure des nombres A & B ; ainſi ils ne ſeroient pas premiers entr'eux, mais compoſez, contre l'hypotheſe. A & B ſont donc les plus petits de tous ceux qui ſont en meſme raiſon qu'eux. Parquoy les nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

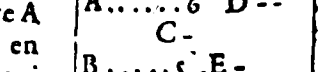


THEOR. 22. PROP. XXIV.

Les plus petits nombres de tous ceux qui ont vne meſme raiſon, ſont premiers entr'eux.

Soient les nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon : Ie dis qu'ils ſont premiers entr'eux.

Autrement, s'ils ne ſont premiers, que C les meſure tous deux, s'il eſt poſsible, ſçauoir A autant de fois qu'il y a d'vnitez en D, & B autant de fois qu'il y a d'vnitez en E. Veu donc que C meſure A par les vnitez qui ſont en D, & B par les vnitez qui ſont en E : C multipliant D & E, produira A & B



par la 9.com.sent. Parquoy par la 17.prop. il y aura mesme raison de A à B que de D à E: & partãt puis que D & E sont parties d'iceux A & B, ils sont moindres: ainsi A & B ne seront pas les plus petits nombres de tous ceux qui ont la mesme raison: ce qui est contre nostre hypothese: A & B sont donc nombrez premiers entr'eux. Parquoy les plus petits nombres de tous ceux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, celuy qui en mesurera l'vn sera premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, l'vn ou l'autre desquels, sçauoir A, soit mesuré par le nombre C. Ie dis que C est premier à l'autre B.

Autrement, si B & C ne sont premiers entr'eux, que D les mesure tous deux, s'il est possible. Veu donc que D mesure C, & C mesure A, par la 11. com. sent. D mesurera aussi A: mais il mesure pareillement B. Donc A & B ne sont premiers entr'eux, contre l'hypothese. C est donc premier à B. Si quelque nombre mesure B, on prouuera en la mesme maniere qu'il sera premier à l'autre A. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.....6	B.....5
C... 3	D-

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si deux nombres ſont premiers à quelque autre ; le produit des deux ſera auſſi premier à cét autre.

Soient deux nombres A & B, tous deux premiers à C ; & que A multiplié par B produiſe D. Ie dis que D eſt auſsi premier à C.

Autrement, ſi D & C ne ſont premiers entr'eux qu'ils ſoient compoſez, & que E les

A..2 B...3 C.....5
D.....6 E - F---3

meſure tous deux, ſçauoir D par le nombre F. Donc E multipliant F, produict D par la 9. com. ſent. comme fait auſſi A par B. Parquoy A, E, F, B, ſeront proportionnaux par la 19. prop. Et d'autant que A & C ſont premiers entr'eux, E meſurant C ſera premier à A par la prop. precedente ; & par la 23. prop. A & E eſtans premiers, ils ſeront les plus petits de leur raiſon : & partant ils meſureront eſgalement F & B, qui ſont en la meſme raiſon, ſçauoir A meſurera F, & E meſurera B par la 21. prop. Mais il meſure auſſi C : donc B & C ne ſeroient pas premiers, contre l'hypotheſe. Parquoy D ſera premier à C. Si donc deux nombres ſont premiers à quelque autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, le

le produict de l'vn d'iceux multiplié par soy, est premier à l'autre.

Soient deux nombres premiers A & B, & que l'vn ou l'autre d'iceux, sçauoir A, multiplié par soy produise C. Ie dis que B & C sont premiers entr'eux.

A...3	B....4
C.....9	D...3

Car si on prend D, egal à A; B sera aussi premier à D. Ainsi A & D estans premiers à B, par la 26. p. 7. A multiplié par D, c'est à dire par soy-mesme, produira C premier au mesme B. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si deux nombres sont premiers à deux autres; (l'vn & l'autre à l'vn & à l'autre) leurs produicts seront aussi premiers entr'eux.

Soient deux nombre A & B premiers à deux autres C & D, & que E soit le produict de A multiplié par B, & F le produict de C multiplié par D: Ie dis que E, & F sont premiers entr'eux.

A..2	B....4
C...3	D.....5
E.....8	F.....15

Car A & B estans premiers à C, leur produict E sera aussi premier au mesme C par la 26. prop. Par

le meſme diſcours E ſera auſsi premier à D; ainſi C & D eſtans premiers à E, leur produict F ſera auſsi premier à E par la meſme 26. pr. Si donc deux nombres ſont premiers à deux autres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si deux nombres premiers entr'eux ſont multipliez chacun par ſoy, leurs produicts ſeront premiers entr'eux: Et ſi iceux produicts ſont encor multipliez par les nombres propoſez au commencement, leurs produicts ſeront encores premiers entr'eux: & cecy aduiendra touſiours enuiron les extremes.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, & que A multiplié par ſoy meſme produiſe C, mais B multiplié auſſi par ſoy produiſe D. Ie dis que C & D, ſeront premiers entr'eux. Item ſi A multipliant C produict E, & B multipliant D produict F. Ie dis que E & F ſeront auſſi premiers entr'eux.

Car par la 27. prop. 7. A & B eſtans premiers, C

A..2	B ...3
C....4	D.....9
E.....8	F.....27
G 16.	H 81

produict de A multiplié par ſoy, ſera premier au

restant B: par mesme raison B & C estans premiers entr'eux, D sera aussi premier à C. Derechef, puis que A & B sont premiers, par la mesme 27. pr. C sera aussi premier à B; & D à A: Mais il a esté demonstré que C est aussi premier à D: Parquoy l'vn & l'autre nombre A, C, sera premier à l'vn & à l'autre nõbre B, D: Et partant par la 28. p. E produict de A en C, sera premier à F, produict de B par D.

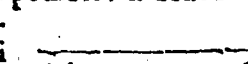
Que si encore A multipliant E produict G; & B multipliant F produict H: G & H seront aussi premiers entr'eux. Car puis que A & C sont premiers à B, leur produict E sera aussi premier à B par la 26. prop. Par mesme raison F sera aussi premier à A: Ainsi les deux nombres A, E seront premiers aux deux B, F, sçauoir l'vn & l'autre à l'vn & l'autre; & partant par la 28. p. G produict de A en E, sera aussi premier à H produict de B en F, & ainsi à l'infiny. Parquoy si deux nombres premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 28. PROP. XXX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, le composé d'iceux sera premier à chacun d'eux: & si le composé de deux nombres est premier à quelqu'vn d'iceux, ils seront premiers entr'eux.

Soient deux nombres premiers entr'eux A B & B C: Ie dis que A C composé des deux A B, B C, sera premier à chacun d'iceux.

Car si AC, AB ne sont premiers, soit D leur commune mesure, s'il est possible: si donc D mesure le tout AC, & la partie AB; il mesurera aussi le reste BC, par la 12. com. sen. Ainsi AB & BC ne seroient premiers entr'eux, contre l'hypothese. Parquoy AC sera premier à AB: on demonstrera par la mesme maniere que AC est aussi premier à BC.



Secondement, si le tout AC est premier à AB, ou à BC. Ie dis qu'iceux AB & BC seront premiers entr'eux. Autrement, que D les mesure s'ils ne sont premiers; il mesurera aussi le composé des deux AC, par la 10. com. sent Ainsi AC ne seroit premier à AB & BC, ce qui est contre l'hypothese. AB & BC sont donc premiers entr'eux. Si donc deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

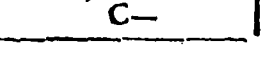
Il s'ensuit de cecy; que si vn nombre composé de deux est premier à l'vn d'iceux, il sera aussi premier à l'autre. Car si AC est premier à AB; AB, BC seront premiers entr'eux par la seconde partie de ceste prop. Donc aussi AC sera premier à BC par la premiere partie de la mesme prop. ce qui a esté proposé.

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Tout nombre premier, est premier à tout autre nombre qu'il ne mesure pas.

Soit vn nombre premier A, qui ne mesure le nombre B: Ie dis que A & B sont premiers entr'eux.

Car s'ils ne le ſont, ils auront vne commune meſure autre que l'vnité; laquelle ſoit C, s'il eſt poſsible. Or C ne peut eſtre egal à A puis que nous auons poſé que A ne meſure pas B: & par ainſi A eſtant meſuré par quelque autre nombre, il ne ſeroit premier, contre l'hypotheſe. Parquoy A & B ſont premiers entr'eux. Donc tout nombre premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

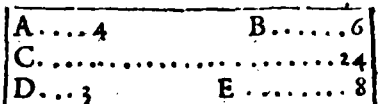


THEOR. 30. PROP. XXXII.

Si deux nombres ſe multiplient l'vn l'autre, & que quelque nombre premier meſure leur produict, il meſurera auſſi l'vn d'iceux nombres poſez au commencement.

Soient deux nombres A & B, de la multiplication deſquels ſoit produict C, & que D nombre premier meſure iceluy C. Ie dis qu'il meſurera auſsi l'vn ou l'autre d'iceux A & B, s'il ne les meſure tous deux.

Autrement, s'il ne meſure l'vn ny l'autre, qu'il meſure C par le nombre E: Si donc D ne meſure A, par la prop. prec. il ſera premier à iceluy, & par la 23. prop. ils ſeront les plus pe-



tits de leur raison. Mais d'autant que D multiplié par E faict C, aussi bien que A multiplié par B, par la 19. prop. A sera à D, comme E à B, & par la 21. prop. A & D mesureront egalement E & B, c'est à dire que A mesurera E; & D mesurera B. En la mesme maniere sera demonstré que si D ne mesure pas B, qu'il mesurera A. Si donc deux nombres se multiplient l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 21. PROP. XXXIII.

Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier.

Soit le nombre composé A. Ie dis qu'il sera mesuré par quelque nombre premier.

Car puis qu'il est composé, il sera mesuré de quelque nombre par la 13. def. & soit de B, lequel sera composé, ou non: s'il est premier, la prop. est manifeste: mais s'il est composé, il sera mesuré par vn autre nombre, & soit C, lequel sera premier, ou non: s'il est premier, puis qu'il mesure B; & B mesure A, aussi C mesurera A par la 11. com. sent. Mais si C est composé, il sera mesuré par quelque nombre: Et pource qu'vn nombre ne se diminue infiniement, nous viendrons finalement à quelque nombre que nul autre ne mesurera; & partant à vn nombre premier, lequel mesurant tous les precedents, mesurera aussi le composé A. Parquoy tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier. Ce qu'il falloit prouuer.

A	8
B	4
C	2

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Tout nombre eſt premier, ou bien meſuré par quelque nombre premier.

Soit quelconque nombre A : Ie dis qu'iceluy eſt ou nombre premier, ou que quelque nombre premier le meſure.

A.....5
A.....6

Car s'il n'eſt nombre premier, il eſt nombre compoſé, & par la prec. prop. tout nombre compoſé eſt meſuré par quelque nombre premier. Parquoy tout nombre eſt premier, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. 3. PROP. XXXV.

Tant de nombres qu'on voudra eſtans donnez, trouuer les plus petits nombres de tous ceux qui auront meſme raiſon.

Soient donnez tant de nombres qu'on voudra A, B, C : & il faut trouuer les plus petits en la meſme raiſon.

Leſdicts nombres A, B, C ſont ou nombres premiers, ou nombres compoſez : s'ils ſont premiers entr'eux, on a ce que lon cherche par la 23. prop. mais s'ils ſont compoſez, ſoit trouué D plus grande commune meſure d'iceux A, B, C, par la 3. prop. laquelle meſure A ſelon E ; B ſelon F ; & C ſelon G. Ie dis que E, F & G ſont les plus petits nombres qui ſoient en la raiſon de A, B, & C.

Car il eſt euident qu'iceux E, F, G ſont és meſmes raiſons que A, B, C, d'autant que D meſuranticeux A, B, C par les nombres E, F, G; D multipliant iceux E, F, G, ſeront produicts A, B, C, par la 9. com. ſent. & parce que nous auons demonſtré à la 18. prop. E, F, G, auront la meſme proportion entr'eux que les multipliez A, B, C. Et qu'ils ſoient les plus petits, on le demonſtrera ainſi. S'ils ne ſont tels, ſoient H, I, K, plus petits nombres ayans meſme proportion qu'iceux A, B, C; ils les meſureront donc egalement par la 21. prop. & ſoit par le nombre L; ce qu'eſtant par la 9. com. ſent. L multipliant H, I, K, ſeront produicts les nombres A, B, C. Veu donc que D multipliant E, faict A; & L multipliant H, faict le meſme A; par la 19. prop. il y aura telle raiſon de D à L, que de H à E: mais H eſt moindre que E: donc D ſera auſsi moindre que L: & puis que H, I, K meſurent A, B, C par L; L meſurera auſsi iceux A, B, C par la 8. com. ſent. & ainſi D ne ſera pas la plus grande commune meſure d'iceux A, B, C: ce qui eſt contre l'hypotheſe. Il n'y a donc point d'autres nombres moindres que E, F, G, qui ſoient en meſme raiſon que les propoſez A, B, C. Parquoy eſtans donnez quelconques nombres, nous auons trouué les plus petits, &c. Ce qu'il falloit faire.

A.....6	B....4	C.....8	
	D..2		
E...3	F..2	G....4	
H-	I-	K--	L-

COROLLAIRE.

Il appert icy que la plus grande commune mesure de quelconques nombres, mesure iceux par les nombres qui sont les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison qu'iceux proposez.

SCHOLIE.

Par ces choses appert le moyen de trouuer les deux plus petits nombres qui ont la mesme raison, que tant de nombres qu'on voudra donner continuellement proportionnaux. Comme si on propose les nombres A, B, C, continuellement proportionnaux, nous trouuerons les deux moindres en la mesme raison, si par ce prob. nous prenons E & F en la mesme raison des deux A & B, c'est à sçauoir ces nombres là, par lesquels D plus grande commune mesure d'iceux A & B, mesure iceux. Car par le corol cy dessus, E & F seront les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison que A à B, c'est à dire en la raison des continuellement proportionnaux A, B, C.

Or il aduient quelquesfois qu'vn des nombres E, F, G, trouuez par cette 35. prop. est l'vnité, c'est à sçauoir quand D, plus grande commune mesure des nombres proposez A, B, C, est egal a l'vn d'iceux: & alors les nombres trouuez E, F, G sont les plus petits en la continuation de leur proportion, puis qu'il ne se peut donner vn nombre moindre que l'vnité.

PROBL. 4. PROP. XXXVI.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer deux nombres donnez.

Soient les nombres donnez A & B: il faut trouuer le plus petit nombre mesuré par iceux.

Si le plus petit nombre des deux donnez, mesure le plus grand, il est euident qu'iceluy plus grand sera le nombre que nous cherchons : que si l'vn ne mesure l'autre, ou A & B seront premiers entr'eux, ou non ; si premiers, soit multiplié A par B, & le produict soit C. Ie dis que C est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Car par la 7. com. sent. il est euident que C sera mesuré par l'vn & par l'autre : & S'il n'est le moindre nombre mesuré par iceux A, B, en soit vn autre plus petit D, s'il est possible, lequel A mesure selon le nombre E, & B selon le nombre F. Ce qu'estant, D sera produict tant de A multiplié par E, que de B par F, par la 9. com. sent. & partant par 19. prop. A sera à B comme F à E. Item A & B estans premiers, ils seront les plus petits de leur raison par la 23. prop. & A mesurera F par la 21. prop. & d'autant que B multipliant A produict C, & multipliant F produict D, il y aura telle raison de C à D, que de A à F. par la 17. prop. Mais nous auons monstré que A mesuroit F : donc C mesurera aussi D, sçauoir le plus grand mesurera le plus petit, ce qui est impossible. C estoit donc le moindre nombre que A & B peuuent mesurer.

A...3 B....4
C.....12
D----
E-- F-

Soient maintenant les deux nombres A & B composez, & par la prec. prop. soient trouuez C & D, les plus petits nombres de la mesme raison, tel-

A....4 B.....6
C..2 D...3 E.....12

lement que ces 4. nombres A, B, C, D, soient proportionnaux: quoy posé, par la 19. pr. le produict de A multiplié par D, sera egal au produict de B multiplié par C: iceluy produict soit E. Donc E sera mesuré par B, & par A: & par le mesme discours de la precedente demonstration, on monstrera qu'il est le plus petit nombre mesuré par A, & par B. Nous auons donc trouué le plus petit nombre, &c. Ce qu'il falloit faire.

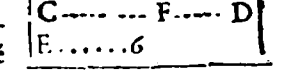
COROLLAIRE.

De cecy il s'ensuit, que si deux nombres multiplient les plus petits de leur raison, sçauoir le plus grand, le plus petit, & le plus petit le plus grand; le produict sera le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car C & D estans posez les plus petits en la raison de A à B, il a esté prouué que E produict de A plus petit multiplié par D plus grand, & de B plus grand par C plus petit; est le plus petit nombre mesuré par A & B.

THEOR. 33. PROP. XXXVII.

Si deux nombres mesurent vn autre nombre, le plus petit qu'ils mesurent, mesurera aussi cet autre nombre.

Soient deux nombres A, & B, qui en mesurent vn autre C D, & que le plus petit nombre qu'ils mesurent soit E. Ie dis que E mesurera aussi C D.



Autrement, si E ne mesure C D: apres auoir osté F de C D, tant de fois que l'on pourra, il restera vn nombre moindre que E:

qu'il laisse donc FD plus petit que E, s'il est possible : A & B mesurans E, ils mesureront aussi CF par la 11. commune sentence. Mais ils mesurent le tout CD, par la 12. com. sent. ils mesureront donc aussi le reste FD plus petit que E, ce qui est impossible, estant le plus petit qu'ils mesurent : Parquoy E mesurera CD. Si donc deux nombres mesurent vn autre nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

PROBL. 5. PROP. XXXVIII.

Trouuer le plus petit nombre que peuuent mesurer trois nombres donnez.

Soient trois nombres donnez A,B, C : il faut trouuer le plus petit nombre qu'ils peuuent mesurer.

Soit trouué D plus petit nombre que peuuent mesurer A & B, par la 36. p. Or C mesure aussi D, ou il ne le mesurera pas : s'il le mesure : Ie dis qu'il est aussi le plus petit qu'iceux A,B,C, peuuent mesurer : car s'il ne l'est, en soit quelque autre plus petit E, s'il est possible, lequel tous les trois A, B, C mesurent. D'autant que A & B mesurent E moindre que D, iceluy D, ne sera le moindre que A & B mesurent, ce qui est contre l'hypothese. D est donc le moindre nombre que peuuent mesurer les nombres proposez A,B,C.

A..2 B...3 C.....6
D.....6
E—

Quesi D n'est aussi mesuré par C : par la mesme

36. pr. soit trouué E plus petit nombre mesuré par C & D : Ie dis que E sera le plus petit nombre mesure par A, B, C.

Car premierement E est mesuré par A, B, C : d'autant que C & D le mesurent : & A, B mesurant D, par la 11. com. sent. ils mesureront aussi E mesuré par D. Que si on dit que E n'est le plus petit nombre mesuré par A, B, C, soit F plus petit, s'il est possible : donc A & B mesurant F ; D le plus petit mesuré par eux, mesurera aussi F par la prec. prop. Mais C mesure aussi F : (car A, B & C le mesurent) donc C & D mesureront F. Et par la mesme prop. E plus petit mesuré par C & D, mesurera aussi F : le plus grand vn plus petit, ce qui est impossible. Donc E estoit le plus petit nombre mesure par A, B, C. Estant donc donnez trois nombres nous auons trouué le plus petit qu'ils peuuent mesurer : Ce qu'il falloit faire.

A .. 2 B ... 3 C 4
D 6
E 12
F ---

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste ; que si trois nombres en mesurent quelque autre : le plus petit qu'ils mesureront, mesurera aussi cet autre. Car il a esté demonstré que A, B, C, mesurant F : aussi E le plus petit nombre mesuré par A, B, C, mesure le mesme nombre F.

SCHOLIE.

Par mesme raison estans donnez plus de trois nombres, nous trouuerons le plus petit nombre qu'ils mesurent. Car si 4. nombres sont donnez, il faudra trouuer le moindre

que trois mesurent : si 5, il faudra trouuer le plus petit que 4 mesurent, &c. procedant au reste tout ainsi qu'il a esté dict de trois nombres.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si vn nombre mesure vn autre nombre ; le mesuré aura vne partie denommee par le mesurant.

Soit le nombre A, lequel mesure le nombre B. Ie dis qu'iceluy B contiendra vne partie denommee par A.

Qu'ainsi ne soit, que A mesure B selon C, c'est à dire, autant de fois qu'il y-a d'vnitez en C : par la 15. prop. C mesurera B autant de fois que l'vnité mesure A : & C sera telle partie de B que l'vnité de A. Mais l'vnité est vne partie de A, denommee par iceluy A, comme nous auons dict en la 2. de f. de ce 7. liure : donc aussi C sera vne partie de B denommee par A. Si donc vn nombre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Vnité.
A ...3 B .....6 C..2

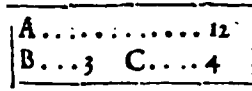
THEOR. 35. PROP. XL.

Si vn nombre a vne partie quelle qu'elle soit, le nombre nommant ceste partie là le mesurera.

Soit le nombre A, ayant la partie B denommee

par le nombre C. Ie dis que C mesure A.

Car puis que B est partie denommee par C, & l'vnité est vne partie de C denommee par le mesme C: comme l'vnité mesure C, ainsi B mesure A: & par la 15. p. en permutant comme l'vnité mesurera B, ainsi C mesurera A. Parquoy si vn nombre à quelconque partie, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

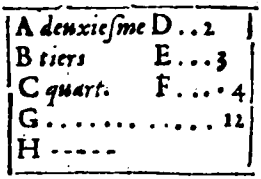


PROBL. 6. PROP. XLI.

Trouuer le plus petit nombre, qui ayt les parties donnees.

Soient les parties donnees A, B, C: il faut trouuer le plus petit nombre qui ait icelles parties.

Soient pris les trois nombres D, E, F, denommez par icelles parties A, B, C, & par la 38. prop. soit trouué G, le plus petit nombre que peuuent mesurer D, E, F: Ie dis qu'iceluy nombre G contient les parties A, B, C.



Car puis que D, E, F, mesurent G: par la 39. prop. G aura les parties denommees par D, E, F, c'est à dire les parties A, B, C. Ie dis aussi que G est le plus petit nombre qui ait icelles parties. Car s'il ne l'est, soit H plus petit, s'il est possible, ayant icelles parties. Et H sera mesuré par les nombres D, E, F denommees par les parties A, B, C, par la precedente proposition: & partant puis que H est moindre que G; iceluy nombre

G ne ſera pas le plus petit que peuuent meſurer les nombres D, E, F, contre l'hypotheſe. Donc G eſt le moindre nombre, ayant les parties donnees A, B, C. Parquoy nous auons trouué le plus petit nombre ayant les parties donnees: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Combien que nous ayons remarqué en ce 7. liure les pr. & demonſtrations qui conuiennent & ont lieu auſſi bien aux nombres rompus qu'aux entiers, ſi eſt-ce neantmoins que pour donner vne entiere & parfaicte intelligence des regles & preceptes enſeignez en noſtre Practique d'Arithmetique touchant les fractions, nous auons eſtimé eſtre beſoin d'adiouſter icy les prop. ſuiuantes.

DEMONSTRATIONS DES fractions ou nombres rompus.

Si deux fractions ont vn meſme denominateur, & que l'vnité ſoit le numerateur de l'vne d'icelles fractions, elles auront meſme raiſon entr'elles que les numerateurs.

Soient deux fractions AB, CB, ayans vn meſme denominateur B, & le numerateur C ſoit l'vnité: Ie dis que le nombre rompu AB eſt au nombre rompu CB, comme le numerateur A eſt au numerateur C. Car veu que la fraction AB ſe diuiſe en autant de fractions egales à la fraction CB qu'il y a d'vnitez en A, chacune d'icelles fractions ayant le numerateur C, & le denominateur B: autant de

A 5	C 1
B 8	B 8

fois

fois que l'vnité C est contenue en A, autant de fois la fraction CB est contenue en la fraction AB: parquoy l'vnité C est mesme partie du nombre A, que la fraction CB de la fraction AB: & partant par la 20. def. 7. comme l'vnité C est à A, ainsi la fraction CB est à la fraction AB, & en changant, le numerateur A sera au numerateur C, comme la fraction AB sera à la fraction CB. Ce qui estoit à prouuer.

2. Le numerateur de quelconque fraction a mesme raison au denominateur, qu'icelle fraction a à l'entier duquel elle prouient.

Soit quelconque fraction AB: Ie dis que le numerateur A est au denominateur B comme la fraction AB est à son entier. Soit pris vne fraction CB dont le numerateur C est l'vnité, & le denominateur est le mesme B: mais soit vne autre fraction DB, de laquelle le numerateur D soit egal au mesme denominateur B, afin qu'icelle fraction DB soit egale à l'entier de la fraction AB. D'autant que par la prop prec. comme A est à C, ainsi la fraction AB est à la fraction CB: & comme C est à D, ainsi la fraction CB est à la fraction DB, en raison egale, comme A sera à D, c'est à dire le numerateur A au denominateur B, (car B est egal à D) ainsi la fraction AB sera à la fraction DB, c'est à dire à l'entier: ce qui a esté proposé.

A 5	C 1	D 8
B 8	B 8	B 8

3. Les fractions qui ont vn mesme denominateur sont entr'elles en mesme raison que leurs numerateurs.

Soient quelconques fractions AB, CB, ayans vn mesme denominateur B: Ie dis que la fraction AB est à la fraction CB, comme le numerateur A est au numerateur C.

Car puis que par la prop. prec. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à ſon entier, & comme B eſt à C, ainſi l'entier eſt à la fraction CB: (car par la meſme prop. prec. comme C à B, ainſi la fraction CB à ſon entier, & en changeant comme B à C, ainſi l'entier à la fraction CB.) en raiſon egale, comme le numerateur A ſera au numerateur C, ainſi la fraction AB ſera à la fraction CB. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

A 7	C 5
B 11	B 21

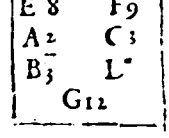
S'il y auoit plus de deux fractions, on prouueroit en la meſme maniere que la ſeconde ſeroit à la troiſieſme, comme le numerateur au numerateur, & puis apres la troiſieſme à la quatrieſme, & ainſi conſecutiuement de fraction en fraction.

4. S'il y a tant de fractions qu'on voudra, & qu'on multiplie le numerateur de chacune d'icelles par les denominateurs de toutes les autres, les nombres produits ſeront entr'eux, en meſme proportion que les fractions.

Nous diſons le numerateur d'vne fraction eſtre multiplié par le denominateur de toutes les autres, quãd iceluy numerateur eſt multiplié par le denominateur de l'vne des autres fractions, & puis encore le produict par le denominateur de l'vne des reſtantes, & ainſi continuellement tant qu'il y aura de fraction: & n'importe par quel orare on les prenne, puis que le produit eſt touſiours le meſme, comme nous auons demonſtré au ſcholie de la 19. p. 7.

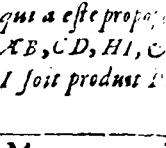
Soient premierement deux fractions AB, CD, & de A en D ſoit faict E, mais de C en B ſoit faict F: Ie dis que le produict E eſt au produict F, comme la fraction AB, eſt à la fraction CD. Qu'ainſi ne ſoit, de B en D ſoit fait G: donc puis que D multipliant A & B, a fait E & G, par la 17. prop. 7. comme A ſera à B, ainſi

E sera à G: Mais par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la fraction AB est à son entier. Donc aussi comme la fraction AB sera à son entier, ainsi E sera à G. Derechef, pour ce que B multipliant D & C a fait C & F, par la mesme 17. pr. 7. comme D sera à C, ainsi G sera à F. Mais comme



D est à C, ainsi l'entier est à la fraction CD: (car puis que par la 2. prop. comme C à D, ainsi la fraction CD à son entier, en changeant comme D à C, ainsi l'entier à la fraction CD. Donc comme G sera à F, ainsi l'entier sera à la fraction CD. Parquoy la fraction AB, l'entier, & la fraction CD seront en mesme proportion que les trois produits E, G, F. Doc en raison egale, come E sera à F, ainsi la fraction AB sera à la fraction CD. Ce que a este propose.

Soient maintenant les trois fractions AB, CD, HI, & que de A en D soit fait E, & de E en I soit produit L: mais que de C en B soit faict F, & de F en I, vienne M: finalement que de B en D soit faict G, & de G en H vienne N: Ie dis que les trois produicts L, M, N, sont entr'eux en mesme proportion que les fractions proposees AB, CD, HI.



Car puis que I multipliant E & F, fait L & M, par la 17. p. 7. comme E est à F, ainsi est le produit L au produit M: Mais par la demonstration prec. comme E est à F, ainsi la fraction AB est à la fraction CD. Donc le produit L au produit M comme la fraction AB à la fraction CD. Derechef puisque B multipliant C & D a fait F & G, comme C à D, ainsi F à G. Mais aussi I multipliant F & G fait M & K. Donc iceux produits M & K

ront entr'eux comme F à G, c'eſt à dire comme C à D. Mais par la 2. prop. comme C à D, ainſi la fraction CD à ſon entier : Donc auſſi comme la fraction CD ſera à l'entier, ainſi ſera M à K. Semblablement G multipliant I & H, fait K & N; partant comme I à H, ainſi K à N. Mais il appert par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus, que comme I eſt à H, ainſi eſt l'entier à la fraction H I. Donc comme l'entier ſera à la fraction HI, ainſi K ſera à N. Parquoy la fraction CD, l'entier, & la fraction HI, ſeront en meſme proportion que les produicts M, K, & N: donc en raiſon egale, comme la fraction CD ſera à la fraction HI, ainſi le produit M ſera au produict N. Mais nous auons deſia demonſtré cy-deſſus, que comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi eſt le produict L au produit M: donc les trois produits L, M, N, ſeront entr'eux en meſme proportion que les trois fractions AB, CD; HI. Ce qu'il falloit prouuer.

Que s'il y a quatre fractions, on demonſtrera en la meſme ſorte que comme la troiſieſme ſera à la quatrieſme; ainſi le produit correſpondant à ceſte-là ſera au produict correſpondant à ceſte-cy; & ainſi continuellement de fraction en fraction, repetant touſiours la demonſtr. cy-deſſus.

Or il appert de ceſte demonſtration que ſi les ſuſdicts produicts eſtoient egaux, les fractions ſeroient auſſi egales: & au contraire, que les fractions eſtans egales leſdicts produicts ſeront pareillement egaux: Mais qu'eſtans inegales, le produict de la plus grande ſera le plus grand, & de la moindre, le moindre, & ainſi des autres.

5. L'entier a meſme raiſon à la ſomme de deux ou d'auantage de fractions, que le nombre produict des denominateurs multipliez entr'eux à la ſomme des produicts du numerateur de chaque fraction multiplié par les denominateurs de toutes les autres fractions.

Soient trois fractions AB, CD, EF, & que de B en D & F soit procreé K; & de A en D & F soit faict G; mais de C par B & F soit produict H: & de E par B & D soit faict I: Ie dis que l'entier est à la somme des fractions AB, CD, EF, comme le produict K est à la somme des produicts G, H, I. Car puisque par la pr. prec. les fractions AB, CD, EF, sont entr'elles comme les produicts G, H, I, par le 5. Theor. du Scholie de la 22. pr. 7. comme la somme d'icelles fractions AB, CD, EF, est à la fraction EF, ainsi la somme des produicts G, H, I est au produict I. Mais comme la fraction EF est à l'entier, ainsi I est à K: (car par la 2. prop. comme la fraction EF est à l'entier, ainsi E est à F, & par la 18. pr. 7. comme E à F, ainsi I à K, pource que E, F multipliant le produict de B en D ont faict I & K.) Donc en raison egale, comme la somme des fractions AB, CD, EF est à l'entier, ainsi la somme des produicts G, H, I est à K: & au contraire, comme l'entier est à la somme des fractions AB, CD, EF, ainsi K est à la somme des produicts G, H, I. Ce qu'il falloit demonstrer.

G 16	H 12	I 18
A 2	C 1	E 3
B 3	D 2	F 4
	K 24	

6. Si deux fractions ont vn mesme numerateur, comme la premiere fraction sera à la seconde, ainsi le dominateur de la seconde sera au denominateur de la premiere.

Soient deux fractions AB, AC, ayans vn mesme numerateur A: Ie dis que la fraction AB est à la fraction AC, comme le denominateur C est au denominateur B. Car de A en C soit fait D, & de A en B soit produit E.

or puis que A multipliant C & B, fait D & E, par la 17. prop. 7. comme C ſera à B, ainſi D ſera à E. Mais par la 4. prop. comme D eſt à E, ainſi la fraction AB eſt à la fraction AC: Donc auſſi la fraction AB ſera à la fraction AC, comme C ſera à B. Ce qu'il falloit prouuer.

D10	E6
A2	A2
B5	C5

7 Les fractions deſquelles les numerateurs ont vne meſme raiſon aux denominateurs ſont egales entr'elles: Et des fractions egales, les numerateurs ont vne meſme raiſon aux denominateurs: Mais des inegales, celles dont le numerateur a plus grande raiſon au denominateur, eſt la plus grande: Et de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au denominateur.

Soient deux fractions AB, CD, & qu'il y ait meſme raiſon du numerateur A au denominateur B, que du numerateur C au denominateur D: Ie dis qu'icelles fractions AB, CD, ſont egales. Car ayant faict E de A en D, & F de B en C; comme la fraction AB eſt à la fraction CD, ainſi E à F, par la 4. prop. Mais puis que comme A eſt à B, ainſi C eſt à D; par la 19. prop. 7. les deux produicts E & F ſeront egaux: donc auſſi la fraction AB ſera egale à la fraction CD. Ce qu'il falloit prouuer.

E12	F12
A2	C4
B3	D6

Soient maintenant deux fractions egales AB, CD: Ie dis que comme A eſt à B, ainſi C à D: Car comme à la prec. demonſt. ayant fait E de A en D: & F de B en C, comme AB ſera à CD, ainſi E à F. Mais AB eſt egale à CD: donc auſſi E ſera egal à F: & par la 19. pr. 7 comme A ſera à B, ainſi C ſera à D: Ce qu'il falloit demonſtrer.

En troiſieſme lieu, qu'il y ait plus grande raiſon de A à B, que de C à D: Ie dis que la fraction A B eſt plus grande que la fraction C D. Car ayãt fait E de A en D, & F de B en C, par la 4. prop. comme la fraction A B ſera à la fraction C D, ainſi E à F. Mais par le Scholie de la 19. pr. 7. le nombre E eſt plus grand que le nombre F: donc auſſi la fraction A B ſera plus grande que la fraction C D. Ce qu'il falloit prouuer.

E 14	F 9
A 2	C 3
B 5	D 7

Finalement, que la fraction A B ſoit plus grande que la fraction C D: Ie dis que la raiſon de A à B eſt plus grande que celle de C à D. Car comme deſſus la fraction A B ſera à la fraction C D, comme E à F. Mais par l'hypotheſe la fraction A B eſt plus grande que la fraction C D: donc auſſi E ſera plus grand que F. Et puis que E eſt le produict de A en D, & F celuy de B en C, par le Scholie de la 19. pr. 7. il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à D. Ce qu'il falloit prouuer.

8. Les fractions dont les numerateurs ſont en meſme raiſon que les denominateurs, ſont egales entr'elles. Et des fractions egales, les numerateurs ont meſme raiſon entr'eux, que les denominateurs. Mais des fractions inegales, celle dont le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le denominateur au denominateur, eſt la plus grande: & de la plus grande, le numerateur a plus grande raiſon au numerateur, que le denominateur au denominateur.

Soient deux fractions A B, C D, & qu'il y ait meſme raiſon du numerateur A au numerateur C, que du denominateur B au denominateur D: Ie dis qu'icelles

fractions AB, CD, ſont eſgales. Car en raiſon permutee, A ſera à B, comme C à D ; & partant par la prop. prec. les fractions ſont egales. Ce qu'il falloit prouuer.

A2	C4
B3	D6

Mais ſoient les fractions AB, CD, eſgales : Ie dis que comme A eſt à C, ainſi B eſt à D. Car par la prop. prec. comme A ſera à B, ainſi C ſera à D ; & en permutant, comme A ſera à C, ainſi B ſera à D. Ce qui eſtoit à prouuer.

Maintenant qu'il y ait plus grande raiſon de A à C, que de B à D : Ie dis que la fraction AB eſt plus grande que la fraction CD. Car en permutant, il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à D ; & par la prec. prop. la fraction AB, ſera plus grande que la fraction CD : Ce qu'il falloit prouuer.

A5	C2
B6	D3

En dernier lieu, ſoit la fraction AB plus grande que la fraction CD : Ie dis qu'il y a plus grande raiſon de A à C que de B à D. Car par la prec. prop. il y aura plus grande raiſon de A à B, que de C à D : & partant en permutant, la raiſon de A à C ſera plus grande que de B à D. Ce qu'il falloit prouuer.

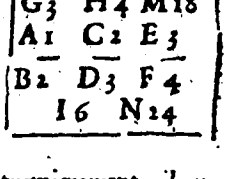
9. Reduire les fractions de diuerſes denominations à autant d'autres fractions de meſme denomination, qui leur ſoient egales, chacune à la ſienne.

Soient premierement les deux fractions AB, CD, ayans diuers denominateurs B, D : & il les faut reduire à deux autres fractions qui leurs ſoient egales, & d'vne meſme denomination. Soit fait E de A en D ; & F de B en C ; mais G de B en D : Ie dis

E8	F9
A2	C3
B3	D4
G12	

que les fractions E G, F G, qui ont vn meſme denominateur G, ſont eſgales aux fractions A B, C D, chacune à la ſienne, c'eſt à dire que E G eſt eſgale à A B, & F G à C D. Car d'autant que A & B multipliant D, ont faict E & G; par la 18. p. 7. comme A à B, ainſi E à G; & par la 7. prop. les fractions E G, A B ſont eſgales. Par meſme raiſon on prouuera que la fraction F G eſt eſgale à la fraction C D.

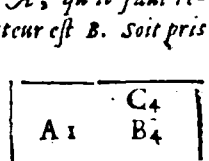
Maintenant, ſoient trois fractions de diuerſes denominations A B, C D, E F, leſquelles il faut reduire à trois autres d'vne meſme denomination, qui leur ſoient eſgales, chacune à la ſienne. Tout ainſi que deſſus ſoit faict G de A en D, & H de B en C; mais de I de B en D: puis apres ſoit faict K de G en F; L de H en F; M de I en E; & N de I en F. Ie dis que les trois fractions K N, L N, & M N, qui ont vn meſme denominateur N, ſont eſgales aux trois fractions A B, C D, E F, chacune à la ſienne. Car premierement, il appert par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus, que G I eſt eſgale à A B, & H I à C D: Mais puis que F multipliant G, H, I, a produit K, L, N, par le Scholie de la 18. p. 7. iceux produits ſont entr'eux en meſme proportion, que G, H, I. Parquoy K N ſera auſſi eſgale à A B, & L N à C D. Semblablement, pource que I multipliant E & F, fait M & N, comme E eſt à F, ainſi M à N, & par la 7. prop. la fraction M N ſera eſgale à la fraction E F. Par ainſi nous auons trouué les trois fractions K N, L N & M N, qui ont vn meſme denominateur N, & ſont eſgales aux trois propoſées A B, C D, E F, chacune à la ſienne. Ce qu'il falloit faire.



Que s'il y auoit quatre fractions, il faudroit en reduire premierement trois comme dessus, puis multiplier chaque numerateur d'icelles par le denominateur de la quatriesme fraction, & leur denominateur commun, tant par le numerateur que denominateur d'icelle quatriesme fraction: & ainsi on auroit quatre fractions d'vne mesme denomination esgales aux proposées. Bref, il appert assez que quelque nombre qu'il y ait de fractions de diuerses denominations à reduire à vne mesme denomination, que multipliant le numerateur de chacune d'icelles fractions par les denominateurs de toutes les autres, viendra le numerateur de chacune, & puis multipliant tous les denominateurs entr'eux, sera procreé le denominateur commun: & ce en quelconque ordre & façon qu'on face lesdites multiplications, puis que par le 2. Theor. du Scholie de la 19. p. 7. lors que trois ou d'auantage de nombres se multiplient entr'eux, le produict est touſiours vn mesme, en quelque façon, & ordre qu'on les multiplie.

10. Reduire quelque entier que ce soit à vne fraction dont le denominateur est donné.

Premierement l'entier soit l'vnité A, qu'il faut reduire à vne fraction dont le denominateur est B. Soit pris le numerateur C esgal au denominateur B: Ie dis que la fraction C B est esgale à l'vnité A: Car par la 2. prop. comme C est à B, ainsi la fraction C B est à l'entier A. Mais C est esgal à B: donc aussi la fraction C B est esgale à l'entier A, c'est à dire à l'vnité.



Maintenant que l'entier soit le nombre A, lequel il faut reduire à la fraction dont le denominateur est B. De A en B soit faict le numerateur C: Ie dis que la fraction C B est

esgale au nombre entier A. Soit posee l'vnité D au dessous de A, afin que la fraction A D soit esgale à autant d'vnitez qu'il y en a au nombre A. Or d'autant que de la multiplication de A en B est fait C, par la 15. d. 7. le nombre B sera aussi autant de fois en C, qu'il y a d'vnitez en A. Donc comme A sera à D, ainsi C sera à B. Parquoy des fractions A D, C B les numerateurs A & C, ont vne mesme raison aux denominateurs D & B: partant elles seront esgales entr'elles par la 7. prop. Mais la fraction A D est esgale à l'entier A, à cause que le denominateur D est l'vnité: Donc aussi la fraction C B sera esgale au mesme entier A. Nous auons donc fait ce qui estoit requis.

A 5	C 35
D 1	B 7

11. Doubler & medier vne fraction donnée.

Premierement qu'il faille doubler la fraction A B. Soit doublé le numerateur A, afin que soit fait le numerateur C demeurant le mesme denominateur B: Ou bien lors que le denominateur B est pair en soit pris la moitié, afin d'auoir le denominateur D, demeurant le mesme numerateur A. Ie dis que chaque fraction C B, A D, est double de la fraction A B. Car puis que les fractions A B, C B, ont vn mesme denominateur B, par la 3. prop. comme le numerateur C sera au numerateur A, ainsi la fraction C B sera à la fraction A B. Mais par la construction C est double de A: donc aussi la fraction C B sera double de la fraction A B.

A 5	C 10	A 5
B 12	B 12	D 6

Derechef, pource que les fractions A B, A D, ont vn mesme numerateur A, par la 6. prop. comme le denominateur B sera au denominateur D, ainsi la fraction A D sera à la fraction A B. Mais par la construction

B est double d'iceluy D: donc aussi la fraction A D sera double de la fraction A B.

Maintenant, qu'il faille prendre la moitié de la fraction A B. Soit doublé le denominateur B, afin qu'il en vienne le denominateur C, demeurant le mesme numerateur A: ou bien quãd le numerateur A est pair, en soit pris la moitié, qui soit D, auec le mesme denominateur B. Ie dis que chaque faction A C, D B est moitié de la fraction A B. Car puis que les fractiõs A B, A C ont vn mesme numerateur par la 6. prop. comme B sera à C, ainsi la fraction A C sera à la fraction A B. Mais par la construction B est la moitié de C: Donc aussi la fraction A C sera moitié de la fraction A B.

A 8 / B 9	A 8 / C 18	D 4 / B 9

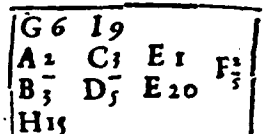
Derechef, puis que les fractions A B, D B, ont vn mesme denominateur, par la 3. prop. comme D sera à A, ainsi la fraction D B sera à la fraction A B. Veu donc que par la construction D est moitié de A, aussi la fraction D B sera moitié de la fraction A B. Nous auons donc doublé, & pris la moitié de la fraction donnée A B. Ce qu'il falloit faire.

En la mesme maniere vne fraction donnee sera triplee, quadruplee, &c. si on triple, quadruple, &c. le numerateur, demeurant le mesme denominateur: Ou bien si on prend (quand il se peut faire) le tiers, le quart, &c. du denominateur, demeurant le mesme numerateur. Pareillement on aura le tiers, le quart, &c. d'vne fraction donnée, si on triple, quadruple, &c. le denominateur, demeurant le mesme numerateur: Ou bien si l'on prend (lors qu'il se peut faire) le tiers, le quart, &c. du numerateur, le mesme denominateur demeurant: Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere que dessus.

12 La fraction de fraction est esgale à la fraction

simple, de laquelle le numerateur est procreé de la multiplication des numerateurs entr'eux, & le denominateur est produict des denominateurs aussi multipliez entr'eux.

Soit premierement A B vne fraction de la fraction C D, la valeur de laquelle au respect de l'vnité, ou du nombre entier E, soit exprimee par F; mais de A en C soit fait G, & de B en D soit produict H: Ie dis que la fraction de fraction donnee est esgale à la simple fraction G H, au respect de l'entier E. Car soit encore faict I de B en C; & par la 2. pr. comme A est à B, ainsi la fraction A B est à son entier, c'est à sçauoir à la fraction C D, de laquelle l'entier est E. Mais par la 18. p. 7. comme A est à B, ainsi G à I, pource que A, B, multiplians C, produisent iceux G, I: donc aussi comme la fraction A B sera à la fraction C D, ainsi sera G à I. Derechef, pource que par la 2. prop. comme C est à D, ainsi la fraction C D est à son entier E, & que par la 17. p. 7. comme C à D, ainsi I à H: aussi la fraction C D sera à son entier E, comme I à H.



Veu donc que comme la fraction A B est à la fraction C D, ainsi G est à I; & comme la fraction C D est à son entier E, ainsi est I à H; en raison esgale, comme A B fraction de la fraction C D est à l'entier E, ainsi G est à H: Mais nous auons posé qu'à icelle fraction de fraction soit esgale la simple fraction F: donc aussi la fraction F sera à l'entier E, comme G à H. Mais par la 2. pr. comme G est à H, ainsi la fraction G H est au mesme entier E: Donc les fractions simples F & G H seront esgales; & partant puis que la fraction F est esgale à la fraction de fraction donnée, aussi la fraction G H sera esgale à la fraction

A Bau reſpect de la fraction C D, duquel l'entier eſt E. Ce qu'il falloit prouuer.

Soit maintenant A B fraction de C D, qui eſt auſſi fraction de la fraction E F; & ſoit faict G de A en C; & H de B en D: Item I de G en E; & K de H en F: Ie dis que la fraction I K eſt eſgale à la fraction de fraction donnee. Ce qui eſt manifeſte, veu que par la demonſtration prec. la fraction G H eſt eſgale à A B, fraction de la fraction C D: tellement qu'icelle G H eſt fraction de la fraction E F, à laquelle eſt auſſi eſgale la fraction I K, par la meſme demonſtration.

	G10	130
A5	C2	E3
B6	D3	F4
	H18	K72

Que s'il y auoit d'auantage de fractions, c'eſt à dire que E F fuſt encore fraction d'vne autre fraction, le produict de I, K, par ceſte autre fraction, donneroit pareillement la fraction ſimple eſgale à la fraction de fraction donnée: & ainſi continuellement s'il y auoit d'auantage de fractions.

Il appert donc qu'eſtant donnée vne fraction de tant de fractions qu'on voudra, on la reduira en vne ſimple fraction, multipliant tous les numerateurs entr'eux, & puis auſſi tous les dominateurs entr'eux.

13 Reduire vne fraction donnée à minimes termes.

Soit vne fraction A B, qu'il faut reduire aux plus petits termes d'icelle. Or les nombres A B, ſeront premiers entr'eux, ou non; s'ils ſont premiers, la fraction A B ne pourra eſtre reduitte à plus petite denomination. Car ſoit reduitte, s'il eſt poſſible, à moindres termes C, D, tellement que la fraction C D ſoit eſgale à la fraction A B. D'autant que par la 7. prop. comme A eſt à B, ainſi C à D, & que les nombres C, D, ſont moindres

A7	C.
B8	D.

que les nombres A, B : iceux A, B, ne ſeront les moindres termes de ceſte raiſon: Mais par la 23. p.7. ils ſont auſſi les plus petits, veu qu'ils ſont premiers entr'eux : Ce qui eſt abſurde.

Maintenant que A, B, ne ſoient premiers entr'eux : & par la 2. p. 7. la plus grande meſure d'iceux ſoit C, qui meſure A par D : & B par E : Ie dis que la fraction D E eſt eſgale à la fraction A B, & conſtituee aux plus petits termes qu'elle puiſſe eſtre. Car puis que C meſure A & B par D & E : par la 7. com. ſent. 7. Iceux A, B, ſeront produits de C en D, E : & par la 19. p. 7. comme A ſera à B, ainſi D à E, & partant par la 7. pr. les fractions A B, D E, ſeront eſgales. En apres, pource que C, plus grande meſure des nombres A, B, les meſure par D, E : par le corol. de la 35. p. 7. iceux D, E, ſeront les plus petits nombres de tous ceux qui ont meſme raiſon que A à B. Nous auons donc reduit la fraction donnee A B en ſa plus petite denomination D E : Ce qu'il falloit faire.

A 6	D 2
B 9	E 3
C 3	

14 Eſtant donnee vne fraction, la reduire (ſi faire ſe peut) à vne autre eſgale de denomination donnee.

Soit donnee la fraction A B, qu'il faut reduire à vne autre eſgale, de laquelle le denominateur ſoit C. De A en C, ſoit faict D, lequel B meſure par E : Ie dis que la fraction E C, qui a le denominateur donné C eſt eſgale à la fraction donnee A B. Car puis que B meſure D par E, par le 9. ax. 7. D ſera faict de E en E : Mais il a auſſi eſté faict de A en C. Donc par la 19. prop. 7. comme A ſera à B,

A 2	E 6
B 3	C 9
D 18	

ainſi E ſera à C: & par la 7. prop. les fractions A B, E C ſeront eſgales.

Que ſi B ne meſure D procreé de A en C, la fraction donnée ne ſe pourra reduire à la denomination donnee C. Car ſoit reduitte, s'il eſt poſſible, à la fraction E C. Donc puiſque les fractions A B, E C ſont eſgales, comme A ſera à B, ainſi E ſera à C par la 7. prop. & partant par la 19. p. 7. le nombre produict de B en E ſera eſgal à celuy faict de A en C, c'eſt à ſçauoir D. Donc par le 7. ax. 7. B meſurera D par E: Ce qui eſt abſurde, puis qu'on a poſé que B ne meſure pas D.

A 2	E.
B 5	C 7
	D 14

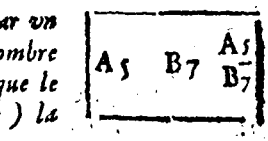
Or la reduction de fraction, qui en l'Arithmetique pratique, eſt vulgairement appellée Evaluation, *deſpend de cette prop. veu qu'evaluer vne fraction n'eſt autre choſe, que trouuer vne fraction eſgale à la donnée, qui ait pour denominateur le nombre & valeur de l'entier propoſé. Comme par exemple, quand on veut evaluer les $\frac{2}{5}$ d'vne liure, ce n'eſt autre choſe que trouuer vne autre fraction eſgale à $\frac{2}{5}$, qui ait pour denominateur le nombre 20, qui eſt la valeur de la liure: & ſuiuant ce qui eſt icy demonſtré, ſi ayant multiplié ledit nombre 20 par 2, numerateur de la fraction donnée, on diuiſe le produict 40 par le denominateur 5, viendra 8 pour le numerateur de ladite fraction cherchée, c'eſt à dire, que la fraction $\frac{8}{20}$ ſera eſgale à la donnée $\frac{2}{5}$: au lieu de laquelle fraction $\frac{8}{20}$, on peut auſſi dire 8 ſols, puis que l'entier auquel ſe reſeroit la fraction donnee vaut 20 ſols.*

A 2	E 8
B 5	C 20
	D 40

15. Quand vn nombre eſt diuiſé par vn autre plus grand, le quotient eſt vne fraction de laquelle le nombre

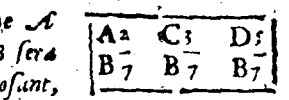
nombre à diuiſer eſt numerateur, & le diuiſeur denominateur.

Soit le nombre A, qu'il faut diuiſer par vn plus grand nombre B : Ie dis que le quotient eſt la fraction AB, de laquelle le nombre à diuiſer A, eſt numerateur, & le diuiſeur B denominateur. Car d'autant que par la 7. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction AB eſt à l'entier, c'eſt à dire à l'vnité par la def. de la diuiſion (car la diuiſion d'vn nõbre par vn nombre eſt l'inuention d'vn nombre qui ait meſme raiſon à l'vnité que le nombre diuidande au diuiſeur) la fraction AB ſera quotient du nombre A diuiſé par le nombre B. Ce qu'il falloit prouuer.



16. Adiouſter pluſieurs fractions en vne ſomme.

Qu'il faille premierement adiouſter enſemble deux fractions AB, CB d'vne meſme denomination. Soient adiouſtez enſemble les numerateurs A, C, la ſomme deſquels ſoit D, au deſſous de laquelle ſoit poſé le meſme denominateur B : Ie dis que la fraction DB, eſt la ſomme de l'addition des fractions AB, CB. Car d'autant que les fractions ont vn meſme denominateur, par la 3. prop. comme A ſera à C, ainſi la fraction AB ſera à la fraction CB ; & en compoſant, comme A, C, enſemble à C, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction CB. Mais par la meſme 3. prop. comme C à D, ainſi la fraction CB à la fraction DB. Donc en raiſon eſgale, comme AC, enſemble à D, ainſi les fractions AB, CB enſemble à la fraction DB. Veu donc que par la conſtruction



A, C, enſemble ſont eſgales à D, auſſi les fractions A B, C B enſemble, ſeront eſgales à la fraction D B.

Soient maintenant trois fractions de diuerſes denominations A B, C D, E F, leſquelles il faut adiouſter enſemble. Les fractions propoſees ſoient reduittes à autant d'autres fractions de meſme denomination G K, H K, I K, par la 9. prop. puis ſoient adiouſtez enſemble les numerateurs G, H, I, dont la ſomme ſoit L, à laquelle ſoit ſuppoſé le denominateur commun K, & la fraction L K, ſera la ſomme des trois fractions propoſees. Car d'autant que par la 3. prop. les numerateurs G, H, I, ſont en meſme proportion que les fractions G K, H K, I K, par le 5. Theor. du Scholie de la 22. prop. 7. G, H, I enſemble, ſeront à I, comme les trois fractions A B, C D, E F enſemble ſeront à la fraction E F. Mais par la 3. p. comme I eſt à L, ainſi auſſi la fraction E F eſt à la fraction I K. Donc en raiſon eſgale, comme les trois nombres G, H, I enſemble ſeront à L, ainſi les trois fractions A B, C D, E F enſemble ſeront à L K. Mais par la conſtruction le nombre L eſt eſgal aux trois G, H, I: Donc auſſi la fraction L K ſera eſgale aux trois propoſees A B, C D, E F. Nous auons donc faict ce qui eſtoit requis.

G 12	H 16	I 18	
A 1 / B 2	C 2 / D 3	E 3 / F 4	L 46 / K 24
	K 24		

Or ayant reduict les fractions propoſees à vne meſme denomination, & adiouſté enſemble les numerateurs trouuez, puis à la ſomme L, ſuppoſé le denominateur commun K; on prouuera encore que la fraction L K eſt eſgale aux propoſees en ceſte ſorte. D'autant que par la 5. prop.

comme l'entier est à la somme des fractions A B, C D, E F, ainsi le denominateur commun K est à la somme des produits G, H, I, c'est à dire L; en changeant, comme la somme des fractions A B, C D, E F, sera à l'entier, ainsi L sera à K. Mais par la 2. prop. comme L est à K, ainsi aussi la fraction L K est au mesme entier. Dõc comme la somme des fractions A B, C D, E F, est à l'entier, ainsi la fraction L K est au mesme entier: & partant la somme des fractions A B, C D, E F, sera esgale à la fraction L K. Ce qui estoit proposé.

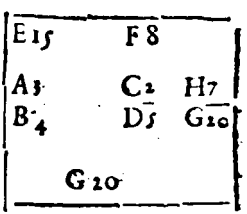
Que si les fractions proposees à adiouster ne se referoient à l'vnité, ains à quelque nombre entier, la somme d'icelles se rapporteroit au mesme nombre. Par exemple, s'il falloit adiouster $\frac{2}{3}$ du nombre 60 auec les $\frac{2}{5}$ du mesme nombre, la somme d'icelles fractions seroit $\frac{19}{15}$ qui se refereroient aussi au mesme nombre 60; tellement que ce seroit 76: car les $\frac{2}{3}$ de 60 sont 40, & les $\frac{2}{5}$ sont 36, lesquels deux nombres adiouſtez ensemble, font le susdit nombre 76.

17. Oster vne petite fraction d'vne plus grande.

De la fraction A B, qu'il en faille oster vne moindre fraction C B, laquelle est de mesme denomination. Soit osté le numerateur C du numerateur A, & au dessous du reste D, soit posé le mesme denominateur B: Ie dis que la fraction D B est ce qui reste apres auoir soustraict la fraction C B de la fraction A B. Car puisque C osté de A, reste D; A est composé de C & D: donc la fraction A B, de laquelle le numerateur A est l'aggregé des numerateurs C, D, est la somme des deux fractions C B, D B, comme il a esté demonstré en la prec. prop. Parquoy ayant osté la fraction C B de la fraction A B, restera la fraction D B.

$A\frac{3}{4}$	$C\frac{1}{4}$	$D\frac{2}{4}$
$B\frac{-}{4}$	$B\frac{-}{4}$	$B\frac{-}{4}$

Mais ſi de A B, il faut oſter vne moindre fraction C F, qui a vn autre denominateur que A B : par la 9. prop. icelles fractions A B, C D, ſoient reduittes à deux autres d'vne meſme denomination E G, F G : puis ſoit oſté le numerateur F du numerateur E, & reſte H, au deſſous duquel ſoit apposé le denominateur commun G : Ie dis qu'apres auoir oſté la fraction C D de la plus grande fraction A B, reſte la fraction H G, ainſi qu'il appert par la demonſtration cy-deſſus. Ce qu'on peut encore demonſtrer ainſi ; d'autant que D multipliant A, B faict E, G, par la 17. pr. 7. comme A ſera à B, ainſi E ſera à G. Mais par la 2. prop. comme A eſt à B, ainſi la fraction A B eſt à l'entier. Donc auſſi cõme E à G, ainſi la fraction A B eſt à l'entier. Derechef, pour ce que B multipliant C, D, faict F, G, comme C ſera à D, ainſi F à G. Mais auſſi comme C à D, ainſi la fraction C D eſt à l'entier. Donc comme F à G, ainſi la fraction C D eſt à l'entier. Veu donc que comme F premiere eſt à G deuxieſme, ainſi la fraction C D troiſieſme eſt à l'entier quatrieſme, & que par la 2. prop. comme H cinquieſme eſt au meſme G deuxieſme, ainſi la fraction H G ſixieſme eſt au meſme entier quatrieſme, par le 6. Theor. du Schol. de la 22. p. 7. comme F, H, premiere & cinquieſme enſemble ſera à G deuxieſme, ainſi les fractions C D, H G, troiſieſme & ſixieſme enſemble ſeront à l'entier quatrieſme. Mais comme F, H, enſemble ſont à G, ainſi E eſgal à iceux F, H (Car F oſté de E reſte H) eſt au meſme nombre G. Donc auſſi comme E ſera à G, ainſi les fractions C D, H G enſemble ſeront à l'entier. Mais il a eſté demonſtré que



comme E à G, ainsi la fraction A B à l'entier. Donc aussi comme la fraction A B sera à l'entier, ainsi les fractions C D, H G ensemble seront au mesme entier : Et partant les fractions C D, H G ensemble seront esgales à la fraction A B. Parquoy ayant osté la fraction C D de la fraction A B, le reste sera la fraction H G. Ce qu'il falloit faire.

Or si les fractions proposées ne se referoient à l'unité, ains à quelque nombre entier, le reste se refereroit aussi au mesme nombre. Par exemple, s'il falloit soustraire $\frac{2}{5}$ du nombre 40, des $\frac{3}{4}$ du mesme nombre, le reste $\frac{7}{20}$ se refereroit au mesme nombre 40 ; & partant ce seroit 14 : car par la 15. prop. les $\frac{2}{5}$ de 40, sont 16, & les $\frac{3}{4}$ sont 30.

18. Multiplier vne fraction par vne fraction.

Soit vne fraction A B, qu'il faut multiplier par la fraction C D : de la multiplication des numerateurs A, C, entr'eux soit faict E, au dessous duquel soit posé F produit des denominateurs B, D, multipliez entr'eux : Ie dis que la fraction E F est le produit des fractions A B, C D, multipliees entr'elles. Car soit faict G de E en D ; & H de C en F : Et par la 4. prop. comme la fraction E F sera à la fraction C D, ainsi G à H. Mais pour ce que C multipliant A, F, faict E, H, par la 17. prop. 7. comme A sera à F, ainsi E à H ; & en permutant, comme A sera à E, ainsi F sera à H. Derechef, pour ce que D multipliant E, B faict G, F, par la 17. pr. 7. comme E sera à B ainsi G à F. Parquoy les trois nombres A, E, B sont pro-

H 45	G 30	
A 2	C 3	E 6
B 3	D 5	F 15

portionnels aux trois G, F, H en proportion troublée: donc en raison esgale, comme A sera à B, ainsi G à H. Mais nous auons demonstré que comme G est à H, ainsi la fraction E F est à la fraction C D; & par la 2. prop. comme A est à B, ainsi la fraction A B est à l'entier, c'est à dire à I. Donc aussi comme la fraction E F est à la fraction C D, ainsi la fraction A B est à I. Et par la def. de la multiplication (La multiplication d'vn nombre en vn nombre est l'inuention d'vn nombre qui ait mesme raison à l'vn des multiplians que l'autre à l'vnité) la fraction E F est produite de la multiplication de la fraction A B en la fraction C D: parquoy nous auons faict ce qui estoit requis.

Or quand on multiplie des fractions, qui ne se rapportent pas à l'vnité, ains à quelque nombre entier donné; il ne faut pas referer le nombre produict de la multiplication d'icelles fractions, au nombre entier proposé, ainsi qu'en l'addition & soustraction: mais il le faut comparer au quarré d'iceluy nombre donné: Car veu que la comparaison se doit faire entre choses semblables, & que de la multiplication de deux nombres est produict vn nombre plan: il faudra referer le nombre produict de la multiplication auec le plan du nombre entier proposé, c'est à dire auec son quarré, si toutes les deux fractions se referent à vn mesme nombre entier, pour ce qu'iceluy nombre (suiuant ce que nous auons dit à la 14. prop.) leur est comme denominateur, & par consequent il le faut multiplier par soy-mesme, afin d'auoir le denominateur du produict desdites fractions. Mais si les fractions se referoient à diuers nombres entiers, il faudroit referer le produit de leur multiplication au nombre plan faict des nombres entiers proposez. Ainsi lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ d'vne liure, c'est à dire les $\frac{2}{5}$ de 20 sols, par $\frac{1}{2}$ du mesme nombre 20, le produict est ceste fraction $\frac{2}{10}$, laquelle il ne faut pas rapporter

au nombre entier proposé 20, mais à son quarré 400; tellement que ce produict $\frac{2}{10}$ est 80, & il ne seroit que 4, si on le referoit seulement au nombre proposé 20. Ce qui est apparent, car par la 14. prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre 20 sont 8, & $\frac{1}{2}$ du mesme nombre 20, est 10; & de 8 en 10, est faict 80, qui est $\frac{2}{10}$ du nombre 400, quarré du nombre 20 entier proposé. Nous dirons donc que $\frac{2}{5}$ d'vne liure multipliez par $\frac{1}{2}$ liure, ne produisent pas $\frac{2}{10}$ d'vne liure, qui sont seulement 4 sols, mais produisent $\frac{2}{10}$ de 400, qui sont 80 sols, ou 4 liures. Mais lors qu'on multiplie les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20, par les $\frac{3}{4}$ du nombre entier 24, le produict est $\frac{6}{10}$, ou $\frac{3}{10}$ du nombre 480, c'est à dire 144: Car par la 14. prop. les $\frac{2}{5}$ du nombre entier 20 sont 8, ou $\frac{8}{10}$, & les $\frac{3}{4}$ de 24 sont 18, ou $\frac{18}{24}$, qui multipliez comme dict est cy-dessus, produisent 144, ou la fraction $\frac{144}{480}$: tellement que les $\frac{6}{10}$ trouuez ne se doiuent referer à l'vn ny à l'autre entier proposé 20 & 24, ains au nombre plan 480, produit d'iceux entiers.

19 Diuiser vne fraction par vne fraction.

Soit la fraction A B, qu'il faut diuiser par la fraction C D: & premierement que les nombres de cette-cy C D, mesurent les nombres de celle-là A B, par E, F; tellement que A estant diuisé par C le quotient soit E, & ayant diuisé B par D, le quotient soit F: Ie dis que la fraction E F, est le quotient de la fraction A B diuisée par la fraction C D. Car d'autant que C mesure A par E, & D mesure B par F par le 9. ax. 7. A est procreé de C en E; & B de D en F. Donc par la prec. prop. la fraction A B, est produicte de la multiplication de la fraction E F par la

A 5	C 5	E 1
B 12	D 6	F 2
A 4	C 2	E 2
B 9	D 9	F 1
A 9	C 3	E 3
B 10	D 5	F 2

fraction C D: & partant par la def. de la multiplication, comme la fraction A B ſera à la fraction C D, ainſi la fraction E F ſera à l'vnité. Parquoy puis que comme A B, fraction diuiſée, eſt à C D, fraction diuiſante, ainſi la fraction E F eſt à l'vnité, par la def. de la diuiſion, la fraction E F ſera le quotient de la diuiſion de la fraction A B par la fraction C D. Ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, que les nombres de la fraction C D, ne meſurent les nombres de la fraction A B: Par la 9. prop. les fractions propoſees A B, C D, ſoient reduittes à deux autres eſgales de meſme denomination E G, F G; puis des deux numerateurs E & F, ſoit fait à part la fraction E F. Ie dis qu'icelle fraction E F eſt le quotient de la fraction A B diuiſee par la fraction C D. Car par la 3. prop. la fraction E G eſt à la fraction F G, comme le numerateur E eſt au numerateur F; & par la 2. prop. comme E eſt à F, ainſi la fraction E F eſt à ſon entier, c'eſt à dire à l'vnité. Donc auſſi comme la fraction E F eſt à l'vnité, ainſi la fraction E G eſt à la fraction F G, c'eſt à dire la fraction A B à la fraction C D, puis qu'elles leur ſont eſgales par la conſtruction; & partant par la def. de la diuiſion, la fraction E F ſera le quotient de la fraction A B, diuiſee par la fraction C D. Ce qui eſtoit propoſé.

E12 F10	E8 F9
A4 C2 E12	A2 C3 E8
B5 D3 F10	B3 D4 F9
G15	G12

Or il appert aſſez que ceſte demonſtration a lieu en toutes fractions, ſoit que les nombres de la fraction diuiſante meſurent ou non les nombres de la fraction à diuiſer; &

auſsi que le denominateur commun G n'entre point au quotient de la diuiſion, ains ſeulement les deux numerateurs E, F; c'eſt pourquoy en la practique d'Arithmet. il ſuffit de multiplier le numerateur de la fraction à diuiſer par le denominateur de la fraction diuiſante, pour auoir le numerateur du quotient, mais le numerateur de la fraction diuiſante par le denominateur de la fraction à diuiſer pour auoir le denominateur d'iceluy quotient.

Il eſt auſsi manifeſte que ſi les nombres de la fraction diuiſante ſont changez de lieu à autre, que la diuiſion ſe fera comme la multiplication, c'eſt à ſçauoir en multipliant les numerateurs entr'eux, & puis apres les denominateurs. Comme par exemple, voulant diuiſer $\frac{5}{6}$ par $\frac{2}{3}$ nous changerons les nombres de ceſte fraction $\frac{2}{3}$, & aurons $\frac{3}{2}$, par leſquels nous multiplierons $\frac{5}{6}$, c'eſt à ſçauoir 5 par 3; & 6 par 2, & viendront $\frac{15}{12}$ pour le quotient de $\frac{5}{6}$ diuiſez par $\frac{2}{3}$.

Fin du ſeptieſme Element.

ELEMENT HVICTIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que les extremes ſoient premiers entr'eux ; ils ſeront les plus petits de leur raiſon.

SOIENT tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C ; & que les extremes A & C, ſoient premiers entr'eux : Ie dis que A, B, C, ſont les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon.

A....4	D—
B.....6	E——
C.....9	F———

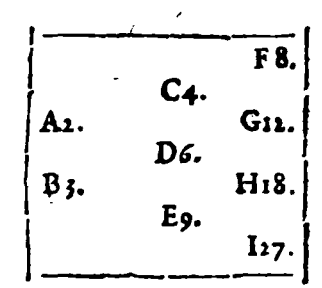
Car s'ils ne ſont tels, ſoient D, E, F, plus petits en la meſme raiſon,

s'il eſt poſſible. Par ainſi il y-a d'vn coſté les trois nombres A,B,C, & d'vn autre les trois D,E,F, qui prins de deux en deux ſont en meſme raiſon: Donc en raiſon egale, D ſera à F, comme A eſt à C par la 14.p.7.& parce que A& C ſont premiers entr'eux, ils ſeront les plus petits de leur raiſon, par la 23.p.7. & par la 21. p. 7. ils meſureront egalement D & F: ce qui eſt impoſſible, pour eſtre plus petits qu'iceux. Donc A, B, C, eſtoient les plus petits en la meſme raiſon. Parquoy s'il y-a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

PROBL. I. PROP. II.

Trouuer tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux les plus petits en vne raiſon donnee.

Soient deux nombres A & B, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon: il faut premierement trouuer trois nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon donnee de A à B.



Que A multiplié par ſoy-meſme produiſe C; A par B produiſe D; & B par ſoy produiſe E: Ie dis premierement que

C, D, E ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B. Car puis que A multipliant A & B, produict C & D: comme A ſera à B, ainſi C ſera à D par la 17. pr. 7. Derechef, puis que B multipliant A & B, produict D & E, comme A ſera à B, ainſi D ſera à E: Parquoy C, D, E, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B. Ie dis auſſi qu'ils ſont les plus petits d'icelle raiſon donnee. Car d'autant que A & B ſont les plus petits de leur raiſon, par la 24. pr. 7. ils ſont premiers entr'eux, & par la 29. pr. 7. C & E ſeront auſſi premiers entr'eux: & par la precedente prop. les trois nombres C, D, E, ſeront les plus petits en la raiſon donnee de A à B.

Maintenant, qu'il en faille trouuer quatre. Que A multipliant les trois trouuez C, D, E, produiſe F, G, H: & B multipliant le dernier E faſſe I: Ie dis que les quatre nombres F, G, H, I, ſont continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon de A à B. Car d'autant que A multipliant C, D, E a fait F, G, H: iceux ſont en la meſme raiſon que C, D, E, c'eſt à dire en la raiſon de A à B. Derechef, puis que A & B multipliant E ont faict H & I, par la 18. pr. 7. comme A ſera à B, ainſi H ſera à I: & partant F, G, H, I, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon donnee de A à B. Dauantage, puis que A & B eſtans les plus petits de leur raiſon, ſont premiers entr'eux par la 24. prop. 7. auſſi les extremes F & I ſeront premiers entr'eux par la 29. pr. 7. attendu que A & B multipliez par eux meſme, ont produit C & E, & iceux multipliez par les meſmes A & B ont produict les extremes F & I. Donc par la pr.

prec. les quatre nombres F, G, H, I, seront les plus petits de leur raison. Et en ceste façon on en trouuera tant que l'on voudra. Nous auons donc trouué des nombres continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il resulte de cecy que trois nombres continuellement proportionnaux, estans les plus petits de leur raison, les extremes seront quarrez: & s'il y en a quatre, qu'iceux extremes seront Cubes. Car des trois C, D, E, les extremes C & E, ont esté produicts de A & B multipliez par eux-mesmes; & des quatre F, G, H, I, les extremes F & I, ont esté produicts de la multiplication de A & B par leurs quarrez C & E.

Il resulte encore que les extremes des nombres continuellement proportion. trouuez selon ceste prop. sont premiers entr'eux. Car il a esté demonstré par les 24. & 29. p. 7. que les extremes C, E; & F, I, sõt premiers entr'eux.

THEOR. 2. PROP. III.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont la mesme raison: les extremes seront premiers entr'eux.

Soient quatre nombres A, B, C, D continuellement proportionnaux, les plus petits de tous ceux qui sont en la mesme raison: Ie dis que les extrémes A & D, sont premiers entr'eux.

Car soiẽt trouuez par la 35. p. 7. les plus petits nõbres qui soient en la raison de A à B, sçauoir F & G: ils seront premiers entr'eux par la 23. p. 7. & cõme

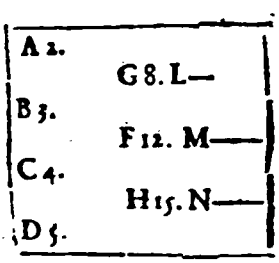
il a eſté enſeigne en la preced. ſoient trouuez des nombres continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon de F à G, ſçauoir premierement les trois H, I, K, puis apres les quatre L, M, N, O, & ainſi conſecutiuement vn plus; iuſques à ce que on en ait autant qu'il y en aura de propoſez: il ne faut donc icy que ces quatre L, M, N, O. Or iceux eſtans les plus petits en la raiſon de F à G, ils ſeront egaux aux quatre A, B, C, D, qui ſont auſſi les plus petits en la meſme raiſon. Et comme les extrémes L & O, ſont premiers entr'eux par le corol. de la prec. les extrémes A & D ſeront auſſi premiers entr'eux. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A 8.		L 8.
	H 4	
B 12.	F 2.	M 12.
	I 6	
C 18.	G 3.	N 18.
	K 9	
D 27.		O 27.

PROBL. 2. PROP IV.

Eſtans donnees tant de raiſons qu'on voudra en nombres les plus petits d'icelles raiſons; trouuer tant de nombres qu'on voudra les plus petits continuellement proportionnaux ſelon les raiſons donnees.

Soient donnees les deux raiſons de A à B, & de C à D, aux plus petits termes d'icelles : il faut trouuer trois nombres en continuelle proportion, les plus petits de ceux qui ſont ſelon les raiſons donnees.



Soit trouué par la 36. pr. 7. le plus petit nombre qui ſoit meſuré par B, & par C; lequel ſoit F: en apres, ſoit trouué G, autant de fois meſuré par A, que F par B: Pareillement H autant de fois meſuré par D que F par C. Ie dis que les trois nõbres G, F, H ſont continuellement proportionnaux, les plus petits qui ſoient ſelon les raiſons donnees.

Car d'autant que A meſure autant de fois G, que B meſure F, & par conſequent A & B multiplians vn meſme nombre (ſçauoir celuy par lequel ils meſurent G & F) ont produit G & F: par la 18. p. 7. G eſt à F, en meſme raiſon que A à B. Et par meſme diſcours F ſera à H, comme C à D: Donc G, F, H, ſont continuellement proportionnaux, ſelon les raiſons donnees. Mais ils ſont auſſi les plus petits, ſelon icelles raiſons donnees: car s'il n'eſt ainſi, en ſoient trouuez de plus petits L, M, N, s'il eſt poſſible, & qui reſpondent aux raiſons donnees, comme les trois G, F, H. Or veu que A & B ſont les plus petits en leur raiſon, par la 21. prop. 7. il meſureront egalement L & M, iceux eſtans en la meſme raiſon, c'eſt à ſçauoir le conſequent B, le conſequent M: Par meſme diſ-

cours C & D mesureront egalement M & N, sçauoir l'antecedant C l'antecedant M. Parquoy B & C mesurans M: par la 37. pr. 7. F, qui est le plus petit nombre qu'ils mesurent, mesurera aussi M, sçauoir est, le plus grand, le plus petit: ce qui est impossible. Partant les nombres G, F, H, estoient les plus petits selon les raisons donnees.

Maintenant soient donnees trois raisons aux plus petits termes A à B 3, C à D, & F à G, selon lesquelles il faut trouuer quatre nombres tels que requiert la proposition.

A 2.	I 8.	M 16.
B 3.	H 12.	N 24.
C 4.	K 15.	O 30.
D 5.		
F 6.	L —	P 35.
G 7.		

Soient trouuez les trois nombres I, H, K comme dessus: ce faict, ou F mesurera K, ou nō: S'il le mesuroit, il faudroit prendre L autant de fois mesuré par G, que K par F; & par la precedente demonstration, il est euident qu'on auroit satisfait. Que si F ne mesure K, soit trouué O le plus petit nombre mesuré par F, & par K, par la 36. pr. 7. Et que G mesure autant de fois P, que F mesure O. Item que comme K mesure O, ainsi H mesure N: & I mesure M. Ie dis que M, N, O, P sont les quatre nombres continuellement proportionnaux requis.

Car puisque I, H, K mesurent egalement M, N, O, comme dit est cy dessus, I sera à H ainsi que M à N, & comme H sera à K, ainsi N à O. Mais il

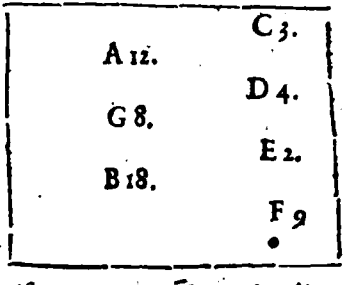
ya meſme raiſon de I à H que de A à B, & de H à K que de C à D, pource que A & B meſurent egalement iceux I & H; & C, D, egalement H & K. Donc comme A à B, ainſi M à N; & comme C à D, ainſi N à O: auſſi comme F à G ainſi O à P, à cauſe que F & G meſurent egalement O & P. Les quatre nombres M, N, O, P, ſont donc continuellement proportionnaux és raiſons donnees. Et qu'ils ſoient les plus petits, on le demonſtrera en la meſme façon qu'on a faict cy-deſſus de trois nombres.

Or en la meſme maniere ſera procedé ſi 4, ou dauantage de raiſons ſont donnees aux plus petits termes. Parquoy eſtans donnees tant de raiſons qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 3. PROP. V.

Les nombres plans ſont l'vn à l'autre en la raiſon compoſee de leurs coſtez.

Soient deux nombres plans A & B, les coſtez de A, ſoient C & D; & les coſtez de B, ſoient E & F. Ie dis que le plan A eſt au plan B, en la raiſon compoſee de C à E, & de D à F.



Qu'il ne ſoit ainſi: Que D multiplié par E produiſe G. Donc D multipliant C & E, produira A & G, qui ſeront en meſme rai-

ſon que C à E, par la 17.p.7. Et par meſme diſcours E multipliant D & F, produira G & B, qui ſeront auſſi en meſme raiſon que D à F. Parquoy les trois nombres A, G, B ſont continuellement proportionnaux és raiſons de C à E, & de D à F, coſtez. Mais par la 5.d.6. la raiſon de A à B eſt compoſee de A à G, & de G à B. Donc la raiſon du nombre plan A au nombre plan B, ſera compoſee de la raiſon des coſtez C à E, & D à F. Parquoy les nombres plans ſont l'vn à l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. VI.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra cõtinuellement proportionaux, & que le premier ne meſure le ſecond, auſſi pas vn autre ne meſurera pas vn autre.

Soient tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E; & que A premier ne meſure B 2e. Ie dis que pas vn autre n'en meſurera pas vn autre.

A 16. B 24. C 36. D 54. E 81.
F 4. G 6. H 9.

Car premierement, comme A ne meſure B, ainſi B ne meſurera C: ny C ne meſurera D: ny D E, d'autant qu'ils ſont en meſme raiſon: par ainſi aucun d'iceux nombres ne meſure ſon prochain ſuiuant. Ie dis auſſi qu'en paſſant quelqu'vn, les extrémes ne ſe pourront meſurer, comme A ne pourra meſurer C. Car ayant trouué trois nombres F, G, H les plus petits en la raiſon de A à B, ou de A, B, C par la 35.p.7. en raiſon egale A ſera à C cõme

F à H, par la 14. p. 7. & puis que par l'hypotheſe, A ne meſure B, auſſi F ne meſurera G, & partant F ne ſera pas l'vnité, autrement il meſureroit G, veu que l'vnité meſure tout nombre. Et d'autant que par la 3. prop. de ce liure F & H ſont nombres premiers, & que F n'eſt pas l'vnité: iceluy F ne meſurera pas H: Mais nous auons demonſtré que comme A eſt à C, ainſi F eſt à H. Donc comme F ne meſure H, auſſi A ne meſurera C. Par meſme diſcours on prouuera que B ne meſurera D: ny C, ne meſurera E. que ſi on prend quatre nombres les plus petits en la raiſon de A à B, on demonſtrera en la meſme maniere que A ne meſurera le quatrieſme D, ny B vn quatrieſme E, & ainſi des autres. Parquoy s'il y a tant de nombres &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 5. PROP. VII.

S'il y a tant de nombres que l'on voudra continuellement proportionnaux, & que le premier meſure le dernier, il meſurera auſſi le ſecond.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D: & que le premier A meſure le dernier D. Ie dis qu'il meſurera auſſi le ſecond B.

A 3. B 9. C 12. D 24.

Car par la precedente, ſi A ne meſuroit B, auſſi pas vn autre ne meſureroit pas vn autre, & par conſequent A ne meſureroit pas D, contre l'hypotheſe. A meſurera donc B. Parquoy s'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer,

THEOR. 6. PROP. VIII.

Si entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, il en tombera autant entre deux autres, eſtans en la meſme raiſon.

Soient les nõbres A & B, entre leſquels tombent C & D continuellement proportionnaux: & qu'il y ait telle raiſon de E à F, que de A à B. Ie dis qu'entre E & F ſe trouueront autant de nombres moyens continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

A 3. C 9. D 27. B 81.
G 1. H 3. I 9. K 27.
E 2. L 6. M 18. F 54.

Car ayant trouué par la 2. pr. 8. les quatre nombres G, H, I, K, continuellement proportionnaux, & les plus petits en la raiſon de A, C, D, B; en raiſon egale, comme A ſera à B, ou E à F (car c'eſt la meſme raiſon) ainſi G à K par la 14. pr. 7. Mais G & K ſont premiers entr'eux par la 3. pr. 8. & les plus petits nombres de leur raiſon par la 23. prop. 7. & par la 21. prop. 7. ils meſureront egalement E & F. Donc autant de fois que G & K meſureront E & F, qu'autant de fois H & I meſurent d'autres nombres L & M; tellement que les nombres G, H, I, K, meſurent egalement les nombres E, L, M, F, par la 9 com. ſent. G, H, I, K, multiplians le nombre par lequel ils meſurent E, L, M, I, produiſent iceux E, L, M, F, leſquels ſeront entr'eux cõme G, H, I, K; ainſi que nous auons de-

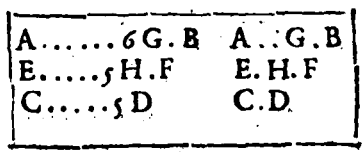
monſtré à la 18.p.7. Mais G, H, I, K, ſont continuellement proportionnaux : donc auſſi E, L, M, F, ſeront continuellement prop. & partant puis que la multitude E, L, M, F, eſt eſgale à la multitude A, C, D, B, il tombera autant de moyens proportionnaux entre E & F, qu'entre A & B. Parquoy ſi entre deux nombres tombent quelques nombres moyens proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

De ceſte demonſtration appert non ſeulement, qu'il tombe autant de moyens prop. entre E & F, qu'entre A & B, mais auſſi que la proportion des nombres E, L, M, F, eſt la meſme que des nombres A, C, D, B. Car il a eſté demonſtré que la proportion de E, L, M, F, eſt la meſme que celle des nombres G, H, I, K: Mais iceux ſont par la conſtruction en la meſme proportion que A, C, D, B: donc auſſi E, L, M, F, ſont en meſme proportion que A, C, D, B.

Il appert auſſi de ce Theoreme, qu'entre nombres de raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, ne peut tomber vn nombre moyen proportionnel. Car puis que la raiſon double, és moindres nombres, eſt trouuée entre le binaire & l'vnité; mais la ſuperparticuliere, entre les nombres differens ſeulement de l'vnité; & la ſuperbipartiente, entre les nombres, deſquels la difference eſt le binaire: ſi entre deux nombres de raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, tombe vn moyen prop. il en tombera pareillement vn (par ce Theor.) entre le binaire & l'vnité, ou entre les nombres differens de la ſeule vnité, ou du binaire; c'eſt à ſçauoir entre les plus petits nombres qui ont la meſme raiſon que ceux là; ce qui eſt impoſſible. Car il eſt tout euident qu'entre le binaire &

l'vnité, ny entre deux nombres differens ſeulement de l'vnité, ne peut tomber aucun nombre moyen prop. Et quant aux nombres differens ſeulement du binaire, tombe ſeulement vn nombre, qui differe à l'vn & l'autre de l'vnité; lequel nous demõſtrerons ne pouuoir eſtre milieu prop. entre iceux. Soyent les nombres AB & CD, differens du binaire, entre leſquels tõbe le nombre EF moindre que AB de l'vnité, mais plus grand que CD, auſſi de l'vnité.

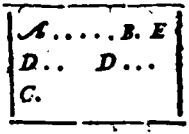


Ie dis que EF n'eſt moyen prop. entre AB, CD. Car ſi on dit que comme AB à EF, ainſi EF à CD: eſtant oſté de AB, le nombre AG eſgal à EF, afin qu'il reſte l'vnité GB: & de EF, le nombre EH eſgal à CD, afin qu'il reſte auſſi l'vnité HF: pareillement comme AB ſera à EF, ainſi le retranché AG ſera au retranché EH. Donc auſſi le reſte GB ſera au reſte HF: c'eſt à dire l'vnité à l'vnité, comme le tout AB au tout EF, vn plus grand à vn moindre: Ce qui eſt abſurde: donc EF n'eſt pas moyen proport. entre AB & CD.

Parquoy entre les nombres de raiſon triple ne peut tomber vn nombre moyen prop. Autrement il en tomberoit auſſi vn entre 3 & 1, les plus petits nombres de la raiſon triple, qui different entr'eux du binaire: Ce qui eſt impoſſible, comme nous venons de monſtrer.

Par meſme raiſon, ne peut auſſi tomber vn moyen prop. entre deux nombres de quintuple raiſon. Car s'il y en tomboit vn, il en tomberoit auſſi vn (par ce Theor.) entre 5. & 1, les plus petits nombres de la raiſon quintuple: ce qui ne ſe peut faire. Car s'il eſt poſſible qu'entre le quinaire

AB & l'vnité C, tombe vn moyen pr. D binaire, ou ternaire; tellement que AB soit à D, comme D à C: en changeant, C sera à D comme D à AB. Et pource que l'vnité C mesure D, aussi D mesurera AB. Mais le binaire, ou ternaire D mesurera pareillemẽt le senaire AE: donc D mesurera le tout AE, & le retranché AB: & partant par la 11. com. sent. aussi D mesurera le reste BE vnité. Ce qui est absurde. La mesme absurdité aduiendra tousiours, si on dit qu'vn nombre quartenaire soit moyen prop. entre iceluy quinaire AB, & l'vnité C. Il ne tombera donc point de milieu prop. entre 5 & 1. & par consequent entre quelconques nombres de raison quintuple.



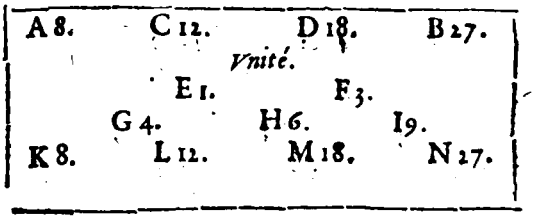
THEOR. 7. PROP IX.

Si deux nombres sont premiers entr'eux, autant de nombres continuellement proportionnaux qui tomberont entre iceux, autant en tombera-il entre chacun d'iceux, & l'vnité.

Soient deux nombres premiers entr'eux A & B, entre lesquels tombent quelques nombres continuellement proportionnaux C & D. Ie dis qu'entre chacun d'iceux A, B, & l'vnité, il tombera autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre A & B.

Car ayant posé l'vnité, soient pris E & F. les plus petits nõbres qui soient en la raison de A à C, par la 35. p. 7. puis par la 2. p. 8. soient trouuez les trois plus petits en la mesme raison G, H, I: puis les quatre

K, L, M, N, & ainſi conſequemment iuſques à ce que la multitude des pris ſoit eſgale à la multitude



A.C,D.B. D'autant que les extrémes A, B, ſont premiers entr'eux, par la 1. pr. 8. A, C, D, B, ſeront les plus petits en la raiſon de E à F : Mais leurs eſgaux en multitude K, L, M, N, ſont auſſi les plus petits en la meſme raiſon par la conſtruction. Donc K.L,M.N, ſont egaux à iceux A, C, D, B, chacun au ſien comme K à A, & N à B. Et pource que (comme il appert par la demonſtration de la 2. prop. 8.) E multipliant ſoy-meſme a produict G; & multipliant G a faict K, par la 7. com.ſent. E meſurera G par E; & G iceluy k par le meſme E: mais par la 5. com. ſent. l'vnité meſure iceluy E par E. Donc l'vnité meſurera egalement E; & E iceluy G; & G iceluy K: & partant l'vnité ſera meſme partie de E, que E de G, & G de K. Donc par la 20.d.7. l'vnité & les nombres E, G, K, ſont continuellement proportionnaux. Par meſme diſcours l'vnité & les trois nõbres F, I, N, ſeront auſſi prouuez cõtinuellement proportionnaux. Et puis que tãt la multitude E, G, K, que F, I, N, auec l'vnité eſt egale à la multitude K, L, M, N, ou A, C, D, B, il s'enſuiura qu'entre l'vnité & le nõbre K ou A, qui luy eſt egal, & auſſi entre l'vnité &

le nombre N ou B, tomberont autant de nombres continuellement proportionnaux, qu'entre les nombres A & B. Parquoy si deux nombres sont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. X.

Autant de nombres qui tomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité & chacun de deux nombres proposez, autant en tombera-il entre iceux deux nombres.

Soient deux nombres proposez A & B, & qui entre l'vnité C, & chacun d'iceux, tombent quelques nombres continuellement proportionnaux, comme D & E, entre C & A: Item F & G, entre C & B. Ie dis qu'il en tombera aussi deux continuellement proportionnaux entre A & B.

A 8. I 12. K 18. B 27.
E 4 H 6. G 9.
D 2. F 3.
C 1.

Car si on vient à multiplier, comme en la 2. prop. 8. pour trouuer les trois nombres H, I, K, c'est à sçauoir que H soit le produict de D multiplié par F; I le produict de D, par H: & K, le produict de F par H. Puis que comme C à D, ainsi D à E, & E à A; & que par la 5. com. sent. C vnité mesure D, par les vnitez qui sont en D; aussi D mesurera E, par les vnitez qui sont en D; & E mesurera A, par les mesmes vnitez de D; ainsi il est

euident que D multiplié par ſoy-meſme produict E; & E multiplié par D, a produict A. Par meſme diſcours ſe prouuera que F multiplié par ſoy meſme a produict G, & que G par F a produict B.

Maintenant, puis que D multiplié par ſoy-meſme, & par F a produict E & H, par la 17. prop. 7. comme D à F, ainſi E à H. Pareillement F multiplié par D, & par ſoy-meſme, a produict H & G; auſſi H ſera à G comme D à F: parquoy les trois nombres E, H, G, ſeront continuellement proportionnaux. Dauantage, D multipliant E & H, produict A & I; & partant comme E ſera à H, ainſi A ſera à I, par la 17. p. 7. & puis que D & F multipliant H, produiſent I & K: I ſera à K, comme D à F. par la 18. pr. 7. Par meſme diſcours K ſera à B, comme H à G, eſtans les produits de H & G multipliez par F. Parquoy A, I, K, B, ſont continuellement proportionnaux: & partant les deux nombres I & K ſont tombez en continuelle proportion entre A & B, c'eſt à ſçauoir autant qu'il y en a entre chacun d'iceux A & B, & l'vnité C. Parquoy autant de nombres quitomberont continuellement proportionnaux entre l'vnité, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 9. PROP. XI.

Entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel; & le quarré eſt au quarré en raiſon doublée du coſté au coſté.

Soient deux nombres quarrez A & B, deſquels les coſtez ſoient C & D. Ie dis qu'entre iceux quarrez A & B, tombera vn moyen proportionnel: &

que le quarré A eſt au quarré B en la raiſon doublee du coſté C au coſté D.

Car que le nõbre C multiplié par D, produiſe E: Et puis que C eſt le coſté de A: iceluy C multiplié par ſoy-meſme produit A; & par D faict E: donc comme C à D, ainſi A à E par la 17. pr. 7. Derechef, puis que D multipliant C produit E, & multipliant ſoy-meſme fait le quarré B, par la 17. prop. 7. comme C à D, ainſi E à B. Partant E eſt moyen proportiõnel entre A & B.

A 4.	E 6.	B 9.
C 2.	D 3.	

Pour la ſeconde partie: puis que A, E, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 3e. en raiſon doublee de A 1. à E 2e. par la 10. deff 5. qui eſt la meſme raiſon que de C à D, ainſi qu'il a eſté domonſtré cy-deſſus. Parquoy entre deux nombres quarrez tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. XII.

Entre deux nombres cubes tombent deux moyens proportionnaux: & le cube eſt au cube en raiſon triplee du coſté au coſté.

Soient deux nombres cubes A & B, deſquels les coſtez ſoient C & D. Ie dis que entre iceux cubes A & B, tomberont deux moyens proportionnaux: & que la raiſon du cube A au cube B, eſt la raiſon triplee du coſté C au coſté D.

A 27.	H 36.	I 48.	B 64.
E 9.		G 12.	F 16.
C 3.		D 4.	

Qu'il ne ſoit ainſi. que C ſe multipliant ſoy meſme produiſe E: & D par ſoy produiſe F: mais G & D l'vn par l'autre produiſe G: & iceluy G multiplié par l'vn & l'autre C & D, produiſe H & I. Or puis que C multipliant C & D a fait E & G; comme C ſera à D, ainſi E à G par la 17. p. 7. Item puis que D multipliant C & D a faict G & F: auſſi G ſera à F comme C à D: Partant E, G, F, ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D. Derechef, pour ce que C multipliant E faict le cube A, & multipliant G a faict H, par la meſme prop. A ſera à H, comme E à G, c'eſt à dire, comme C à D Item puis que D multipliant G a faict I, & multipliant F eſt produit le cube B: par la 17. p. 7. I ſera à B, comme G à F, c'eſt à dire comme C à D. Mais par la 18 p. 7. H eſt auſſi à I, comme C à D, attendu que C, D, multiplians G, ont faict H & I: donc A, H, I, B ſeront continuellement proportionnaux ſelon la raiſon de C à D. Partant H & I, ſeront deux moyens proportionnaux entre les nombres cubes A & B.

Quant à la ſeconde partie, elle eſt manifeſte, car d'autant que A, H, I, B ſont continuellement proportionnaux, A 1. eſt à B 4e en raiſon triplee de A 1. à H 2e par la 10. def. 5. Mais comme A eſt à H, ainſi C eſt à D. Donc le cube A eſt au cube B en raiſon triplee du coſté C au coſté D. Parquoy entre deux nombres cubes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XIII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux,

iceux eſtans multipliez chacun par ſoy, leurs produicts ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & ſi chacun multiplie encores ſon produict, les derniers produicts ſeront auſſi continuellement proportionnaux : & cela aduiendra touſiours enuiron les extremes.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, leſquels multipliez chacun par ſoy meſme, produiſent D, E, F, & que les meſmes A, B, C, multiplians chacun ſon produict facent G, H, I, & ainſi continuellement. Ie dis que D, E,

	A 2.	B 4.	C 8.		
D 4.	N 8.	E 16.	O 32.	F 64.	
G 8.	P 16.	Q 32.	H 64.	R 128.	S 256.	I 512

F, & G, H, I, ſont continuellement proportionnaux.

Qu'il ne ſoit ainſi, que N ſoit le produict de A multiplié par B : & O celuy de B par C. Pareillement que A multipliant N, E face P & G : mais B multipliant O, F produiſe R, S. Donc par la 17. p. 7. A multipliant ſoy-meſme & B, les produicts D & N ſeront en la meſme raiſon de A à B : & par meſme diſcours B multipliant A & ſoy-meſme, les produicts N & E ſeront auſſi en la meſme raiſon de A

à B. & ainſi des autres : Partant D, N, E, O, F, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A à B : par ainſi D, N, E ; & E, O, F, ſont continuellement proportionnaux en vne meſme raiſon : & partant en raiſon eſgale, comme D ſera à E, ainſi E à F : parquoy D, E, F, ſeront continuellement proportionnaux.

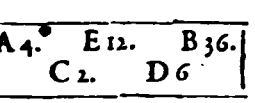
Pareillement, d'autant que A multipliant D, N, E a faict G, P, Q ; par ce que nous auons demonſtré à la 18. prop. 7 G, P, Q ſeront entr'eux, comme les proportionnaux D, N, E : c'eſt à dire comme A à B. Item pour ce que A & B multiplians E ont produit Q & H, auſſi par la 18. prop. 7. comme A ſera à B, ainſi Q à H. Donc G, P, Q, H, ſont proportionnaux en la raiſon de A à B. Par meſme diſcours H, R, S, I, ſeront prouuez proportionnaux en la meſme raiſon de A à B : & partant en raiſon eſgale, comme G ſera à H, ainſi H à I : parquoy G, H, I ſeront continuellement proportionnaux. S'il y a donc tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

Si vn nombre quarré meſure vn nombre quarré ; auſſi le coſté meſurera le coſté : que ſi le coſté meſure le coſté, auſſi le quarré meſurera le quarré.

Soit le nombre quarré A qui meſure le nombre quarré B : & d'iceux quarrez les coſtez ſoient C & D. Ie dis en premier lieu que le coſté C meſurera auſſi le coſté D.

Car ayant multiplié C par D, il eſt euident par la demonſtration de la 11. prop. 8. que le produict E eſt moyen proport. entre A & B, en la raiſon de C à D : mais de ces trois nombres A, E, B, le premier A meſure le dernier B : donc par la 7. prop. 8. il meſurera auſſi le ſecond E. Parquoy puis que comme A à E, ainſi C à D : auſſi le coſté C meſurera le coſté D.



Ie dis en ſecond lieu, que ſi le coſté C meſure le coſté D, auſſi le quarré A meſurera le quarré B. Car comme deſſus A, E, & B ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D : Et puiſque C meſure D, auſſi A meſurera E ; & E meſurera B, & par conſequent A meſurera auſſi B, car qui meſure le meſureur, meſure auſſi le meſuré, par la 11. com. ſent. Parquoy ſi vn nombre quarré meſure vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si vn nombre cube meſure vn nombre cube : auſſi le coſté meſurera le coſté : & ſi le coſté meſure le coſté ; auſſi le cube meſurera le cube.

Soit vn nombre cube A, qui meſure vn autre nombre cube B, & d'iceux cubes les coſtez ſoient C & D. Ie dis premierement que le coſté C meſurera auſſi le coſté D.

Car que chaque coſté C, D multipliant ſoy-meſme face E, F, mais ſe multipliant l'vn l'autre facent

G, & multipliant derechef G, produiſent H, I. Il eſt éuident par la demonſtr. de la 12. p. 8. que tant E, G, F, que A, H, I, B,

A 8. H 24. I 72. B 216.
E 4. G 12. F 36.
C 2. D 6.

ſont continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D. Et puis que par l'hypotheſe A, 1. meſure B dernier, il meſurera auſſi H deuxieſme par la 7. prop. 8. Mais A eſtant à H, comme C à D, auſſi le coſté C meſurera le coſté D.

Secondement, que le coſté C meſure le coſté D: Ie dis que le cube A meſurera le cube B. Car comme il a eſté dit cy-deſſus, A, H; I, B, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de C à D: Parquoy le coſté C meſurant le coſté D, auſſi le cube A meſurera ſon prochain moyen proport. H, lequel meſurera l'autre moyen proport. I, & iceluy l'autre cube B; & par conſequent le cube A meſurera l'autre cube B par la 11. com. ſent. Si donc vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si vn nombre quarré ne meſure vn nombre quarré, auſſi le coſté ne meſurera le coſté: que ſi le coſté ne meſure le coſté, auſſi le quarré ne meſurera le quarré.

Soient les nombres quarrez A & B, deſquels les coſtez

costez sont C & D : mais que le quarré A ne mesure le quarré B : Ie dis premierement que le costé C ne mesurera pas le costé D.

Car par la 14. prop. de ce liure, si ledit costé C mesuroit le costé D, aussi le quarré A mesureroit le quarré B, contre l'hypothese. Secondement, que le costé C ne mesure pas le costé D : Ie dis que le quarré A ne mesurera pas aussi le quarré B. Cecy est aussi manifeste, car si le quarré A mesuroit le quarré B, aussi le costé C mesureroit le costé D par la susdite 14. prop. 8. contre l'hypothese. Si donc vn nombre quarré, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A 16.	B 81.
C 4.	D 9.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si vn nombre cube ne mesure vn nombre cube, aussi le costé ne mesurera le costé : que si le costé ne mesure le costé, aussi le cube ne mesurera le cube.

Soient les nombres cubes A & B, dont les costez sont C & D : & que A ne mesure B : Ie dis que le costé C ne mesure pas aussi le costé D : & dauantage que si le costé C ne mesure pas le costé D, aussi le cube A ne mesurera pas le cube B.

Ceste demonstration se fait par l'impossible de la 15. pr. 8. Car par icelle, si le costé mesuroit le costé, aussi le cube mesureroit le cube, ce qui est contre l'hypothese. Et pour le second : Si le cube mesuroit

A 8.	B 27.
C 2.	D 3.

le cube, auſſi le coſté meſureroit le coſté, par *la ſuſdite* 15.p.8.ce qui eſt auſſi contre l'hypotheſe. Parquoy ſi vn nombre cube ne meſure vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Entre deux nombres plans ſemblables, il y a vn moyen proportionnel : & le plan eſt au plan en raiſon doublée des coſtez de ſemblable raiſon.

Soient deux nombres plans ſemblables A & B, & leurs coſtez ſoient C, D, & E, F. Ie dis qu'entre iceux plans A & B ſe trouuera vn moyen proportionnel ; & que A eſt à B en raiſon doublee de C à E, ou de D à F, coſtez de meſme raiſon.

A 12.	G 18.	B 27.
C 6.	D 2.	E 9. F 3.

Car puis que les plans A & B ſont ſemblables, par la 21. def. 7 C ſera à D comme E à F ; & ſi A ſera le produict de C par D : Item B le produict de E par F, par la 17. def 7. Maintenant, que D multipliant E produiſe G : par la 17. p. 7. puis que D multipliant C & E produict A & G ; A ſera à G, comme C à E, ou D à F : (car puis que comme C à D, ainſi E à F, en permutant, comme C à E, ainſi D à F.) Item E multipliant D & F, produict G & B : partant iceux G & B ſeront l'vn à l'autre comme D à F : ainſi A, G, B, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de C à E ; & partant G ſera vn moyen proportionnel entre A & B.

Quant à la seconde partie, elle est euidente: car puis que A, G, B, sont continuellement proportionnaux en la raison de C à E: par la 10. def. 5. A est à B en raison doublée de A à G, qui est la mesme raison que de C à E, ou de D à F, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Entre deux nombres solides semblables, tombent deux moyens proportionnaux; & le solide est au solide en raison triplee des costez de semblable raison.

Soient deux nombres solides semblables A & B; & de A les costez soient C, D, E, mais ceux de B soient F, G, H.

A 30.	M 60.	N 120.	B 240.
	I 6.	L 12.	K 24.
C 2.	D 3.	E 5.	F 4. G 6. H 10.

Ie dis qu'entre A & B, on trouuera deux moyens proportionnaux, & que A est à B en raison triplee de C à F, ou de D à G, ou E à H, costez de mesme raison.

Car I soit le produit de C multiplié par D: K le produit de F par G: L le produit de F par D: & finalement M & N, soient les produits de L par E & H.

Maintenant, puis que par la 21. def. 7. les costez C, D, E, sont proportionnaux aux costez F, G, H: en permutant, ils seront aussi proportion. c'est à dire que comme C sera à F, ainsi D sera à G, & E à H.

Et puis que D multipliant C & F, a produict I & L, par la 17.p.7.I sera à L comme C à F, c'est a dire comme D à G, ou E à H. Semblablement F multipliant D & G, a produit I & K: parquoy I sera à K comme D à G: & partant I, L, K, sont continuellement proportionnaux en la raison de D à G, ou C à F, ou E à H. Pareillement puis que le solide A, est le produict de la multiplication des trois nombres C, D, E: & I, le produict de C par D: aussi A sera le produict de I par E: Item le solide B estant produict de la multiplication des trois nombres F, G, H: & K le produict de F en G: aussi B sera le produict de K par H. Donc puis que par la 17.p.7.E multipliant I & L, produict A & M en la raison de I à L: & semblablement que L multipliant E & H, produict M & N en la raison de E à H, qui est la mesme que de I à L: aussi H multipliãt L & K, les produicts N & B seront en la raison de L à K, qui est la mesme que de I à L. Et partant les quatre nombres, A, M, N, B sont continuellement proportionnaux en la raison de I à L, c'est à dire de C à F: & M, N seront deux moyens proportionnaux entre A & B,

Pour la seconde partie, elle est euidente: car puis que les 4 nombres A, M, N, B, ont esté prouuez continuellement proportionnaux en la raison de C à F, par la 10. def. 5. A est à B, en raison triplee de A à M: Mais A est à M, comme C à F, ou D à G, ou E à H: donc A sera à B en raison triplee de C à F, ou D à G, ou E à H, costez de semblable raison. Parquoy entre deux nombres solides semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR 18. PROP. XX.

Si entre deux nombres, tombe vn moyen proportionnel: iceux ſeront nombres plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B, entre leſquels tombe vn moyen proportionnel C. Ie dis que A & B ſont nombres plans ſemblables.

Car ayant pris D & E, les plus petits termes en la raiſon de A, C, B: par la 21. p. 7. iceux D & E meſureront egalement A & C: qu'ils les meſurent par F: ils meſureront egalement C & B, qui ſont en la meſme raiſon: qu'ils les meſurent par G. Donc F multipliant D & E, ſera produict A & C par la 9. com. ſent. Item G multipliant les meſmes D & E, ſeront produicts C & B. Veu donc que E multipliant F & G a faict C & B: comme C ſera à B, ainſi F à G par la 17. prop. 7. Mais comme C eſt à B, ainſi eſtoit D à E. Donc comme D ſera à E, ainſi F ſera à G; & en permutant comme D ſera à F, ainſi E à G. Et puis que F multipliant D a faict A, iceluy A ſera vn plan duquel les coſtez ſont D, F. Item pource que G multipliant E a faict B: B ſera le plan duquel E & G ſont les coſtez. Mais ces coſtez ont eſté demonſtrez proportionnaux, c'eſt à dire D eſtre à F, comme E à G. Donc par la 21. def. 7. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi entre deux nombres tombe vn moyen proportionnel, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

A 12. C 18. B 27.
D 2. E 3. F 6. G 9.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Si entre deux nombres, tombent deux moyens continuellement proportionnaux; iceux seront nombres solides semblables.

Soient deux nombres A & B, entre lesquels tombent deux moyens continuellement proportionnaux C & D. Ie dis que A & B sont nombres solides semblables.

A 16. C 24. D 36. B 54.
E 4. F 6. G 9.
H 2. I 2. M 4. K 3. L 3. N 6.

Qu'il ne soit ainsi. Soiēt trouuez par la 2. pr. 8. les trois nombres E, F, G, les plus petits en la raison de A, C, D, B. Veu donc qu'entre E & G tombe vn moyen proportionnel F, par la prec. pr. E & G seront plans semblables: Soient leurs costez H, I; & K, L, lesquels seront proportionnaux par la 21. def. 7. & puisque E, F, G sont les plus petits en la raison de A, C, D, ils les mesureront egalement par la 21. p. 7. soit selon le nōbre M: c'est à dire que E, F, G, estans multipliez par M produisent A, C, D. Item par le mesme discours E, F, G, mesureront egalemēt les trois nombres C, D, B, chacun le sien: soit selon le nombre N, c'est à dire, que N multipliant E, F, G, produise C, D, B: Il est donc euident, que A & B sont nombres solides, desquels les costez sont H, I, M, & K, L, N. Mais d'autant que M & N multiplians F, produisent C & D, par la 18 p. 7. M sera à N en la raison de C à D, & C est à D en mesme raison que E à F par la 17. p. 7. pource que N multipliant E &

Fa produit iceux C & D : mais auſſi E eſt à F en la meſme raiſon que H a K, ou I à L. Donc auſſi H ſera à K, ou I à L, comme M à N ; & en permutant, H ſera à I, comme K à L ; & I à M comme L à N : & partant les coſtez H, I, M ſont proportionnaux auxcoſtez K, L, N ; & par la 21. d. 7. A & B ſeront nombres ſolides ſemblables : Parquoy ſi entre deux nombres tombent, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, & que le premier ſoit quarré, le troiſieſme ſera auſſi quarré.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, deſquels le premier A ſoit quarré : Ie dis que le troiſieſme C eſt auſſi quarré.

Car puiſque entre A & C tombe vn moyen proportionnel, par la 20. prop. de ce liure, ils ſeront plans ſemblables ; & partant l'vn d'iceux eſtant quarré, auſſi ſera l'autre, Si donc trois nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A 4. B 6. C 9.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si quatre nombres ſont continuellemẽt

proportionnaux, & que le premier ſoit cube, auſsi le quart ſera cube.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux, A, B, C, & D, le premier deſquels A ſoit cube : Ie dis que le quatrieſme D eſt auſsi cube.

Car puiſque entre A & D tombent deux moyens proportionnaux B & C, par la 21. pr. de ce liure, iceux A & D ſeront ſolides ſemblables : mais l'vn eſt cube, & partant auſsi ſera l'autre. Parquoy ſi quatre nõbres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 8. B 12. C 18. D 27.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré, & que l'vn d'iceux ſoit quarré, auſsi ſera l'autre.

Soient deux nombres A & B, leſquels ſoient entr'eux, comme le quarré C au quarré D, & ſoit A quarré. Ie dis que B eſt auſsi quarré.

Car puiſque A eſt à B comme C à D : & par la 11. p. 8. il tombe entre C & D, vn moyen proportionnel, ſçauoir

A 16. F 24. B 36.
C 4. E 6. D 9.

eſt E : il en tombera auſsi vn entre A & B par la 8. p. 8. & ſoit F. Veu donc que les trois nombres A, F, B. ſont continuellement proportionnaux, & le premier A eſt quarré : auſsi par la 22. p. 8. le troiſieſme B ſera quarré. Parquoy ſi quatre nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il appert des choſes cy-deſſus dites, que la raiſon de quelque nombre quarré que ce ſoit à quelconque nombre non quarré, ne peut eſtre exhibee en deux nombres quarrez; Car ſi elle y eſtoit exhibée, par la 24. prop 8. les deux premiers nombres ayans la meſme raiſon que les quarrez de la raiſon exhibée ſeroient auſsi quarrez, puis que l'vn eſt poſé quarré. Ce qui eſt abſurde : car l'vn eſt poſé non quarré. D'où vient que les nombres ayant la raiſon double, ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré : Car tous ces nombres cy 4. 8. 16. 32, &c. ſeroient quarrez : d'autant que 4 eſtant quarré, par la 24. prop. 8. auſsi 8 ſeroit quarré : donc auſsi 16 & 32. &c. Ce qui eſt abſurde. Car entre 4 & 8; & entre 8 & 16; & entre 16 & 32, &c. tomberoit vn moyen proportionnel, s'ils eſtoient quarrez, par la 11. pr. 8. & nous auons demonſtré au Scholie de la 8. prop. 8. qu'il ne peut tomber de moyen proportionnel entre quelconques nombres de la raiſon double.

Semblablement les nombres en raiſon quintuple, ne ſont auſsi comme nombre quarré à nombre quarré. Car s'ils y eſtoient, par la 11. prop. 8. il tomberoit entre iceux vn milieu proportionnel : donc auſsi entre 5 & 1, les plus petits nombres de la raiſon quintuple par la 8. prop. 8. Ce qui eſt impoſsible, comme nous auons demonſtré au Scholie de la meſme propoſition.

THEOR. 23. PROP. XXV.

Si deux nombres ſont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube, & que l'vn d'iceux ſoit cube, auſſi ſera l'autre.

Que A ſoit à B, comme le cube C au cube D, & que A ſoit cube: Ie dis que B eſt auſſi cube.

Car puiſque A eſt à B comme C à D, il tombera deux moyens proportionnaux entre les deux cubes C & D par la 12. pr. de ce liure, leſquels ſoiēt E, F: Mais par la 8. prop. 8. il en tombera auſſi deux entre A & B, & ſoient iceux G & H. Veu donc que les quatre nombres A, G, H, B ſont continuellement proportionnaux, & que le premier A eſt cube, auſſi ſera le quatrieſme B par la 23. prop. 8. Parquoy ſi deux nombres ſont l'vn à l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 8.	G 12.	H 18.	B 27.
C 64.	E 96.	F 144.	D 216.

COROLLAIRE.

Il appert auſſi des choſes cy-deſſus, que la raiſon de quelque nombre cube que ce ſoit à quelconque nombre non cube, ne ſe peut exhiber par deux nombres cubes.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Les nombres plans semblables, sont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré.

Soient deux nombres plans semblables A & B. Ie dis que A sera à B comme nombre quarré à nombre quarré.

Car par la 18. pr. 8. il tombera entre A & B vn moyen prop. & soit C: si donc on prend les trois nombres D, E, F, les plus petits en la raison continue de A, C, B, les extremes D & F seront quarrez par le corol. de la 2. prop. 8. Parquoy puis qu'en raison egale A est à B, comme D à E, il est manifeste que A est à B comme nombre quarré à nombre quarré, c'est à sçauoir comme le nombre quarré D au nombre quarré F. Parquoy les nombres plans semblables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A 20. C 30. B 45.
D 4. E 6. F 9.

SCHOLIE.

Clauius a demonstré apres Commandin la conuerse de ceste prop. c'est à sçauoir.

Que les nombres qui sont l'vn à l'autre, comme nombre quarré à nombre quarré, sont plans semblables.

Car les nombres A & B estans entr'eux, comme les quarrez D & F, par la 11. prop. 8. Il tombera vn moyen prop. entre iceux quarrez: & aussi vn entre A & B,

Par la 8. p. 8. & partant A & B sont plans semblables.

Et par cecy est manifesté que les nombres plans qui ne sont semblables, ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

THEOR. 25. PROP. XXVII.

Les nombres solides semblables, sont l'vn à l'autre comme nombre cube à nombre cube.

Soient deux nombres solides semblables A, & B. Ie dis que A sera à B, comme nombre cube à nombre cube.

Car par la 16. prop. 8. entre A & B tomberont deux moyens proportionnaux, & soient iceux C & D. que si on prend les plus petits termes de la raison de A à C, & qu'en la raison d'iceux on trouue, par la 2. prop. 8. les quatre nombres E, F, G, H, en continuelle proportion, les extremes E & H seront cubes par le corol. de la 2. pr. 8. & en raison esgale comme E à H, ainsi A à B. Parquoy les nombres solides semblables sont l'vn à l'autre, &c. Ce qui estoit à demonstrer.

A 16.	C 24.	D 36.	B 54.
E 8.	F 12.	G 18.	H 27.

SCHOLIE.

Clauius demonstre aussi apres Commandin la conuerse de ceste proposition, sçauoir est:

que les nombres qui sont l'vn à l'autre comme

nombre cube à nombre cube, ſont ſolides ſemblables.

Car les nombres A & B, eſtans entr'eux, comme les cubes E & H, par la 12. p. 8. il tombera deux moyens prop. entre les nombres cubes E & H; il en tombera auſſi deux entre A & B par la 8. prop. 8. & partant par la 21. prop. 8. A & B ſont ſolides ſemblables.

Il eſt euident par toutes les choſes cy-deſſus dictes, qu'autuns nombres ayans raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente, ne ſont ſemblables plans, ou ſolides. Car s'ils eſtoient plans ſemblables, par la 18. pr. 8. vn moyen proportionnel tomberoit entr'eux, ce qui ne ſe peut faire, comme il a eſté demonſtré au Scholie de la 8. pr. 8. Ils ne ſeront pas auſſi ſolides ſemblables, puis qu'entre iceux ne peuuent tomber deux moyens prop. car autrement il en tomberoit auſſi deux entre les plus petits nombres des meſmes raiſons par la 8. prop. 8. Ce qui ne ſe peut faire, pource qu'iceux ſont ſeulement diſtans entr'eux de l'vnité ou du binaire, comme il a eſté dit au ſuſdict Scholie, entre leſquels il eſt certain que deux nombres moyens proport. ne peuuent tomber.

Semblablement deux nombres premiers, quels qu'ils ſoient, ne peuuent eſtre plans, ou ſolides ſemblables, pource qu'ils ne peuuent auoir les coſtez proportionnaux. Car quelque nombre plan que ce ſoit eſtant nombre premier, a ſeulement ſoy-meſme & l'vnité pour coſtez, encore improprement. Comme ces nombres plans 7 & 13, deſquels les coſtez ſont 7, 1; & 13, 1, puis qu'ils ſont produits de la multiplication d'iceux coſtez, leſquels appert n'eſtre proportionnaux. Et le nombre ſolide, qui eſt auſſi nombre premier, a ſeulement pour coſtez ſoy-meſme, & deux vnitez: & par conſequent il eſt manifeſte qu'ils ne peuuent eſtre proportionnaux.

Pareillement deux nombres premiers entr'eux, n'eſtans quarrez, ou cubes, ne peuuent eſtre plans, ou ſolides ſemblables: Car s'ils eſtoient tels, par la 18. ou 19. p. 8. tomberoit entre iceux, vn ou deux moyens prop. & puis que les extrémes ſont poſez premiers entr'eux; tous les trois, ou les quatre ſeroient premiers entr'eux, pour ce que aucun nombre ne ſera commune meſure d'iceux, les extrémes n'en ayans point: Parquoy il eſt euident par la 23. p. 7. qu'ils ſeront les plus petits en leur prop. Et partant par le corol. de la 2. p. 8. les deux extrémes ſeront quarrez, ou cubes. Ce qui eſt abſurde: car ils ont eſté poſez n'eſtre quarrez ny cubes.

De ces choſes s'enſuit que s'il y a deux nombres plans, ou ſolides ſemblables, deſquels le moindre ſoit premier, il meſurera le plus grand. Car autrement par la 31. p. 7. iceux deux nombres propoſez ſeroient premiers entr'eux: & partant (comme nous venons de prouuer) ils ne ſeroient plans ou ſolides ſemblables: Ce qui eſt abſurde: car ils ont eſté poſez tels.

De cecy eſt euident que deux nombres premiers entr'eux, deſquels le moindre eſt premier, ne peuuent eſtre plans, ou ſolides ſemblables. Car s'ils l'eſtoient, le moindre meſureroit le plus grand, comme appert cy deſſus. Veu donc qu'il ſe meſure auſſi ſoy-meſme, ils ne ſeroient premiers entr'eux, mais compoſez: Ce qui eſt contre l'hypotheſe.

Parquoy il eſt facile de trouuer deux nombres plans, ou ſolides non ſemblables. Car ſi on prend deux nombres ayans raiſon double, ou ſuperparticuliere, ou ſuperbipartiente: ou certainement deux nombres premiers, ou deux premiers entr'eux, deſquels l'vn ny l'autre ſoit quarré, ou cube: il eſt euident par ce que deſſus, qu'ils ſeront plans, ou ſolides diſſemblables.

Derechef, s'il y a deux nombres, deſquels l'vn ſoit quarré, & l'autre non quarré, comme 16 & 20: ils ne ſont

plans ſemblables. Car autrement par la 26. p. 8. ils ſeroient comme quarré à quarré: & 16 eſtant quarré, par la 24. p. 8. 20. ſeroit auſſi quarré, contre l'hypotheſe. Par meſme raiſon, ſi de deux nombres, l'vn eſt cube, & l'autre ne l'eſt pas; comme 27 & 40, ils ne ſont pas ſolides ſemblables: Car s'ils l'eſtoient, par la 27. p. 8. ils ſeroient comme cube à cube, & 27 eſtant cube, par la 25. p. 8. 40 ſeroit auſſi cube, contre l'hypotheſe.

Fin du huictieſme Element.

ELEMENT NEVFIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

Si deux nombres plans ſemblables ſe multiplient l'vn l'autre, le produict ſera quarré.

SOIENT deux nombres plans ſemblables A & B, leſquels ſe multiplians mutuellement, produiſent C. Ie dis que C eſt quarré. Car A ſe multipliant ſoy-meſme produict D quarré. Et puis que A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. p. 7. Mais A & B eſtans plans ſemblables, il tombera entr'eux vn moyen proportionnel par la 18. pr. 8. Il en tombera donc auſsi vn entre D & C, par la 8. p. 8. & ſoit E. Et puiſque des trois nombres continuellement proportionnaux

A 4.		B 9
D 16.	E 24.	C 36.

portionnaux D, E, C, le premier D eſt quarré par la conſtruction; le tiers C ſera auſſi quarré par la 22. pr. 8. Parquoy ſi deux nombres plans ſemblables, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre produiſent vn nombre quarré, iceux ſeront plans ſemblables.

Soient deux nombres A & B qui ſe multiplians l'vn l'autre, produiſent C quarré. Ie dis que A & B ſont plans ſemblables.

Car que A ſe multipliant ſoy-meſme produiſe D quarré. Veu donc que A multipliant A & B a produict D & C, comme A ſera à B, ainſi D à C par la 17. pr. 7. Et par la 11. p. 8. entre les quarrez D & C tombe vn moyen proportionnel: il en tombera donc auſſi vn entre A & B, par la 8. pr. 8. & partant par la 20. p. 8. A & B ſeront plans ſemblables. Parquoy ſi deux nombres ſe multiplians l'vn l'autre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A 4	B 9.
D 16.	C 36.

THEOR. 3. PROP. III.

Si vn nombre cube ſe multiplie ſoy-meſme, le produict ſera cube.

Soit le nombre cube A, lequel ſe multipliãt ſoy-meſme produiſe B. Ie dis que B eſt nombre cube.

Car ſoit C coſté du cube A: & de C multiplié en ſoy, ſoit produit D; il eſt manifeſte que C multipliant D, produict le cube A. Veu donc que C

multipliant soy mesme a fait D, par la 7. com. sent. C mesurera D par C. Mais par la 5. com. sent. l'vnité mesure aussi C par C. L'vnité sera donc mesme partie de C, que C de D; & partant cõme l'vnité est à C, ainsi C à D par la 20 d. 7. Derechef puisque C multipliant D a faict A, par la 7. com. sent. D mesurera A par C. Mais aussi C mesure D par C. Donc C est mesme partie de D, que D de A; & partant comme C à D, ainsi D à A: mais comme C à D, ainsi estoit l'vnité à C. Donc comme l'vnité à C, ainsi C à D, & D à A: ainsi entre *l'vnité & le* nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D. Derechef, pource que A mesure B par A; (car B a esté faict de A multiplié en soy) & que l'vnité mesure aussi A par A; l'vnité sera mesme partie de A, que A de B: partant comme l'vnité sera à A, ainsi A sera à B. Parquoy puis qu'entre *l'vnité &* le nombre A tombent deux moyens proportionnaux C & D; par la 8. p 8. il en tombera aussi deux entre A & B, & soient iceux E & F. Et veu que les 4. nombres A, E, F, B sont continuellement proportionnaux, & que A premier est cube, aussi B quatriesme sera cube par la 23. pr. 8. Parquoy si vn nombre cube, &c. Ce qui estoit à prouuer.

A 8.	
E 16.	D 4.
F 32.	C 2.
B 64	*vnité.*

THEOR. 4. PROP. IV.

Si vn nombre cube multiplie vn nombre cube, le produict sera cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant *le*

nombre cube B, produise C: Ie dis que C est aussi nombre cube.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy-mesme, il sera cube par la prop. precedente: & pource que A multipliant B & soy mesme, a produict C & D; il y aura telle raison de D à C, que de A à B. par la 17. p. 7. Et par la 12 p. 8. il tombera deux moyens proportionnaux entre A & B: il en tombera donc aussi deux entre D & C, par la 8. pr. 8. Et partant D estant cube, par la 23. pr. 8. C sera aussi cube. Si donc vn nombre cube, &c. Ce qui estoit à prouuer.

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

THEOR. 5. PROP V.

Si vn nombre cube multipliant quelque autre nombre, produict vn nombre cube, le multiplié sera aussi cube.

Soit le nombre cube A, lequel multipliant quelque nombre B, produise le nombre cube C. Ie dis que B multiplié est aussi nombre cube.

Car si on prend D, produict de A multiplié par soy-mesme, il sera cube par la 3. p. 9. & d'autant que A multipliant A & B a fait D & C, par la 17. p. 7. A sera à B comme D à C, & par la 8. p 8. entre A & B se trouuerõt deux moyens proportionnaux, comme entre les deux nombres cubes D & C. Et par la 23. p. 8. A estant cube, B multiplié sera aussi nombre cube. Parquoy, si vn nombre cube, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A 8.	B 27.
D 64.	C 216.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vn nombre ſe multipliant ſoy-meſme produict vn nombre cube ; iceluy nombre ſera auſſi cube.

Soit le nombre A, lequel multiplié par ſoy-meſme produiſe le nombre cube B. Ie dis que A eſt auſſi nombre cube.

Car ſi on prend C produict de A multiplié par B, il ſera cube par la definition du nombre cube ; & par la 5. p. 9. A ſera auſſi cube. Si donc vn nombre ſe multipliant ſoy-meſme, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 8. B 64. C 512.

THEOR. 7. PROP. VII.

Vn nombre compoſé eſtant multiplié par quelque autre nombre le produit ſera ſolide.

Soit le nombre compoſé A, lequel eſtant multiplié par quelque nombre B produiſe C. Ie dis que C eſt nombre ſolide.

Car puiſque A eſt compoſé, quelque nombre outre l'vnité le meſurera par la 13. d. 7. Que D meſure donc A par E. Ce qu'eſtant poſé, D multipliant iceluy E, produira A par la 9. com ſent. Et puiſque B multipliant A a produict C, iceluy C ſera procreé de la mutuelle multiplication des trois nombres D, E, B ;

A 6. B 5. C 30.
D 2. E 3.

partant par la 17. def. 7. il ſera nombre ſolide, duquel les coſtez ſont D, E, B. Parquoy vn nombre compoſé, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, le troiſieſme depuis l'vnité ſera quarré, & tous les autres qui en laiſſeront vn: Mais le quatrieſme ſera cube, & tous les ſuiuans qui en laiſſeront deux: & le ſeptieſme ſera cube & quarré enſemble, & tous les ſuiuans qui en laiſſeront cinq.

Soient tant de nombres qu'on vondra continuellement proportionnaux depuis l'vnité, A, B, C, D, E, F, G, H, I. Ie dis que le troiſieſme B ſera

vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.

quarré, enſemble tous les autres qui en laiſſeront vn de l'ordre, comme D, F & H: en apres, que le quatrieſme C eſt cube, & tous les autres nombres qui en intermettent ou laiſſent deux, comme F & I: Pareillement que le ſeptieſme nombre F eſt cube & quarré enſemble, comme auſſi tous les autres qui pourroient ſuiure en laiſſant touſiours cinq nombres.

Pour la premiere partie : puis que les nombres ſont continuellement proportionnaux, cõme l'vnité meſure A ſelon les vnitez qui ſont en A, par la 5.com.ſent.ainſi chacun meſurera ſon ſuiuant ſelon les vnitez de A: partant B troiſieſme, qui ſera en ce faiſant le produict de A multiplié par ſoy, ſera quarré: & par la 22.p.8. puis que B, C, D, ſont çontinuellement proportionnaux, & B eſt quarré, auſſi D ſera quarré. Par meſme diſcours en prenãt les trois continuellement proportionnaux D, E, F; veu que D eſt quarré, auſsi F ſera quarré; & ainſi de tous les autres nombres qui en laiſſent vn.

Pour la ſeconde partie : puis que A multiplié par ſoy produict B; & B par A produict C : Il eſt euident par les def. du 7. que C ſera cube, & par la 23. p.8. C, D, E, F, eſtans continuellement proportionnaux, F ſera auſſi cube: par meſme raiſon, eſtans prins les quatre continuellement proportionnaux F, G, H, I, puis que F eſt cube, auſsi I ſera cube; & ainſi de tous les autres nombres, en laiſſant deux, ſi d'auantage y en auoit.

Pour la troiſieſme partie. D'autant que par les deux precedentes parties F a eſté prouué quarré & cube; iceluy ſera cube & quarré enſemble: Et il en ſera ainſi de tous les autres. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 9. PROP. IX.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui ſuit

l'vnité ſoit quarré, auſſi tous les autres ſeront quarrez, & s'il eſt cube auſſi tous les autres ſeront cubes.

Soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux depuis l'vnité A, B, C, D, E, F. Ie dis premierement que ſi le premier A eſt quarré, que tous les autres ſeront auſſi quarrez.

vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	4096.

Car puis qu'iceux nombres A, B, C, D, E, F, ſont continuellement proportionnaux depuis l'vnité par la prec. pr. B troiſieſme depuis l'vnité ſera nõbre quarré, comme auſſi tous les autres qui en laiſſent vn, ſçauoir D & F. Mais pour ce que A, B, C, ſont continuellement prop. & que A eſt quarré par l'hypotheſe, par la 22. p. 8. C ſera auſſi quarré: & par la meſme raiſon prenant les continuellement proportionnaux C, D, E, le premier C eſtant quarré, auſſi le ſera le troiſieſme E: partant tous les nombres A, B, C, D, E, F ſont quarrez: Et ainſi de tous autres.

Ie dis en ſecond lieu, que ſi A eſt cube, auſſi tous les autres ſeront cubes: Car d'autant que A, B, C, D, E, F ſont continnellement proport. depuis l'vnité, C quatrieſme eſt cube, & tous les autres qui en laiſſent deux, ſçauoir F, par la precedente prop. Or que les autres nombres B, D, E, ſoient auſſi cubes, nous le prouuerons ainſi.

vnité.	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	8.	64.	512.	4096.	32768.	262144.

D'autant que par l'hypotheſe l'vnité eſt à A, comme A à B, l'vnité meſurera A, & iceluy A le nombre B egalement. Mais par la 5. com. ſent. l'vnité meſure A par le meſme A: donc A meſurera auſſi B par le meſme A: & par la 9. com. ſent. A multiplié en ſoy produira B, lequel A eſtant cube, B ſera auſſi cube par la 3. p. 9. Mais tous les autres nombres ſuiuans ſont en la raiſon de A à B, & partant par la 23. p. 8 ils ſeront tous cubes. Si donc depuis l'vnité il ya tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy qui ſuit l'vnité, ne ſoit nombre quarré: auſſi pas vn autre ne ſera quarré, ſinon le troiſieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent vn. Que ſi celuy qui ſuit l'vnité n'eſt nombre cube, auſſi pas vn autre ne ſera cube, ſinon le quatrieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent deux.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux A, B, C, D, E, F, & premierement que A qui ſuit l'vnité, ne ſoit nombre quarré. Ie dis que pas vn autre ne ſera

quarré ſinon le troiſieſme B, & tous les autres qui en l'ordre en laiſſent vn, ſçauoir D & F.

Car par la 8. prop. 9. B, D, F ſont quarrez: Et ſi quelqu'vn veut dire qu'il y en a auſſi d'autres,

Vnité,	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

comme C, il faudroit par la 22. p. 8. que A fuſt auſſi nombre quarré, (eſtans C, B, A, continuellement proportionnaux & C quarré) ce qui eſt contre l'hypotheſe. Par meſmes raiſons on demonſtrera qu'aucun autre ne peut eſtre quarré, ſinon les ſuſdits.

Maintenant, que A proche de l'vnité ne ſoit nombre cube: Ie dis qu'aucun autre ne ſera cube, ſinon C quatrieſme depuis l'vnité, & tous les autres qui en laiſſeront deux, comme F, &c.

Car par la 8. p. 9. C & F ſont cubes: Et ſi quelqu'vn veut dire que D ſoit auſſi cube: d'autant que D, C, B, A ſont continuellement proportionnaux, il faudroit par la 23. p. 8. que A fuſt pareillement cube; ce qui eſt contre l'hypotheſe: donc D n'eſt pas cube. Par meſmes raiſons on demonſtrera qu'aucun autre, outre les ſuſdits, ne peut eſtre cube. Si donc depuis l'vnité, il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 11. PROP. XI.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: le plus petit meſurera le

plus grand selon quelqu'vn de ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A, soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E, F. Ie dis que le plus petit nombre B mesurera le plus grand F par quelqu'vn des nombres C, D, E.

Car d'autant que A, B, C, D, E sont en mesme raison que B, C, D, E, F, en raison egale, l'vnité A sera à E, comme B est à F. Et par la 20. def. du 7. l'vnité mesurera E: & le nombre B le nombre F egalement. Mais par la 5. com. sent. l'vnité A mesure E par E: donc aussi B mesurera F par E. Le mesme peut-on dire des autres. Parquoy si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.

SCHOLIE.

Il appert par ce que dessus, que le plus grand nombre est autant esloigné du grand qui le mesure, que l'vnité est distante de ce nombre là, par lequel le moindre mesure le grand: & ce d'autant qu'il y doit auoir vne mesme raison du moindre nombre au plus grand, que de l'vnité à celuy là, par lequel le moindre mesure le grand, comme il appert icy.

Vnité	A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.

Ainsi B mesurera F par D; & C mesurera F par C, c'est à dire par soy-mesme, &c. Pour-

ce que tant entre B & F, qu'entre l'vnité & D se trouuent trois nombres: & tant entre C & F, qu'entre l'vnité & C sont interposez deux nombres.

Il appert encore que quelconque de ces nombres multiplié par soy-mesme, en produict vn autre, qui entre les proportionnaux est autant esloigné d'iceluy, comme il est distant de l'vnité. Mais si vn petit nombre en multiplie vn grand, celuy qui en prouiendra sera autant esloigné du grand que le moindre de l'vnité: Car si vn nombre qui en mesure vn autre, multiplie celuy par lequel il le mesure, sera produit celuy-là qui est mesuré, par la 9. com. sent. Ainsi C multipliant soy-mesme produict F, qui est autant esloigné de C, qu'iceluy C de l'vnité. Pareillement B multipliant D, fera le mesme F, pource que D mesure iceluy nombre F par B, &c.

THEOR. 12. PROP. XII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux: tous les nõbres premiers qui mesurent le dernier, mesureront aussi celuy qui est proche de l'vnité.

Soient depuis l'vnité A, tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, B, C, D, E. Ie dis qui tous les nombres premiers qui se trouueront mesurer le dernier E, mesureront aussi B, lequel suit l'vnité, c'est à dire que si quelque nombre premier que ce soit, comme F, mesure iceluy dernier nombre, E, il mesurera aussi B,

A.	B.	C.	D.	E.	F.
1.	3.	9.	27.	81.	3.

Car si ledict nombre premier F mesurant E dernier, ne mesure pas aussi B: B & F seront nombres premiers par la 31. p.7. Et d'autant que B multiplié par soy produict C: comme nous auons dit au Scholie de la prop. preced. C & F seront aussi premiers par la 27.p.7. Item B multipliant C produit D: D & F seront donc aussi premiers par la 26.p.7. Pareillement B multipliant D produict E: partant E & F seroient aussi nombres premiers, & par ainsi F ne mesureroit pas E: ce qui est contre l'hypothese: Donc F mesuroit aussi B. Parquoy si depuis l'vnité il y a tant de nombres, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que celuy d'apres l'vnité soit premier: Le plus grand ne sera mesuré par aucun autre nombre, sinon par ceux qui sont entre les proportionnaux.

Depuis l'vnité A soient tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux B, C, D, E. & que B qui suit l'vnité soit premier. Ie dis que le plus grand nõbre E ne sera mesuré par aucun autre que d'iceux B, C, D.

A 1.	B 3.	C 9.	D 27.	E 81.
	K --	I -	H --	G --

Autrement, s'il eſt poſſible, que quelque autre nombre, comme G meſure E: Or G ſera premier ou compoſé: s'il eſt premier, & meſurant E extreme, par la prec. prop. il meſurera auſſi B premier proche de l'vnité: ce qui eſt abſurde. Donc G n'eſt premier, mais compoſé, & meſuré par quelque nombre premier par la 33. p. 7. qui ne peut eſtre autre que B: d'autant qu'il meſurera E, par la 11. com. ſent. & par la prop. preced. il faudroit qu'il meſuraſt auſſi B nombre premier: ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc point d'autre nombre premier que B, qui meſure G. Que maintenant B meſure G par H: & puis que par les choſes dictes au Scholie de la 11. prop. de ce liure, B multipliant D & H produict E & G par la 17. p. 7. comme E ſera à G, ainſi D à H: mais G meſure E: donc auſſi H meſurera D. On prouuera comme deſſus qu'il ne peut eſtre premier ny meſuré par vn autre nombre premier que B: Car ſi H eſtoit premier, meſurant D, il meſureroit auſſi B: ce qui ne ſe peut faire, ayant eſté poſé premier. Que ſi H eſt compoſé, celuy nombre premier qui le meſurera ſera B, ou ſi ceſt vn autre, cet autre meſurera auſſi D, & celuy qui meſure D, c'eſt à ſçauoir B, par la 11. com. ſent. ce qui eſt abſurde. Il n'y a donc que le nombre premier B qui meſure H: & poſant que ce ſoit par le nombre I. On prouuera auſſi comme deſſus, que comme H meſure D, ainſi I meſure C, & que I ne peut eſtre nombre premier, ny meſuré par aucun autre nombre premier ſinon B. Donc que I meſure C par le nombre K: par meſmes raiſons, comme I meſure C, ainſi K meſurera B nombre premier: il faut donc qu'à tout le moins il luy ſoit

eſgal, ce qui eſt impoſsible : d'autant que B eſt moyen proportionnel entre K & I par la 20.pr. 7. puis que C eſt produit de K multiplié par I, & qu'il eſt auſsi le produict de B multiplié par ſoy-meſme. Partant aucun nombre ne meſurera E, ſinon B, C, D, qui le meſurent par la 11.p.9. Parquoy ſi depuis l'vnité, il y a tant de nombres qu'on voudra, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent eſtre meſurez par certains nombres premiers, ne ſera meſuré par aucun autre nombre premier, que par ceux qui le meſuroient au commencement.

Soit A le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent eſtre meſurez par les trois nombres premiers B, C, D. Ie dis qu'aucun nombre premier autre que B, C, D, ne meſurera A.

Autrement, s'il eſt poſsible, que E autre nombre premier meſure A par F: donc par la 9. com. ſent. E multiplié par F produira A, lequel eſt meſuré par B, C, D; & par la 32 pr. 7. iceux B, C, D, meſureront l'vn des deux E, F: Or ils ne meſureront pas E, autre nõbre premier que pas vn d'iceux; ils meſureront donc F, qui eſt plus petit que A: ce qui eſt abſurde; puis que A eſt poſé le plus petit de tous ceux qui peuuent eſtre meſurez par B, C, D. Donc E ne pouuoit meſurer A.

A, B, C, D.
30. 2. 3. 5.
E--- F--

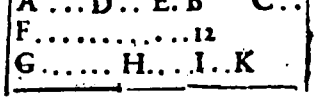
Parquoy le plus petit nombre de tous ceux qui peuuent estre mesurez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous demonstrerons icy en nombres (apres Commandinus & Clauius) les 10 premiers theoremes, qui sont demonstrez en lignes au second liure:

1. S'il y a deux nombres, l'vn ou l'autre desquels soit couppé en tant de parties qu'on voudra, le nombre plan compris sous iceux deux nombres, est egal aux nombres plans contenus du nombre indiuisé, & de chaque partie de celuy qui est couppé.

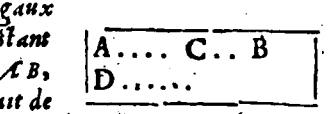
Soient deux nombres, A B & C, desquels A B est diuisé en A D, D E, E B, & soit faict F de C en A B: Item G H de C en A D, & H I, de C en D E, & I K de C en E B: Ie dis que F est esgal aux nombres G H, H I, I K, c'est à dire à tout le nombre G K composé d'iceux. Car puisque C multipliant A B, a produict F: A B mesurera F par C, c'est à dire que A B sera la partie d'iceluy F, denommée par C. Par la mesme raison A B sera la partie de G H; & D E de H I; & E B de I K, denommée par C, sçauoir est, la mesme que A B de F. Mais il est euident par la 5. prop. 7. que A B est la mesme partie de G K, que A D de G H, parquoy aussi A B sera mesme partie de G K, que A B de F: & partant par la 4. com. sent. F & G K seront esgaux entr'eux. Ce qui estoit proposé.



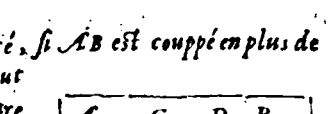
2. Si vn nombre est couppé en deux parties, les nombres plans compris sous le tout, & vne chacu-

ne partie, sont egaux au nombre quarré du tout.

Car le nombre AB soit diuisé en AC, CB. Ie dis que les nombres qui seront produicts du total AB, és parties AC, CB seront ensemble egaux au quarré de AB. Car estant pris le nombre D egal à AB, par le 1. theor. le nombre faict de D, c'est à dire de AB en AB, sçauoir est le quarré d'icelluy AB, sera egal aux nombres que seront produicts de D, c'est à dire de AB, en AC, & en CB: ce qui estoit proposé.

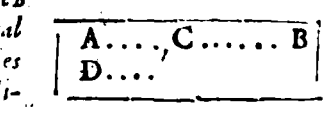


Le mesme sera demonstré, si AB est couppé en plus de deux parties, comme on peut voir par la seconde figure icy apposée. Car par la mesme raison, le nombre faict de E, c'est à dire de AB, en AB, c'est à sçauoir le quarré de AB, sera egal aux nombres, qui seront produicts de E, c'est à dire de AB, en chasque partie AC, CD & DB.



3. Si vn nombre est couppé en deux parties; le nombre plan compris du total, & de l'vne des parties est egal à celuy-là contenu des parties, & au quarré faict d'icelle partie premierement prise.

Soit le nombre AB diuisé en AC, CB. Ie dis que le nombre plan produict de AB en la partie AC, est egal à celuy faict des parties AC, CB, & au quarré d'icelle partie AC. Car estant pris le nombre D egal à la susdite partie AC; par le 1. theor. le nombre faict de D, c'est à dire de AC, en AB; ou (qui



ou (qui eſt le meſme) de AB en AC, ſera egal aux nombres faits de D, c'eſt à dire de AC en CB, & de D, c'eſt à dire de AC en AC, ſçauoir eſt le quarré de AC. Ce qui eſtoit propoſé.

4. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, le quarré faict du tout eſt egal aux deux quarrez faits des deux parties, & à deux fois le nombre plan contenu d'icelles parties.

Soit le nombre AB diuiſé en AC, CB. Ie dis que le nombre quarré faict de AB, eſt egal aux quarrez des parties AC, CB auec deux fois le nombre plan faict de AC en CB. Car par le 2. theor. le nombre quarré de AB, eſt egal aux nombres faicts de AB en AC, & en CB. Mais par le 3. theor. le nombre faict de AB en AC, eſt egal au nombre produict de AC en CB, & au quarré d'iceluy AC: Item le nombre produict de AB en CB, eſt par meſme raiſon egal au nombre produict de AC en CB, & au quarré de CB. Donc le nombre quarré faict de AB, eſt pareillement egal aux nombres quarrez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre faict de AC en CB. Ce qui eſtoit propoſé.

A . . . . . C . . . . B

5. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties egales, & en deux inegales; le nombre plan contenu des parties inegales, auec le quarré du nombre qui eſt entre les deux ſections, eſt egal au quarré faict de la moictié du nombre total.

Soit le nombre AB, couppé en deux parties egales AC, CB, & en deux inegales AD, DB. Ie dis que le nombre plan compris des parties inegales AD, DB, auec le quar-

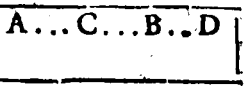
ré du nombre CD, eſt egal au quarré du nombre BC. Car puis que par le theor. preced. le nombre quarré de CB, eſt egal aux quarrez des parties CD, DB, auec deux fois le nombre faict de CD, DB; & par le 3. theor. le nombre plan compris de CD, DB, enſemble auec le quarré de DB, eſt egal au nombre produict de CB en DB, ſera fait que ſi ce nombre faict de CB en DB, eſt pris pour le quarré de DB, auec le nombre fait de CD en DB, auſſi le nombre quarré de CB, eſt egal à l'autre quarré de CD, enſemble à l'autre nombre faict de CD en DB, & au nombre produict de CB, c'eſt à à dire de AC en DB: & partant par le 1. theor. le nombre faict du total AD en DB, eſt egal aux nombres produicts de CD en DB, & de AC en DB. Donc le quarré de CB, ſera egal au quarré de CD, & au nombre fait de AD en DB. Ce qui eſtoit propoſé.

A . . . . . C . . . D . . B

6. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties egales, & à icelle eſt adiouſté quelque autre nombre; le nombre qui eſt fait du tout auec l'adiouſté en l'adiouſté, auec le quarré de la moitié du nombre propoſé, eſt egal au quarré du nombre compoſé de la moitié & de l'adiouſté.

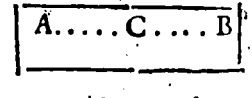
Soit le nombre AB couppé en deux parties egales AC, CB, & à iceluy ſoit adiouſté le nombre BD. Ie dis que le nombre faict du tout AB & de l'adiouſté BD comme vn ſeul, ſçauoir eſt de AD en l'adiouſté BD, auec le quarré de la moitié CB, eſt egal au quarré faict de la moitié CB & adiouſté BD comme vn ſeul,

c'eſt à dire au quarré de CD. Car puis que par le 4. theor. le quarré de CD eſt egal aux quarrez des parties CB, BD, auec deux fois le nombre plan compris de CB, BD, c'eſt à dire aux quarrez des parties CB, BD, & aux nombres contenus de CB, BD, & de AC, BD: Mais par le premier theor. le nombre faict de AD en BD, eſt egal aux nombres contenus ſous CB, BD, & ſous AC, BD, & ſous BD, BD, c'eſt à dire au quarré de BD. Donc prenant le nombre faict de AD en DB, pour le quarré de la partie BD, auec les nombres faicts de CB en BD, & de AC en BD, le quarré de CD ſera egal à l'autre quarré de CB, enſemble auec le nombre faict de AD en BD: c'eſt à dire que le nombre faict de AD en BD, auec le quarré de CB, eſt egal au quarré de CD: ce qui eſtoit propoſé.



7. Si vn nombre eſt diuiſé en deux parties, le quarré du tout auec le quarré de l'vne des parties, eſt egal à deux fois le nombre faict du tout en icelle partie, enſemble auec le quarré de l'autre partie.

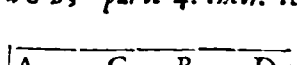
Soit le nombre AB couppé és parties AC, CB. Ie dis que le quarré de AB, auec celuy de la partie CB, eſt egal à deux fois le nombre faict de AB en CB, enſemble auec le quarré de l'autre partie AC. Car puiſque par le 4. theor. le quarré de AB eſt egal aux quarrez des parties AC, CB, & a deux fois le nombre faict d'icelles AC, CB; ſi on adiouſte le commun quarré de CB, les quarrez de AB, CB, ſeront enſemble egaux



aux quarrez de AC, CB, CB, auec deux fois le nombre produict de AC en CB: mais par le 3. theor. le nombre faict de AC en CB auec le quarré de CB, est egal au nombre produict de AB en CB: & partant le double de l'vn est egal au double de l'autre. Donc si pour le double du nombre faict de AC en CB, & quarré de CB, on prend le double du nombre produict de AB en CB, les quarrez des nombres AB, CB seront ensemble egaux à deux fois le nombre de AB en CB, auec le quarré de l'autre partie AC. Ce qui estoit proposé.

8. Si vn nombre est diuisé en deux parties, quatre fois le nombre faict du tout en vne partie, auec le quarré de l'autre partie, est egal au quarré du nombre composé du tout & de la partie premierement prise.

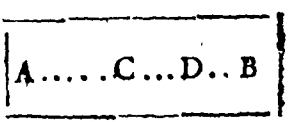
Soit le nombre AB couppé és parties AC, CB. Ie dis que le nombre faict de AB en la partie CB, ensemble auec le quarré de l'autre partie AC, est egal au quarré du nombre composé de AB & de la partie CB. Car estant adiousté le nombre BD egal à CB, par le 4. theor. le quarré du tout AD est egal aux quarrez des nombres AB, BD, ensemble auec le nombre double de AB en BD, c'est à dire aux quarrez des nombres AB, CB, ensemble auec deux fois le nombre de AB en CB: Mais par le 7. theor. les quarrez de AB, CB, sont egaux à deux fois le nombre contenu de AB, CB, auec le quarré de AC: donc si pour les quarrez de AB, CB, on prend le nombre double de AB en CB, & le quarré de AC; le quarré faict



de A D est esgal à 4 fois le nombre fait de A B en C B, ensemble auec le quarré de l'autre partie A C : ce qui estoit proposé.

9. Si vn nombre est couppé en deux parties esgales, & en deux inegales ; les quarrez faicts des parties inegales, sont doubles des quarrez faits de la moitié, & de la partie du milieu.

Soit le nombre A B diuisé és parties esgales A C, C B, & és inegales A D, D B. Ie dis que les quarrez des parties inegales A D, D B, sont doubles des quarrez de la moictie A C, & du nombre entre-moyen C D. Car puisque par le 4. theor. le quarré du nombre A D est esgal aux quarrez des nombres A C, C D, ensemble auec deux fois le nombre faict de A C en C D ; si on adiouste le commun quarré de D B, les quarrez des parties A D, D B, seront esgaux aux quarrez des parties A C, C D, B D, ensemble auec deux fois le nombre produict de A C en C D, c'est à dire de C B en C D. Mais par le 7. theor. les quarrez de C B, c'est à dire de A C, & C D, sont esgaux au quarré de D B, & à deux fois le nombre de C B en C D. Donc si pour le quarré de D B, & deux fois le nombre faict de C B en C D, on prend les quarrez de A C, C D, les quarrez de A D, D B seront esgaux au double des quarrez des parties A C, C D ; & partant ces quarrez-là sont doubles de ceux-cy. Ce qui estoit proposé.



10. Si vn nombre est diuisé en deux parties esgales, & à iceluy on adiouste quelque autre nombre ; le quarré du nombre composé d'iceux, & le quarré de l'adiousté, sont ensemble doubles des quarrez de la moitié, & de celuy fait du nombre com-

posé d'icelle moitié & de l'adiousté.

Soit le nombre A B diuisé en deux parties esgales A C, C B, & à iceluy soit adiousté le nombre B D. Ie dis que le quarré du nombre A D composé du tout A B & de l'adiousté B D, & le quarré d'iceluy nombre adiousté B D, sont ensemble doubles des quarrez faicts de la moitié A C, & de C D, composé de la moitié C B & de l'adiousté B D: Car puisque par le 4. theor. le quarré de A D est esgal aux quarrez de A C, C D, & a deux fois le nombre produict de A C, c'est à dire de C B, en C D: si on adiouste le commun quarré du nombre B D, les quarrez des nombres A D, B D, seront esgaux aux quarrez des parties A C, C D, B D, ensemble auec deux fois le nombre produict de C B en C D. Mais par le 7. theor. les quarrez de C B, ou A C, & C D sont esgaux au quarré de B D, & a deux fois le nombre fait de C B en C D. Donc si pour le quarré de B D, & deux fois iceluy nombre produict de C B en C D, on prend les quarrez des nombres C B, C D, c'est à dire des nombres A C, C D: les quarrez des nombres A D, B D seront esgaux à deux fois les quarrez des nombres A C, C D: & partant ceux-là sont doubles de ceux-cy: ce qui estoit proposé.

A ..... C ..... B ... D

Or voila quant aux 10 premieres prop. du 2. l. mais la 11e ne se peut accommoder aux nombres, c'est à dire qu'on ne peut pas diuiser vn nombre proposé, en telle sorte que le nombre plan fait du tout & de l'vne des parties, soit esgal au nombre quarré de l'autre partie.

Car, s'il est possible, soit diuisé A B en A C, C B, en sorte que le nombre plan fait du tout A B, & de la partie C B, soit esgal au quarré de l'autre partie A C. Donc qua-

tre fois le nombre de A B en C B, ſera quadruple du quarré de A C: & partant quatre fois le nombre plan d'iceluy A B en C B, auec le quarré de A C, ſera quintuple d'iceluy quarré de A C. Mais



quatre fois le nombre plan de A B en C B, auec le quarré de A C, eſt quarré, veu que par le 8. theor. il eſt eſgal au nombre quarré, qui eſt fait du nombre compoſé de A B & de C B. Donc deux nombres quarrez (ſçauoir celuy qui eſt fait de A B en C D quatre fois auec le quarré de A C: & le quarré de A C) ont meſme raiſon, que 5 à 1, ou 25 à 5. Ce qui eſt abſurde, ainſi qu'il appert du corol. de la 24. prop. 8. Le nombre A B ne peut donc pas eſtre diuiſé, en ſorte que le nombre plan fait du tout en vne des parties ſoit egal au quarré de l'autre partie. Ce qui eſtoit propoſé.

THEOR. 15. PROP. XV.

Si trois nombres ſont continuellement proportionnaux, & les plus petits de tous ceux qui ont meſme raiſon auec iceux : le compoſé de deux tels que l'on voudra d'iceux, ſera premier à l'autre.

Soient trois nombres continuellement proportionnaux A, B, C, les plus petits de tous ceux qui ont la meſme raiſon : Ie dis que le compoſé de deux quels on voudra d'iceux, comme de A & B, eſt premier à l'autre C : & le compoſé de B, C, premier à A : & de A, C, premier à B.

Car si on prend D & E les plus petits qui soient en la mesme raison par le Scholie de la 35. pr. 7. il est euident par ce qui a esté demonstré à la 2. prop. 8. que A & C sont les quarrez de D & E, & que B est le produict de D multiplié par E: & par le 3. Theor. du Scholie precedent le composé de D, E, multiplié par D, produira vn nombre esgal au composé de A & B. Mais D & E estans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. aussi leur composé sera premier à E, par la 30. prop 7. & partant aussi à son quarré C, par la 27. p. 7. Et par mesme raison D sera premier à C, & par la 26. pr. 7. le produict du composé de D & E multiplié par D, sera aussi premier à C. Mais nous auons monstré que ce produict est esgal au nombre composé de A & B: Donc aussi le composé de A & B sera premier à C.

A 9. B 12. C 16.
D 3. E 4.

En apres, puisque comme dessus le composé des deux nombres D, E est premier à chacun d'iceux; par la 26. prop. 7. le produict du composé de D, E, multiplié par E sera premier à D. Mais par le susdict Theor. iceluy produit est esgal à C faict de E en soy, & au nombre B faict de D en E. Donc le nombre composé de ces deux B & C sera aussi premier à D; & partant aussi à A par la 27 proposition 7.

Finablement D & E estans premiers entr'eux par la 24. prop. 7. & premiers au composé des deux par la 30. prop. 7. leur produict B sera premier au composé des deux par la 26. prop. 7 & par la 27. prop. 7. le produict de D, E comme vn seul nombre, multiplié par soy, sera premier à B. Mais par

le 4. Theor. du Scholie precedent, iceluy produit de D E comme vn ſeul nombre multiplié en ſoy, eſt eſgal à A & C & deux fois B enſemble, puis que A & C sõt les produits de D & E en eux-meſme, & B celuy de D en E: donc A & C auec deux fois B, ſont premiers à B. Or en oſtant les deux fois B; le reſte compoſé de A & C, ſera premier à B Car autrement ils ſeroient compoſez, & leur commune meſure meſureroit auſſi deux fois B; & par conſequent auſsi le compoſé de A & C deux fois B, qui ne ſeroit en ce faiſant premier à B, contre ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus. Donc le compoſé de A & C eſt premier à B. Parquoy ſi trois nombres ſont continuellement proportionnaux, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVI.

Si deux nombres ſont premiers entr'eux, il ne ſera pas comme le premier au ſecond, ainſi le ſecõd à quelqu'autre.

Soient deux nombres premiers entr'eux, A & B. Ie dis que comme A eſt à B, ainſi B n'eſt pas à quelque autre, c'eſt à dire qu'à A & B, on ne peut trouuer vn troiſieſme proportionnel.



Autrement, s'il eſt poſsible, ſoit que comme A eſt à B, ainſi B ſoit à vn autre, ſçauoir C. Par la 23. pr. 7. A & B eſtans premiers, ils ſeront les plus petits qui ſoient en la meſme raiſon, & par la 21 p. 7 A meſurera B, & B meſurera C. Mais auſsi A meſure ſoy-meſme; donc A meſure iceux A & B. Ainſi A & B ne ſeroient

premiers, contre l'hypotheſe. Donc il n'eſt pas comme A à B, ainſi B à C. Par meſme raiſon, il ne ſera pas comme B à A, ainſi A à quelque autre. Si donc deux nombres ſont premiers entr'eux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Ce qui eſt dict & demonſtré tant en cette 16. pr. qu'aux trois ſuiuantes, ſe doit entendre des nombres entiers: car ſi on les vouloit eſtendre aux fractions, il eſt certain & manifeſte qu'à deux nombres quels qu'ils ſoient, on en peut trouuer vn troiſieſme proportionnel; puis que le quarré du ſecond nombre eſtant diuiſé par le premier, en eſt produict vn troiſieſme proportionnel. Comme aux deux nombres premiers 3 & 5, ſi le quarré du ſecond nombre 5. ſçauoir 25 eſt diuiſé par le premier 3, prouiendra 8 $\frac{1}{3}$ pour le troiſieſme proportionnel, &c.

THEOR. 17. PROP. XVII.

Si tant de nombres qu'on voudra ſont continuellement proportionnaux, deſquels les extrémes ſoient premiers entr'eux, il ne ſera pas comme le premier au ſecond, ainſi le dernier à quelque autre.

Soient A, B, C, continuellement proportionnaux, deſquels les extremes A & C ſoient premiers entr'eux. Ie dis qu'il ne ſe peut faire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à quelque autre.

A 4. B 6. C 9. D---

Car s'il est possible, comme A est à B, ainsi soit C à D. En permutant, comme A sera à C, ainsi B à D : & par la 23. prop. 7. A & C estans premiers, ils seront les plus petits en leur raison : & par la 21. p. 7. ils mesureront esgalement B & D : sçauoir est A iceluy B : & C iceluy D. Et pource que comme A à B, ainsi B à C : & A mesure B, aussi B mesurera C : & par la 11. comm. sent. A mesurera aussi C : & iceluy A mesurant soy-mesme, il mesurera iceux A & C premiers entr'eux : ce qui est absurde. A n'est donc pas à B, comme C à D. Par mesmes raisons, il ne sera pas comme C à B, ainsi A à quelque autre. Parquoy si tant de nombres qu'on voudra sont continuellement proportionnaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. XVIII.

Deux nombres estans donnez, considerer si on pourra trouuer vn troisiesme proportionnel à iceux.

Soient donnez les deux nombres A & B : Il faut considerer si à iceux on peut trouuer vn troisiesme nombre proportionnel.

La solution de ceste proposition est aisee : Car il n'y a qu'à considerer si C, produict du second nombre B multiplié par soy-mesme, peut estre mesuré, c'est à dire diuisé par le premier A : car s'il peut estre mesuré ou diuisé, cō-

A 4.	B 6.	D 9.	C 36.
A 6.	B 7.	D —.	C 49.

me en la premiere formule, il eſt euident par la 20. prop.7. que le quotient D ſera troiſieſme nombre proportionnel; ſinon, on n'en trouuera point, puis que par la ſuſdite 20. prop. 7. trois nombres eſtans prop. le produict des extremes doit eſtre eſgal au produict du milieu.

PROB. 2. PROP. XIX.

Eſtans donnez trois nombres, conſiderer ſi on pourra trouuer vn quatrieſme proportionnel à iceux.

Soient donnez trois nombres A, B, C; & il faut conſiderer ſi à iceux on peut trouuer vn quatrieſme proportionnel.

La ſolution de ceſte prop. eſt auſsi ayſée. Car il faut ſeulement conſiderer ſi D, qui eſt le produict des ſecond & troiſieſme nombres B & C, peut eſtre meſuré par le premier A: s'il peut eſtre meſuré ou diuiſé, il eſt euident par la 19 prop.7. que le quotient E ſera quatrieſme proport. ſinon, on n'en trouuera point, puis que par la ſuſdite 19.prop.7. quatre nombres eſtans proport. le produict du ſecond & troiſieſme doit eſtre eſgal au produict du premier & quatrieſme.

A 3.	B 6.	C 5.	E 10.	D 30.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres pre-

miers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Ie dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.

Car si on trouue le nombre DE, le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 37. prop. 7. & à icelluy DE on adiouste l'vnité EF, le tout DF sera premier, ou non: S'il est premier, on a vn nombre premier autre que pas vn des proposez: Mais si DF n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. prop. 7. Soit donc mesuré par G; il est éuident que G ne peut pas estre vn des trois A, B, C: car s'il estoit quelqu'vn d'iceux, il mesureroit comme eux DE. Donc G mesurant le tout DF, & le retranché DE, par la 12. comm. sent. il mesureroit aussi le reste EF, sçauoir vn nombre l'vnité: Ce qui est absurde. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en peut trouuer infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propropose, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

A..2 B...3 C.....5
D----------30 E.F
G----

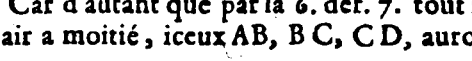
THEOR. 19. PROP. XIX.

Si tant de nombres pairs que l'on

voudra ſont adiouſtez ; le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres pairs que l'on voudra AB, BC, CD : Ie dis que tout le compoſé AD, eſt pair.

Car d'autant que par la 6. def. 7. tout nombre pair a moitié, iceux AB, BC, CD, auront cha-



cun moitié : Soit donc EF moitie de AB ; & FG de BC ; & GH de CD. D'autant que comme AB à EF, ainſi BC à FG ; & CD à GH (la raiſon eſtant touſiours double) auſſi par la 12. p. 7. comme AB ſera à EF, ainſi AD à EH. Mais AB eſt double d'iceluy EF : Donc auſsi AD ſera double de EH ; & partant iceluy nombre AD ayant moitié eſt pair par la ſuſd. 6. def. Parquoy ſi tant de nombres pairs, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 20. PROP. XXII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra ſont adiouſtez, & que la multitude d'iceux ſoit pair, le tout ſera pair.

Soient adiouſtez tant de nombres impairs que l'on voudra, deſquels la multitude AB, BC, CD, DE, ſoit pair : Ie dis que le tout AE eſt pair.

Car d'autant que AB, BC, CD, DE, sont impairs, par la 7. def. 7. chacun sera different du nombre

| A...3 B.....5 C.....7 D.....9 E |

pair de l'vnité: & partant si de chacun d'iceux l'on retranche l'vnité on les rendra tous pairs, & par la 21. propos. 9. le composé d'iceux sera pair: Et d'autant que leur multitude est en nombre pair, les vnités retranchees feront aussi vn nombre pair, lequel adiousté auec tout le reste, qui est desia nombre pair, le tout AE sera pareillement pair par la susdite 21. prop. 9. Parquoy si tant de nombres impairs, &c. Ce qu'il falloit ptouuer.

THEOR. 21. PROP. XXIII.

Si tant de nombres impairs que l'on voudra sont adiousteż, & que la multitude d'iceux soit impair, le tout sera impair.

Soient adiousteż tant de nombres impairs que lon voudra, la multitude desquels comme AB, BC, CD soit impair: Ie dis que le tout AD est impair.

| A... B..... C..... E.D |

Car puis que par la def. du nombre impair, il differe du nombre pair de l'vnité, ayant retranché l'vnité ED du nombre impair CD, le reste CE sera pair. Mais par la preced. propoſ. AC composé des impairs AB, BC, pairs en multitude, est pair: Donc aussi AE com-

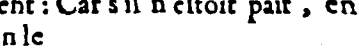
posé des pairs AC, CE, sera pair : Et partant si à iceluy AE, l'on adiouste l'vnité ED, le tout AD sera impair, puis que par la susdite def. le nombre impair differe du pair de l'vnité. Parquoy si tãt de nombres impairs, &c. Ce qu'il failloit prouuer.

THEOR. 22. PROP. XXIV.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre pair, le reste sera pair.

Soit vn nombre pair AB, duquel soit retranché vn nombre pair CB : Ie dis que le reste AC est aussi pair.

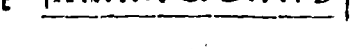
Ce qui est euident : Car s'il n'estoit pair, en ostant l'vnité AD on le rendroit pair : Et le retranché auec iceluy, sçauoir DB, seroit aussi vn nombre pair par la 21. prop. 9. & partant luy adiouſtant l'vnité ostee AD, le tout AB seroit impair ; ce qui est absurde : puis qu'il a esté posé pair. Si donc deux nombres pairs, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



THEOR. 23. PROP. XXV.

Si d'vn nombre pair, on oste vn nombre impair, le reste sera impair.

Du nombre pair AB, soit retranché le nombre impair CB : Ie dis que le reste AC est impair.



Car ayant retranché l'vnité CD du nombre impair

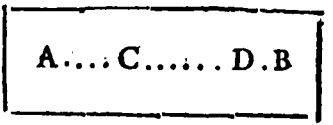
impair CB, le reſte DB ſera pair. Et d'autant que le tout AB eſt poſé pair, par la preced. le reſte AD ſera auſſi pair. Et partant ſi on en oſte l'vnité CD, le reſte AC ſera impair. Si donc d'vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 24. PROP. XXVI.

Si d'vn nombre impair on oſte vn nombre impair, le reſte ſera pair.

Soit vn nombre impair AB, duquel ſoit retranché vn nombre impair CB. Ie dis que le reſte AC eſt pair.

Car ayant retranché des nombres impairs AB, CB, l'vnité DB, les nombres reſtans AD, CD, ſeront pairs. Et d'autant que du nombre pair AD, eſt retranché le nombre pair CD; par la 24. ptop. 9. le reſte AC ſera pair. Parquoy ſi d'vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

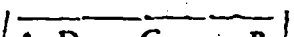


THEOR. 25. PROP. XXVII.

Si d'vn nombre impair on oſte vn nombre pair, le reſte ſera impair.

Du nombre impair AB, ſoit retranché vn nombre pair CB: Ie dis que le reſte AC eſt impair.

Car ayant retranché de l'impair AB, l'vnité AD, le reſte DB ſera pair ; duquel eſtant retranché le pair CB, par la 24. p. 9 le reſte DC ſera auſſi pair : & partant l'vnité AD y eſtant adiouſtee, AC ſera impair. Parquoy ſi d'vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

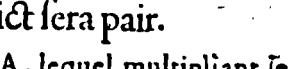


THEOR. 26. PROP. XXVIII.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre pair, le produict ſera pair.

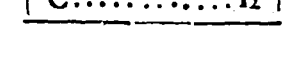
Soit vn nombre impair A, lequel multipliant le nombre pair B, faſſe C : Ie dis qu'iceluy produict C eſt pair.

Car d'autant que C eſt produict de A en B ; iceluy produict C ſera cõpoſé d'autant de nombres egaux à B, qu'il y a d'vnitez en A. Mais B eſt pair ; & partant C ſera compoſé d'autant de nombres pairs egaux à B qu'il y a d'vnitez en A : & par la 21. p. 9. C ſera pair. Parquoy ſi vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



SCHOLIE.

On demonſtrera en la meſme maniere, que ſi vn nombre pair multiplie vn nombre pair, le produict ſera auſſi pair. Car derechef C ſera compoſé d'autant de nombres pairs egaux à B qu'il y a d'vnitez en A, &c.



COROLLAIRE.

De ce que dessus, il s'ensuit qu'vn nombre pair multiplié par soy-mesme produira vn nombre pair; comme il est manifeste, en posant les nombres pairs A & B egaux.

THEOR. 27. PROP. XXIX.

Si vn nombre impair multiplie vn nombre impair; le produict sera impair.

Que le nombre impair A, multipliant le nombre impair B, face C: Ie dis qu'iceluy produict C est impair.

A ... 3	B 5
C 15	

Car puis que C est le produict de A en B, il sera composé d'autant de nombres esgaux à B qu'il y a d'vnitez en A: Et partant puis que tant A que B est nombre impair, leur produict C sera composé d'autant de nombres impairs esgaux à B, qu'il y a d'vnitez au nombre impair A: parquoy la multitude d'iceux sera impair, & par la 23. pr. 9. ledit produict C sera nombre impair. Si donc vn nombre impair, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

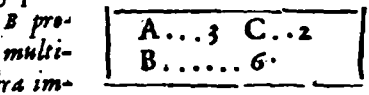
De cecy est manifeste qu'vn nombre impair multiplié par soy-mesme produict vn nombre impair.

SCHOLIE.

Clauius demonſtre en ceſt endroit (apres Campanus) les deux theoremes ſuiuans.

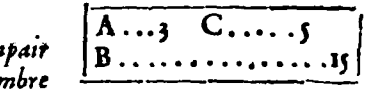
1. Vn nombre impair meſurant vn nombre pair, il le meſure par vn nombre pair.

Soit le nombre impair A, lequel meſure le nombre pair B par C. Ie dis que C eſt pair. Car s'il eſt impair; B produict de A impair multiplié par C impair, ſera impair, par la 29. prop. 9. ce qui eſt abſurde: car il a eſté poſé pair. Donc C eſt pair.



2. Vn nombre impair meſurant vn nombre impair, il le meſure par vn nombre impair.

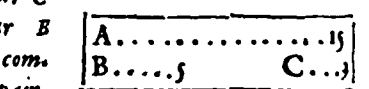
Soit le nombre impair A, qui meſure le nombre impair B par C. Ie dis que C eſt impair. Car s'il eſt pair; B faict de A impair par C pair, ſera pair par la 28. p. 9. ce qui eſt contre l'hypotheſe; donc C eſt impair.



A ces deux theor. nous adiouſterons le ſuiuant.

Tout nombre qui meſure vn nombre impair, eſt auſſi impair.

Soit le nombre impair A, lequel B meſure par C. Ie dis que B eſt impair. Car C eſtant multiplié par B produira A par la 9. com. ſent. & ſi B n'eſt impair, mais pair, le produict A ſera pair par la 28. p. 9. ce qui eſt abſurde, puis qu'il a eſté poſé impair. Donc B qui meſure A impair, n'eſt pas nombre pair, mais impair.



THEOR. 28. PROP. XXX.

Si vn nombre impair meſure vn nombre pair, il meſurera auſſi ſa moitié.

Soit le nombre impair A, qui meſure le nombre pair B. Ie dis qu'il meſurera auſſi ſa moitié C.

Car puis que A meſure B, ſoit par le nombre D: iceluy D ſera pair, comme nous auons demonſtré au Schol. prec. theor. 1. & partant, il ſe pourra diuiſer en deux eſgalement par *la 6. def. du 7.* E ſoit donc la moitié de D. Parquoy comme D ſera à ſa moitié E, ainſi B ſera à ſa moitié C: & en permutant, comme D ſera à B, ainſi E ſera à C. Mais A meſurant B par D, auſſi D meſurera B par A par la 8. com. ſent. & partant D ſera la partie de B denommée par A: donc auſſi E ſera la partie de C denommee par le meſme A: & partant A meſurera C, par la 40. p. 7. Si donc vn nombre impair meſure vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A . . . 3 D . . . . E . . 2
B 12
C 6

THEOR. 29. PROP. XXXI.

Si vn nombre impair eſt premier à quelque nombre, il ſera auſſi premier à ſon double.

Soit le nombre impair A, premier à quelque nombre B, duquel le double ſoit C. Ie dis que A eſt auſſi premier à C. Car ſi A & C ne ſont premiers en-

tre-eux, quelque nombre les mesurera, & soit D, lequel sera impair, comme nous auons demonstré au Scholie de la 29. p. 9. Et puis qu'il mesure le nombre pair C (car C est pair puis qu'il a moitié B) il mesurera aussi sa moitié B par la pr. prec. Mais il mesure aussi A. Donc D mesure iceux A & B premiers entr'eux: ce qui est absurde. Il n'y aura donc point de nombre qui mesure A & C: & partant ils seront premiers entr'eux. Si donc vn nombre impair est premier à quelque nombre, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

A...3 B....4
C.....8 D--

THEOR. 30. PROP. XXXII.

Tous les nombres qui suiuent le binaire en progression double sont seulemẽt pairement pairs.

Soient depuis le binaire A tant de nombres qu'on voudra B, C, D, E, continuellement proportionnaux en raison double. Ie dis que B, C, D, E sont tant seulement pairement pairs.

Qu'il ne soit ainsi. Soit prise l'vnité, &

vnité. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32.

puisque depuis l'vnité, A, B, C, D, E, sont continuellement prop. le plus petit mesurera le plus grand selon quelqu'vn de ceux qui sont entre les proportionnaux par la 11. p 9. lesquels estans tous pairs, il est euident par les def. du 7. que B, C, D, E, seront pairement pairs, & tous les autres qui pourroyent suiure en la mesme progression. Mais d'autant que A prochain de l'vnité est nombre pre-

mier, à ſçauoir binaire, par la 13. p. 9. aucun autre nombre ne meſurera aucun de tous ceux qui ſont en la progreſſion, ſinon ceux de la meſme progreſſion, leſquels eſtans tous pairs, vn nombre pair meſurera chacun d'iceux par vn nombre pair: & partant iceux nombres ſeront ſeulement pairemẽt pairs. Parquoy tous les nombres qui ſuiuent le binaire, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 31. PROP. XXXIII.

Si la moitié d'vn nombre eſt impair, iceluy nombre ſera ſeulement pairement impair.

Soit le nombre A, duquel la moitié eſt impair: Ie dis que A eſt ſeulement pairement impair.

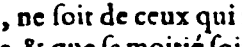
Car puiſque B impair eſt moitié de A, il le meſurera par le nombre binaire C, & par la 9. def. 7. A ſera pairement impair. Mais qu'il ſoit ſeulement pairement impair, on le prouuera ainſi. S'il eſtoit pairement pair, vn nombre pair, comme D, le meſureroit par quelque nõbre pair, comme E. Et par la 9. co. ſent. A eſt fait de D en E: mais le meſme A eſt auſſi fait de la moitié B par le binaire C. Parquoy par la 19. p. 7. le produict de C par B eſtant egal au produict de E en D, cõme C ſera à E, ainſi D à B. Mais C nõbre binaire meſure E: Il faudroit donc auſſi que D pair meſuraſt B impair: ce qui eſt impoſſible. Donc A n'eſt pairement pair: & partãt il eſt ſeulement pairement impair. Parquoy ſi la moitié d'vn nombre eſt impair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

A 30.	
B 15.	C 2.
D--	E--

THEOR. 32. PROP. XXXIV.

Si vn nombre pair n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ne ſoit nombre impair, il ſera pairement pair, & pairement impair.

Le nombre pair A, ne ſoit de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, & que ſa moitié ſoit *pair*: Ie dis que A eſt pairement pair, & pairement impair.



Qu'il ſoit pairement pair, il eſt euident. Car d'autant que ſa moitié eſt pair, le binaire, qui eſt pair, le meſurera par icelle moitié; & par la 9. def. 7. il ſera pairement pair.

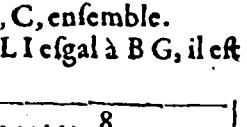
Or il eſt auſſi pairement impair: car puis que iceluy nõbre A n'eſt de ceux qui ſont doubles depuis le binaire, ſi on le diuiſe touſiours en deux eſgalement on viendra en fin à vn nombre impair auparauant que paruenir iuſques au binaire, *lequel* nombre impair meſurera A par vn nombre pair: Car ſi c'eſtoit par vn impair, attendu que par la 29. p 9. vn nombre impair multipliant vn nombre impair produit vn nombre impair, A ſeroit impair: ce qui eſt abſurde, eſtant poſé pair. Veu donc qu'vn nombre impair meſure A par vn nombre pair, & qu'vn nombre pair le meſure auſſi par vn nombre pair; iceluy nombre A ſera pairement pair, & pairement impair. Parquoy ſi vn nombre pair, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 33. PROP. XXXV.

S'il y a tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux, & que l'on retranche du second, & du dernier, vn nombre esgal au premier; comme le reste du second sera au premier, ainsi le reste du dernier sera à tous les precedens.

Soient quatre nombres continuellement proportionnaux A, B, C, D, & que du second B l'on retranche F G esgal au premier A: E du dernier D l'on retranche K L aussi esgal à A: Ie dis que comme le reste B F sera à A, ainsi l'autre reste D K sera à tous les trois precedens A, B, C, ensemble.

Car si de D L on retranche L I esgal à B G, il est euident que K I sera esgal à B F, (estant K L esgal à F G) & si on retranche L H esgal à C; comme les quatre nombres D, C, B, A, sont continuellement proportionnaux, aussi seront leurs esgaux D L, H L, I L, K L: & en diuisant, D H sera à H L, comme H I à I L, ou I K à K L; & partant par la 12. p. 7. tous les antecedans D H, H I, I K, (c'est à dire D K) seront à tous les consequents H L, I L, K L, (c'est à dire A, B, C,) comme l'vn des antecedans I K, est à l'vn des consequens K L, ou leurs esgaux B F à A. Parquoy s'il y a tant de nombres



qu'on voudra continuellement proportionnaux, Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXVI.

Si depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raiſon double, iuſques à ce que le tout compoſé ſoit nombre premier: iceluy tout multiplié par le dernier produira vn nombre parfaict.

Soient depuis l'vnité tant de nombres qu'on voudra A, B, C, D, continuellement proportionnaux en raiſon double, la ſomme deſquels & de l'vnité ſoit E nombre premier, & que E multiplié par le dernier D faſſe F G: Ie dis que le produict FG eſt nombre parfaict.

Car ayant pris H I double de E; K double de HI; & L double de K, & ainſi de ſuite tant qu'il y aura de nombres propoſés: iceux nombres, E, HI, K, L, ſeront continuellement proportionnaux en la raiſon de A, B, C, D: & partant en raiſon egale, A ſera à D comme E à L; & par la 19. p. 7. le produict de A multiplié par L, ſera egal au produict de D

Vnité.
A.. 2
B.... 4
C.....8
D.....16
E 31
H 31 M 31 I
K 124
L 248
F 31 N 465 G
O-- P--

par E, ſçauoir FG : mais A eſtant binaire, FG ſera double de L : ainſi E, HI, K, L, FG, ſeront continuellement proportionnaux en raiſon double. Maintenant de HI ſecond ſoit retranché HM egal à E premier : & de FG dernier ſoit retranché FN, auſſi egal à E premier : par la prec. prop. comme MI eſt egal à E, (d'autant que HI eſtoit double de E) ainſi NG ſera egal à E, HI, K, L enſemble. Mais FN egal à E, eſt auſſi egal à l'vnité & à A, B, C, D enſemble. Et par conſequent FG ſera egal à l'vnité & à A, B, C, D, E, HI, K, L, enſemble : & puis que FG a eſté faict de E multiplié par D, par la 7. com. ſent. D meſurera FG: & partant par la 11. com. ſen. l'vnité, & les nombres A, B, C, qui par la 11. p. 9. meſurent D, meſureront le meſme FG. Derechef puis que L meſure FG; auſſi par la 11. com. ſent. les nombres E, HI, K, leſquels par la 11. prop. 9. meſurent L à cauſe de la raiſon double: meſureront le meſme FG: ainſi l'vnité & tous les nombres A, B, C, D, E, HI, K, L meſurent iceluy FG, lequel ne peut eſtre meſuré par aucun autre nombre que ceux-cy, comme nous monſtrerons incontinent: & partant par la 22. def. du 7. il ſera nombre parfaict eſtant egal à toutes ſes parties aliquotes.

Que ſi on penſe que FG puiſſe eſtre meſuré par quelque autre nombre que les ſuſdits; que O le meſure, s'il eſt poſsible, ſelon P : donc O multipliant P produira FG, par la 9. com. ſent. Mais le meſme FG eſt auſsi produict de E en D. Donc vn meſme nombre eſt faict de E 1. par D 4e, & de P ſecond en O 3e; & partant comme E à P, ainſi O à D par la 19. pr. 7. & puis que A, B, C, D, ſont continuellemẽt proportiõnaux depuis l'vnité, & que A

proche de l'vnité eſt premier, par la 13.p. 9. nul autre nombre que A, B, C meſurera le dernier D: & O eſt poſé n'eſtre le meſme qu'aucuns d'iceux A, B, C; O ne meſurera donc pas iceluy D. Mais comme O à D, ainſi eſtoit E à P: Donc auſſi E ne meſurera P: & puis que E eſt premier par la 31. p. 7. E & P ſeront premiers entr'eux: & partant les moindres en leur raiſon par la 23.p.7. & par la 21.p. 7. E meſurera O, comme P meſurera D. Mais nul autre que A, B, C meſure iceluy D. Donc P ſera le meſme que l'vn d'iceux A, B, C. Soit donc le meſme que B: & d'autant que B, C, D, & E, H I, K, ſont continuellement proportionnaux en raiſon double, par raiſon eſgale comme B ſera à D, ainſi E à K, & partant par la 19.p.7. le produict de B par K, ſera eſgal au produict de D en E. Mais le produict de D en E eſt eſgal à celuy de P en O. Donc vn meſme nombre ſera faict de P en O, que de B en K; & partant par la 19.p.7. comme P ſera à B, ainſi K à O. Mais P eſtoit le meſme que B: Donc auſſi K ſera le meſme que O: Ce qui eſt abſurde, car O a eſté poſé autre que tous ceux-cy A, B, C, D, E, HI, K, L. Il n'y aura donc point d'autres nombres que A, B, C, D, E, HI, K, L, qui meſurent F G, & lequel ils compoſent. Iceluy eſt donc nombre parfaict. Parquoy ſi depuis l'vnité on prend tant de nombres qu'on voudra continuellement proportionnaux en raiſon double, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Il appert de ce theor. que pour trouuer des nombres parfaicts, & leurs parties aliquottes, il faut poſer d'ordre tant de nombres qu'on voudra continuellement doubles de-

puis l'vnité, puis adiouſter tous ces nombres là enſemble, & ſi la ſomme d'iceux eſt nombre premier, icelle eſtant multipliee par le dernier nombre, le produict ſera nombre parfaict. Mais ſi la ſuſdicte ſomme n'eſt nombre premier, il faudra pourſuiure la poſition des nombres doubles iuſques à ce que ladite ſomme de tous les nombres poſez vienne a eſtre nombre premier, laquelle eſtant, comme dict eſt cy-deſſus, multipliee par le dernier des nombres doubles ſera procreé vn nombre parfaict. Et ſi on prend autant de nombres continuellement doubles du ſuſdict nombre premier (iceluy compté) qu'on en aura poſé depuis l'vnité, (icelle excluſe) tous ces nombres auec ladite vnité, ſeront les parties aliquottes que peut auoir le nombre parfait trouué. Ce qui eſt euident par la demonſtration de cette prop. & neantmoins nous ioindrons encore icy quelques exemples. Ayant poſé 1 & 2, leur ſomme 3 eſt nombre premier, lequel eſtant multiplié par 2, produict 6, nombre parfaict, duquel les parties aliquottes ſont 1, 2, 3. Item 1, 2, 4, ſont enſemble 7, nombre premier: parquoy iceluy eſtant multiplié par le dernier nombre 4, le produict 28 eſt nombre parfaict, & les parties aliquottes d'iceluy ſont 1, 2, 4, 7 & 14. Mais d'autant que la ſomme de ces nombres 1, 2, 4, 8, ſçauoir 15, n'eſt pas nombre premier, il faut continuer la proportion double, & on aura 1, 2, 4, 8, 16, dont la ſomme 31, eſt vn nombre premier, qui multiplié par le dernier nombre 16, produict le nombre parfaict 496, duquel les parties aliquottes ſont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, & 248.

Fin du neufieſme Element.

ADVERTISSEMENT.

D'Autant que les doctes Commandin, Steuin, & Dibuadius, ont estimé que le 10. liure d'Euclide, seroit rendu beaucoup plus clair & intelligible, y ioignant les nombres, ie les ay adiouſtez aux endroicts difficiles & obscurs, me seruant quelquesfois du trauail des susdicts autheurs. Et de plus, voyant que chacun n'entend pas les operations des nombres radicaux & sourds, lesquelles neantmoins sont neceſſaires pour l'intelligence de ces applications de nombres, i'ay adiousté icy vn sommaire de l'Algebre, auquel sont enseignés non seulemẽt les Algorithmes, & autres operations de nombres radicaux & sourds, mais aussi toutes les autres regles & operations Algebraiques. Si quelqu'vn en desire veoir les demonstrations, il les trouuera au second traicté de noſtre Collection Mathematique.

SOMMAIRE DE L'ALGEBRE.

Que c'eſt qu'Algebre, qui en eſt l'inuenteur, de quelles figures & caracteres on ſe ſert en icelle, & leur ſignification.

CHAPITRE I.

ALGEBRE eſt vne Arithmetique de nombres figurez : ou bien parlant plus intelligiblement, c'eſt vne ſcience par laquelle on peut rendre manifeſte & cogneue en nombre vne quantité incogneue.

Quant à l'inuenteur de ceſte ſcience il eſt incertain : car les vns l'attribuent à Geber Arabe : les autres à vn Mahomet fils de Moyſe Arabe : & les autres à Diophante d'Alexandrie.

Et quant aux figures d'icelle ſcience, outre les figures numerales de l'Arithmetique vulgaire, il y a pluſieurs autres figures & caracteres, dont on ſe ſert en ceſte ſcience, leſquels ſont figurez, & nommez diuerſement par les autheurs qui ont eſcrit d'icelle ſcience : mais entre ceſte diuerſité de caracteres, nous auons choiſi les ſuiuans, les jugeant plus propres & aiſez à repreſenter ce qu'il ſignifient qu'aucuns autres.

N. ℞. q. c. qq. ß. qc. bß. qqq. cc. qß. cß. qqc. dß. qbß. &c.

Le premier caractere N, à l'appellation du nombre abſolu & ſimple : tellement que le nombre au-

quel ledit caractere sera apposé, est absolu & simple: comme 4 N, ne signifie autre chose que 4 vnitez simples: toutesfois ce caractere N defaut le plus souuent aux nombres simples: c'est pourquoy les nombres ausquels est apposé ledict caractere N, ou bien ausquels il n'y a aucun signe, doiuent estre pris pour simples & absolus.

Le second caractere ℞, s'appelle racine: tellement que le nombre auquel est apposé ledit caractere, sera denommé par racine, comme 7 ℞, signifient 7 racines.

Le troisiesme caractere *q*, represente quarré: tellement que 5 *q*, signifient cinq quarrez.

Le quatriesme caractere *c*, signifie cube: comme 7 *c*, signifient sept cubes.

Le cinquiesme caractere *qq*, signifient quarré de quarré, comme 8 *qq*, s'appellent huict quarrez de quarré.

Le sixiesme *ß*, denotte sursolide: tellement que 4 *ß*, signifient quatre sursolides.

Le septiesme caractere *qc*, denotte quarré de cube, comme 7 *qc*, signifient sept quarrez de cube.

Le huictiesme *bß*, s'appelle second sursolide: tellement que 4 *bß*, signifient quatre second sursolide.

Le neufiesme caractere *qqq*, denotte quarré quarré de quarré: comme 3 *qqq*, signifient trois quarrez de quarré de quarré.

Le dixiesme *cc*, signifie cube de cube: tellement que 8 *cc*, signifiét huict cubes de cube. Et ainsi faut-il entendre des autres caracteres en l'ordre cy dessus, tous lesquels sont appellez signes ou caracteres cossiques.

Il y

Il y a encore ce caractere γ, par lequel sont nottez certains nombres qu'on appelle radicaux, irradicaux, ou sourds, dont sera parlé cy apres : comme aussi de quelques autres signes ou caracteres.

Des nombres cossiques ou denommez.

CHAP. II.

LEs nombres vsitez en l'Algebre sont de trois genres: ceux du premier, sont nõmez nombres cossiques, ou denommez: ceux du second, sont appellez nombres radicaux, ou irrationnaux: & les troisiesmes sont nommez nombres radicaux cossiques. Quant aux nombres cossiques, ou denommez, ce sont tous nombres de quelconque progression Geometrique, commençant à l'vnité: pour l'intelligence desquels doiuent estre diligemment considerees les deux progressions suiuantes, au mslieu desquelles sont posez les caracteres cossiques cy-dessus declarez.

0. 1. 2. 3. 4. ſ. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. &c.
N. R. q. c. qq. ß. qc. bß. qqq. cc. qß. cß. qqc. &c.
1. 2. 4. 8. 16 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096.

Le premier ordre est la progression naturelle des nombres commençant à 0, lesquels s'appellent exposans, tant des signes cossiques descrits au dessous, que des termes de la progressiõ Geometrique commençant à l'vnité : tellement que le premier terme de ladite progression naturelle, qui est 0, au dessous duquel est N & 1, est exposant du nombre simple & absolu: Le second terme 1, au dessous duquel

est ℞ & 2, monstre le second terme de la progres-sion Geometrique, estre la premiere denomination és nombres cossiques, & s'appelle racine: Le tiers terme 2, expose que le tiers nombre de la progres-sion Geometrique est la seconde denomination, & s'appelle quarré: ainsi pareillement 6, demonstre la sixiesme denomination estre le nombre quarré de cube, & ainsi des autres.

Puis apres les mesmes nombres exposans de la progresion naturelle des nombres, enseignent combien il y-a de raisons entre chacun nombre de la prog. Geometr. & l'vnité, comme 1, qui est au dessus de ℞ & 2, signifie qu'entre 2, ou bien la racine de la progr. Geometr. & l'vnité, il y-a la seule raison de 2 à 1: & 2, qui est au dessus de *q* & 4, monstre qu'entre 4, ou bien le quarré & l'vnité, doiuent estre 2 raisons, comme 4 à 2, & 2 à 1: de mesme 3, qui est au dessus de *c* & 8, monstre qu'entre le cube, ou 8 & l'vnité, sont les trois raisons 8 à 4; 4 à 2; & 2 à 1, & ainsi des autres.

Dauantage, chasque deux nombres exposans multipliez entr'eux, produisent l'exposant du caractere cossique qui sera composé des caracteres desdicts deux exposans multipliez entr'eux, comme 2 estant multiplié par 3 faict 6, exposant du caractere *qc*, qui est composé de *q* & de *c*. De mesme, 4 estant multiplié par 3 fait 12, exposant du caractere *qqc*, qui est composé de *qq*, & de *c*; & ainsi des autres.

Pareillement estant diuisé quelque nombre exposant par vn autre moindre, le quotient monstrera (s'il est nombre entier) l'exposant du caractere cossique qui restera, si du caractere du nombre exposant diuisé, est osté le caractere du nombre exposant par lequel est faicte la diuision: comme si 6,

exposant du caractere *qc*, est diuisé par 2, exposant du caractere *q*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, qui restera, si du caractere *qc*, exposant de 6, est osté le caractere *q* de l'exposant 2. De mesme, si 12, nombre exposant du caractere *qqc*, est diuisé par 4, exposant du caractere *qq*, le quotient sera 3, exposant du caractere *c*, lequel restera, si de *qqc*, est osté *qq*; & ainsi des autres.

Derechef, ceste figure 2, qui est posee sur 4 & *q* enseigne que le quarré, ou bien la 2e. denomination est produicte de la multiplication de la racine deux fois posee: car si la racine 2 est posee deux fois, en ceste maniere 2, 2, & soit faite la multiplication de 2 par 2, sera procreé le quarré 4: en la mesme maniere ceste figure 3, qui est posee sur 8 & *c*, signifie que le cube, ou bien la 3e. denomination est produicte de la racine, trois fois posee & multipliee: Car si la racine 2 est posee trois fois, comme icy 2.2.2. & soit faict la multiplication de 2 par 2, & du nombre produict d'iceux par 2, viendra le cube 8; & y a mesme raison de tous les autres.

Or par ces choses seront facilement definis les nombres cossiques. Car si pour exemple est demandé que c'est qu'vn nombre second surfolide, nous dirons estre vn nombre, lequel est engendré par quelque nombre sept fois posé & multiplié; comme 128, est engendré de la multiplic de ceste racine 2, posee sept fois en ceste maniere 2.2.2.2.2.2.2. Semblablement le quarré de quarré sera vn nõbre, lequel est engendré par quelque nõbre, quatre fois posé & multiplié; comme 16 est procreé de la multiplicatiõ de la racine 2, quatre fois posee ainsi 2.2.2.2. & ainsi des autres. Mais touſiours le nõbre tant de

fois posé, lequel engendre quelque nombre par sa multiplication, est dict racine du nombre produict, comme 2 estant posé six fois en ceste maniere 1. 2. 2. 2. 3. 2. & multiplié, faict ce nombre 64, qui est q^c. partant 2 est dict racine quarree cubique de ce nombre 64; & ainsi faut-il entendre des autres.

Or nonseulement sont quelque fois produicts les nombres de la progression Geometrique, posez par la multiplication de la racine, comme est cy-dessus dit, mais aussi par la multiplication des autres nombres entr'eux, ainsi que les signes cossiques d'iceux demonstrent: comme ce nombre quarré de sursolide 1024, est procreé de la racine dix fois posee en ceste maniere 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. ainsi que monstre son exposant 10: toutesfois pource que son signe cossique $q\beta$ est cóposé de ces deux signes cossiques q & β, les exposans desquels sont 2 & 5, si la mesme racine 2 est deux fois posee en ceste maniere 2, 2, à cause de 2 exposant du signe q, & puis soit multipliée, afin que 4 soit produict, & ce produict cinq fois posé en ceste maniere 4. 4. 4. 4. 4. (à cause de 5, exposant du signe β,) soit multiplié, sera procreé le mesme nombre 1024. Par la mesme maniere, si la racine 2 est posee cinq fois, à cause du signe β, & pareillement multipliee, & le nombre 32 produict, soit posé deux fois, à cause du signe q, sera encore procreé le mesme nombre: car la racine ainsi posee 2, 2, 2, 2, 2, & puis multipliee faict 32: mais ce nombre cy 32 posé deux fois ainsi 32, 32, & multiplié procree 1024. Le mesme doit estre dit des autres dont les signes cossiques sont composez de plusieurs signes cossiques.

Pareillement és superieures progressions, est bien

considerable que l'addition des nombres de la progression Arithmetique respond à la multiplication des nombres de la progression Geometrique, & la soubstraction à la diuision. Car pour exemple, ainsi que 2 & 5 (qui sont exposans de q & β.) adioustez ensemble font 7, ainsi aussi leurs correspondans 4 & 32, estans multipliez entre eux produisent 128, c'est à dire $b\beta$, l'exposant duquel est 7. Item ainsi que 3 & 9 adioustez ensemble font 12, ainsi aussi c & cc, c'est à sçauoir 8 & 512, les exposans desquels sont 3 & 9, multipliez entr'eux produisent 4096, c'est à dire qqc, duquel l'exposant est 12. & ainsi des autres.

Derechef tout ainsi qu'en soustrayant 5 de 7 reste 2, ainsi en diuisant $b\beta$, c'est à sçauoir 128, duquel 7 est exposant, par β, c'est à dire par 32, duquel l'exposant est 5, prouient 4. c'est à sçauoir q, duquel l'exposant est 2 : Semblablement, ainsi qu'en soustrayant 3 de 12 restent 6, ainsi aussi en diuisant qqc, c'est à dire 4096, duquel l'exposant est 12 par c, c'est à dire par 8, duquel l'exposant est 3, prouient c, c'est à sçauoir 512, duquel l'exposant est 9, & ainsi des autres.

Or ce qui a esté dit iusques à present de la progression Geometrique en raison double qui commence à l'vnité, le mesme doit estre entendu en quelqu'autre progression Geometrique que ce soit, le commencement de laquelle est l'vnité.

Reste à monstrer par quelle raison tous les nombres proposez de quelconque progression Geometrique, commençant à l'vnité, doiuent estre denommez, ou (ce qui est le mesme) quels signes cossiques doiuent estre attribuez & inscrits auldits

nombres: ce que nous monſtrerons facilement, & premierement nous denommons les nombres, deſquels les expoſans ſont nombres premiers: de laquelle ſorte ſont les ſuiuans, auec leurs caracteres cofſiques.

2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.37.41.43.47.53.&c.
q.c.ß.bß.cß dß.eß.fß.gß.hß.iß.kß lß.mß.nß.oß.&c.

Or les lettres de l'alphabet appoſees aux caracteres de *ß* ſont au lieu de chiffres, comme *bß* ſignifie *2ß*: *cß 3ß*, *dß*, *4ß*, &c. & ce d'autant qu'iceux chiffres apporteroient de la confuſion.

Sçachant donc ainſi que deſſus les nombres premiers, & leurs caracteres, nous trouuerons les caracteres des autres nombres cofſiques, deſquels les expoſans ne ſont nombres premiers, ains compoſez, en reſoluant l'expoſant du nombre compoſé, dont la denomination & caractere eſt deſirée en ſes parties aliquottes incompoſees, leſquelles eſtans multipliees par ordre entr'elles, conſtituent & produiſent iceluy: ce que vous ferez en ceſte maniere.

Diuiſez premierement le nombre compoſé donné par le moindre nombre premier, par lequel il ſe peut diuiſer; ſemblablement le quotient, s'il eſt nombre compoſé: & derechef ſoit diuiſé ce quotient par le moindre nombre, & ainſi conſequemment ſoit faicte continuellement la diuiſion, iuſques à ce que le quotient ſoit nombre premier, c'eſt à ſçauoir n'ayant aucune partie aliquotte: & tous les diuiſeurs, enſemble le dernier quotient, ſeront parties aliquottes incompoſees, leſquelles eſtans multipliees entr'elles par ordre produiront

le nombre composé donné, & les caracteres de toutes lesdictes parties aliquottes ioincts ensemble, feront le caractere dudit nombre composé donné. Comme pour exemple, si vous voulez trouuer le charactere de ce nombre composé 24, vous diuiserés iceluy par 2, qui est le moindre nombre premier, & viendra 12 au quotient, lequel quotient vous diuiserez derechef par 2, & viendra 6 au quotient, que vous diuiserez derechef par 2, & viendra 3 au quotient, qui est nombre premier: tellement que vous aurez pour les parties incomposees de 24, ces quatre nombres 2,2,2,3, dont les caracteres sont *q.q.q.c.* & partant le caractere appartenant à ce nombre composé 24 sera *qqqc.* Et c'est exposant 30 (duquel les parties incomposees sont 2,3,5,) fera ce signe *qcß*, & ainsi des autres.

On fera encore la mesme chose, prenant deux quelconques nombres qui multipliés entr'eux produisent le nombre exposant proposé: Car les signes cossiques d'iceux, composent le signe cossique dudit nombre exposant proposé. Comme 3 & 4 desquels les signes cossiques sont *c.* & *q.* multipliez entr'eux produisent 12, dont le signe cossique sera *qqc.*

Or le contraire de ce que dessus, se fera rendant à chasque caractere incomposé son exposant: puis multipliant iceux exposans ensemble. Comme pour exemple, si nous voulons auoir l'exposant de *qqc.* nous rendrons à chasque caractere son exposant particulier, c'est à sçauoir, 2, 2, 3, lesquels multipliez ensemble font 12, qui sera l'exposant dudit signe cossique *qqc.* & ainsi faut-il entendre des autres.

De la numeration des nombres coſſiques.

CHAP. III.

LA numeration des nombres coſſiques eſt facile, les choſes cy-deuant dictes eſtans bien entendues: Car quand ils ſont poſez ſeuls comme 5 ℞ ou 8 ⓠ. ou 20 ℂ. & c. ils s'expriment ainſi, 5 racines, ou 8 quarrez, ou 20 cubes, & c; mais quand ils ſont propoſez conioincts entr'eux par ce ſigne + au milieu, ou par celuy-cy —: comme 5℞ + 8ⓠ; ou 8ⓠ — 5℞; ou 20ℂ + 8ⓠ —, : leſquels deux ſignes + & — ont leur ſignification contraire: car ceſtuy-cy +, eſt dict ſigne d'adiouſter, & ſignifie plus; mais celuy-cy —, eſt appellé ſigne de ſouſtraire, & denote moins: & les nombres auſquels eſt interpoſé le ſigne +, ſont dits compoſez: mais ceux auſquels interuient le ſigne —, ſont nommez diminuez: & finalement ceux auſquels l'vn & l'autre ſigne eſt interpoſé, ſont appellez mixtes: iaçoit que tous pourroient eſtre dits compoſez. Partant donc ce compoſé 5℞ + 8ⓠ, s'exprime 5 racines plus 8 quarrez: mais ce diminué 8ⓠ — 5℞: 8 quarrez moins 5 racines: & ce mixte-cy 20ℂ + 8ⓠ — 5, 20 cubes plus 8 quarrez moins 5 vnitez: car comme il a eſté dit, le nombre qui n'a point de caractere coſſique apres ſoy, ſignifie vn nombre abſolu compoſé d'vnitez.

Or ces ſignes + & — ſont touſiours referez aux nombres qui les ſuiuent, & le nombre q. i precede n'eſt à l'vn ny à l'autre deſdits ſignes. Or le ſens des nombres compoſez, diminuez, ou mixtes eſt facile: car quand nous diſons 5℞ + 8ⓠ, nous entendions 5 racines enſemble auec 8 quarrez, c'eſt à dire 13

vnitez si la racine est 2, & le quarré 4: ainsi aussi quand nous disons 8 7—5 R, nous entendons que de 8 quarrez sont ostez 5 racines; c'est à dire que le nombre proposé est 22 vnitez, si la racine est 2, & le quarré 4: & le mesme faut-il dire des autres.

De l'addition & soustraction des nombres cossiques.

CHAP. IV.

QVand il faut adiouster vn nombre cossique à vn nombre cossique d'autre denomination ou caractere, l'addition se fait mettant ce signe + au milieu, & vient vn nombre composé: comme ces deux nombres 6 R & 8, adiouſtez ensemble sont 6 R + 8: de mesme 6 R & 8 7, sont 6 R + 8 7. &c.

Mais quand il faut adiouster vn nombre cossique à vn autre nombre cossique de mesme appellation ou caractere, les nombres se doiuent adiouster, & à la somme apposer le mesme caractere cossique: comme ces nombres 47 & 99 adiouſtez ensemble, font 139: de mesme 5 R & 4 R, font 9 R, &c.

Par mesme raison, quand il faut soustraire vn nombre cossique d'vn nombre cossique d'autre denomination, la soustraction se fait mettant ce signe — au milieu, & fait vn nombre diminué: comme pour exemple, ce nombre 6 R osté de 87, reste 8 7—6 R; de mesme 12 de 6 R, restent 6 R—12, &c.

Mais quand il faut soustraire vn nombre cossique d'vn autre nombre cossique de mesme caractere, on doit soustraire le nombre du nombre, & au reste apposer le mesme caractere: comme 4 R de 9 R, restent 5 R: & 9 de 205, restent 116.

Mais quand il faut adiouſter des nombres coſſiques compoſez, diminuez, & mixtes, ou oſter l'vn de l'autre, il les faut poſer l'vn au deſſous de l'autre, tellement que les nombres de meſme appellation ſe reſpondent entr'eux. Que ſi en l'vn ou l'autre d'iceux n'eſt trouué vn nombre reſpondant à quelqu'vn, au lieu de ſa figure ſera poſé o auec le ſigne +. & eſtans ainſi conſtituez, ſeront adiouſtez les nombres de meſme appellation, ou oſtez l'vn de l'autre, & les ſommes, ou nombres reſtez, ſouſcrits en leurs propres lieux, auec les meſmes ſignes + ou —, qui ſeront trouuez és nombres adiouſtez, ou ſouſtraicts.

Exemples de l'addition.

ℛ. N.	ℊ. ℛ. N.	c. N. ℊ.
6 + 8.	7 + 8 — 5.	7 + 8 — 3.
7 + 10.	3 + 9 — 8.	4 + 11 — 5.
13 + 18.	10 + 17 — 13.	11 + 19 — 8.

c. ℊ. ℛ. N.	ß. ℊℊ. ℛ. N. ℊ.
4 + 11 + 0 — 6.	7 + 0 + 8 — 5 + 4.
3 + 0 + 8 — 4.	4 + 9 + 6 — 9 + 0.
7 + 11 + 8 — 10	11 + 9 + 14 — 14 + 4.

Exemples de la ſouſtraction.

c. ℊ. ℛ. N.	c. N. ℊ.
7 + 11 + 8 — 10.	11 + 19 — 8.
3 + 0 + 8 — 4.	4 + 11 — 5.
4 + 11 + 0 — 6.	7 + 8 — 3.

ß. gg. R. N. g.	g. R. N.
11 + 9 + 14 — 14 + 4.	10 + 17 — 13.
7 + 0 + 8 — 5 + 4.	7 + 8 — 5.
4 + 9 + 6 — 9 + 0.	3 + 9 — 8.

Quand il reſte + 0, ou — 0, il n'en faut tenir compte, comme au premier exemple, ou il reſte 4c + 11q + 0R — 6N, ſera ſeulement 4c + 11q — 6.

Que ſi en l'addition ou ſouſtraction, l'vn des nombres auoit le ſigne +, & l'autre —, il faudroit changer d'eſpece : c'eſt à dire qu'en l'addition, il faut ſouſtraire le moindre du plus grand, & au nombre reſtant donner le ſigne du plus grand nombre duquel a eſté faicte la ſouſtraction.

g. R.	gc. ß. gg. c. R. N.
6 + 8.	7 + 0 + 8 + 0 — 4 + 8.
2 — 10.	7 + 5 — 11 — 11 + 0 + 0.
8 — 2.	14 + 5 — 3 — 11 — 4 + 8.

Mais s'il falloit adiouſter ces deux nombres 12c + 6q — 8R + 7, & 12R — 5c — 3q — 9, il les faudroit poſer comme enſuit.

c. g. R. N.
+ 12 + 6 — 8 + 7.
— 5 — 3 + 12 — 9.
7 + 3 + 4 — 2.

Mais en la ſouſtraction, il faut adiouſter les nom-

bres ensemble, & donner à la somme le signe du nombre superieur, duquel doit estre faicte la soustraction.

Exemples.

q. R.	qc. ß. qq. c. R. N.
8 — 2.	14 + 5 — 3 — 11 — 4 + 8.
6 + 8.	7 + 0 + 8 + 0 — 4 + 8.
2 — 10.	7 + 5 — 11 — 11 — 0 + 0.

Que s'il aduenoit qu'aux deux nombres de la soustraction fussent mesme signe, & que le nombre à soustraire fust plus grand que celuy duquel il faut soustraire, il faudroit oster le moindre nombre du plus grand, & au reste donner le signe contraire, comme il appert és exemples suiuans.

q. R.	q. R. N.	c. q. N.
6 + 8.	9 + 4. — 5.	6 — 5. + 3.
2 + 10.	4 + 7 — 8.	7 — 9 + 10.
4 — 2.	5 — 3 + 3.	— 1 + 4 — 7.

Et d'autant que le signe — n'est pas bien disposé au premier nombre, le reste du dernier exemple doit estre posé ainsi 4q — 1c — 7.

Or tous les preceptes de l'addition & soustraction enseignez cy-dessus, au regard des signes + & —, peuuent estre retenus en memoire par les deux reigles suiuantes.

1. *A mesmes signes on doit poser le mesme signe, sinon en la soustraction quand les nombres sont posez a rebours.*

car alors le ſuperieur eſt ſouſtraict de l'inferieur, & de + eſt faict —: mais de — eſt faict +.

2. *Les ſignes diuers changent l'eſpece de l'operation: & en l'addition eſt poſé le ſigne du plus grand nombre: mais en la ſouſtraction eſt poſé le ſigne du nombre ſuperieur.*

Quant à la preuue de l'addition & ſouſtraction, elle ſe fait en deux manieres: Pour la premiere, l'addition preuue la ſouſtraction, & la ſouſtraction l'adition, tout ainſi qu'on fait és nombres abſolus.

Exemples de la preuue des trois dernieres additions & ſouſtractions.

q. R.	*qc. ß. qq. c. R. N.*	*c. q. R. N.*
8—2.	14+5—3—11—4+8.	7+3+4—2.
2—10.	7+5—11—11+0+0.	—5—3+12—9.
6+8.	7+0+8+0—4+8.	12+6—8+7.

Preuue de la ſouſtraction.

c. R.	*q. R. N.*	*c. q. N.*
4—2.	5—3+3.	—1+4—7.
2+10.	4+7—8.	+7—9+10.
6+8.	9+4—5.	6—5+3.

Pour faire autrement ladite preuue, il faut conſtruire vne table auec quelques progreſſions Geometriques, commençant à l'vnité, comme il appert en la page ſuiuante.

Par apres, il faut resoudre les nombres cosiques à adiouster selon aucunes d'icelles progressions en nombres absolus, puis les adiouster ensemble, ou

N	ℛ	q.	c.	qq.	ß.	qc.	bß.	qqq.	cc.
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

soustraire l'vn de l'autre, selon les signes + ou —, & puis apres soient semblablemẽt resouls les nombres cosiques de la somme recueillie ; & si l'addition a esté bien faite, lesdits nombres resouls de la somme recueillie seront égaux aux nombres resous proposez à adiouster ; comme pour exemple, nous auons trouué cy-deuant que 6q+8ℛ adiouſtez auec 2q—10ℛ font 8q—2ℛ : pour en faire donc la preuue, nous resoudrons en nombres absolus les deux nombres à adiouster, sçauoir est 6q+8ℛ, & 2q—10ℛ ; & prenant la resolution en la progression dont la racine est 2, 6q font 24, & 8ℛ font 16, lesquels 24 & 16 ioincts ensemble, à cause du signe + font 40 : de mesme 2q font 8, qui adiouſtez à 40 (car le signe + est tousiours entendu estre au nombre qui n'a nul signe appolé) font 48, & 10ℛ font 20, qui soustraits de 48, à cause du signe—, reste pour la somme de l'addition 28 : & resoluant 8—2ℛ, qui est la somme recueillie de l'addition, viendront aussi 28 : & partant l'addition a esté bien faite.

Quant à la preuue de la soustraction, elle se faict en la mesme maniere : car les nombres cossiques d'icelle estans reduits en nombres absolus, & les nombres à soustraire estans adioustez aux restans, doiuent estre esgaux aux nombres dont la soustraction a esté faite : comme pour exemple, nous auõs cy deuant trouué que 7c—9q+10 N, soustraits de 6c—5q+3 N, laissent 4q—1c—7 N : donc 7c—9q + 10 N, resolus en nombres absolus selon la progression dont la racine est 3 font 118 ; & 4q—1c—7, font 2, qui adioustez à 118, font 120 ; & 6c—5q+3 N font aussi 120 : & partant la soustraction a esté bien faite.

De la multiplication & diuision des nombres cossiques.

CHAP. V.

QVand vn nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre absolu, le produict a mesme denomination cossique ; comme pour exemple 4ℜ ou 8q estans multipliez par 3. prouiennent 12ℜ, ou 24q, &c. Item 12q, ou 24ℜ estans diuisez par 4, viennent 3q, ou 6ℜ.

Mais quand le nombre cossique est multiplié, ou diuisé par vn nombre cossique, le produict est d'autre denomination, sçauoir est de celle qui se faict des exposans ioincts ensemble, quant à la multiplication : comme pour exemple 4ℜ multipliees par 7ℜ font 28q, car l'vnité qui est exposant de ce caractere cossique ℜ, estant adioustee à l'vnité, faict 2, exposant de ce caractere q. Pareillement 4ℜ multipliees par 5q font 20c : car 1 est exposãt de ℜ, & 2 de q.

lesquels adiouſtez enſemble, ſont 3 expoſans de *c*. Et quant à la diuiſion, le quotient à la denomination du nombre reſtant, l'expoſant du diuiſeur eſtant oſté de l'expoſant du diuiſé: Comme pour exemple $36qc$, diuiſés par $4qq$, le quotient eſt $9q$: car 4 expoſant de qq eſtant oſté de 6 expoſant de qc, reſte 2 expoſant de q; ainſi auſsi $18qq$ eſtans diuiſez par $3c$, vient $6\mathcal{R}$, & $8q$ par $8q$, vient 1 N, &c.

Quand le nombre coſsique compoſé, ou diminué, eſt multiplié ou diuiſé par vn nombre abſolu ou coſsique, tant ſimple que compoſé ou diminué, outre ce qui eſt dit cy deſſus, il faut ſur tout auoir egard aux ſignes + & —: Car quand les nombres ſe multiplians ou diuiſans ont vn meſme ſigne, il faut appoſer au produict le ſigne +: mais quand l'vn d'iceux eſt +, & l'autre —, il faut donner au produict le ſigne —: ce qui eſt aiſé à retenir en memoire par la regle ſuiuante.

Aux ſignes ſemblables faut poſer +; *mais aux diſſemblables faut poſer* —.

Exemples de la multiplication.

$7q-4\mathcal{R}.$	$7q+4\mathcal{R}.$	$7q-4\mathcal{R}.$
$9.$	$9\mathrm{N}$	$9\mathcal{R}.$
$63q-36\mathcal{R}.$	$63q+36\mathcal{R}.$	$63c-36q.$

$8q+9.$	$8q-9.$
$8q+9.$	$8q-9.$
$72q+81.$	$-72q+81.$
$64qq+72q$	$64qq-72q$
$64qq+144q+81.$	$64qq-144q+81.$

$6q+8\mathcal{R}-6N.$
$2q-4N.$

$12qq+16c-12q.$
$-24q-32\mathcal{R}+24N.$

$12qq+16c-36q-32\mathcal{R}+24N.$

$9q+8N-3\mathcal{R}.$
$7c-4qq-8q.$

$63ss+56c-21qq.$
$-36qc-32qq+12ss.$

$-36qc+75ss-125qq+80c-64q.$

Et d'autant que comme il a desia esté dit, le signe — n'est bien au commencement, on doit colloquer le produit de ce dernier exemple, ainsi qu'il ensuit, $75\beta-36qc-125qq+80c-64q.$

Exemples de la diuision.

Diuiser $3\mathcal{R}+2\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$ [$9\mathcal{R}+6$ $\mathcal{A}$

Item $\mathcal{A}3c+3\mathcal{R}q+2\mathcal{T}\mathcal{R}$ par $3\mathcal{R}$ $3\mathcal{R}$ $3\mathcal{R}$ [$5q+4\mathcal{R}+3N.$

Item $\mathcal{A}5c+3\overset{4}{\mathcal{R}}q-2\overset{3}{\mathcal{T}}\mathcal{R}$ par $8\mathcal{R}$ $8\mathcal{R}$ $8\mathcal{R}$ [$5\frac{5}{8}+4\frac{1}{2}\mathcal{R}-3\frac{3}{8}N.$

Diuiser encore $3\mathcal{R}q-3\overset{-4\mathcal{R}}{\mathcal{R}}+2\mathcal{A}$ par $3\mathcal{R}-3N$ $3\mathcal{R}-3N.$ [$6\mathcal{R}-8N.$

zz
Item zzqq + 2ϕc — 3ϕq — 3qz + z4N [6q + 8z — 6N
par zq + ϕz — 4N
zq + ϕz — 4N
zq + ϕz — 4N

— 1 + 1
Diuiser encore 2c + 0q + ϕz + 1 [1q — 1z + 1.
par 2z + 1
1z + 1
1z + 1

Et conuient noter qu'en toutes diuisions des nombres cossiques, les denominations doiuent estre continuees d'ordre, & partant quand il y a quelque denomination de manque, il faut poser o au lieu d'icelle, comme appert és deux precedentes exemples, la derniere desquelles i'ay fait en ceste maniere. Premierement i'ay posé le diuiseur 1z+1 au dessous du diuidande 1c+0q, & trouue que 1z est en 1c; 1q que ie pose au quotient, & multiplie ledit 1q par mon diuiseur, & vient, 1c+1q, que i'oste de 1c+0q, & reste de tout le nombre à diuiser —1q+0z+1: puis apres i'aduance mon diuiseur sous —1q+0z, & trouue qu'il y est —1z, que ie pose au quotient, & multiplie ladite 1z par ledit diuiseur, & vient —1q—1z, que ie soustrais de —1q+0z, & reste de tout le nombre à diuiser 1z+1, sous lequel ie pose le diuiseur, & trouue qu'il y est 1N precisement.

Or quand le diuiseur est nombre composé ou diminué, & qu'il ne peut diuiser precisément, alors il faut seulement interposer vne ligne entre-deux,

ainſi qu'és fractions, comme és deux exemples ſuiuans.

8β diuiſés par $2q+4$. $8q-9\mathfrak{B}$ diuiſés par $4\mathfrak{B}+3$.

Les quotiens ſont

$$\frac{8\beta}{2q+4}. \qquad \frac{8q-9\mathfrak{B}.}{4\mathfrak{B}+3.}$$

Il faut faire en la meſme maniere, quand vn nombre coſſique, ſimple ou compoſé doit eſtre diuiſé par vn nombre coſſique ſimple de plus grande denomination: comme $8q$ diuiſez par $2qc$ conſtituent ceſte fraction $\frac{8}{2qc}$. De meſme $9q+4$ eſtans diuiſez par $3c$, font $\frac{9q+4}{3c}$, &c.

Reſte à enſeigner à faire la preuue de la multiplication & diuiſion: laquelle ſe fait en deux manieres. Premierement la diuiſion preuue la multiplication; & la diuiſion ſe preuue par la multiplication, tout ainſi qu'en l'Arithmetique vulgaire.

L'autre ſorte de preuue ſe fait par la reſolution des nombres coſſiques, ſelon quelque racine des progreſſions Geometriques contenues au chapitre precedent. Car les nombres coſſiques reſous, eſtans multipliés entr'eux, doiuent produire vn meſme nombre que le produit des nombres coſſiques auſſi reſous ſelon la meſme racine: & le nombre coſſique qu'il faut diuiſer reſoult, doit produire autant diuiſé par le diuiſeur reſoult, que le quotient auſſi reſoult. Comme pour exemple, nous auons trouué cy-deuant que $6q+8\mathfrak{B}-6N$ multipliez par $2q-4N$, produiſent $12qq+16c-36q-32\mathfrak{B}+24N$. Pour donc en faire la preuue, nous reſoudrons les deux nõbres coſſiques en nombres abſolus, & viendront (ſelon la progreſſion dont 2 eſt ra-

cine) 34, & 4, qui multipliez entr'eux produiſent 136: mais la reſolution du produict $12qq+16\mathcal{R}-36q-32\mathcal{R}+24$ N, eſt auſſi 136: & partant la multiplication a eſté bien faite. Nous auons auſſi trouué que $1c+1$, diuiſez par $1\mathcal{R}+1$, le quotient eſt $1\mathcal{R}-1\mathcal{R}+1$, lequel quotient donne 3 par la reſolution de la progreſſion dont la racine eſt 1: mais les deux nombres coſſiques reſolus par la meſme progreſſion, ſont 9 & 3; & 3 diuiſant 9, le quotient eſt auſſi 3: & partant la diuiſion a eſté bien faite.

Des fractions des nombres coſſiques.

CHAP. VI.

EN l'Algorithme des fractions coſſiques, les operations ſont preſque ſemblables qu'és fractions vulgaires: il n'y a qu'à adiouſter ce qui concerne les caracteres coſſiques, & les ſigne + &—. Et premierement quant à la numeration, ceſte fraction $\frac{3}{8\mathcal{R}}$ ſignifie 3 vnitez eſtre diuiſees par $8\mathcal{R}$, & $\frac{7q}{9}$ denote 7 quarrez eſtre diuiſez par 9 vnitez: Item $\frac{2q+8q}{6c}$ ſignifie que ce nombre $9qq+8q$, eſt diuiſé par $6c$, &c.

Quant à l'abbreuiation elle ſe fait en deux manieres: Car ou les nombres ſeront abbreuiez, comme és fractions vulgaires, ſans toucher aux caracteres coſſiques; ou bien ſeront auſſi abbreuiez leſdits caracteres coſſiques: comme ceſte fraction $\frac{15}{5\mathcal{R}}$, quant aux nombres, elle ſera reduicte à ceſte-cy $\frac{3}{1\mathcal{R}}$: car la plus grande commune meſure des nombres d'icelle fraction eſt 5. Semblablement ceſte autre fraction $\frac{2q+36}{81}$ ſera reduite à ceſte cy $\frac{2q+4}{9}$ pour ce que la plus grande commune meſure eſt 9: Item $\frac{5\mathcal{R}+28}{7q+14}$ ſera reduite à $\frac{5\mathcal{R}+4}{7q+2}$: Item $\frac{18q-9\mathcal{R}}{6\mathcal{R}+3q}$ ſera reduite à $\frac{6q-3\mathcal{R}}{2\mathcal{R}+1q}$, &c.

Et quant à l'abbreuiation des caracteres cossiques, elle est faite soustrayant l'exposant du moindre caractere, des exposans des autres caracteres: car si aux nombres restans sont apposés les propres caracteres, l'abbreuiation sera acheuee, quant aux caracteres. Comme ceste fraction $\frac{8q}{2qc}$, quant aux caracteres, sera reduite en celle-cy $\frac{8}{2qq}$; car l'exposant du moindre caractere q, est 2, qui osté de 6, exposant de l'autre caractere qc, reste le nombre absolu 8 au numerateur, & 4 pour l'exposant du denominateur, qui partant sera qq: puis apres quant aux nombres, elle sera reduite à ceste-cy $\frac{4}{2qq}$: Item $\frac{18q-9R}{6R+3q}$ quant aux nombres & caracteres, sera reduite à $\frac{6R-3}{2+1R}$, &c.

Quant à la reduction des fractions cossiques à vn mesme denominateur, elle s'obtient multipliant en croix les numerateurs par les denominateurs; & les denominateurs entr'eux, tout ainsi qu'és fractions vulgaires: comme ces fractions $\frac{3R}{4q}$ & $\frac{4c}{5qc}$, estans reduictes en mesme denomination, seront $\frac{15R}{20qq}$ & $\frac{16q}{20qq}$, &c.

Que s'il faut reduire quelque nombre entier, & vne fraction à mesme denomination: il faudra supposer l'vnité estre denominateur du nombre entier, & poursuiure ainsi que dessus. Comme 6 & $\frac{4R}{7q}$, seront posez ainsi $\frac{6}{1}$ & $\frac{4R}{7q}$: puis estans reduictes comme dessus, elles seront $\frac{42q}{7q}$ & $\frac{4R}{7q}$: Item $\frac{5q}{1}$ & $\frac{4c}{3q}$ seront reduites a $\frac{15qq}{3q}$ & $\frac{4c}{3q}$, &c.

Mais si aux entiers est ioincte quelque fraction, il faudra premierement reduire les entiers en icelle fraction; ce qui se fait multipliant les entiers par le denominateur de la fraction, & adiouſtant au produit le numerateur. Comme si nous voulons

reduite $4q+\frac{2n}{1c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$ à vne mesme denomination, nous multiplierons premierement $4q$ par $1c$, afin que nous ayons ces deux fractions $\frac{4\beta+2n}{1c}$ & $\frac{3q}{1\beta}$, lesquelles nous reduirons à ces deux-cy $\frac{4\beta\beta+2\beta c}{1qq}$ & $\frac{3\beta c}{1qq}$: & ainsi des autres.

Quant aux autres quatre operations des fractions cossiques, sçauoir est, addition, soustraction, multiplication & diuision, elles ne different à celles que nous auons enseignees és fractions de nostre Arithmetique, sinon à raison des caracteres cossiques, & des signes + & —. Parquoy nous mettrons seulement icy des exemples de chaque operation.

Exemples de l'addition.

Adioustant $\frac{3n}{5q}$ auec $\frac{7c}{5q}$ viendront $\frac{3n+7c}{5q}$: car pource que les denominateurs sont semblables, il n'y a qu'à adiouster les numerateurs entr'eux, & à la somme d'iceux souscrire le mesme denominateur. Item si on adiouste $\frac{1n}{2N}$ auec $\frac{4q}{3c}$ viendront pour leur somme $\frac{9qq+8z}{6c}$, c'est à dire $\frac{9qq+8}{6n}$: Item $\frac{4z}{7q}$ adioustez auec $\frac{4z}{22n-3q}$ font $\frac{152q+576n}{84c-21qq}$, qui estans reduits tant au regard des nombres que des signes, font $\frac{64n-192}{28q-7c}$. Item $\frac{9n-2q}{36c}$ adioustez auec $\frac{22qq-8z}{36c}$ font $\frac{22qq-6q+9z}{36c}$, qui reduits comme dessus font $\frac{7c-2q+3}{12q}$. Item $\frac{5q-3n}{7c-2}$ adioustez auec $\frac{3c+2}{2qq+4n}$ font $\frac{22q-6\beta+21c-12q-2}{14\beta\beta+24qq-8n}$.

Exemples de la soustraction.

Ostant $\frac{3c}{2q}$ de $\frac{5c}{2q}$ resteront $\frac{5c-3c}{2q}$: car d'autant que les denominateurs sont semblables, il n'y a qu'à soustraire le numerateur 3 du numerateur $5c$, & au reste $5-3$, apposer le mesme denominateur: mais

si on oste $\frac{3\mathcal{R}}{2N}$ de $\frac{2qq+8q}{6c}$ resteront $\frac{16q}{12c}$, c'est à dire $\frac{4N}{3\mathcal{R}}$. Item $\frac{1}{2q}$ de $\frac{3\mathcal{R}}{4N}$, resteront $\frac{6c-4}{8q}$: Item $\frac{2\mathcal{R}-2}{4N}$ de $\frac{4}{2\mathcal{R}+3}$, resteront $\frac{12-4q}{8N+12}$: Item $\frac{9q+8\mathcal{R}}{2c-6N}$ de $\frac{22c+16q+8}{2c-6N}$ resteront $\frac{22c+7q}{2c-6N}$.

Exemples de la multiplication.

Multipliant $\frac{3}{4\mathcal{R}}$ par $\frac{1}{2\mathcal{R}}$ viennent $\frac{3}{8q}$: Item $\frac{1}{2q}$ par $\frac{2\mathcal{R}}{4}$, vient $\frac{1N}{8q}$: Item $\frac{3N}{4q}$ par $\frac{1q}{2c}$, viendront $\frac{3c}{8q}$: Item $\frac{2\mathcal{R}}{3}$ par $1\mathcal{R}-5$, viendront $\frac{2q-10\mathcal{R}}{3}$: Item $\frac{3\mathcal{R}+2}{4q-12\mathcal{R}}$ par $\frac{2\mathcal{R}-4}{2q+3}$ viendront $\frac{6q-8\mathcal{R}-8}{4qq-12q-36\mathcal{R}}$: Item $\frac{7q+8\mathcal{R}}{5c-22}$ par $\frac{4\mathcal{R}}{5q}-8N$, viendront $\frac{32q-280q-256}{25c-55q}$.

Exemples de la diuision.

Diuisant $\frac{3}{8q}$ par $\frac{1}{2\mathcal{R}}$, viendront $\frac{6\mathcal{R}}{8q}$, ou $\frac{3}{4\mathcal{R}}$: Item $\frac{12\mathcal{R}}{8q}$ par $\frac{1}{4\mathcal{R}}$, viendront, $\frac{4q}{8q}$, ou $\frac{1}{2}$: Item, $\frac{3c}{8q}$ par $\frac{3\mathcal{R}}{4q}$, viendront $\frac{12c}{24q}$, ou $\frac{1}{2\mathcal{R}}$: Item $\frac{2q-10\mathcal{R}}{3}$ par $\frac{2\mathcal{R}}{3}$, viendront $1\mathcal{R}-5$: Item, $\frac{6q-8\mathcal{R}-8}{4qq-12c+12q-36\mathcal{R}}$ par $\frac{2\mathcal{R}+4}{2q+3}$, viendront $\frac{3\mathcal{R}+2}{4q-12}$.

Quant à la preuue de ces quatre operations, elle se fait en la mesme maniere que celle des entiers.

De la regle d'Algebre.

CHAP. VII.

Estant proposee quelque question, soit posé pour le nombre incogneu $1\mathcal{R}$, *(on peut aussi quelquesfois poser plusieurs racines, comme deux, ou trois, ou dauantage pour la cõmodité de la question proposee) laquelle soit examinee selon la teneur de la question, iusques à ce qu'on ait trouué quelque equation: Soit icelle reduite, s'il en est besoin: puis apres, par le nombre du plus grand caractere cossique soit diuisé l'autre nombre de l'equation: Car ou le quotient*

sera le nombre qui estoit cherché, sçauoir est la valeur de la racine posée au commencement, ou bien quelque racine du quotient rendra cogneu le nombre cherché. Or le diuiseur demonstrera par son caractere cossique, quand & quelle racine il faudra extraire du quotient.

Or il appert que ceste regle a quatre parties, dont la premiere est l'inuention d'vne Equation; la seconde, la reduction de l'Equation trouuee; la troisiesme, la diuision d'vn nombre de l'Equation par le nombre du plus grand caractere cossique; & la derniere, l'extraction de quelque racine du quotient de ladite diuision. Mais de ces quatres parties il y en a seulement deux du tout necessaires: sçauoir est la premiere & troisiesme: & quãt aux deux autres, il n'en est pas touſiours besoin. Et auãt que de traicter particulierement de chacune d'icelles, nous les exposerons icy, proposant ce probleme.

Trouuer vn nombre, duquel la tierce & quarte partie estans ostez, le nombre restant soit 10.

Ie pose le nombre incogneu estre 1ℛ; c'est à dire que ie pose 1ℛ estre egale au nombre incogneu que nous cherchons. I'examine dõc 1ℛ selon la teneur de la question, c'est à dire que ie prends d'icelle $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ sçauoir est $\frac{1}{3}$ ℛ, & $\frac{1}{4}$ ℛ, qui font ensemble $\frac{7}{12}$ ℛ, que i'oste de 1ℛ, & restent $\frac{5}{12}$ ℛ. Maintenant ie ratiocine ainsi: puisque 1ℛ est posee esgale à tout le nombre incogneu, $\frac{1}{3}$ ℛ sera esgal au tiers d'iceluy, & $\frac{1}{4}$ ℛ esgal au quart du mesme; & puisque la tierce & quarte partie du nombre total estãt soustraicte, le nombre restant est 10, il s'ensuit que $\frac{1}{3}$ ℛ & $\frac{1}{4}$ ℛ, c'est à dire $\frac{7}{12}$ ℛ, estans ostez de 1ℛ, le nombre restant $\frac{5}{12}$ ℛ estre egal au nombre restant 10, pource que si de choses egales sont ostees cho-

ſes egales, les reſtes ſont egaux. Eſt donc trouuee equation, ou bien egalité entre $\frac{5}{12}$ ℞, & ce nombre 10: car equation n'eſt autre choſe qu'vne egalité de valeur entre deux quantitez, ou choſes diuerſement denommees: & voila quãt à la premiere partie de la regle cy-deſſus. Et pour le regard de la ſeconde partie, qui eſt la reduction, il n'en eſt beſoin en l'equation de noſtre exemple: mais nous monſtrerons cy apres, quand & comment l'equation ſe doit reduire: Et pour le regard de la diuiſion, qui eſt la troiſieſme partie de la reigle; en noſtre equation trouuee entre $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 N, le plus grand caractere coſsique eſt ℞ (c'eſt à dire que ℞ a plus grãd expoſant que N) parquoy ie diuiſe ce nombre 10 par $\frac{5}{12}$, reſte du caractere ℞, & vient au quotiẽt 24, qui eſt le nombre cherché. Parquoy la quatrieſme partie de la reigle d'Algebre n'a lieu en noſtre exẽple: mais quand & qu'elle racine du quotient manifeſtera le nombre incogneu, il ſera enſeigné cy-apres. Maintenant ſi du nombre trouué 24 on prend $\frac{1}{3}$, ſçauoir eſt 8: puis $\frac{1}{4}$, ſçauoir eſt 6: icelles deux parties ſont enſemble 14, qui oſtez des 24, reſte le nombre 10, ainſi qu'il eſtoit requis en la propoſition.

De la reduction d'Equation.

CHAP. VIII.

POur l'intelligẽce de la reduction des equations eſt à noter, que ſi on adiouſte ou ſouſtraict choſes egales de chaſque terme de l'equation, ou bien qu'on les multiplie, ou diuiſe par vn meſme nõbre, qu'il y aura pareillement equation entre les produicts. Cõme pour exemple, s'il y a equation

entre 12ℛ, & 72; oſtant 4ℛ de chaque terme, reſtera encore equation entre 8ℛ, & 72—4ℛ: car puis que 12ℛ ſont egales à 72, 1ℛ ſera egale à 6, & partant 8ℛ ſeront egales à 48, & 4ℛ à 24, qui oſtez de 72, reſtera auſſi 48. Item ſi à chaque terme de l'equation d'entre 8ℛ, & 72—4ℛ, on adiouſte 10, viendra equation entre 8ℛ+10, & 8ℛ—4ℛ. Car il eſt manifeſte que chaque terme vaut 58. Item s'il y a equation entre 3ℛ+12, & 72—7ℛ; multipliant chaque terme par 2, viendra auſſi equation entre 6ℛ+24, & 144—14ℛ: car l'vn & l'autre terme faict 60. Ainſi auſſi ſi nous diuiſons par 6 chaque terme de ceſte derniere equation, ſera produit equation entre 1ℛ+4, & 24—2⅓ℛ: car l'vn & l'autre terme fait 10.

Maintenant quand en la ſolution de quelque queſtion on eſt paruenu à l'equation; ſi le plus grād caractere coſſique, par le nombre duquel (ſelon la regle d'Algebre) on doit diuiſer l'autre terme de l'equation n'eſt poſé ſeul en l'vn & l'autre terme d'icelle equation, ou qu'eſtant ſeul en l'vn il ne le ſoit en l'autre, alors la diuiſion ne ſe peut faire. Comme pour exēple, ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ+12, & 78—2ℛ, la diuiſion ne ſe peut faire, pource qu'en chaque terme eſt trouué ce caractere ℛ, & ceſtuy-cy N. Semblablement ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ—12, & 42: tu vois que la diuiſion ne ſe peut auſſi faire par 9, nombre du plus grand caractere coſſique ℛ, pource que 9ℛ ne ſont pas poſees ſeules, ains 9ℛ—12.

Ainſi auſſi, ſi l'equation eſt trouuee entre 9ℛ, & 72—3ℛ: Item entre 17—3ℛ, & 108: Item entre 17—48, & 8ℛ: Item entre 108+8ℛ, & 17—12ℛ+

60, &c. il eſt manifeſte qu'en toutes ces equations la diuiſion ne ſe peut faire comme requiert la regle d'Algebre. Parquoy aduenãt ſéblables equations, elles doiuent eſtre reduites en autres, eſquelles le plus grand caractere coſſique ſoit ſeul en vn terme de l'equation, & ne ſoit reperé en l'autre, & eſquelles auſſi aucun caractere coſſique ne ſoit poſé deux fois. Or ceſte reduction ſe fera ainſi qu'il enſuit.

Si vne particule de l'equation a le ſigne —, il la faut tranſpoſer, c'eſt à dire adiouſter à l'autre terme: comme ſi vne equation eſt trouuee entre 9ℛ —12, & 42, nous adiouſterons 12 à chaque terme, & nous aurõs l'equation entre 9ℛ, & 54: Item vne equation eſtant trouuee entre 9ℛ & 72—3ℛ; adiouſtant 3ℛ à chaque terme, nous aurons l'equation entre 12ℛ, & 72: Item vne equation eſtant trouuee entre 2ℚ—3ℛ, & 104; adiouſtant 3ℛ à chaque terme, l'equation ſera entre 2ℚ, & 3ℛ+104. Item vne equation eſtant entre 5ℚ—40, & 10ℛ: adiouſtant 40, nous aurons vne equation entre 5ℚ & 10ℛ+40. Mais quand vne particule a le ſigne +, il la faut ſouſtraire: comme ſi l'equation eſt trouuee entre 11ℛ +12, & 78, nous ſouſtrairons 12, & reſtera l'equation entre 11ℛ, & 66: Item l'equation eſtãt trouuee entre 3ℛ + 6, & 24: oſtant 6, reſtera l'equation entre 18ℛ, & 18: Item ſi vne equation eſt trouuee entre 5ℚ+20, & 100, nous oſterons 20, & reſtera l'equation entre 5ℚ & 80: Item vne equation eſtant entre 3ℚ+2ℛ, & 56; oſtant 2ℛ, l'equation reſtera entre 3ℚ, & 56—2ℛ. Que ſi l'vn & l'autre ſigne + & — ſont en vne equation, il faut adiouſter la particule du ſigne —, mais ſouſtraire celle du ſigne +: cõme ſi vne equation eſt trouuee entre 9ℛ+12,

& 78—2R, nous adiousterons 2R à chasque terme & l'equation sera entre 11R+11, & 78: puis nous en osterons 12, & restera l'equation entre 11R, & 66: Item si vne equation est entre 59—3R, & 39 —+20, nous adiousterons 3R, & l'equation sera entre 59, & 39+3R+20: & ostant de ceste cy 39, restera l'equation entre 29, & 3R+20: Item si vne equation est trouuee entre 108+8R, & 29—12R+60: nous adiousterons premierement 12R, & l'equation viendra entre 108+20R, & 29—60: & d'icelle estans ostez 60, restera l'equation entre 29, & 20R +48. Que s'il aduient quelque equation, comme entre 6R—10, & 10R—34, en laquelle les nombres 10, & 34 ont mesme signe —, il faut oster 10 de chasque terme, & restera l'equation entre 6R, & 10R—24: & d'autant qu'en icelle les nombres 6R & 10R ont aussi vn mesme signe +, il faut oster le moindre nombre 6R de chasque terme, & restera l'equation entre 0R, & 4R—24: & adioustant 24 de part & d'autre, viendra l'equation entre 24, & 4R. Soit derechef equation entre 54+4R, & 17—6R+30: Premierement pource que +4R, & —6R, ont signes diuers, il faut adiouster 4R à chasque terme, & sera l'equation entre 54, & 17—10R+30: puis apres, d'autant que 54 & 30 ont vn mesme signe, il faut soustraire 30 & restera equation entre 24, & 17—10R: Tiercement ie transpose—10R, afin que l'equation soit entre 17, & 10R+24: & ainsi des autres.

Quant à la reduction des equatiõs qui sont trouuees en fractions, elle se faict la reduisant en equation d'entier par multiplication en Croix. Comme si vne equatiõ est trouuee entre $\frac{3R+12}{5}$ & $\frac{169-19R}{3R}$:

multipliant ces fractions en croix, ſçauoir eſt le numerateur de la premiere par le denominateur de la ſeconde, mais le numerateur de la deuxieſme par le denominateur de la premiere, ſera fait equation entre $9q + 36\mathcal{R}$, & $180q - 990\mathcal{R}$, c'eſt à dire entre $1\mathcal{R} + 4$, & $20\mathcal{R} - 110$, qui eſtant reduite, comme dict eſt cy-deſſus, l'equation ſera entre $19\mathcal{R}$, & 114: Item vne equation eſtant trouuee entre $\frac{4\mathcal{R}+18}{2\mathcal{R}}$, & $\frac{12\mathcal{R}-58}{2}$: eſtant reduite par la multiplication en croix, viendra equation entre $8\mathcal{R} + 36$, & $12q - 38\mathcal{R}$ qui reduite par tranſpoſition ſera entre $66\mathcal{R} + 36$, & $12q$.

Que ſi vne équation eſt trouuee entre vne fraction, & quelque autre choſe: comme entre $\frac{5}{4+1\mathcal{R}}$ & vn eſcu, ou vn degré, ou vne heure, ou vne minute, &c. Il faut poſer vne vnité pour ceſte choſe, ainſi $\frac{1}{1}$, afin que l'equation ſoit entre $\frac{5}{4+1\mathcal{R}}$ & $\frac{1}{1}$, laquelle par la multiplication en croix, ſera reduite à l'equation d'entre 5, & $4 + 1\mathcal{R}$.

Quant à la reduction d'equation d'entre nombres coſſiques irrationnaux, & vn nombre abſolu, nous l'enſeignerons à la fin du chapitre 22.

S'il ſe rencontre auſſi quelque equation en laquelle il n'y ait aucun nombre abſolu, il faudra abbreuier les caracteres coſſiques: comme pour exemple, l'equation d'entre $2q$, & $12\mathcal{R}$ ſera reduite à l'equation d'entre $2\mathcal{R}$ & 12: Item l'equation d'entre $1qc$, & $1\beta + 2qq$ ſera reduite à l'equation d'entre $1q$, & $1\mathcal{R} + 2$, &c. Mais ceſte reduction n'eſt du tout neceſſaire deuant l'extraction des racines des nombres coſſiques ſimples, comme nous dirons au chapitre 10.

De la diuiſion que requiert la regle d'Algebre.

CHAP. IX.

LA reduction eſtant faite, la regle d'Algebre dit que par le nombre du plus grand caractere coſſique (laiſſant iceluy caractere) on diuiſe l'autre nombre de l'equation: comme ſi l'equation eſt trouuee entre 7 ℛ & 42: diuiſant 42 par 7, nombre du caractere coſſique ℛ, viendra au quotient 6, qui ſera la valeur d'vne racine: Item vne equation eſtãt trouuee entre 129, & 66 ℛ + 36: diuiſant 66 ℛ + 36 par 11, le quotient donnera $5\frac{1}{11}$ ℛ + 3 pour la valeur d'vn quarré: Item ſi vne equation eſt entre $\frac{1}{3}9$, & 6 ℛ + $13\frac{1}{3}$, nous diuiſerons 6 ℛ + $13\frac{1}{3}$ par $\frac{1}{3}$, & le quotient donnera 18 ℛ + 40, pour la valeur d'vn quarré: Item vne equation eſtant entre 3 ℭ & 9 ℭ + 120, nous diuiſerons 9 ℭ + 120 par 3, & le quotient dõnera 3 ℭ + 40 pour la valeur d'vn quarré de cube, &c.

De l'extraction des racines dont eſt fait mention en la regle d'Algebre.

CHAP. X.

AYant fait la reduction des caracteres coſſiques, ſi le plus grand caractere coſſique eſt ℛ, le quotient de la diuiſion mentionnee cy deſſus manifeſtera le nombre que vaut vne ſeule racine, comme il a eſté dit au chapitre precedent: ou bien toutes & quantesfois qu'vn nombre coſſique de grande denomination ſera egal à vn nombre coſſique de la prochaine moindre denomination: eſtant diuiſé le nombre de la moindre denomination par le nombre de la plus grande, le quotient donnera la valeur d'vne ſeule racine, encore que

l'abreuiation des caracteres ne soit faite. Comme si ſſ sont egaux à 30qq; 30 estans diuisez par 5, le quotient 6 sera la valeur d'vne seule racine. Mais si le plus grand caractere cossique, estant seul d'vne part de l'equation, est plus grand que racine, & de l'autre part soit vn nombre absolu, il faudra extraire du quotient la racine qu'iceluy caractere signifie: comme si le caractere est q, il faudra extraire la racine quarree; si c, la cubique; si qq, la quarree de quarree, &c laquelle sera la valeur d'vne seule racine. Comme pour exemple, Si vne equation est entre 5q, & 720: ayant fait la diuision, il faudra chercher la racine quarree du quotient 144: Item si 10c sont egaux à 270, il faudra ayant fait la diuision extraire la racine cubique du quotient 27: Semblablement si 8qq sont egaux à 128, il faudra trouuer la racine quarree de quarré du quotient. Et afin qu'on sçache generalement quelle racine il faut tirer du quotient, quand deux nombres cossiques non collateraux sont egaux entr'eux, desquels l'vn ny l'autre n'est nombre absolu, il faut abbreuier les caracteres, afin que l'equation se face entre N, & nombre cossique; comme si vne equation est entre 10qc & 80q, soit reduite icelle à l'equation d'entre 10c & 80: la diuision estant donc faite, il faudra tirer la racine cubique du quotient 8, & ainsi des autres.

Or la maniere d'extraire les racines des nombres absolus est suffisamment enseignee en nostre Practique d'Arithmetique; c'est pourquoy nous enseignerons seulement icy la maniere d'extraire les racines des nombres cossiques. Si donc il faut extraire quelque racine d'vn nombre cossique

ſimple ſoit priſe la racine d'iceluy nombre, delaiſſant le caractere, l'expoſant duquel ſoit diuiſé par l'expoſant du caractere qui denõme la racine qu'il faut extraire, & viendra l'expoſant du caractere, par lequel ſera denõmée la racine cherchee. Comme s'il faut trouuer la racine quarree de ce nombre 144 q; ayãt pris la racine quarree d'iceluy nombre 144, qui eſt 12, ſoit diuiſé l'expoſant de ce caractere q, par l'expoſant du caractere q, ſçauoir eſt 2 par 2, & viendra 1 qui eſt expoſant du caractere ℞: 12℞ eſt donc racine quarree du nombre 144 q. Car ſi ce nombre 12℞ eſt multiplié en ſoy, ſera produict le nombre propoſé 144 q.

Derechef, qu'il faille trouuer la racine quarree de 144 qc; ayant pris la racine quarree d'iceluy, qui eſt 12, ſoit diuiſé l'expoſant de ce caractere qc, ſçauoir eſt 6, par l'expoſant de racine quarree, qui eſt 2, & viendra 3, expoſant du caractere c: donc 12c eſt racine quarree du nombre 144 qc. Ainſi auſſi la racine cubique de ce nombre 64c ſera 4℞: Car la racine cubique du nombre 64 eſt 4, & l'expoſant du caractere cube, ſçauoir eſt 3, eſtant diuiſé par 3, produict l'vnité expoſant de ℞. Item la racine quarree de ce nombre 25 qq, ſera 5 q. Et la racine quarree de quarree de ce nombre 16 qqq, ſera 2 q. Semblablement la racine ſur ſolide de ce nombre 32 $q\beta$, ſera 2 q. Mais la racine quarree de quarree de ce nombre 81 qq, ſera 3℞, &c.

Que ſi vn nombre n'a la racine cherchee, ou que par la diuiſion des expoſans ne ſoit pas produict vn nombre expoſant entier, le nombre coſſique propoſé n'a pas la racine deſiree. Cõme par exemple, ce nombre 16c, n'a pas de racine quarree ou cubique,

que, car encore que le nombre 16 ait racine quarrée, sçauoir 4, si est-ce neantmoins qu'icelle racine ne se peut prendre à cause que diuisant 3, exposant du caractere c, par 2 exposant de la racine quarree, prouient $1\frac{1}{2}$, qui ne correspond à aucun caractere cossique. Derechef, encore que diuisant 3, exposant de ce caractere c par 3, exposant de la racine cubique, prouienne 1, exposant de ce caractere ℔, toutesfois icelle racine cubique ne se peut prendre parce que le nombre 16 n'est nombre cube, &c.

Quant à l'extraction des racines de nombres cossiques composez & diminuez, il est à notter qu'on n'a point encore trouué (au moins que ie sçache) de maniere certaine & vniuerselle pour ce faire, sinon que les exposans des trois nõbres cossiques de l'equation ayent vn mesme excez entr'eux, c'est à dire qu'ils soient en proportion Arithmetique; & telles sont les equations suiuantes.

1q.	6℔+72.	les exposans sont 2. 1. 0.
1q.	72—6℔.	les exposans sont 2. 0. 1.
1q.	14℔—48.	les exposans sont 2. 1. 0.
1qq.	18q+648.	les exposans sont 4. 2. 0.
1qq.	72ȷ—4q.	les exposans sont 4. 0. 2.
1qq.	4337—41616.	les exposans sont 4. 2. 0.
1qc.	200c+3456.	les exposans sont 6. 3. 0.
1qc.	ȷ120—16c.	les exposans sont 6. 0. 3.
1qc.	800c—156751.	les exposans sont 6. 3. 0.
1qqq.	1000qq—185076881.	les exposans sont 8. 4. 0.
1qqq.	2146ȷ1701—2099.	les exposans sont 8. 0. 4.
1qqq.	1000099—78461119.	les exposans sont 8. 4. 0.
1qß.	80ß+59609.	les exposans sont 10. 5. 0.
1qß.	7424—200ß.	les exposans sont 0. 0. 5.
1qß.	2000ß—999424.	les exposans sont 10. 5. 0.
&c.		

Quand les expoſans gardant la progreſſion Arithmetique ſont tous plus grands que 0, il les faut abbreuier par la ſouſtraction du moindre nombre expoſant; comme les ſuiuantes equations

1cß.	725bß—4cc.	les expoſans ſont 11. 7. 9.
1cß.	200qqq+3456ß.	les expoſans ſont 11. 8. 5.
1qß.	200qc+14336q.	les expoſans ſont 10. 6. 2.

Seront reduites à celles-cy.

1qq.	725—4q	les expoſans ſont 4. 0 2.
1qc.	200c+3456.	les expoſans ſont 6. 3. 0.
1qqq.	200q+14336.	les expoſans ſont 8. 4. 0.

Et ainſi faut-il faire de toutes autres, afin de cognoiſtre quelle racine il faut extraire.

Or pour extraire la racine quarree des nombres coſſiques, dont les expoſans ſont 2, 1, 0, ou bien 2, 0, 1, vous ferez ainſi qu'il enſuit.

Premierement, prenez la moitié du nombre des racines, puis au quarré d'icelle moitié, adiouſtez-y le nombre abſolu, s'il a le ſigne +, ou l'oſtez, s'il a le ſigne —: & finalement à la racine quarree de ce produit, adiouſtez la moitié du nombre des racines, ſi elles ont le ſigne +, ou l'oſtez ſi elles ont le ſigne —: & ce qui viendra donnera l'eſtimation & valeur d'vne ſeule racine quarree.

Comme pour exemple, vne equation eſtant trouuee entre 1q, & 72—6x: la diuiſion eſtant faite de 72—6x, par 1, comme veut la regle d'Algebre, vient le meſme nombre pour la valeur d'vn quarré, duquel il faut trouuer la racine. Premierement donc ie prends la moitié du nombre des racines, ſçauoir 3: puis au quarré d'icelle moitié, ſçauoir eſt à 9, i'adiouſte le nombre abſolu 72, à cauſe du ſigne

+, & viennent 81: dont ie prends la racine quarrée, qui est 9; & d'icelle i'oste 3, moitié du nombre des racines, & reste le nombre 6, pour la valeur de la racine cherchee.

Soit derechef vne equation trouuee entre 1ℊ, & 6ℜ+72: & il faut trouuer la racine quarree de ce nombre 6ℜ+72. Ie prends premierement la moitié du nombre des racines, sçauoir est 3: puis au quarré d'icelle moitié, qui est 9 i'adiouste 72, à cause du signe +, & sont 81, dont la racine quarree est 9, à laquelle i'adiouste 3 moitié du nombre des racines, & font 12, qui est la valeur d'vne racine.

Soit encore vne equation entre 1ℊ, & 18ℜ—72: & il faut trouuer la racine d'iceluy nombre 18ℜ—72. Ie prends donc la moitié des racines, sçauoir est 9; puis du quarré d'icelle moitié, qui est 81, ie soustraits 72, à cause du signe —, & restent 9, dont la racine quarree est 3, à laquelle i'adiouste la moitié des racines, sçauoir est 9, à cause du signe +, & font 12, pour la valeur d'vne racine.

Mais il est à noter que tels nombres cossiques diminuez, esquels le nombre absolu à le signe —, ont double racine, sçauoir est, l'vne grande & l'autre petite, la grande est trouuee cõme dit est cy-dessus: mais on aura la moindre, si la racine quarree du reste de la soustraction est ostee de la moitié du nombre des racines: comme au dernier exemple proposé, si 3, racine quarree du reste 9, est osté de 9, moitié du nombre des racines, resteront 6, pour l'autre & moindre racine d'iceluy nombre cossique 18ℜ —72. Et faut noter que l'vne & l'autre racine n'est pas touſiours propre à la solution d'vn probleme,

ains seulement l'vne ou l'autre: c'est pourquoy aduenant tels nombres, si l'examen fait par l'vne d'icelles racines ne respond à la question il faudra prendre l'autre racine.

Or il y a encore vne autre maniere d'extraire la racine quarrée de tels nombres cossiques composez, laquelle est fort commode, quand le nombre des racines est impair, ou rompu, laquelle extraction se fait ainsi:

Au quarré du nombre des racines, adiouſtez le quadruple du nombre abſolu, s'il a le ſigne +, ou l'oſtez s'il a le ſigne —: puis à la racine quarree de ce produict adiouſtez ou ſouſtrayez le nombre des racines, ſelon qu'il ſera noté, & viendra l'eſtimation ou valeur du double de la racine quarree, parquoy la moitié ſera la valeur d'vne racine.

Comme pour exemple, qu'il faille extraire la racine de ce nombre cossique 72—6 ℞: Au quarré du nombre des racines, qui est 36, i'adiouste 288, quadruple du nombre absolu 72, & viennent 324, dont la racine quarree est 18, de laquelle i'oste le nombre des racines, sçauoir est 6, & restent 12 pour la valeur de deux racines, & partant vne racine vaudra 6.

Pour le regard de l'extraction des racines des nombres cossiques qui constituent equation, ayans les exposans constituez en telle progression Arithmetique que ceux-cy, 4, 2, 0: ou 4, 0, 2: ou 6, 3, 0: ou 6, 0, 3: ou 8, 4, 0: ou 8, 0, 4: ou 10, 5, 0: ou 10, 0, 5, &c. esquels le plus grand caractere est touſiours composé de *q*, & d'vn autre caractere cossique: il faut premierement extraire la racine quarrée, à cauſe du caractere *q*, ſelon qu'il eſt enſeigné cy-deſſus, accommodant au nombre qui eſt affecté

au caractere cossique, en ceste partie là de l'equation, de laquelle il faut tirer la racine, tout ce que nous auons dit du nombre des racines, comme si l'equation estoit entre trois nombres cossiques affectez aux caracteres *q*. ℞. & N. puis apres de ceste racine quarree trouuee, soit qu'elle soit rationelle ou irrationelle, il faut tirer vne autre racine, selon l'autre partie du plus grand caractere cossique, ce caractere *q* estant osté. Comme pour exemple, si vne equation est trouuee entre 1*qq*, & 18*q*—648: Il faudra extraire la racine quarree de ce nombre 18*q*—648, à cause de la premiere partie du signe cossique *q*, tout ainsi que si l'equation estoit trouuee entre 1*q*, & 18℞—648, laquelle racine quarree sera 36: & d'icelle il faut derechef tirer la racine quarree qui sera 6: parquoy 6 sera la racine du nombre cossique proposé.

En la mesme maniere, si vne equation est entre 1*c*, & 5120—16*c*: il faudra prendre la racine quarree du nombre 5120—16*c*, & de ceste-cy prendre la racine cubique. Ainsi aussi, si l'equation est entre 1*qq*, & 20000*qq*—78461119, il faudra premierement prendre la racine quarree: & puis apres de ceste-cy la racine quarree de quarree: Et ainsi des autres.

Or afin de tant plus faciliter l'intelligence des regles & preceptes iusques icy enseignez, nous leur adioindrons les 12 questions suiuantes.

1. *Trouuer deux nombres, desquels la difference soit donnee, & en raison donnee.*

Qu'il faille trouuer deux nombres dont la difference soit 20, & leur raison quintuple. Soit posé le moindre nombre estre 1℞. Donc le plus grand sera 5℞, sçauoir est le quintuple d'iceluy: l'excez d'iceux

est 4ℛ. Il y a donc equation entre 4ℛ & 20 : & diuisant 20 par 4, viendra 5 pour 1ℛ. Parquoy le moindre nombre requis sera 5, & le plus grand 25, qui est quintuple d'iceluy 5, & l'excede de 20.

2. *Trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en vne raison donnee, desquels les quarrez ensemble fassent vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en raison sesquitierce, desquels les quarrez fassent 4329. Soient posez les nombres cherchez estre 9ℛ, 12ℛ, 16ℛ, qui sont en proportion sesquitierce. Les quarrez d'iceux, sçauoir 81q, 144q, 256q, font ensemble 481q, egaux à 4329. Diuisant donc 4329 par 481, viendra 9 pour la valeur de 1q, & par consequent 1ℛ sera 3. Donc le premier nombre posé 9ℛ, sera 27 : le second 36, & le tiers 48, desquels les quarrez 729, 1296, 2304 font ensemble le nombre proposé 4329.

3. *Trouuer deux nombres en raison donnee, & qui multipliez entr'eux facent vn nombre ayant raison donnee à la somme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouuer deux nombres en raison sesquialtere, tels que leur produit soit dodecuple de la sõme d'iceux. Soient posez les deux nombres estre 2ℛ, & 3ℛ, qui est raison sesquialtere. Estans multipliez entr'eux ils font 6q, & leur somme est 5ℛ. Afin donc que 6q ayent raison dodecuple à 5ℛ, l'equation sera entre 6q & 60ℛ. Diuisant donc 60 par 6, viendront 10 pour la valeur de 1ℛ, pource que les denominations cossiques q. & ℛ. sont collaterales. Veu donc que le premier nombre a esté posé 2ℛ, & le second 3ℛ, celuy-là sera 20, & cestuy-cy 30 : & iceux multipliez entr'eux font 600, qui est dodecuple de 50, somme d'iceux.

4. *Trouuer deux nombres en raiſon donnee, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand, produiſe vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raiſon ſeſquiquinte, tels que le moindre multiplié par le quarré du plus grand faſſe le nombre 4860. Poſons que les nombres cerchés ſoient 5ℛ & 6ℛ, leſquels ſont en raiſon ſeſquiquinte. Or le moindre 5ℛ eſtant multiplié par le quarré du plus grand, ſçauoir eſt par 36q, fait 180c, qui partant ſont egaux au nombre donné 4860. Diuiſant donc 4860 par 180, viendront 27 pour 1c, & prenant la racine cubique dudit nombre 27, à cauſe du caractere c, icelle racine ſera 3. Parquoy le moindre nombre que nous auõs poſé eſtre 5ℛ ſera 15: & le plus grand 6ℛ, ſera 18: Or le quarré d'iceluy, qui eſt 324, eſtant multiplié par le moindre nombre 15, produit le nombre 4860.

5. *Eſtans donnez deux nombres inegaux, en trouuer deux autres en raiſon donnee, tels que le plus grand oſté du plus grand donné, & le moindre du moindre, les reſtes ſoient egaux.*

Soient deux nombres donnez 100 & 60: & il en faut trouuer deux autres, en raiſon ſeptuple, & que le plus grand oſté de 100, & le moindre de 60, les reſtes ſoient egaux.

Soient poſez pour les nombres en raiſon ſeptuple 1ℛ & 7ℛ. Les nombres egaux reſtans ſeront 100—7ℛ, & 60—1ℛ. Adiouſtant donc 7ℛ à chacun, l'equation ſera entre 100, & 60+6ℛ: & oſtant 60 de chacun, elle ſera entre 40, & 6ℛ. Et diuiſant 40 par 6, viendra pour 1ℛ, $6\frac{2}{3}$ moindre nombre, & le plus grand ſeptuple de ceſtuy-cy ſera $46\frac{2}{3}$. Et oſtant celuy-là de 60, & celuy-cy de 100, les nom-

bres restans seront egaux, sçauoir $53\frac{1}{3}$.

6. Estant donnez deux nombres, en trouuer vn autre, auquel estant adiousté l'vn des donnez, & soustraict l'autre, la somme soit au reste en raison donnee.

Les nombres donnez soient 100 & 20: & il faut premierement trouuer vn nombre auquel si on adiouste 100, & du mesme on oste 20, la somme soit triple du reste. Soit posé ce nombre-là estre 1ℵ; la somme sera 1ℵ+100, & le reste 1ℵ—20. Afin donc que ceste somme là soit triple de ce reste, l'equation sera entre 1ℵ+100, & 3ℵ—60: Et adioustant à chacun 60, elle sera entre 1ℵ+160, & 3ℵ; & ostant 1ℵ, icelle equation sera entre 160 & 2ℵ. Diuisant donc 160 par 2, sera trouué 80 pour 1ℵ, qui est le nombre cherché. Car si à iceluy on adiouste 100, on aura 180: mais si on en oste 20, resteront 60: & 180 est à 60 en raison triple.

Qu'il faille maintenant trouuer vn nombre, auquel si on adiouste 20, & du mesme on soustraict 100, ceste somme-là soit triple de ce reste-cy. Soit posé ce nombre-là estre 1ℵ, & sera fait la somme 1ℵ+20, & restera 1ℵ—100. Afin donc que ceste somme soit triple de ce reste, l'equation sera entre 1ℵ+20, & 3ℵ—300: Et adioustant 300 à chacun, elle sera entre 1ℵ+320, & 3ℵ: & ostant 1ℵ de chacun, l'equation sera entre 320, & 2ℵ. Diuisant donc 320 par 2 viendra 160 pour 1ℵ, qui est le nombre cherché. Car si à iceluy on adiouste 20, on aura 180, & si on en oste 100, resteront 60: & iceux deux nombres 180, & 60 sont entr'eux en raison triple.

7. Trouuer deux nombres en raison dõnee, & que le quarré du plus grand soit au moindre auſsi en raison donnee.

Que les nombres cherchez ayent raison triple, &

le quarré du plus grand ait au moindre la raiſon ſextuple. Soit poſé le moindre 1ℛ, & le plus grand 3ℛ. Le quarré du plus grand, ſçauoir 9ℚ, doit auoir raiſon ſextuple au moindre 1ℛ: Donc l'equation ſera entre 9ℚ, & 6ℛ. Et diuiſant 6 par 9, viendra $\frac{2}{3}$ pour 1ℛ, pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Les nombres cerchez ſont donc $\frac{1}{3}$ & 2, ayans raiſon triple, & le quarré du plus grand, ſçauoir 4, eſt en raiſon ſextuple au moindre, ſçauoir à $\frac{2}{3}$.

8. *Eſtant donné vn nombre compoſé de deux quarrez, le diuiſer en deux autres quarrez.*

Soit le nombre donné 34, compoſé des deux quarrez 9 & 25, qu'il faut diuiſer en deux autres quarrez. Les coſtez des quarrez donnez ſont 3 & 5: ſoit poſé le coſté du premier quarré cherché eſtre 1ℛ + 3, ſçauoir vne racine plus que le coſté du premier quarré donné: mais le coſté du ſecond quarré cherché, ſoit poſé quelconque nombre de racines moindre que le coſté du ſecond quarré dõné, ſçauoir 2ℛ − 5. Les quarrez d'iceux coſtez ſeront 1ℚ + 6ℛ + 9, & 4ℚ − 20ℛ + 25, qui adiouſtez enſemble font 5ℚ + 34 − 14ℛ, egal au nombre donné 34: adiouſtant donc 14ℛ à chacun, l'equation ſera entre 5ℚ + 34, & 14ℛ + 34: & oſtant 34 de chacun, reſtera l'equation entre 5ℚ, & 14ℛ. Diuiſant donc 14 par 5, viendront $\frac{14}{5}$ pour 1ℛ, pource que les nombres coſſiques ſont collateraux. Donc le coſté du premier quarré, lequel nous auons poſé eſtre 1ℛ + 3 ſera $\frac{29}{5}$: & le coſté du ſecond quarré, lequel a eſté poſé de 2ℛ − 5, ſera $\frac{28}{5}$ − 5, c'eſt à dire $\frac{3}{5}$. Les quarrez d'iceux coſtez trouuez ſont $\frac{841}{25}$ & $\frac{9}{25}$, qui font enſemble $\frac{850}{25}$, c'eſt à dire 34 nombre donné.

9. *Eſtans donnez deux nombres, en trouuer vn autre,*

qui adiouſté à l'vn d'iceux, & la ſomme multipliee par iceluy trouué, produiſe le quarré de l'autre nombre donné.

Soient les deux nombres donnez 10 & 12; & il en faut trouuer vn autre, qui adiouſté au premier 10, faſſe vn nombre, qui multiplié par iceluy adiouſté, produiſe le quarré de l'autre nombre 12, ſçauoir 144. Soit poſé le nombre cherché 1ℛ, l'adiouſtant à 10, viendra 1ℛ+10, qui multiplié par 1ℛ, fait 1 ꝙ+10ℛ, lequel doit eſtre egal à 144. Oſtant donc 10ℛ de chacun, l'equation ſera entre 1ꝙ. & 144—10ℛ, laquelle ſe reſoudra ainſi: La moitié du nombre des racines 5, fait le quarré 25, auquel adiouſtant 144, vient 169, dont la racine quarrée eſt 13, de laquelle ſoit oſtee la ſuſdite moitié 5, à cauſe du ſigne—, & reſtera la valeur de 1ℛ, ſcauoir 8, nombre cherché. Car iceluy eſtant adiouſté à 10, fait 18, qui multipliez par 8, le produict eſt 144, quarré de l'autre nombre 12.

10. *Trouuer vn nombre, duquel le cube ioinct auec vn nombre donné, faſſe le quarré de cube d'iceluy.*

Soit donné vn nombre 702: & il en faut trouuer vn autre, duquel le cube eſtant adiouſté à iceluy nombre donné, faſſe le quarré de cube d'iceluy nombre trouué. Poſons que le nombre cherché ſoit 1ℛ; le cube d'iceluy ſera donc 1ꝛ, & le quarré de cube 1ꝙꝛ; qui partant ſera egal à 1ꝛ+702. Parquoy il faut prendre la racine cenſicubique de ce nombre compoſé 1ꝛ+702, en ceſte ſorte. La moitié du nõbre affecté au caractere ꝛ, eſt $\frac{1}{2}$, dont le quarré eſt $\frac{1}{4}$, qui eſtant adiouſté au nombre 702, à cauſe du ſigne—, vient $702\frac{1}{4}$, dont la racine quarrée eſt $\frac{53}{2}$, àlaquelle ſoit adiouſtée la ſuſdite moitié du nõbre

affecté au caractere c, & viendront $\frac{c^4}{c}$, c'eſt à dire 27 : qui ſera la racine quarrée dudit nombre $1c+702$, priſe à cauſe du caractere q, qui eſt ioinct au plus grand caractere coſſique qc. Maintenant de ceſte racine quarrée 27, ſoit priſe la cubique à cauſe de l'autre caractere c, & icelle ſera 3 : qui eſt le nombre requis : Car le cube d'iceluy, ſçauoir 27, eſtant adiouſté au nombre donné 702, fait 729, qui eſt le quarré de cube dudit nombre 3.

11. *Trouuer deux nombres tels que le nombre produict de la multiplication d'iceux, eſtant diuiſé par leur difference, le quotient ſoit egal à vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres, tels que leur produict eſtant diuiſé par leur difference, le quotient ſoit 30. Soit poſé pour le moindre nombre, quelconque nõbre moindre que le quotient donné 30, ſçauoir eſt 20, & ſoit poſé le plus grand eſtre $20+1\mathfrak{R}$, afin que la difference d'iceux ſoit $1\mathfrak{R}$: de 20 en $20+1\mathfrak{R}$, ſera faict le nombre $400+20\mathfrak{R}$, lequel diuiſé par $1\mathfrak{R}$ difference d'iceux, le quotient eſt $\frac{400+20\mathfrak{R}}{1\mathfrak{R}}$, eſgal au nombre propoſé 30. Ceſte equation ſera reduitte par la multiplication en croix, à l'egalité d'entre $30\mathfrak{R}$, & $400+20\mathfrak{R}$, oſtant donc $20\mathfrak{R}$ de chacun, l'equation ſera entre $10\mathfrak{R}$, & 400 : & 400 eſtans diuiſez par 10, viendront 40 pour la valleur de $1\mathfrak{R}$, difference des nombres cerchez. Veu donc que le moindre nombre eſt 20, le plus grand ſera 60, c'eſt à ſçauoir $20+1\mathfrak{R}$. Maintenant 60 multipliez par 20, font 1200, qui diuiſez par 40 difference d'iceux nõbres, le quotient eſt 30.

12. *Diuiſer vn nombre donné en deux parties, telles que la plus grande, diuiſee par la moindre, & la moindre par la plus grande, la ſomme des quotiens ſoit donnee.*

Qu'il faille donc diuiſer le nombre 10, en deux telles parties que chacune d'icelles diuiſee par l'autre, les deux quotiens faſſent enſemble $4\frac{1}{4}$. Poſons que l'vne des parties ſoit 1ℛ: donc l'autre ſera $10-1\mathcal{R}$: ceſte-cy eſtant diuiſee par celle-là, le quotient ſera $\frac{10-1\mathcal{R}}{1\mathcal{R}}$; & celle-là diuiſee par ceſte-cy, le quotient eſt $\frac{1\mathcal{R}}{10-1\mathcal{R}}$. La ſõme de ces deux quotiens ſera donc $\frac{\mathcal{Z}\mathcal{Q}+100-20\mathcal{R}}{10\mathcal{R}-1\mathcal{Q}}$ qui doit eſtre egale à $4\frac{1}{4}$: laquelle equation ſera reduitte par multiplication croiſee à ceſte autre $8\mathcal{Q}+400-80\mathcal{R}$, & $170\mathcal{R}-17\mathcal{Q}$; tellement qu'adiouſtant de part & d'autre $17\mathcal{Q}$, & $80\mathcal{R}$; l'equation viendra entre $25\mathcal{Q}+400$, & $250\mathcal{R}$; mais oſtant 400, l'equation demeurera entre $25\mathcal{Q}$, & $250\mathcal{R}-400$; & chaque nombre eſtant diuiſé par le nombre 25 affecté au caractere $\mathcal{Q}$, l'egalité ſera entre $1\mathcal{Q}$ & $10\mathcal{R}-16$; Parquoy la racine quarrée en ſera priſe ainſi. La moitié du nõbre des racines eſt 5, & le quarré 25, duquel oſtant le nombre 16, à cauſe du ſigne —, reſteront 9, dont la racine quarree eſt 3, à laquelle ſoit adiouſtee la ſuſdite moitié des racines, ſçauoir 5, & viendront 8, pour la valeur de 1ℛ, qui eſt la plus grande partie cherchee, & partant l'autre ſera 2. Ce qui eſt euident; car chaque partie diuiſant l'autre, les deux quotiens ſont 4 & $\frac{1}{4}$, qui font enſemble le nombre donné $4\frac{1}{4}$.

Or és 12 queſtions cy-deſſus expliquees les nombres ſont abſtraicts de la matiere, mais à la fin de ce traicté nous en ioindrons quelques autres ou les nombres ſeront ioincts & appliquez aux choſes materielles.

Des secondes racines.

CHAP. XI.

D'Autant qu'en plusieurs operations sont cherchez deux, ou trois, ou dauantage de nombres soubs vne proportion incertaine, il est necessaire pour esuiter confusion, qu'ayant posé 1ℛ pour le premier nombre, on ne pose derechef 1ℛ pour le second, & encor 1ℛ pour le 3e. C'est pourquoy on a excogité les secondes racines, lesquelles sont nommées & figurees diuersement par les Autheurs: mais suiuant Stifel, Pelletier & Clauius, nous retiendrons le nom de secondes racines, & les noterons ainsi: 1A, signifie 1ℛ seconde; 1B, denotte 1ℛ tierce; 1C, signifie 1ℛ quarte, &c. Et quand vn nombre a deux signes, il faut entendre que le nombre auec le premier signe a esté multiplié par l'vnité du signe posterieur. Comme 1ℛA, signifie 1ℛ multipliee par 1A; & 3ℛA, signifie 3ℛ multipliées par 1A: ainsi 1qAq, monstre que 1q a esté multiplié en 1Aq, &c.

Or ces racines ont leur Algorithme particulier, aussi bien que les premieres racines. Et premierement quant à l'addition, elle est aisée: car si elles sont de mesme genre, il faut seulement adiouster les nombres entr'eux, & au produict apposer le mesme caractere d'icelles racines. Cõme 3A, & 4A, font ensemble 7A: Item 5B, & 3B, font 8B. Mais quand icelles racines ne sont de mesme genre, l'addition se fait par le signe +: comme 3A, & 4B, font 3A+4B: Item 3ℛ, & 4A, font 3ℛ+4A.

La soustraction est aussi aisee: Car quand les ra-

cines ſont de meſme genre il n'y a qu'à ſouſtraire vn nombre de l'autre, & appoſer au reſte le meſme caractere. Comme 3A oſtez de 5A, reſtent 2A: Item 2B oſtez de 5B, reſtent 3B. Mais quand icelles ſont de genres differens, la ſouſtraction ſe fait par le ſigne —: comme 3A oſtez de 4B, reſtent 4B—3A.

Pour le regard de la multiplication, elle ſe fait ainſi: Si vn nombre de racine premiere, doit eſtre multiplié par vn nombre de racine ſeconde, ayant ſeulement la lettre A ou B, &c. Il faut multiplier les nombres entr'eux, & appoſer au produict les meſmes ſignes. Comme 2℞ multipliees par 2A, font 4℞A, c'eſt à dire 4℞ multipliees par 1A: Item 2A par 2℞, font 4A℞; c'eſt à dire 4A multipliez par 1℞: Item 3q multipliez par 4B, font 12qB; c'eſt à dire 12q multipliez par 1B.

Mais quand vn nombre abſolu eſt multiplié auec vn nombre de ſeconde racine, il faut appoſer au produict le ſigne de la ſeconde racine. Comme 6 multipliant 4B, le produict eſt 24B: Item 5C multipliant 7, le produict eſt 35C.

Que ſi vn nombre de ſeconde racine doit eſtre multiplié par vn nombre de ſeconde racine de meſme lettre, il faut multiplier les nombres entr'eux & au produict appoſer la meſme lettre auec le caractere q. Cõme 3A multipliez par 4A, ferõt 12Aq.

Quand vn nombre de ſeconde racine eſt multiplié en ſoy quarrément, ou cubiquemẽt, &c. Il faut appoſer au produict la meſme lettre auec le caractere q, ou c, &c. Comme 2A multipliez en ſoy quarrement le produict eſt 4Aq; mais cubiquement eſt produict 8Ac: Item 2℞A par 2℞A, font 4℞Aq

c'eſt à dire 4q de premiere racine multipliez par 1q de ſeconde racine.

Mais quand vn nombre de ſeconde racine eſt multiplié en vn autre de la meſme racine ſeconde, qui a auſſi vn caractere coſſique; il faut imaginer que le premier nombre ait pareillement le ſigne coſſique q. Comme 1A multiplié par 1Aq, le produict eſt 1Ac: Item 3B par 4Bc, font 12Bqq.

Que ſi vn nombre coſſique ſimple ſans lettre de ſeconde racine doit eſtre multiplié auec vn nombre marqué de lettre & ſigne coſſique: il faut multiplier les nombres entr'eux, & au produict apposer les meſmes ſignes. Comme 2c multipliez par 4Aq, feront 8cAq, c'eſt à dire 8c multipliez en 1Aq: Item 1c multiplié par 1Aq, fait 1qq Aq: c'eſt à dire 1qq multiplié par 1Aq: Autant fait auſſi 1qA multiplié en ſoy: Car 1q multiplié en ſoy fait 1qq: & 1A en ſoy fait 1Aq.

Quand vn nombre ayant apres la lettre de ſeconde racine vn ſigne coſſique, eſt multiplié par vn nombre qui a pareillement apres la lettre de ſeconde racine vn ſigne coſſique, le produict doibt auoir outre la lettre, ou les lettres de ſeconde racine, le caractere coſſique que donnent les expoſans des caracteres. Comme 2Aq, en 5Ac, produiſent 10Aß. Item 3Aq multipliez par 4Bc feront 12ABß.

Mais ſi vn nombre ayant vn caractere coſſique apres la lettre de ſecõde racine, eſt multiplié par vn nõbre, qui apres le caractere coſſique a auſſi la lettre de ſecõde racine, il faut apposer au produict le dernier caractere coſſique, ſuiuy par la lettre de ſeconde racine, & du caractere coſſique produit du premier caractere coſſique multiplié par la lettre

de seconde racine, comme si elle auoit ce signe ℞. Comme 1Ac multiplié par 1qA, fera 1qAqq, qui sera aussi ptoduict de 1℞Aq multipliee en soy: Item 3Aq multipliez par 4cA, feront 12cAc, c'est à dire 12c multipliez par 1Ac.

Quant à la diuision des secondes racines: soit fait premierement reduction des signes cossiques par la soustraction des signes semblables. Comme pour diuiser 8cAq par 4Aq: Ie soustrais les signes semblables Aq, & restent 8c, & 4: puis ie diuise 8c par 4, & viennent 2c, pour le quotient de 8cAq diuisez par 4Aq: ainsi 8cAq diuisez par 4c, le quotient est 2Aq.

Mais diuisant vn nombre ℞ par vn nombre de secondes racines le quotient sera nombre rompu. Comme 2℞ diuisees par 4A, le quotient est $\frac{2℞}{4A}$.

Quant à l'extraction des secondes racines, il faut tirer la racine du nombre, s'il en a, & apposer à icelle la lettre de seconde racine, reiettant le caractere cossique. Comme la racine quarree du nombre 25Aq, est 5A: Item, la racine cubique du nombre 27Ac, est 3A; & la racine quarree du nombre 16Dqq, est 2D.

Mais si le nombre n'a telle racine, où que le caractere ne soit de mesme appellation que la racine qu'il faut extraire: il faut seulement apposer à iceluy nombre, lettre & caractere, le signe radical. Comme la racine cubique du nombre 3Aq, est $\sqrt{c}3Aq$. Item, la racine quarree du nombre 4Ac, est $\sqrt{}4Ac$.

Quant à la preuue des operations de cet Algorithme des secondes racines, elle se fera tout ainsi qu'és premieres racines; sçauoir est, que l'addition & soustraction

soustraction se prouueront l'vne l'autre : comme aussi la multiplication & diuision ; ou bien plus intelligiblement par les progressions Geometriques commençant à l'vnité, mises à la page 690 prenant celle de la raison double pour les premieres racines: mais celles de la raison triple pour les secondes racines: tellement que 1ℛ vale 2 : mais 1A, 3; 1ℛ9, 4; 1A99; 1ℛc, 27; 1ℛA, 6; 1ℛ q 18, &c.

Or comme au chapitre precedent nous auons adiousté plusieurs questions pour faciliter par leur solution l'intelligence des regles & preceptes auparauant enseignez auſſi en adiousterons-nous icy quelques vnes appartenans aux secondes racines, afin de faire voir par leur solution le moyen de se seruir & mettre en pratique les choses enseignees en ce chapitre.

1. *Diuiser vn nombre donné en trois parties, telles que les deux moindres soient ensemble egales à l'autre, & les deux plus grandes quintuples de la moindre.*

Qu'il faille donc diuiser le nombre 24, en trois parties, telles que les deux moindres ensemble fassent la plus grande, mais les deux plus grandes soient ensemble quintuple de la moindre. Posons que la moindre partie soit 1ℛ, & la moyenne 1A: donc la plus grande sera 1ℛ + 1A, & partant la somme de ces deux cy sera 1ℛ + 2A, qui doit estre quintuple de la moindre partie; parquoy 1ℛ + 2A seront egales à 5ℛ: ostons de part & d'autre 1ℛ, & resteront 2A egales à 4ℛ, & consequemment 2ℛ egales à 1A. Donc la moyene partie sera double de la plus petite qui a esté posee 1ℛ, & la plus grande triple. Parquoy il n'y a qu'à coupper le nombre donné 24, selon cette proportion 1, 2, 3, quoy faisant la plus

grãde partie sera 12, la moyẽne 8, & la plus petite 4.

2. *Il y a trois nombres, tels que les deux derniers adiouſtez auec* 100, *le produict eſt double du premier nombre: mais le premier & dernier adiouſtez auec le meſme nombre* 100, *ſont triples du ſecond: & le premier & deuxieſme auſſi auec* 100 *ſont quadruple du troiſieſme: à ſçauoir quels ſont ces trois nombres-là?*

Poſons 1☉ pour le premier nombre, & 1A pour les deux autres enſemble. Or puis que les deux derniers auec 100 doiuent eſtre double du premier, il y aura equation entre 2☉ & 1A+100: & oſtant 100 de part & d'autre reſtera 1A egal à 2☉—100: partãt la ſomme du ſecond & troiſieſme nombre, qui faiſoit 1A ſera 2☉—100; & ſi on y adiouſte le premier nombre, ſçauoir 1☉, la ſomme de tous les trois nombres ſera 3☉—100. Maintenant poſons 1B, pour le ſecond nombre: donc le premier & troiſieſme feront 3☉ — 100 — 1B, puis que tous les trois nombres faiſoient enſemble 3☉—100. Et puis que la ſomme du premier & troiſieſme auec 100 fait le triple du ſecond, il y aura equation entre 3☉—1B, & 3B: adiouſtons 1B de part & d'autre, & l'equation viendra entre 3☉ & 4B: donc auſſi entre $\frac{3}{4}$ ☉, & 1B. Parquoy le ſecond nombre que nous auons poſé eſtre 1B, ſera $\frac{3}{4}$ ☉. Finalement pour le troiſieſme nombre ſoit poſé 1C. Donc puis que tous les trois font enſemble 3☉—100, la ſomme des deux premiers ſera 3☉—100—1C, qui auec 100, doibt faire le quadruple du troiſieſme. Il y aura donc equation entre 4C, & 3☉—1C: Adiouſtons 1C de part & d'autre, & viendront 3☉ egales à 5C; partant auſſi $\frac{3}{5}$ ☉ à 1C. Parquoy le troiſieſme nombre ſera $\frac{3}{5}$ ☉. Et puis que le premier

nombre est 1 ℛ, le second $\frac{3}{4}$ ℛ, & le troisiesme $\frac{3}{5}$ ℛ, la somme de tous les trois sera $\frac{47}{20}$ ℛ : Mais nous auons trouué cy-dessus qu'ils faisoient aussi 3 ℛ — 100. Il y a donc equation entre 3 ℛ — 100, & $\frac{47}{20}$ ℛ: Adioutant 100 de part & d'autre : nous aurons 3 ℛ egales à $\frac{47}{20}$ ℛ + 100: ostons en $\frac{47}{20}$ ℛ, & resteront $\frac{13}{20}$ ℛ egales à 100. Diuisant donc 100 par $\frac{13}{20}$, viendront $153\frac{11}{13}$, pour la valleur de 1 ℛ, qui est le premier nombre, mais le second sera $115\frac{5}{13}$, & le troisiesme $92\frac{4}{13}$.

3. Il y a deux nombres, dont la somme des quarrez est 208, & multipliez entr'eux leur produit est les $\frac{4}{9}$ du plus grand quarré: à sçauoir quels sont ces deux nombres-là?

Posons que le plus grand nombre soit 1 ℛ, & le moindre 1 A : leur quarrez seront 1 q, & 1 A q, qui doiuent faire ensemble 208: & partant 1 q sera 208 — 1A q : & 1 A q sera 208 — q. Mais les deux nõbres 1 ℛ & 1 A multipliez entr'eux font 1 ℛ A, qui est egal à $\frac{4}{9}$ q, c'est à dire à $\frac{4}{9}$ du plus grand quarré, qui est 1 q. Si donc il y a equation entre 1 ℛ A & $\frac{4}{9}$ q, il y aura aussi equation entre les quarrez d'iceux nõbres, c'est à sçauoir entre 1 q A q, & $\frac{16}{36}$ qq, laquelle equation sera reduite par multiplication en croix à 36 q A q, & 16 qq, & par depressiõ du signe q de la premiere racine, l'equation viendra entre 36 A q, & 16 q: & par reigle de trois si 16 q, vallent 36 A q, 1 q vaudra $\frac{36 A q}{16}$, (pource qu'il faut laisser le signe q des premier & troisiesme terme de la règle.) Et d'autant que cy dessus 1 A q estoit egal à 208 — 1 q, il y aura aussi equation entre 1 A q, & 208 — $\frac{16 A q}{16}$, puis que 1 q est egal à $\frac{36 A q}{16}$. Adioustons donc à chacun $\frac{16 A q}{16}$, & l'equation viendra entre 1 A q + $\frac{16 A q}{16}$ & 208. Or veu que 1 A q

fait $\frac{16}{16}$ A*q*, ladite equation sera entre $\frac{256}{16}$ & 208. Parquoy diuisant 208 par $\frac{256}{16}$, viendront 64, pour la valeur de 1A*q*, la racine duquel nombre 64, qui est 8, sera le moindre nombre cherché, lequel nous auons posé estre 1A; & pource que le quarré du plus grand estoit 208—1A*q*, si de 208, on oste la valeur de 1A*q*, sçauoir 64, resterõt 144, pour le quarré d'iceluy plus grand nõbre, qui par consequẽt sera 12.

4. *Il y-a deux nombres, la somme desquels estant ostee de la somme de leurs quarrez, restent 8, mais adiousstée au nombre produict de leur multiplication faict 11; a sçauoir quels sont ces deux nombres là?*

Posons que le moindre nombre soit 1℟, & le plus grand 1A: mais pour la somme d'iceux nombres posons 1B. Or puis que la somme des deux nõbres cherchez estant ostee de la somme de leurs quarrez, restent 8, iceux quarrez seront 8+1B. (Car si d'iceux on oste 1B, resteront 8.) Mais le quarré de 1℟, qui est le moindre nombre, est 1*q*: donc le quarré de 1A, qui est l'autre nombre sera 8+1B—1*q*. Et d'autant que la somme desdits nombres cherchez, c'est à sçauoir 1B, estãt adiousstée au produit de leur multiplication faict 11; iceluy produit sera 11—1B. Et pource que 1B est couppé en deux parties, sçauoir 1℟ & 1A, le quarré de 1B, c'est à dire 1B*q*, sera egal aux deux quarrez de 1℟ & 1A, sçauoir 8+1B, auec deux fois le produict d'iceux, sçauoir 22—2B. Parquoy il y-aura equation entre 1B*q*, & 30—1B. Or la racine de ce nombre 30—1B, se trouuera tout ainsi que de 30—1℟; car 1B tiẽt icy lieu de ℟: & partant nous adiousterons le quarré des racines, sçauoir 1, au quadruple du nõbre 30, sçauoir 120, & viendrõt 121, dont la racine quarrée est 11, delaquelle ostõs 1, à

cauſe du ſigne —, & reſteront 10, dont la moitié 5, eſt la valleur de 1 B, c'eſt à dire la ſomme des deux nombres cherchez: & partant la ſomme de leurs quarrez que nous auons trouué eſtre 8+1B ſera 13. Il faut donc maintenant diuiſer 5 en deux telles parties que la ſomme de leurs quarrez faſſe 13; ce que nous ferons ainſi qu'il enſuit.

Poſons que l'vn des nombres ſoit 1℞: donc l'autre ſera 5—1℞, & leurs quarrez ſeront 1q, & 1q+25—10℞, tellement que leur ſomme, qui eſt 2q+25—10℞ ſera egale à 13: adiouſtons 10℞ de part & d'autre, & l'equation viendra entre 2q+25, & 13+10℞; oſtons-en 25, & l'equation reſtera entre 2q & 10℞—12, & conſequemment entre 1q, & 5℞—6. Parquoy de 25, quarré des racines, oſtons 24 quadruple du nombre 6, & reſtera 1, dont la racine quarree eſt 1, à laquelle ſoit adiouſté 5. nombre des racines, à cauſe de leur ſigne +, & viendront 6, dont la moitié 3 eſt la valleur de 1℞, qui eſt l'vn des nombres cherchez, & partant l'autre ſera 2.

Or i'eſtime que ces quatre queſtions auec celles que nous adiouſterons encore à la fin de ce liure ſuffiront pour l'intelligence des ſecondes racines; c'eſt pourquoy nous viendrons maintenant à traitter

Des nombres irrationnaux, ou ſourds.

CHAP. XII.

NOmbres irrationnaux ou ſourds, ſont les racines des nõbres, leſquelles ne ſe peuuent exprimer par nombres, tellement que pour expliquer telles racines on ſe ſert de ceſi gnes $\sqrt{}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{\sqrt{}}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{qc}$, &c. Cõme la racine quarrée de 5 eſt dite ſour-

de ou irationnelle, pource qu'on ne peut trouuer aucun nõbre qui multiplié en ſoy produiſe 5: tellemẽt que cẽte racine quarrée de 5. ſera marquée ainſi $\sqrt{5}$: ou ainſi $\sqrt{q5}$. Item la racine cubique de 7, ſera marquée ainſi $\sqrt{c7}$. Itẽ la racine quarrée de quarrée de 12, ainſi $\sqrt{\sqrt{12}}$, ou ainſi $\sqrt{qq12}$; & ainſi des autres.

Eſt toutesfois à noter que tout nombre qui a le ſigne $\sqrt{}$ n'eſt pas pourtant irrationnel; car quelfois pour la commodité de l'operation, au lieu de tirer la racine de quelque nombre, on luy appoſe ſeulement le ſigne de la racine requiſe.

Or il y-a deux genres de racines ſourdes: car les vnes ſont ſimples; comme γq de quelque nombre non quarré; $\sqrt{c}$ de quelque nombre non cube, &c. & ces racines ſimples ſont auſſi appellées par quelqu'vns nombres mediaux: Les autres racines ſourdes ſont compoſées par l'interpoſition des ſignes + & —: & icelles ſont appellees par aucuns multinomies radicales; & par d'autres, nombres irrationnaux compoſez, ou diminuez; compoſez, quand les nombres ſont liez par le ſigne +, comme $\sqrt{7} + \sqrt{10}$: mais diminuez, quand les nombres ſont liez par le ſigne —, comme $\gamma 5 - \sqrt{13}$, ou $\gamma 10 - \sqrt{c7}$.

De la reduction des ſimples racines ſourdes, à vne meſme denomination.

CHAP. XIII.

AFin que les ſimples racines ſourdes ſe puiſſẽt multiplier & diuiſer entr'elles, il eſt neceſſaire qu'elles ſoient reduittes en vne meſme denomination, ſi elles ſont diuerſes, laquelle reduction ſe fait preſque en la meſme maniere que la reduction

desfractions de diuerſes denominations à vne meſme: car ayant poſé les ſignes radicaux, chacun ſous leur nõbre, il faut multiplier vn chacun nombre en ſoy, ſelon le ſigne radical de l'autre: puis apres multiplier les expoſans des ſignes entr'eux, à fin d'auoir l'expoſant du ſigne commun. Comme pour exemple, ſoient les deux racines $\sqrt{7}$, & $\sqrt{c5}$, qu'il faut reduire en racines de meſme eſpece. Ayant poſé ces deux racines ainſi qu'il appert icy, ie multiplie 7 cubiquemẽt à cauſe du ſigne *c*, & viennent 343 au lieu de 7; puis ie multiplie 5 quarrémẽt à cauſe du ſigne $\sqrt{}$ du nombre 7, & viennent 25, pour & au lieu de 5: & finalement ie muliplie les expoſans des ſignes $\sqrt{}$ & $\sqrt{c}$ entre'ux: ſçauoir eſt 2 par 3, & viennent 6, qui eſt expoſant du caractere *qc*: tellement que $\sqrt{7}$, & $\sqrt{c5}$ ſeront reduittes à $\sqrt{qc}343$, & $\sqrt{qc}25$. Ainſi auſſi $\sqrt{c2}$, & $\sqrt{\sqrt{}}3$ eſtans reduittes à meſme eſpece ou denomination, ſeront $16qqc$, & $27qqc$, comme il appert en ceſte figure.

$$\begin{array}{ccc} \frac{343}{7} & \times & \frac{25}{5} \\ \sqrt{} & & \sqrt{c} \\ 2 & \text{——} & 3 \\ & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{16}{2} & & \frac{27}{3} \\ \sqrt{c} & \times & \sqrt{\sqrt{}} \\ 3 & \text{——} & 4 \\ & 12 & \end{array}$$

Il y-a quelques abreuiations en ceſte operation, comme quand il faut reduire vn nombre abſolu, & vn radical en meſme eſpece: car alors il n'y-a qu'à multiplier en ſoy quarrément ou cubiquemẽt, &c. le nombre abſolu, & au produict appoſer le ſigne

radical de la racine. Comme 6, & $\sqrt{5}$, estans reduits à mesme espece feront $\sqrt{36}$, & $\sqrt{5}$. Item 2 & $\sqrt{c4}$, feront $\sqrt{.8}$, & $\sqrt{c4}$.

Item voulant reduire ces deux racines, $\sqrt{c8}$ & $\sqrt{\sqrt{25}}$: Ie prēds de 8 la racine cubique 2: puis apres la racine quarree de 25, qui est 5, à laquelle i'appose le signe radical restant 2, ainsi $\sqrt{5}$. I'ay donc maintenant pour les deux racines proposees vn nombre absolu 2. & vn nombre radical $\sqrt{5}$, qui reduits comme dit est cy-dessus, font $\sqrt{4}$ & $\sqrt{5}$.

Item, voulant reduire ces deux racines $\sqrt{c2}$ & $\sqrt{qc6}$ en mesme espece, ie multiplie 2 en soy quarrément, à cause du signe q, qui est en l'autre racine, outre le signe c, & fait 4, auquel i'appose le signe q, & sera faite la reduction à $\sqrt{qc4}$ & $\sqrt{qc6}$.

Item, voulant reduire $\sqrt{\sqrt{19}}$, & $\sqrt{3}$ en mesme denomination, ie multiplie le nombre de la moindre denomination, sçauoir est 3, en soy quarrément à cause du signe $\sqrt{}$, qui est en la plus grande denomination outre $\sqrt{}$, & viennent $\sqrt{\sqrt{19}}$, & $\sqrt{\sqrt{9}}$ pour la reductiō en mesme espece des deux racines proposees. Ainsi $\sqrt{qc6}$, & $\sqrt{}$ seront reduites à $\sqrt{c6}$, & $\sqrt{qc729}$, multipliant le nombre 9 de la moindre denomination en soy cubiquement, à cause du caractere c, qui outre q, est en la plus grande denomination.

Or auparauant que venir à l'Algorithme d'icelles racines sourdes, il est neccessaire que nous enseignions le probleme suiuant.

Cognoistre si deux racines sourdes sont commensurables ou incommensurables, & quelle raison elles ont entr'elles.

Soit diuisé le nombre de la plus grande racine, par celuy de la moindre, icelles estans reduites en

meſmes eſpeces, ſi elles n'y ſont) & ſi au quotient vient vn nombre qui ait la racine denotée par le ſigne radical d'icelles racines propoſees, elles ſeront commenſurables entr'elles, autrement non: & auront telle raiſon l'vne à l'autre, que le quotient à l'vnité: ou ſi le quotient eſt vne fraction, elles ſeront entr'elles comme le numerateur au denominateur. Comme $\gamma 12$ & $\gamma 3$ ſont commenſurables entr'elles: Car 12 eſtans diuiſez par 3, le quotient eſt 4, dont la racine quarree eſt 2, & ſeront l'vne à l'autre comme 2 à 1. Item $\gamma 320$ & $\gamma c135$ ſont commenſurables; car 320 eſtans diuiſez par 135, le quotient eſt $2\frac{10}{27}$, ou $\gamma c\frac{64}{27}$, c'eſt à dire $\frac{4}{3}$: & leur raiſon eſt comme 4 à 3 Item $\gamma qc64$ & $\gamma c27$ ſont commenſurables, & leur raiſon eſt comme 3 à 2: car icelles eſtans reduites en meſme eſpece, ſeront $\gamma qc64$ & $\gamma qc729$, & la diuiſion faite, le quotient ſera $\gamma qc1\frac{35}{91}$ ou $\gamma qc\frac{216}{91}$, c'eſt à dire $\frac{8}{27}$.

Mais $\gamma 5$ & $\gamma 30$ ſont incommenſurables: car 10 eſtans diuiſez par 5, le quotient eſt 6. qui eſt nombre irrationel, pource qu'il n'a pas de racine quarree; toutesfois ils ont meſme raiſon que $\gamma 6$ à 1. Item $\gamma c32$ & $\gamma c24$, ſeront auſſi incommenſurables; car diuiſant 32 par 24, le quotient ſera $1\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ qui n'a point de racine cube; & toutesfois ils ſeront entr'eux comme $\gamma c4$ à $\gamma c3$, ou comme $\gamma c\frac{4}{3}$ à 1.

De la multiplication & diuiſion des ſimples racines ſourdes.

CHAP. XIV.

COmbien que l'addition & ſouſtraction precedent ordinairement la multiplication & la

diuision, si est ce toutesfois qu'aux racines sourdes, on commence par la multiplication & diuision, à cause que l'addition & soustraction ne se peuuẽt paracheuer sans la multiplication. Quand donc deux racines de mesme genre doiuent estre multipliees, ou diuisees entr'elles, il faut multiplier, ou diuiser les nombres entr'eux, & apposer au nombre produict le mesme signe radical. Comme pour exemple, voulant multiplier $\sqrt{7}$ par $\sqrt{10}$, ie multiplie 7 par 10, & viennent 70, auquels i'appose le signe radical, & sont $\gamma 70$. Ainsi $\gamma 3$ par $\gamma 12$, viennent $\gamma 36$, c'est à dire 6. Ainsi $\gamma 2\frac{1}{4}$ par $\gamma 8$, le produict est $\gamma 18$. Ainsi $\gamma c3$ par $\gamma c7$, viennent $\gamma c21$. Ainsi $\gamma\gamma 4$, par $\gamma\gamma 8$, produisent $\gamma\gamma 32$. Mais pour diuiser $\gamma 70$ par $\gamma 10$, ie diuise 70 par 10, & viennent 7, ausquels i'appose le signe radical, & sont $\gamma 7$. Ainsi $\sqrt{18}$ par $\gamma 8$, le quotient sera $\gamma 2\frac{1}{4}$ c'est à dire $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{2}$. Ainsi $\gamma c21$ par $\gamma c3$, le quotient sera $\gamma c7$.

Mais quand les deux racines proposees sont de differente espece, il les faut reduire à vne mesme, puis-apres faire la multiplication, ou diuision comme dessus. Comme pour exemple, voulant multiplier $\gamma 3$ par 4, ie reduis le nombre absolu 4, & sont $\gamma 16$, puis ie les multiplie comme dessus, & viennent $\gamma 48$. Ainsi $\gamma 5$ multipliee par $\gamma c10$, le produict sera $\gamma qc12500$. Ainsi aussi $\gamma\frac{1}{2}$ par $\gamma\gamma\frac{2}{3}$, produict $\gamma\gamma\frac{2}{10}$, ou $\gamma\gamma\frac{1}{5}$. Mais diuisant $\gamma 48$ par 4, le quotient sera $\gamma 3$. Ainsi $\gamma qc12500$, diuisee par $\sqrt{c10}$, le quotient sera $\gamma 5$.

Mais si quelque racine doit estre multipliee en soy quarrément, ou cubiquement, &c. selon le signe radical qui luy sera apposé, il faut seulement

prendre le meſme nombre pour le produict, delaiſſant le ſigne radical. Comme $\sqrt{3}$ eſtant multipliee quarrément, produira 3: & $\sqrt{c5}$ multipliee en ſoy cubiquement, fera 5.

Et s'il falloit multiplier quelque racine en ſoy ſelon l'exigence d'vn autre ſigne radical, il faudroit multiplier le nombre en ſoy ſelon que le requerroit cet autre ſigne radical, & appoſer au produict le ſigne radical du nombre multiplié. Ainſi de $\sqrt{6}$ multipliee en ſoy cubiquement eſt faict $\sqrt{216}$; d'où aduient que la racine cubique de ce produict ſera $\sqrt{6}$. Item de $\sqrt{c8}$ multipliee en ſoy quarrément eſt faict $\sqrt{c64}$, c'eſt à dire 4; d'où aduient que la racine quarree de ce nombre $\sqrt{c64}$, eſt $\sqrt{c8}$, c'eſt à dire 2. Semblablement de $\sqrt{qc6}$ en ſoy quarrément eſt fait $\sqrt{qc36}$, c'eſt à dire $\sqrt{c6}$, &c.

De l'addition des ſimples racines ſourdes.

CHAP. XV.

PRemierement ſi deux ou pluſieurs racines eſgales doiuent eſtre adiouſtees enſemble, il n'y a qu'à les multiplier par 2, ou par 3, ou par 4, &c. ſelon le nombre d'icelles racines à adiouſter: comme par exemple, voulant adiouſter $\sqrt{6}$ & $\sqrt{6}$; ie double $\sqrt{6}$, & font $\sqrt{24}$, pour la ſomme d'icelles deux racines. Item $\sqrt{c6}$, $\sqrt{c6}$ & $\sqrt{c6}$, font enſemble $\sqrt{c162}$, car $\sqrt{c6}$, triplee, c'eſt à dire multipliee par 3, qui ſont $\sqrt{c27}$, faict ledit nombre $\sqrt{c162}$. Semblablement $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, & $\sqrt{5}$, adiouſtees enſemble font $\sqrt{80}$, car le quarré de 4, eſt 16, qui multipliant 5, font 80, &c.

Mais quand deux racines inegales doiuent eſtre

adiouſtees enſemble, icelles ſoient premierement reduites à meſme eſpece, ſi elles n'y ſont; puis ſoit aduiſé, ſi elles ſont commenſurables ou incommenſurables: Que ſi leſdites racines ſont commenſurables, ayant diuiſé la plus grande par la moindre, ſoit adiouſtee vne vnité au quotient rationel, & la ſomme eſtant multipliee par la moindre racine, ſera donnee la ſomme de l'addition des deux racines propoſees. Comme par exemple, ſoient propoſees à adiouſter $\gamma 18$ & $\gamma 8$: diuiſant la plus grande par la moindre, le quotient eſt $\gamma 2\frac{1}{4}$, c'eſt à dire $\frac{1}{4}$. & adiouſtant 1, c'eſt $\frac{1}{4}$, qui multipliez par $\gamma 8$, le produict eſt $\gamma 50$, pour la ſomme des deux racines propoſees. Ainſi $\gamma 12$ adiouſtee à $\gamma 3$, la ſomme eſt $\gamma 27$: Item $\gamma c320$ adiouſtee a $\gamma c125$, fait la ſomme $\gamma c1715$: Item $\gamma 4$ adiouſtee à $\gamma c8$, fait 4: Item $\gamma \frac{1}{2}$ adiouſtee à $\gamma \frac{8}{9}$, fait $\gamma \frac{49}{18}$.

Que ſi les racines propoſees ſont incommenſurables, il faut ſeulement interpoſer entre-deux le ſigne +; comme $\gamma 6$ adiouſtee à $\gamma 11$, fait $\gamma 6 + \gamma 11$.

Or il y a encore pluſieurs autres manieres d'adiouſter les racines commenſurables, deſquelles la ſuiuante me ſemble aiſee. Ayant trouué la raiſon des racines propoſees, ſoit poſe au premier terme d'vne reigle de trois, l'vn des nombres d'icelle raiſon; au ſecond terme, la ſomme d'iceux nombres de la raiſon; & au troiſieſme, la racine correſpondante au terme de la raiſon poſé au premier terme: & faiſant la reigle comme il appartient, le quatrieſme nombre qui viendra ſera la ſomme des racines propoſees. Comme au premier exemple cy deſſus, la raiſon des racines a eſté trouuee comme 3 à 2; poſant donc 3 ou 2 au premier terme de la rei-

gle de trois, mais 5 au second, & $\sqrt{18}$, ou $\sqrt{8}$ au troisiesme, le quatriesme sera $\sqrt{50}$; & se fait la reigle de trois, ainsi qu'il appert cy-dessous.

Si 3 dõnent 5, que dõneront $\sqrt{18}$? Ou si 2 don. 5, cõbien $\sqrt{8}$?

$\sqrt{9}$. $\sqrt{25}$.

25 — 90 — 36 — 450

$\sqrt{4}$ $\sqrt{25}$ — 8 — 200

$\mathcal{Z}\Phi\Phi$ [$\sqrt{50}$.

$\#\#$

o

$\#\$\Phi$ [$\sqrt{50}$, *sõme des racines* $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$ *pr. à adiouster.*

$\$\$$.

De la soustraction des simples racines sourdes.

CHAP. XVI.

SI les racines sont incommensurables, il n'y a qu'à interposer le signe —. Comme $\sqrt{3}$ ostee de $\sqrt{10}$, restera $\sqrt{10} - \sqrt{3}$. Item $\sqrt{c}20$, ostee de $\sqrt{c}50$, reste $\sqrt{c}50 - \sqrt{c}20$.

Mais quand les racines sont commensurables, ayant diuisé la plus grande par la moindre, soit osté du quotient rationnel vne vnité: puis le reste soit multiplié par la moindre racine, & le produict sera le reste desiré. Comme pour exemple, qu'il faille soustraire $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$. Ie diuise donc 50 par 8, le quotient est $6\frac{1}{2}$, dont la racine quarree est $\frac{1}{2}$, de laquelle i'oste vn entier, & reste $\frac{1}{2}$, que ie multiplie par $\sqrt{8}$, & vient $\sqrt{18}$, pour le reste desiré. Item, qui de $\sqrt{27}$ oste $\sqrt{3}$, reste $\sqrt{12}$. Semblablement qui

de $\sqrt{c}1715$ oſte $\sqrt{c}320$, reſte $\sqrt{c}135$. Ainſi auſſi qui de $\sqrt{\frac{49}{18}}$ oſte $\sqrt{\frac{1}{2}}$, reſte $\sqrt{\frac{8}{9}}$.

Ceſte operation ſe fait auſſi par la regle de trois, mettant au premier & troiſieſme terme les nombres ſpecifiez au chapitre precedant: mais au deuxieſme la difference des termes de la raiſon, comme il appert cy-deſſous.

Si 5 dõnent 3, que dõneront $\sqrt{50}$ *ou ſi 2 don. 3, cõbien* $\sqrt{8}$?

$\sqrt{25}$ $\sqrt{9}$ 9 $\sqrt{4}$. $\sqrt{9}$. 9

450 72

$\mathcal{A}$
$\mathcal{Z}\Phi$ $\mathcal{Z}$
$\mathcal{A}\mathcal{Y}\Phi$ [$\sqrt{18}$ $\mathcal{H}\mathcal{Z}$ [$\sqrt{18}$ *reſte* $\sqrt{8}$ *eſtant oſtee de* $\sqrt{50}$.
$\mathcal{Z}\mathcal{Y}\mathcal{Y}$ $\mathcal{A}\mathcal{A}$
$\mathcal{Z}$

De l'addition des nombres irrationaux compoſez, & diminuez.

CHAP. XVII.

POur adiouſter nombres irrationnaux compoſez & diminuez, il les faut diſpoſer l'vn au deſſous de l'autre: puis adiouſter chaques racines ſimples, comme il a eſté dit en l'Algorithme preprecedant, obſeruant les reigles de + & —, que nous auons enſeignees au chapitre 4; c'eſt à ſçauoir *qu'aux ſignes ſemblables, il faut adiouſter ſans changer le ſigne; mais qu'aux diſſemblables, il faut ſouſtraire, & poſer le ſigne du plus grand nombre.*

Or d'autant qu'il ne ſe fait rien en ceſte operation, qui n'ait deſia eſté enſeigné cy-deuant, la choſe ſera aſſez manifeſte par exemples ſans dauantage de diſcours.

$6+\sqrt{18}$.	$\sqrt{27}+\sqrt{8}$.	$\sqrt{162}-2$.	$\sqrt{50}+3$.
$4+\sqrt{8}$.	$\sqrt{12}+\sqrt{2}$.	$\sqrt{200}-3$.	$\sqrt{32}-5$.
$10+\sqrt{50}$.	$\sqrt{75}+\sqrt{18}$.	$\sqrt{722}-5$.	$\sqrt{162}-2$.

$\sqrt{50}-3$.	$8-\sqrt{50}$.	$\sqrt{50}+6$.
$\sqrt{32}+5$.	$\sqrt{242}-12$.	$24-\sqrt{242}$.
$\sqrt{162}+2$.	$\sqrt{72}-4$.	$30+\sqrt{72}$.

$\sqrt{c216}-\sqrt{\sqrt{405}}$.	$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{c27}$.
$\sqrt{c64}-\sqrt{\sqrt{80}}$.	$\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{c8}$.
$10-\sqrt{\sqrt{3125}}$.	$7-\sqrt{1}$.

Et est à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre composé se rencontrans totalement egales aux deux particules d'vn nombre diminué, il n'y a qu'à doubler la premiere particule de l'vn d'iceux nombres. Comme pour adiouster $15+\sqrt{8}$ à $15-\sqrt{8}$: Ie double seulement 15, & font 30 pour la somme de l'addition. Item $\sqrt{20}+6$ adiouſtez à $\sqrt{20}-6$ font $\sqrt{80}$, & ce d'autant que les dernieres particules se destruisent l'vne l'autre, à cause des signes + & —.

De la soustraction des nombres irrationaux composez & diminuez.

CHAP. XVIII.

POur soustraire tels nombres, il les faut disposer l'vn au dessus de l'autre, puis soustraire chaques racines comme il a esté dict au chap. 16. obseruant les regles des signes + & — enseignees au chap. 4. sçauoir est *qu'aux signes semblables, il faut soustraire (si faire se peut) sans changer le signe: mais si on*

ne peut soustraire, il faudra oster le superieur de l'inferieur, & changer le signe. Mais aux signes dissemblables, il faut adiouster, & apposer le signe superieur.

Ceste operation peut estre facilement entendue par les exemples suiuans, sans autres preceptes.

$\sqrt{50}-5$	$\sqrt{\sqrt{1875}}+\sqrt{\sqrt{1250}}$.	$\sqrt{50}+2$.	$\sqrt{.0}-2$.
$\sqrt{8}-2$	$\sqrt{\sqrt{243}}+\sqrt{\sqrt{162}}$.	$\sqrt{18}+4$.	$\sqrt{18}-4$.
$\sqrt{18}-3$	$\sqrt{\sqrt{48}}+\sqrt{\sqrt{32}}$.	$\sqrt{8}-2$.	$\sqrt{8}+2$.

$\sqrt{162}+2$.	$\sqrt{162}-2$.	$\sqrt{72}-4$.	$30-\sqrt{72}$.	$\sqrt{0}+16$.
$\sqrt{50}-3$.	$\sqrt{50}+3$.	$8-\sqrt{50}$.	$\sqrt{50}+6$.	$\sqrt{320}-8$.
$\sqrt{32}+5$.	$\sqrt{52}-5$.	$\sqrt{242}-12$.	$24-\sqrt{242}$.	$24-\sqrt{320}$.

$\sqrt{\sqrt{2401}}-\sqrt{c1}$.	$\sqrt{c1000}+\sqrt{\sqrt{3125}}$.	$\sqrt{180}+0$
$\sqrt{\sqrt{256}}-\sqrt{c27}$.	$\sqrt{c216}-\sqrt{\sqrt{405}}$.	$\sqrt{320}-8$
$\sqrt{\sqrt{81}}+\sqrt{c8}$.	$4+\sqrt{\sqrt{20480}}$.	$8-\sqrt{20}$

Et est à noter pour briefueté, que les deux particules d'vn nombre composé se rencontrans du tout egales à deux particules d'vn nombre diminué il faut seulement doubler la derniere particule de l'vn des nombres. Comme pour soustraire $\sqrt{12}-5$, de $\sqrt{12}+5$ ie double la derniere particule 5, & vient le nombre 10, pour reste de la soustraction. Ainsi $10-\sqrt{4}$, ostez de $10+\sqrt{4}$, resteront $\sqrt{16}$, c'est à dire 4. Item $\sqrt{12}-\sqrt{5}$ ostee de $\sqrt{12}+\sqrt{5}$, restent $\sqrt{20}$. Et ce d'autant que $+$ destruit $+$; mais $+$ & $-$ se doiuent adiouster.

De la multiplication des nombres irrationnaux composez & diminuez.

CHAP. XIX.

POur faire ceſte operation, & auſſi la ſuiuante, il faut retenir la regle de + & — enſeignee au chapitre 5. ſçauoir eſt *qu'aux ſignes ſemblables faut poſer* +, *mais aux diſſemblables* —. Ayant donc poſé l'vn des deux nombres au deſſous de l'autre, ſoit faite la multiplication comme és nombres abſolus, obſeruant toutesfois ce que nous auons dit au chapitre 14. de la multiplication des racines ſimples, & au chapitre 15. de l'addition & ſouſtraction des meſmes racines. Ce qui ſera enſeigné és exemples deſcrits cy-deſſous. Comme en l'exemple ſuiuant: $-\sqrt{45}$ en $-\sqrt{20}$, fait $+\sqrt{900}$, c'eſt à dire $+30$; & $-\sqrt{45}$ par $+6$, c'eſt à dire en $+\sqrt{36}$, fait $-\sqrt{1620}$; & $-\sqrt{20}$ par $+8$, c'eſt à dire par $+\sqrt{64}$, fait $-\sqrt{1280}$. Et finalement $+8$ en $+6$, fait $+48$: Et partant tout le nombre produict ſera $48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30$; qui reduit par addition de $+48$ à 30; & de $-\sqrt{1280}$ à $-\sqrt{1620}$: ſera $78-\sqrt{5780}$.

Multiplicande $6-\sqrt{20}$.
Multiplicateur $8-\sqrt{45}$.

Pr. $48-\sqrt{1280}-\sqrt{1620}+30$, *qui par reduction ſera* $78-\sqrt{5780}$.

En cet autre exemple, ie multiplie $-\sqrt{\sqrt{648}}$ par $-\sqrt{\sqrt{162}}$, & vient $+\sqrt{\sqrt{104976}}$, c'eſt à dire $+18$:

& $+\sqrt{\sqrt{288}}$ par $-\sqrt{\sqrt{162}}$, fait $-\sqrt{\sqrt{46656}}$, c'eſt à dire $-\sqrt{216}$: & $-\sqrt{\sqrt{648}}$ par $+\sqrt{128}$, fait $-\sqrt{\sqrt{81944}}$, c'eſt à dire $-\sqrt{\sqrt{288}}$: & finalement $+\sqrt{\sqrt{288}}$ par $+\sqrt{\sqrt{128}}$ fait $+\sqrt{\sqrt{36864}}$, c'eſt à dire $+\sqrt{192}$: & partant tout le nombre produict de la multiplication ſera $\sqrt{192}-\sqrt{288}-\sqrt{216}+18$, ou bien $18+\sqrt{192}-\sqrt{288}-\sqrt{216}$.

Multiplicande $\sqrt{\sqrt{288}}-\sqrt{\sqrt{648}}$.
Multiplicateur $\sqrt{\sqrt{128}}-\sqrt{\sqrt{162}}$.
Produict $\sqrt{192}-\sqrt{288}-\sqrt{216}+18$
ou $18+\sqrt{192}-\sqrt{288}-\sqrt{216}$.

En ce troiſieſme exemple nous reduirons premierement $\sqrt{86}$, & $\sqrt{3}$ en vne meſme denomination, c'eſt à ſçauoir à $\sqrt{9936}$, & $\sqrt{9243}$, & ces deux nõbres multipliez entr'eux, le produict eſt $+\sqrt{98748}$: puis apres nous reduirons $\sqrt{c7}$, & $\sqrt{3}$ à $\sqrt{9c49}$, & $\sqrt{9c27}$ de meſme eſpece, & ces deux-cy eſtans multipliez entr'eux, le produict eſt $\sqrt{9c1323}$.

Multiplicande $\sqrt{c7}+\sqrt{86}$.
Multiplicateur $\sqrt{3}$.
Produict $\sqrt{9c1323}+\sqrt{98748}$.

Au premier de ces deux exemples eſt multiplié vn nombre compoſé en ſoy, dont le produict eſt

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{5} \\ 7+\sqrt{5} \\ \hline 49+\sqrt{245}+\sqrt{245}+5. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7-\sqrt{5}. \\ 7-\sqrt{5}. \\ \hline 49-\sqrt{245}-\sqrt{245}+5. \end{array}$$

$49+\sqrt{245}+\sqrt{245}+5$, c'eſt à dire $54+\sqrt{980}$, pource que 49 & $+5$, font 54, & $\sqrt{245}$ auec $\sqrt{245}$;

c'eſt à dire le double de $\sqrt{245}$, fait $\sqrt{980}$. Mais au 2e exemple eſt multiplié vn nombre diminué en ſoy, dont le produict eſt $49-\sqrt{245}-\sqrt{245}+5$, c'eſt à dire $54-\sqrt{980}$. Or pour briefuement faire telle multiplication, c'eſt à dire multiplier vn nombre compoſé de racines quarrees en ſoy, ou par vn autre egal, il ne faut qu'adiouſter enſemble les quarrez des particules, puis à ceſte ſomme adiouſter le double du produict d'vne particule en l'autre. Comme és deux exemples cy-deſſus, les quarrez des particules ſont 54, & le produit d'vne particule en l'autre eſt $\sqrt{245}$, ou $-\sqrt{245}$, dont le double eſt $\sqrt{980}$, ou $-\sqrt{980}$. Tout le produict eſt donc $54+\sqrt{980}$, ou $54-\sqrt{980}$.

Mais multipliant vn nombre compoſé ou diminué de racines quarrees, comme $6+\sqrt{8}$ par ſon reſpondant contraire, c'eſt à dire par $6-\sqrt{8}$, viendra au produit vn ſimple nõbre 28, comme il appert en l'operation. Car $+\sqrt{288}$ ruine $-\sqrt{288}$; & partant reſte $36-8$, qui ſont 28. Ce produit ſera encore trouué plus facilement & promptement: car 8 quarré de la derniere particule $\sqrt{8}$, eſtant oſté de 36, quarré de la premiere particule 6, reſtera le meſme produit 28.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{8}. \\ 6-\sqrt{8}. \\ \hline 36+\sqrt{288}-\sqrt{288}-8. \end{array}$$

Ainſi auſſi $\sqrt{10}+\sqrt{2}$ eſtãt multiplié par ſon reſpondant contraire $\sqrt{10}-\sqrt{2}$, le produit ſera $10+\sqrt{20}-\sqrt{20}-2$, c'eſt à dire 8: lequel nombre 8 eſt auſſi produit en

$$\begin{array}{r} \sqrt{10}+\sqrt{2} \\ \sqrt{10}-\sqrt{2} \\ \hline 10+\sqrt{20}-\sqrt{20}-2 \end{array}$$

oſtant 2, quarré de la derniere particule, de 10 quarré de la premiere particule.

Et ſi le nombre de la derniere particule eſt le plus grand, ſera produit vn nombre diminué, comme appert en cet exemple, où eſt multiplié $2+\sqrt{16}$ par ſon reſpondant contraire, & eſt produict $4-16$.

$$\begin{array}{r} 2+\sqrt{16} \\ 2-\sqrt{16} \\ \hline 4-16 \end{array}$$

Mais ſi on multiplie $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$, par ſon reſpondant $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$, où tu vois que le ſigne $+$ de la derniere particule eſt changé en $-$, le produit ſera $4+\sqrt{24}$: lequel produit eſtant derechef multiplié par ſon reſpondant contraire $-4+\sqrt{24}$, viendra vn ſimple nombre 8. Ce dernier produict ſera encore trouué plus facilement & promptement comme enſuit. Soient multipliees les deux premieres particules $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ entr'elles, & viendra $\sqrt{6}$, qui doublee ſera $\sqrt{24}$; puis de la ſomme des deux nombres d'icelles particules, ſçauoir eſt 5, ſoit oſté le nombre de la derniere particule, & reſtera 4, dont le quarré 16 ſoit oſté du nombre 24, & reſteront 8 comme deſſus.

$$\begin{array}{r} \sqrt{3}+\sqrt{2}+1. \\ \sqrt{3}+\sqrt{2}-1. \\ \hline -\sqrt{3}-\sqrt{2}-1 \\ +\sqrt{6}+2+\sqrt{2} \\ 3+\sqrt{6}+\sqrt{3} \\ \hline \textit{produit}\ 4+\sqrt{24}. \\ -4+\sqrt{24} \\ \hline -16-\sqrt{384}+\sqrt{384}+24 \end{array}$$

Ainſi auſſi, ſi on multiplie $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ par ſon reſpondant $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$, ſera produit $\sqrt{60}+2$, qui multipliez par $\sqrt{60}-2$, le produit ſera ſimple nombre 56; lequel produit on aura auſſi auec la

meſme briefueté que deſſus.

Et par ceſte maniere peuuent eſtre reduits tous tels nombres compoſez ou diminuez en ſimple nom: ſçauoir eſt multipliant touſiours par le reſpondant contraire, ainſi que dit eſt cy-deſſus, iuſques à ce que l'on ſoit paruenu à vn ſimple nombre.

De la diuiſion des nombres irrationnaux compoſez & diminuez.

CHAP. XX.

POur diuiſer vn nombre irrationnel compoſé par vn ſimple nombre radical, il faut diuiſer chaſque particule par ledit ſimple nombre radical, obſeruant la regle de + & de —. Comme pour diuiſer $\sqrt{24}+\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, ie diuiſe chaſque particule du diuidande par le diuiſeur $\sqrt{6}$, & le quotient eſt $\sqrt{4}+\sqrt{\frac{3}{6}}$, ou $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, comme il appert en ceſte formule.

$$\begin{array}{c} 3. \\ \sqrt{24}+\sqrt{9} \\ \sqrt{6} \quad \sqrt{6} \end{array} \left[\begin{array}{l} \sqrt{4}+\sqrt{1\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Ainſi auſſi diuiſant $\sqrt{c28}+\sqrt{c10}$, par $\sqrt{c4}$, vient au quotient $\sqrt{c7}+\sqrt{c5}$.

Que s'il faut diuiſer vn nombre irrationel compoſé par vn nombre ſimple & abſolu. Comme pour exemple, $\sqrt{20}-\sqrt{c10}$ par le nombre abſolu 3; il faut premierement reduire iceluy nombre 3 en l'eſpece de la premiere particule $\sqrt{20}$, & ſeront $\sqrt{9}$; par leſquels eſtãt diuiſée ladite particule, viendra au quotient $\sqrt{2\frac{1}{2}}$: en apres il faudra auſsi reduire ledit diuiſeur 3 en l'eſpece de la racine de la

ſeconde particule $\gamma c10$; & ſeront $\gamma c27$, qui diuiſant icelle particule, le quotient ſera $\gamma c\frac{10}{27}$: tellement que tout le quotient de la diuiſion ſera $\gamma 2\frac{1}{3} - \gamma c\frac{10}{27}$. Ainſi auſsi pour diuiſer $\gamma\gamma 8 + \gamma\beta 3$ par $\gamma 2$, il faut reduire iceluy diuiſeur en la meſme denomination que chaſque particule du diuidande, & on trouuera pour le quotient de la diuiſion $\gamma\gamma 2 + \gamma q\beta\frac{3}{4}$: Car $\gamma\gamma 8$, & $\gamma 2$ eſtãt reduites à meſme denomination, ſeront $\gamma\gamma\gamma 64$, & $\gamma\gamma\gamma 16$: & celle-là diuiſee par ceſte-cy donne $\gamma\gamma\gamma 4$, c'eſt à dire 2. Et pour la ſeconde particule ſeront reduits $\gamma\beta 3$ & $\gamma 2$, à $\gamma q\beta 9$ & $\gamma q\beta 32$; & celle-là eſtant diuiſee par ceſte-cy, le quotient eſt $\gamma q\beta\frac{9}{32}$.

Mais pour diuiſer vn ſimple nombre par vn compoſé ou diminué de racines quarrees, ou cenſicenſiques; comme pour exemple, 42 par $\gamma 25 + \gamma 4$, c'eſt à dire 7; il faut multiplier l'vn & l'autre nombre par $\gamma 25 - \gamma 4$, le correſpondant contraire du diuiſeur, & viendront $\gamma 44100 - \gamma 7056$, & 21, ou $\gamma 441$: puis apres ſoit diuiſé $\gamma 44100 - \gamma 7056$ par $\gamma 441$, & viendront $\gamma 100 - \gamma 16$, c'eſt à dire 6, qui ſera le quotient de 42 diuiſé par $\gamma 25 + \gamma 4$. Qu'il faille encore diuiſer 54 par $2 + \gamma 16$, c'eſt à dire par 6: ſoit donc multiplié le diuiſeur $2 + \gamma 16$, par $2 - \gamma 16$, & ſera produit le nombre diminué $4 - 16$; pource que la derniere particule eſt plus grande que la premiere: parquoy ſoient tranſpoſees les particules dudit diuiſeur en ceſte maniere $\gamma 16 + 2$, afin qu'eſtant multiplié par ſon reſpondant contraire $\gamma 16 - 2$, ſoit fait vn nombre ſimple 12. En apres ſoit auſsi multiplié le nombre diuidande 54 par le meſme nombre $\gamma 16 - 2$, & viendra pour nouueau diuidande $\gamma 46656 - 108$, qui diuiſé

par le nouueau diuiſeur 12, le quotient ſera $\sqrt{324}-9$, c'eſt à dire $18-9$, qui ſont 9. Voulant encore diuiſer 20 par $\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{\sqrt{81}}}$, c'eſt à dire par 5 : ſeront premierement tranſpoſees les particules d'iceluy diuiſeur, afin que la plus grande ſoit la premiere: puis ſera trouué vn nouueau diuiſeur & diuidande, qui ſera 5, & $\sqrt{\sqrt{12960000}}-\sqrt{\sqrt{2560000}}$, & la diuiſion faicte, le quotient ſera $\sqrt{\sqrt{20736}}-\sqrt{\sqrt{4096}}$, c'eſt à dire $12-8$, c'eſt aſſauoir 4.

Que ſi tant le diuidãde que le diuiſeur, ſont nombres compoſez, ou diminuez de racines quarrees, il faut reduire le diuiſeur en ſimple nombre, comme il a eſté dit au chap. precedent : puis multiplier le diuidande par les meſmes nombres par leſquels on aura multiplié le diuiſeur pour le conuertir à ſimple nombre, & ce qui viendra ſoit diuiſé par le ſimple nombre trouué, comme dit eſt cy-deſſus, & ainſi qu'il appert aux exemples ſuiuans.

Eſtant propoſé à diuiſer $18+\sqrt{36}$, qui ſont 24, par $7-\sqrt{16}$, (c'eſt à dire par 3.) Il faut premierement multiplier le diuiſeur $7-\sqrt{16}$ par ſon reſpondant contraire $7+\sqrt{16}$, & viendrõt 33 pour vn nouueau diuiſeur: puis par le meſme nombre $7+\sqrt{16}$ ſoit auſsi multiplié le diuidande $18+\sqrt{36}$, & viendront $198+\sqrt{4356}$, pour le nouueau diuidande, qui diuiſé par les 33 trouuez, viendront au quotient $6+\sqrt{4}$, c'eſt à dire 8.

Soit encore propoſé à diuiſer $\sqrt{41+\sqrt{3}}-\sqrt{2}$, par $\sqrt{5+\sqrt{2}}$. Il faut donc premierement multiplier le diuiſeur $\sqrt{5+\sqrt{2}}$ par ſon reſpondant contraire $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, & viẽdra vn ſimple nombre 3 pour nouueau diuiſeur: en apres ſoit multiplié le nombre di-

uidande $\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ par le meſme nombre $\sqrt{5}-\sqrt{1}$, afin d'auoir vn nouueau diuidande, & le produit ſera $\sqrt{205}+\sqrt{15}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{4}$. Lequel il faut diuiſer par 3, c'eſt à dire par $\sqrt{9}$, & le quotient ſera $\sqrt{22\frac{7}{9}}+\sqrt{1\frac{6}{9}}-\sqrt{1\frac{1}{9}}-\sqrt{9\frac{1}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}}+\frac{4}{3}$, ou bien $\sqrt{\frac{205}{9}}+\sqrt{\frac{15}{9}}-\sqrt{\frac{10}{9}}-\sqrt{\frac{81}{9}}-\sqrt{\frac{6}{9}}+\sqrt{\frac{4}{9}}$.

Que ſi le diuiſeur auoit deux parcelles de racines cubiques, il faudroit auſsi trouuer vn diuiſeur ſimple, comme ſera dit en ceſte exemple. Qu'il *faille* diuiſer 10 par $\sqrt{c5}+\sqrt{c3}$. Premierement il *faut* trouuer ſuiuant ce qui eſt enſeigné en la 2. prop. 8. trois nombres continuellement proportionnaux (à cauſe de 3 expoſant du cube) en la raiſon des particules du diuiſeur, c'eſt aſſauoir de $\sqrt{c5}$ à $\sqrt{c3}$, & ce comme il enſuit. Premierement ſoit multiplié $\sqrt{c5}$ en ſoy, & viendra $\sqrt{c25}$ pour le premier nombre; puis apres ſoit multiplié $\sqrt{c5}$ en $\sqrt{c3}$, & viendront $\sqrt{c15}$ pour le ſecond nombre; tiercement ſoit multiplié $\sqrt{c3}$ en ſoy, & ſera produit $\sqrt{c9}$ pour l'autre nombre: & par ainſi nous aurons ces trois nombres $\sqrt{c25}$, $\sqrt{c15}$, & $\sqrt{c9}$, continuellement proportionnaux, en la raiſon de $\sqrt{c5}$ à $\sqrt{c3}$, comme il eſt demonſtré en la ſuſdite 2. p. 8. Or eſtant appoſé le ſigne + aux deux nombres extremes, & le ſigne — à celuy du milieu, en ceſte ſorte $\sqrt{c25}-\sqrt{c15}+\sqrt{c9}$ ſoit multiplié par ce nombre, tant le diuidande propoſé 10, que le diuiſeur $\sqrt{c5}+\sqrt{c3}$, & viendra $\sqrt{c25000}-\sqrt{c15000}+\sqrt{c9000}$ pour le nouueau diuidande; mais pour nouueau diuiſeur $\sqrt{c125}+\sqrt{c27}$, c'eſt à dire 8: lequel ſimple diuiſeur on obtiendra auſsi en adiouſtant ſeulement les nombres des parcelles du diuiſeur 5 & 3.

Il faut proceder en la mesme maniere lors que le diuiseur est composé de deux racines censicensiques, sursolides, quarrees cubiques, &c. trouuant autant de nombres continuellement proportionnaux, en la raison des parcelles du diuiseur qu'il y a d'vnitez en l'exposant du signe cossique qq, β, qc, &c. c'est assauoir quatre au diuiseur des racines censicensiques; cinq pour le diuiseur des sursolides &c. Lesquels nombres estans trouuez, soit apposé le signe + au premier, & le signe — au second: mais au troisiesme derechef +, au quatriesme encore —, & ainsi alternatiuement iusques au dernier; tellement que tous les nombres des lieux impairs soient notez du signe +, & ceux des lieux pairs, du signe —. Nous

$$\gamma\gamma 5 + \gamma\gamma 3$$
$$\gamma\gamma 25 - \gamma\gamma 15 + \gamma\gamma 9$$
$$\gamma\gamma 125 - \gamma\gamma 75 + \gamma\gamma 45 - \gamma\gamma 27$$

poserons pour exemple qu'il faille diuiser 10 par $\gamma\gamma 5 + \gamma\gamma 3$. D'autant que l'exposant de qq est 4, il faut trouuer quatre nombres continuellement proportionnaux en la raison de $\gamma\gamma 5$ à $\gamma\gamma 3$, en la sorte cy-dessus.

Maintenant, si par ce monbre de quatre particules on multiplie tant le diuidande 10, que le diuiseur $\gamma\gamma 5 + \gamma\gamma 3$, on trouuera pour nouueau diuidãde $\gamma\gamma 125\ 0000 - \gamma\gamma 750000 + \gamma\gamma\ 450000 - \gamma\gamma 270000$, & pour nouueau diuiseur $\gamma\gamma 625 - \gamma\gamma$ 81, c'est à dire 2: lequel diuiseur 2 on obtiendra aussi sans multiplication, en soustrayant seulement le nombre de la moindre particule du diuiseur de la plus grande, c'est assauoir 3 de 5. Car les Algebrais-

res enseignent que quand le nombre exposant des racines est pair, comme q, qq, &c. le simple diuiseur est donné en ostant le nombre de la moindre particule de celuy de la grande: mais en les adioutant ensemble lors que ledit exposant est impair, comme c, β, &c.

Mais il est à noter que les particules du diuiseur estans denommées de diuerses racines, il les faut reduire à vne mesme denomination auparauant que proceder à l'operation.

Est pareillement à noter que l'on peut donner le quotient de la diuision en fraction, faisant numerateur le nombre diuidande: & denominateur le nombre diuiseur. Comme le quotient de $\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$, diuisé par $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, se peut donner ainsi $\frac{\sqrt{41}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$. Semblablement s'il faut diuiser $\sqrt{48}+\sqrt{63}$ par $\sqrt{15}+\sqrt{60}-\sqrt{3}$, le quotient sera ceste fraction $\frac{\sqrt{48}+\sqrt{63}}{\sqrt{15}+\sqrt{60}-\sqrt{3}}$.

Or d'autant qu'il est quelquefois necessaire de cognoistre quel de deux nombres irrationnaux composez est le plus grand, nous enseignerons icy la maniere de ce faire, lors que la chose sera douteuse. Soit pour exemple les deux nombres composez $3+\sqrt{8}$, & $8-\sqrt{5}$, le plus grand desquels ie desire sçauoir. Ie soustrais 3 de chaque nombre, & restent $\sqrt{8}$, & $5-\sqrt{5}$, desquels ie prend les quarrez, ce sont 8 & $30-\sqrt{500}$, de chacun desquels i'oste 8, & restent 0: & $22-\sqrt{500}$: & à chacun d'iceux i'adiouste $\sqrt{500}$, & viennent $\sqrt{500}$, & 22, c'est à dire $\sqrt{484}$, qui sont moindre que $\sqrt{500}$: & partant ie dis que $3+\sqrt{8}$ est plus grand que $8-\sqrt{5}$.

Des fractions des nombres irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXI.

LA numeration d'icelles fractions est facile: Car quand le signe radical est posé deuant le milieu de la fraction, iceluy signe est referé à l'vn & à l'autre terme, c'est à sçauoir, tant au numerateur qu'au denominateur. Comme ceste fraction $\gamma\frac{9}{16}$, signifie $\gamma 9$ estre diuisee par $\gamma 16$; & vaut $\frac{3}{4}$. Ainsi $\gamma c\frac{8}{27}$ signifie $\gamma c 8$ estre diuisee par $\gamma c 27$: & icelle equiuale à $\frac{2}{3}$. Ainsi aussi $\gamma\frac{6}{8}$ denote $\gamma 6$ estre diuisee par $\gamma 8$.

Mais quand le signe radical est posé deuant vn nombre entier auec la fraction, il faut reduire tout le nombre à vne seule fraction, afin de pouuoir exprimer sa valeur. Comme $\gamma c 1\frac{67}{125}$ sera reduit à $\gamma c\frac{192}{125}$, & signifie $\gamma c 192$ estre diuisee par $\gamma c 125$, c'est à dire par 5; & peut estre representee ainsi $\frac{\gamma c 192}{\gamma c 125}$, tellement qu'il signifie $\gamma c 192$ estre diuisee par 5. Que si les termes de ceste fraction $\gamma c\frac{192}{125}$ sont multitipliez par vn mesme nombre, c'est à sçauoir par $\gamma c 192$, sera produit la fraction $\gamma c\frac{36864}{24000}$ equiuallant à la fraction $\frac{192}{125}$. Et si derechef les termes produits de la fraction sont multipliez par la mesme $\gamma c 192$, sera produit la fraction $\gamma c\frac{7077888}{4608000}$, c'est à dire $\frac{192}{\gamma c 4608000}$, & signifie le cube 192 (qui est produit de $\gamma c 192$ multipliee en soy cubiquement) estre diuisé par $\gamma c 4608000$; pource que la racine cubique du numerateur 7077888 est 192. Derechef la fraction $\gamma\frac{16}{64}$, signifie $\gamma 16$, c'est à sçauoir 4, estre diuisee par $\gamma 64$, c'est à dire

par 8 ; & eſt equipalente à $\frac{1}{2}$. Et la fraction $\frac{\sqrt{16}}{64}$ ſignifie $\sqrt{16}$, c'eſt à dire 4 eſtre diuiſé par 64 : & eſt equiualente à $\frac{4}{64}$, ou $\frac{1}{16}$. Ainſi $\frac{16}{\sqrt{64}}$, ſignifie que le nombre 16 eſt diuiſé par $\sqrt{64}$, c'eſt à dire par 8: & eſt equiualente au nombre 2.

Quand la raiſon des numerateurs aux denominateurs eſt vne meſme, les fractions ſont egales, tout ainſi qu'és fractions vulgaires : Parquoy toutes ces fractions $\sqrt{\frac{64}{4}}$, $\frac{\sqrt{64}}{2}$, $\frac{64}{\sqrt{256}}$ ſont de meſme valeur : pource qu'en toutes, le numerateur eſt quadruple du denominateur.

Les fractions irrationelles ſe reduiſent à minimes termes (quand elles peuuent eſtre reduites,) tout ainſi qu'és fractions vulgaires. Comme ceſte fraction $\sqrt{qc\frac{4}{9}}$ ſe reduira à ceſte-cy $\sqrt{qc\frac{1}{2}}$: & $\sqrt{\frac{16}{144}}$ à $\sqrt{\frac{1}{4}}$. Elles peuuent auſſi eſtre quelquesfois reduites à moindres ſignes radicaux : Comme $\sqrt{qc\frac{4}{8}}$ ſe reduit à $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$. Pource que le numerateur 4 a racine quarree 2, mais il n'a pas racine cubique : Et le denominateur 8 a racine cubique 2, mais il n'a pas la quarree.

Quant à l'addition & ſouſtraction, elles ſe font en ceſte maniere. Si le denominateur eſt vn meſme, ſoient adiouſtez les numerateurs, comme il a eſté dit cy-deuant, ou ſoit ſouſtrait l'vn de l'autre, & à la ſomme, ou au reſte, ſoit appoſé le denominateur commun, ainſi qu'il appert és exemples ſuiuans.

Addition	*Soubſtraction*
$\frac{\sqrt{4}}{7}$ adiouſtez à $\frac{\sqrt{9}}{7}$	$\frac{\sqrt{4}}{7}$ oſtez de $\frac{\sqrt{9}}{7}$
font $\frac{\sqrt{25}}{7}$ ou $\frac{5}{7}$	reſte $\frac{\sqrt{1}}{7}$ ou $\frac{1}{7}$

Mais quand les denominateurs sont diuers, soit faicte la reduction à vn mesme denominateur par la multiplication en croix, ainsi qu'és fractions vulgaires: puis soit fait ainsi que cy-dessus, & comme il appert en ces formules.

Reduction.	*Addition*	*Soubstraction*
$\sqrt{144}\ \sqrt{196}$	$\sqrt{\frac{144}{441}}$ & $\sqrt{\frac{196}{441}}$	$\sqrt{\frac{144}{441}}$ de $\sqrt{\frac{196}{441}}$
$\sqrt{\frac{16}{49}}$ & $\sqrt{\frac{4}{9}}$.	font $\sqrt{\frac{676}{441}}$, ou $1\frac{5}{41}$.	reste $\sqrt{\frac{4}{441}}$, ou $\frac{2}{21}$.
$\sqrt{441}$.		

En la mesme maniere s'il faut adiouster $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{1.4}}{5}$ à $\frac{\sqrt{126}+\sqrt{8}}{2}$, on reduira premierement icelles fractions à mesme denomination, c'est à sçauoir à $\frac{\sqrt{100}+\sqrt{192}}{10}$ & $\frac{\sqrt{3000}+\sqrt{100}}{10}$: puis apres adioustant les numerateurs, on aura $\frac{\sqrt{3200}+\sqrt{10032}}{10}$: Mais si on soustraict la moindre d'icelles fractions de la plus grande, restera $\frac{\sqrt{6432}}{10}$.

Quand les numerateurs sont incommensurables, l'addition d'iceux se faict par l'interposition du signe +, mais la soubstraction par l'interiection du signe —. Comme la somme de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ & $\sqrt{\frac{5}{8}}$ est $\sqrt{\frac{7}{8}}+\sqrt{\frac{5}{8}}$. Et $\sqrt{\frac{5}{8}}$ ostée de $\sqrt{\frac{7}{8}}$ reste $\sqrt{\frac{7}{8}}-\sqrt{\frac{5}{8}}$.

En la multiplication & diuision des fractions irrationnelles, il faut seulement les reduire à mesme signe radical, & acheuer comme és fractions vulgaires. Parquoy multipliant $\sqrt{\frac{3}{4}}$ par $\sqrt{\frac{6}{7}}$ viendra $\sqrt{\frac{18}{28}}$. Et $\sqrt{\frac{216}{5}}$ diuisée par $\frac{\sqrt{1.27}}{2}$ fera $\frac{4}{3}$: & aussi $\sqrt{\frac{3}{4}}$ diuisee par $\sqrt{\frac{6}{7}}$, viendra $\sqrt{\frac{147}{196}}$ c'est à dire $\sqrt{1\frac{51}{196}}$.

Quant à la preuue de chacune de ces operations, elle se fait par sa contraire, c'est à dire que l'addition se preuue par la soubstraction: & la soubstraction par l'addition, &c.

Or voila quant à ce qui concerne l'Algorithme des nombres sourds, reste que pour en monstrer quelque vsage nous adiousterons icy quelques questions, en la solution desquelles on se sert desdits nombres sourds & irrationnels.

1. *Trouuer deux nombres en vne raison donnee, tels que l'vn multiplié par l'autre produise vn nombre donné.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raison s'esquialtere, tels que le produit de leur multiplication soit 40. Posons qu'iceux nombres soient 2 ℞ & 3 ℞: leur produit sera 6q, qui doit estre egal à 40. Diuisant donc 40 par 6, viendront $\frac{40}{6}$ ou $\frac{20}{3}$ pour la valeur de 1q, & consequemment 1℞, sera $\gamma\frac{20}{3}$: Et pour ce que le premier nombre a esté posé 2 ℞, & le second 3 ℞, iceux nombres seront $\gamma\frac{80}{3}$ & $\gamma\frac{180}{3}$, lesquels multipliez entr'eux produisent $\gamma\frac{14400}{9}$, c'est à dire $\frac{120}{3}$ ou 40, ainsi qu'il estoit requis.

2. *Trouuer deux nombres en raison donnée, tels que le plus grand estant diuisé par le moindre, le quotient & le quarré d'iceluy moindre, soient aussi en raison donnée.*

Qu'il faille trouuer deux nombres en raison quadruple, tels que le quarré du moindre aye raison double au quotient du plus grand diuisé par iceluy moindre. Posons qu'iceux nombres soient 1℞ & 4℞: Or le plus grand estant diuisé par le moindre, le quotient sera 4, & le quarré du moindre est 1q: & puis que ce quarré doit auoir raison double au quotient 4: il y aura Equation entre 1q, & 8: parquoy 1℞ sera γ8, qui est le moindre nombre, & par consequent le plus grand qui est en rai-

son quadruple sera $\sqrt{128}$: & diuisant iceluy par le moindre $\sqrt{8}$, le quotient est $\sqrt{16}$, c'est à dire 4, auquel 8 quarré dudit moindre nombre à raison double.

3. *Trouuer trois nombres en progression arithmetique, tels qu'estans multipliez entr'eux, le produit ait vne raison donnée à la somme d'iceux.*

Qu'il faille donc trouuer trois nombres constituans vne progression arithmetique, tels que le nombre produit de la multiplication d'iceux soit triple de leur somme. Posons que les trois nombres cherchez soient $1\mathfrak{R}$, $2\mathfrak{R}$ & $3\mathfrak{R}$ ayans vn mesme excez $1\mathfrak{R}$. De la multiplication d'iceux est faict le nombre $6c$, lequel doit estre triple de leur somme $6\mathfrak{R}$: & partant egal à $18\mathfrak{R}$. Diuisant donc 18 par 6, viendra 3 pour $1q$; (car d'autant que le caractere q, est au milieu de c & $\mathfrak{R}$, il vient le mesme qu'en deprimãt les signes.) Partant $1\mathfrak{R}$ sera $\sqrt{3}$, & par consequent les trois nombres cherchez seront $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, & $\sqrt{27}$, qui ont mesme excez $\sqrt{3}$, & multipliez entr'eux font $\sqrt{972}$, qui est le triple de la somme des mesmes, c'est à sçauoir du nombre $\sqrt{108}$.

Notez que quand le denominateur de la raison que doit auoir le produict de la multiplication à la somme, est nombre quarré: la question se resoult en nombres rationnaux. Comme les mesmes choses que dessus estans posees, si le nombre produit deuoit auoir à la somme la raison quadruple, l'equation viendroit entre $6c$ & $24\mathfrak{R}$: parquoy diuisant 24 par 6, viendroit 4 pour $1q$, & consequemment $1\mathfrak{R}$ seroit 2, & les trois nombres cherchez seroient 2, 4, & 6, lesquels multipliez entr'eux pro-

duiſent 48, qui eſt le quadruple de leur ſomme 12.

4. *Trouuer trois nombres continuellement proportionnaux en vne raiſon donnée, tels que la ſomme de leurs quarrez faſſe vn nombre donné.*

Qu'il faille donc trouuer trois nombres continuellement proport. en raiſon double, deſquels la ſomme de leurs quarrez faſſe 600. Poſons que les trois nombres ſoient 1ℵ, 2ℵ, & 4ℵ, qui ſont en raiſon double: leurs quarrez ſeront 1q, 4q, & 16q. Mais la ſomme d'iceux quarrez ſera 21q, qui eſt egale à 600. Diuiſant donc 600 par 21 viendront $\frac{200}{7}$ pour vn quarré, & partant 1ℵ ſera $\sqrt{\frac{200}{7}}$, qui eſt le premier nombre cherché, & le ſecond double d'iceluy ſera $\sqrt{\frac{800}{7}}$: mais le troiſieſme auſſi double de ceſtuy-cy ſera $\sqrt{\frac{3200}{7}}$, & leurs quarrez ſont enſemble $\frac{4200}{7}$, c'eſt à dire 600.

5. *Trouuer vn nombre, qui auec vn nombre donné faſſe ſon quarré.*

Le nombre donné ſoit 50, & il faut trouuer vn autre nombre qui adiouſté auec 50 faſſe ſon quarré. Poſons que le nombre cherché ſoit 1ℵ: donc ſon quarré ſera 1q, qui doit eſtre egal à 1ℵ + 50. Or le quadruple de 50 eſtant adiouſté au quarré des racines, faict 201, dont la racine quarree eſt $\sqrt{201}$: à icelle ſoient adiouſtees les racines, & viendront $\sqrt{201}+1$, dont la moitié, qui eſt $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$, eſt la valeur de 1ℵ, & conſequemment le nombre cherché: tellement que ſi à iceluy nombre on adiouſte le donné 50, le nombre qui en prouiendra, ſçauoir $\sqrt{\frac{201}{4}} + 50\frac{1}{2}$, ſera le quarré du meſme nombre $\sqrt{\frac{201}{4}} + \frac{1}{2}$, ainſi qu'il eſtoit requis.

6. *Diuiſer*

6. Diuiser vn nombre donné selon la moyenne & extreme raison.

Le nombre donné soit 12, lequel il faut couper en deux parties telles que la moindre, la plus grande, & ledit nombre 12, soient continuellement proportionaux, c'est à dire que le quarré de la plus grande partie soit egal au produit de tout le nombre 12 multiplié par la moindre partie. Posons que la plus grande partie soit 12ᵖ: donc la moindre sera 12 — 12ᵖ, & partant ces trois nombres 12 — 12ᵖ, 12ᵖ, & 12 seront proport. tellement que le quarré du moyen, sçauoir 12ᵖ, sera egal au produict des deux extremes, qui est 144 — 12ᵖ. Or la moitié du nombre des racines est 6, & son quarré 36, auquel adiouſtant le nombre 144, viendront 180, dont la racine quarree est √180, de laquelle estant ostee la susdite moitié des racines, à cause du signe —, le reste sera √180 — 6, qui est la plus grande partie cherchee, laquelle ostee du nombre donné 12, resteront 18 — √180 pour la moindre partie.

Or d'autant que nous rapporterons à la fin de ce liure plusieurs autres questions esquelles les nombres seront ioincts & appliquez aux choses materielles, afin qu'au moyen d'icelles on voye mieux l'vsage & practique de tous les preceptes & documens enseignez en ce traicté, nous ne nous arresterons d'auantage sur semblables questions abstraittes de la matiere.

Des nombres cossiques irrationnaux, & de leur Algorithme.

CHAP. XXII.

TOut ainsi que les nombres absolus se font irrationnaux, estans precedez de signes radicaux: comme de 5, se fait $\sqrt{5}$: Ainsi aussi les nombres cossiques se font irrationnaux, quand on leur prepose quelqu'vn d'iceux signes radicaux. Comme de 20℞, se fait $\sqrt{20℞}$, nõbre cossique irrationnel, qui se prononce, la racine quarrée de 20 racines: Item de 6c, se fait $\sqrt{6c}$: qui signifie la racine quarrée de 6c. Item de 9℞, se fait $\sqrt{\sqrt{9℞}}$, &c. Or tels nombres peuuent estre quelquesfois rationnaux, & quelquefois irrationnaux selon la valeur d'vne racine. Car si 1℞ vaut 5, 20℞ vaudront 100, duquel la racine quarree est 10: partant $\sqrt{20℞}$ est vn nombre rationel equiuallant 10: Et $\sqrt{c20℞}$ sera irrationnel, puis que 100 n'a pas racine cubique. Il est donc euident qu'on ne peut iuger si tels nombres sont rationnaux ou irrationnaux, iusques à ce que l'estimation & valeur d'vne seule racine apparoisse.

Or l'addition & souſtraction d'iceux nombres se fait par l'interpolition des signes + & —: Comme $\sqrt{36℞}$ adiouſtee à $\sqrt{12q}$, fait $\sqrt{36℞ + 12q}$, ou $\sqrt{12q + 36℞}$. Et 36 estans ostez de $\sqrt{36℞}$, restera $\sqrt{36℞ — 36}$: & ainsi des autres.

Que si les signes cossiques sont semblables, & les nombres irrationnaux (considerez sans leurs signes cossiques) commensurables; l'addition & soubstraction s'en fera en la mesme maniere que des simples racines sourdes, appoſant apres l'opera-

fion le meſme ſigne coſſique. Ainſi $\gamma 8\mathfrak{R}$ adiouſtee à $\gamma 18\mathfrak{R}$, ſera $\gamma 50\mathfrak{R}$. Mais oſtant $\gamma 8\mathfrak{R}$ de $\gamma 18\mathfrak{R}$, reſtera $\gamma 2\mathfrak{R}$.

La preuue ſera facile & euidente, ſi on poſe la valeur d'vne ſeule racine eſtre quelque nombre, comme 2. Car $8\mathfrak{R}$ ſeront 16, dont la racine quarree eſt 4: & $18\mathfrak{R}$ ſeront 36, dont la racine quarree eſt 6: Or 4 & 6 font 10: comme auſſi $\gamma 50\mathfrak{R}$, puis que $50\mathfrak{R}$ font 100, dont la racine quarrée eſt 10. Mais 4 oſtez de 6, reſtent 2, valeur de $\gamma 2\mathfrak{R}$, puis que $2\mathfrak{R}$ font 4, dont la racine eſt 2.

Mais afin que les nombres coſſiques irrationaux ſoient multipliez entr'eux, ou diuiſez, ils doiuent eſtre premierement reduits à meſme ſigne radical par multiplication en croix, comme nous auons enſeigné au chap. 13. Comme s'il faut multiplier $\gamma c 4\mathfrak{R}$ par $\gamma 8\mathfrak{R}$: icelles eſtans reduites à meſme ſigne radical, ſeront $\gamma qc 16q$, & $\gamma qc 512c$, ainſi qu'il appert en ceſte formule: leſquels deux nombres multipliez entre eux produiſent $\gamma qc 8192\beta$: mais $\gamma qc 512c$ diuiſee par $\gamma qc 16q$, le quotiét ſera $\gamma qc 32\mathfrak{R}$. Item le nombre $\gamma qc 131072b\beta$ eſtant diuiſé par $\gamma qc 512c$, le quotient ſera $\gamma qc 256qq$.

$\gamma qc 16q.$		$\gamma qc 512c.$
$4\mathfrak{R}.$	X	$8\mathfrak{R}.$
$\gamma c.$	X	$\gamma q.$
3.		2.
6.		

Semblablement pour multiplier $1\mathfrak{R}$ par $\gamma 4$, il n'y a qu'à quarrer $1\mathfrak{R}$, & à ſon quarré prepoſer le ſigne radical, afin d'auoir $\gamma 1q$: puis le multiplier par $\gamma 4$, & viendra pour le produit $\gamma 4q$. Par meſme moyen $3\mathfrak{R}$ multipliees par $\gamma 16$, le produit ſera

$\sqrt{1449}$: c'eſt à dire la racine quarree de 1449, qui ſera 24, la racine eſtant 2. Et tels produits $\sqrt{49}$, & $\sqrt{1449}$ ſont appellez par Clauius Nombres des Racines, ainſi qu'il appert és 12 & 28 queſtions du 32. chap. de ſon Algebre.

Or la preuue de toutes ces operations ſe fera, poſant la valeur d'vne racine, comme dit eſt cy deſſus: ou bien chaque operation par ſa contraire.

Quant aux fractions de ces nombres coſſiques irrationaux, il n'eſt beſoin d'en traicter particulierement, pource qu'elles ſuiuent l'Algorithme de leurs entiers, ioinct à celuy des nombres communs.

Or eſt icy à noter qu'vne equation ſe rencontrant entre vn nombre coſſique irrationel, & vn nombre abſolu, il la faudra reduire en ceſte maniere. Soit pour exéple vne equation entre $\sqrt{24}$ & & 12. Il y aura pareillement equation entre leurs quarrez, ſçauoir 24 & & 144: ſoit donc diuiſé 144 par 24, & viendront 6 au quotient pour la valeur d'vne racine. Item, s'il y a equation entre $\sqrt{107}$ & 20; il y aura auſſi equation entre 107 & 400: diuiſant donc 400 par 10, viendront 40 pour la valeur d'vne racine. Finalement ſi vne equation eſt trouuee entre $\sqrt{c}$ 129, & 30: il y aura auſſi equation entre 129 & 27000, les cubes d'iceux: parquoy diuiſant 27000 par 12, viendront 2250 pour la valeur d'vne ſeule racine.

Que ſi quelqu'vn propoſoit vne equation entre $\sqrt{c}$ 8 & 3, il y auroit auſſi equation entre leurs cubes 8 & 27: Ce qui eſt impoſſible. Parquoy en ces equations il eſt neceſſaire que le nombre abſolu

ſoit la racine du nombre auec lequel eſt le ſigne radical : telle qu'eſt l'equation d'entre $\gamma c\ 8$ & 2. Item entre $\gamma c\ 64$ & 4 : Item entre $\gamma 81$ & 9, &c. Autrement l'equation ſera impoſſible.

Des racines vniuerſelles, & de leur Algorithme.

CHAP. XXIII.

LA racine d'vn nombre compoſé ou diminué eſt appellee racine vniuerſelle : Comme la racine quarree de ce nombre compoſé $\gamma 9+22$, eſt dicte racine vniuerſelle, d'autant que de tout le nombre il faut extraire la racine, laquelle ſera 5 ; car $\gamma 9$, qui eſt 3, eſtant adiouſtee à 22 fait 25, dont la racine quarree eſt 5. Ainſi auſſi par la racine vniuerſelle de cet autre nombre compoſé $10+\gamma 7$, il faut entendre que la racine quarree du nombre 7, ſi elle ſe peut auoir, eſtant adiouſtee à 10, on doit prendre la racine de tout le nombre.

Or ces racines ſont notees diuerſement par les Autheurs : mais nous les figurerons appoſant le ſigne radical γ, ou γc au deuant du nombre dont la racine devra eſtre extraicte, & enfermant tout ledit nombre entre deux parentheſes, en ceſte maniere, $\gamma(\gamma 9+22)$, ou ainſi $\gamma(22+\gamma 9)$, qui eſt le meſme. Item $\gamma c\ (10+\gamma 7)$. Item $\gamma\ (49+121)$. Item $\gamma\ (10+\gamma 16+3+\gamma 64)$. Item $\gamma c\ (\gamma 25-\gamma 4+24)$. Item $\gamma(10+\gamma 36)+\gamma\ (70+\gamma 121)$, laquelle vaut 13.

Or tout ainſi que le quarré d'vne ſimple racine quarree ſourde eſt le meſme nombre, delaiſſant

ſeulement le ſigne radical $\sqrt{}$, tellement que le quarré de $\sqrt{5}$ eſt 5, & celuy de $\sqrt{12}$ eſt 12: mais le cube d'vne racine cubique ſimple eſt le meſme nombre, delaiſſant le ſigne radical $\sqrt{c}$, tellement que le cube de $\sqrt{c9}$ eſt 9, & le cube de $\sqrt{c12}$ eſt 12: Ainſi auſſi, le quarré de la racine quarree de quelque nombre compoſé, eſt le meſme nombre, eſtant delaiſſé le ſigne radical $\sqrt{}$. Comme le quarré de $\sqrt{(11+\sqrt{9}+\sqrt{4})}$ eſt $11+\sqrt{9}+\sqrt{4}$, c'eſt à dire 16: tellement qu'icelle racine valoit 4. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{c216}+\sqrt{c27})}$ eſt $\sqrt{c216}+\sqrt{c27}$, c'eſt à dire 9, dont la racine eſt 3. Le quarré de $\sqrt{(\sqrt{c216}-\sqrt{c27})}$ eſt $\sqrt{c216}-\sqrt{c27}$, c'eſt à dire 3, & la valeur de ſa racine eſt $\sqrt{3}$. Et ſemblablement le cube de la racine cubique d'vn nombre compoſé eſt le meſme nombre, eſtant oſté le ſigne radical $\sqrt{c}$. comme le cube de $\sqrt{c}$ $(\sqrt{25}+\sqrt{9})$ eſt $\sqrt{25}+\sqrt{9}$, c'eſt à dire 8, tellement que ceſte racine-là valoit 2. Le cube de $\sqrt{c}$ $(\sqrt{25}-\sqrt{9})$ eſt $\sqrt{25}-\sqrt{9}$, c'eſt à dire 2, & la racine d'iceluy eſt $\sqrt{c2}$. Le cube de $\sqrt{c}$ $(\sqrt{c64}+\sqrt{c27})$ eſt $\sqrt{c64}+\sqrt{c27}$, c'eſt à dire 7, dont la racine eſt $\sqrt{c7}$. Et faut entendre le meſme de quarré de quarrez, & ſurſolides, &c. En ceſte maniere on multiplie la racine de quelconque nombre compoſé en ſoy, c'eſt à dire qu'on a le produit de ſon quarré, ou cube, &c.

Mais pour multiplier la racine d'vn nombre compoſé, par vne racine ſimple, ou par vn nombre ſimple, ou compoſé, ou finalement par vne autre racine de nombre compoſé: il faut reduire l'vn & l'autre nombre à quarré, ou cube: puis faire la multiplication comme dit eſt cy deſſus. Com-

me pour exemple, soit $\sqrt{(7+\sqrt{3})}$ qu'il faut multiplier par 2. Les quarrez sont $7+\sqrt{3}$, & 4. Multipliant donc 7 par 4 viendront 28; mais $\sqrt{3}$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{16}$, viendront $\sqrt{48}$. Donc tout le nombre produit est $\sqrt{(28+\sqrt{48}.)}$

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{3}. \\ 4. \\ \hline 28+\sqrt{48}. \end{array}$$

Item $\sqrt{c}(\sqrt{c64}+\sqrt{c27})$ multipliée par 2, le produit est $\sqrt{c}(\sqrt{c32768}+\sqrt{c13824})$, ou $\sqrt{c}(32+24)$, c'est à dire $\sqrt{c56}$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{c64}+\sqrt{c27}. \\ 8. \\ \hline \sqrt{c32768}+\sqrt{c13824} \end{array}$$

Item soit $\sqrt{(7+\sqrt{4})}$ qu'il faut multiplier par $\sqrt{9}$. Les quarrez des nombres sont $7+\sqrt{4}$, & 9. Le multiplie donc $\sqrt{4}$ par 9, c'est à dire par $\sqrt{81}$, & vient $\sqrt{324}$: puis 7 par 9, & font 63. Donc le nombre produit sera $\sqrt{(63+\sqrt{324})}$, c'est à dire $\sqrt{81}$, ou 9.

$$\begin{array}{r} 7+\sqrt{4} \\ 9 \\ \hline 63+\sqrt{324} \end{array}$$

Soit aussi $\sqrt{(6+\sqrt{9})}$, qu'il faut multiplier par le nombre composé $\sqrt{4}+\sqrt{16}$. Le quarré du premier nombre est $6+\sqrt{9}$; & du posterieur $20+\sqrt{256}$: estant dõc faicte la multiplication, comme il se void icy, le produit sera $\sqrt{(\sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120)}$, c'est à dire $\sqrt{324}$, ou 18.

$$\begin{array}{r} 6+\sqrt{9} \\ 20+\sqrt{256} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{2304} \\ 120+\sqrt{3600} \\ \hline \sqrt{9216}+\sqrt{3600}+\sqrt{2304}+120. \end{array}$$

Item qu'il faille multiplier $\sqrt{(13+\sqrt{9})}$ par $\sqrt{(5+\sqrt{16})}$, c'eſt à dire 4 par 3. Les quarrez des nombres ſont $13+\sqrt{9}$, & $5+\sqrt{16}$: & multipliant $\sqrt{9}$ par $\sqrt{16}$, eſt fait $\sqrt{144}$; & 13, c'eſt à dire $\sqrt{169}$ par $\sqrt{16}$, vient $\sqrt{2704}$; puis apres $\sqrt{9}$ par 5, c'eſt à dire par $\sqrt{25}$, eſt fait $\sqrt{225}$; & 13 par 5, donnent 65. Donc tout le nõbre produit eſt $\sqrt{(\sqrt{2704}+\sqrt{225}+77)}$, c'eſt à dire 12. Car la racine de $\sqrt{2704}$ eſt 52, & celle de $\sqrt{225}$ eſt 15; & ces trois nombres 77, 52 & 15 adiouſtez enſemble font 144, dont la racine quarrée eſt 12.

$$\begin{array}{r} 13+\sqrt{9} \\ 5+\sqrt{16} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{144} \\ 65+\sqrt{225} \\ \hline \sqrt{2704}+\sqrt{225}+77 \end{array}$$

Qu'il faille encore multiplier $\sqrt{(\sqrt{18000}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ par $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$. Ayant poſé ces

$$\begin{array}{r} \sqrt{(\sqrt{1800}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)} \\ \sqrt{(\sqrt{450}+15)} \quad \sqrt{(\sqrt{450}+15)} \\ \hline \sqrt{4050000}+450-\sqrt{450}+15 \\ \sqrt{810000}+\sqrt{4050000} \\ \hline \sqrt{810000}+\sqrt{1620000}+450 \end{array}$$

nombres comme tu vois icy, multiplie premierement $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en ſoy, & viendra ſon quarré $\sqrt{450}+15$, auquel il faut prepoſer le ſigne $-$ à cauſe que de $+$ en $-$ eſt faict $-$. En apres, de $\sqrt{(\sqrt{1800}+30)}$ en $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ ſera fait $\sqrt{810000}+\sqrt{1620000}+450$; (c'eſt à ſçauoir en multipliant leurs quarrez entr'eux) c'eſt à dire $1350+\sqrt{1620000}$, pource que $\sqrt{810000}$ vaut au-

rant que 900, lequel nombre adiousté à 450, fait 1350, & prepoſant le ſigne $\sqrt{}$, le produit ſera le nombre $\sqrt{(1350+\sqrt{1620000})}$: Mais la racine de ce nombre ſera $\sqrt{900}+\sqrt{450}$, (comme il apparoiſtra au chapitre ſuiuant) c'eſt à dire $30+\sqrt{450}$; duquel nombre eſtant oſté le premier produit $-\sqrt{450}+15$, fait de $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ en ſoy, reſtera ſeulement 15 pour tout le produit de la multiplication propoſee.

Et afin de rendre cecy plus manifeſte, nous adiouſterons encore vn exemple en nombres rationnaux. Soit propoſé à multiplier $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ par $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ c'eſt à dire 1 par 3, & viendront 3. Car de $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt faict ſon quarré $\sqrt{9}+6$ auec le ſigne $-$, qui luy doit eſtre prepoſé: puis apres, de $\sqrt{(\sqrt{4}+14)}$ en $\sqrt{(\sqrt{9}+6)}$ eſt faict $\sqrt{144}$, c'eſt à dire 12: Car $\sqrt{36}$ eſt 6, & $\sqrt{144}$ eſt 12, & $\sqrt{1764}$ eſt 42; tous leſquels nombres auec 84 font iceluy nombre 144, & luy prepoſãt le ſigne $\sqrt{}$, ſera le produit

$$\begin{array}{r} \sqrt{(\sqrt{4}+14)}-\sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \sqrt{(\sqrt{9}+6)} \quad \sqrt{(\sqrt{9}+6)} \\ \hline \sqrt{144}+84-\sqrt{9}+6 \\ \sqrt{36}+\sqrt{1764} \\ \hline \sqrt{144}-9 \end{array}$$

$\sqrt{144}$, c'eſt à ſçauoir 12, duquel nombre eſtant oſté l'autre produit $\sqrt{9}+6$, ſçauoir 9, reſtera 3 pour tout le nombre produit ainſi qu'il deuoit eſtre.

Or quand il faut multiplier la racine quarree d'vn nombre compoſé enſemble auec la racine quarree d'vn nombre diminué ſemblable, en ſoymeſme, comme $\sqrt{(12+\sqrt{6})}+\sqrt{(12-\sqrt{6})}$; ſoit po-

ſé le nombre 2 fois, ainſi qu'il appert icy, & ſoient pris les quarrez des parties, leſquels ſeront $12+\sqrt{6}$, & $12-\sqrt{6}$, qui font enſéble 24 : (car $+\sqrt{6}$ ruine $-\sqrt{6}$.) Et ſoit multipliee vne partie par l'autre, & ſera fait $\sqrt{138}$, (pource que 6, quarré de $\sqrt{6}$, oſté de 144, quarré du nombre 12, reſte 138, auquel faut appoſer le ſigne $\sqrt{}$) dont le double eſt $\sqrt{552}$: & $24+\sqrt{552}$ ſera le nombre poduit cherché. Or la racine de ce produit eſt auſſi la ſomme des deux racines $\sqrt{(12+\sqrt{6})}$ & $\sqrt{(12-\sqrt{6})}$ recueillie en vne ſeule ſomme. Car quand la ſomme de deux nombres eſt multipliee en ſoy, la racine quarree du nombre produit eſt la ſomme des meſmes deux nombres : & partant puis que les deux racines propoſees enſemble, multipliees en ſoy, font $24+\sqrt{552}$, la racine de ce produit, ſçauoir eſt $\sqrt{(24+\sqrt{552})}$ ſera la ſomme de ces deux racines-là. Ce que nous rendrons manifeſte par vn autre exemple en nombres rationnaux. Soit $\sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})}$ c'eſt à dire 6, qu'il faut multiplier en ſoy. Il eſt euident que le nombre qui ſera produict doit eſtre 36.

$$\begin{array}{r} \sqrt{(12+\sqrt{6})}+\sqrt{(12-\sqrt{6})} \\ \sqrt{(12+\sqrt{6})}+\sqrt{(12-\sqrt{6})} \\ \hline 12+\sqrt{6}+12-\sqrt{6}. \\ \sqrt{138}. \\ \sqrt{138}. \\ \hline \sqrt{552}. \\ 24+\sqrt{552}. \end{array}$$

Soient donc trouuez les quarrez des parties, leſquels ſeront $10+\sqrt{36}$, & $10-\sqrt{36}$, qui adiouſtez enſemble font 20 : & ſoit multipliée vne partie

en l'autre, & viendra $\sqrt{64}$, dont le double sera $\sqrt{256}$, c'est à dire 16; & partant le nombre produict est 20+16, c'est à dire 36: & la racine de ce nombre, sçauoir 6, est pareillement la somme de l'addition de ces deux racines là proposées, comme il est manifeste.

$$\begin{array}{r} \sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})} \\ \sqrt{(10+\sqrt{36})}+\sqrt{(10-\sqrt{36})} \\ \hline 10+\sqrt{36}+10-\sqrt{36}. \\ \cdot\ \sqrt{64} \\ \sqrt{64} \\ \hline \sqrt{256} \\ 20+\sqrt{256}. \end{array}$$

Or quand il faut multiplier vn nombre composé de racine simple, & de racine vniuerselle, par vn nombre diminué semblable; a aussi lieu le compendium que nous auons enseigné au chapitre 19. Comme pour exemple, s'il faut multiplier le nombre $\sqrt{20+\sqrt{(20-\sqrt{5})}}$ par le nombre $\sqrt{20-\sqrt{(20-\sqrt{5})}}$: Il n'y a qu'à soustraire $20-\sqrt{5}$, quarré de la derniere particule du nombre composé ou diminué, de 20 quarré de la premiere particule, & le reste $\sqrt{5}$, sera le produit de la multiplication.

Mais s'il falloit multiplier $\sqrt{(24+8)}+5$ en soy, il n'y auroit qu'à quarrer chaque particule, & viendroient $24+8$, & 25: puis multiplier l'vne par l'autre, & le double du produit estant adiousté auec les susdits deux quarrez des particules, donneroit $24+33+\sqrt{(1009+800)}$ pour tout le produit de la multiplicatton.

Si on vouloit encor multiplier $\sqrt{(59-4\sqrt{2})}+8$ en soy, il ne faudroit aussi que prendre les quarrez de chaque particule, qui seroient $59-4\sqrt{2}$, & 64, puis

les adiouſter au double du produit d'vne particule en l'autre, & viendroient $59 - 48\mathcal{R} + \mathcal{V}(1280q - 1024\mathcal{R})$ pour tout le produit de la multiplication.

Séblablement s'il faut multiplier $\frac{1}{2}q + \mathcal{V}(\frac{1}{4}qq + 1q)$ par $\frac{1}{2}q - \mathcal{V}(\frac{1}{4}qq - 1q)$: Il n'y a qu'à ſouſtraire le quarré de la derniere particule, du quarré de la premiere particule, ſçauoir eſt $\frac{1}{4}qq + 1q$, de $\frac{1}{4}qq$, & le reſte $-1q$, ſera le produit de la multiplication.

Pour faire la diuiſion des racines vniuerſelles, ſoit reduit à quarré; tant le nombre diuidande que diuiſeur: puis apres ſoit faite la diuiſion comme il a eſté enſeigné cy deuant, & la racine du nombre produit ſera le quotient. Comme pour exemple, ſoit $\mathcal{V}(13 + \mathcal{V}7)$ qu'il faut diuiſer par $\mathcal{V}5$. Les quarrez des nombres ſont $13 + \mathcal{V}7$, & 5. Ie diuiſe donc 13 par 5, & vient $2\frac{3}{5}$, & $\mathcal{V}7$ par 5, c'eſt à dire par $\mathcal{V}25$, & vient $\mathcal{V}\frac{7}{25}$: tellement que tout le quotient eſt $\mathcal{V}(2\frac{3}{5} + \mathcal{V}\frac{7}{25})$.

$13 + \mathcal{V}7$ [$2\frac{3}{5} + \mathcal{V}\frac{7}{25}$.
$\mathcal{V}25$

Item ſoit $\mathcal{V}(432 + \mathcal{V}7776)$ qu'il faut diuiſer par 6. Les quarrez des nombres ſont $432 + \mathcal{V}7776$, & 36: le nombre 432 eſtant diuiſé par 36, viennent 12; & $\mathcal{V}7776$ eſtant diuiſee par 36, c'eſt à dire par $\mathcal{V}1296$, vient $\mathcal{V}6$: & partant tout le quotient ſera $\mathcal{V}(12 + \mathcal{V}6)$.

$\mathcal{R}$
$\mathcal{R}\mathcal{R}$ $\mathcal{R}\mathcal{R}$
$\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R} + \mathcal{V}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}$ [$12 + \mathcal{V}6$
$\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}$ $\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}$
$\mathcal{R}$

Item ſoit $\mathcal{V}15$, qu'il faut diuiſer par $\mathcal{V}(3 + \mathcal{V}5)$. Afin de trouuer vn nouueau diuiſeur nous multiplierons $\mathcal{V}(3 + \mathcal{V}5)$ par $\mathcal{V}(3 - \mathcal{V}5)$ & viendra vn nouueau diuiſeur $\mathcal{V}4$. Que ſi le diuidande $\mathcal{V}15$, eſt auſſi mul-

tiplié par $\sqrt{}(3-\sqrt{}5)$, nous aurons vn nouueau diuidande $\sqrt{}(45-\sqrt{}1125)$: le quarré d'iceluy sera $45-\sqrt{}1125$, & le quarré du nouueau diuiseur sera 4. Si donc on diuise 45 par 4, le quotient sera $11\frac{1}{4}$: si nous diuisons $-\sqrt{}1125$ par 4, c'est à dire par $\sqrt{}16$, le quotient sera $-\sqrt{}70\frac{5}{16}$. Donc tout le quotient est $\sqrt{}(11\frac{1}{4}-\sqrt{}70\frac{5}{16})$.

Item soit diuisé 20 par $(10-\sqrt{}5)$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nombre par $\sqrt{}(10+\sqrt{}5)$, afin d'auoir vn nouueau diuidande $\sqrt{}(4000+\sqrt{}800000)$ & vn nouueau diuiseur $\sqrt{}95$: les quarrez d'iceux nombres sont $4000+\sqrt{}800000$, & 95. Si donc on partit 4000 par 95, seront dõnez $42\frac{10}{19}$: & de la diuision de $\sqrt{}800000$, par 95, c'est à dire par $\sqrt{}9025$, sera produit $\sqrt{}88\frac{232}{361}$. Donc tout le quotient de la diuision est $\sqrt{}(42\frac{10}{19}+\sqrt{}88\frac{232}{361})$.

Item soit diuisée $\sqrt{c}(\sqrt{c}32768-\sqrt{c}13824)$ par 2. Les cubes de ces nombres sont $\sqrt{c}32768+\sqrt{c}13824$, & 8. Ie diuise donc $\sqrt{c}32768$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c}512$, & vient au quotient $\sqrt{c}64$: & de la diuision de $\sqrt{c}13824$ par 8, c'est à dire par $\sqrt{c}512$, vient $\sqrt{c}27$. Tout le quotient est donc $\sqrt{c}(\sqrt{c}64+\sqrt{c}27)$, c'est à dire $\sqrt{c}7$.

Item soit $\sqrt{}(588+\sqrt{}34848)$, qu'il faut diuiser par $\sqrt{}(12+\sqrt{}8)$. Les quarrez des nombres sont $588+\sqrt{}34848$, & $12+\sqrt{}8$. Nous multiplierons l'vn & l'autre nõbre par $12-\sqrt{}8$, afin d'auoir nouueau nombre diuidande, & diuiseur: le diuidande sera $\sqrt{}(7056+\sqrt{}50181\frac{1}{2}-\sqrt{}27659\frac{1}{2}-\sqrt{}27878\frac{1}{4})$, ou plustost par reduction $\sqrt{}(6528+\sqrt{}332928)$, & le diuiseur sera 136. Si donc on diuise 6528, par 136, viendront 48: & $\sqrt{}332928$ par 136, c'est à dire par $\sqrt{}18496$, viendront $\sqrt{}18$: & partant tout le quotient sera $\sqrt{}(48+\sqrt{}18)$.

Nous auons dit cy-dessus comment il faut adiouster vne racine vniuerselle à vne semblable ayãt le signe contraire: comme $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ auec $\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ dont la somme est $\sqrt{6}$. Mais telles racines se peuuent encore adiouster ensemble comme ensuit.

Le quarré de la derniere particule de l'vne ou l'autre d'icelles racines soit osté du quarré de la premiere particule, & à la racine quarree du reste soit adioustee la premiere particule; puis soit doublé ce qui viendra, & la racine de ce double là, sera la somme de l'addition. Comme en l'exemple cy-dessus, le quarré de la derniere particule est 3, lequel i'oste de 4, quarré de la premiere particule, & reste 1, que i'adiouste à icelle premiere particule, & font 3, dont le double est 6, & la racine de 6, est $\sqrt{6}$, & autant est la somme de l'addition des deux racines proposees.

Mais quand les deux racines qu'il faut adiouster sont dissemblables, il faut diuiser la plus grande par la moindre, & au quotient adiouster 1, (sinon que lesdites racines fussent incommensurables: car alors l'addition d'icelles se fera plus commodément par l'interposition du signe —) puis par le produict soit multipliee la plus petite racine; & le produict de la multiplication sera la somme de l'addition. Comme pour exemple: soit $\sqrt{(8+\sqrt{48})}$ à laquelle il faut adiouster $\sqrt{2+\sqrt{3}}$). Ie diuise celle-là par ceste-cy, & vient au quotient $\sqrt{4}$, c'est à dire 2, auquel i'adiouste 1, & font 3, par lesquels ie multiplie $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, & vient $\sqrt{(18-\sqrt{243})}$ pour la somme des deux racines proposees à adiouster.

Item soit $\sqrt{(10+\sqrt{36})}$ qu'il faut adiouster à $\sqrt{(11+\sqrt{25})}$: Ie diuise ceste-cy par celle-là, & vient

l au quotient, auquel i'adiouſte vne vnité, & ſont 2, par leſquels ie multiplie $\gamma(10+\gamma 36)$, & vient $\gamma 64$, c'eſt à dire 8, pour la ſomme de l'addition des deux racines propoſees.

Maintenant ſi d'vne racine vniuerſelle de nombre compoſé, il en faut ſouſtraire vne autre ſemblable de nombre diminué: Le quarré de la derniere particule ſoit oſté du quarré de la premiere, & la racine du reſte ſoit oſtee d'icelle premiere particule, puis ſoit doublé ce dernier reſidu, & la racine de ce double ſera le reſte requis. Comme pour exemple, ſoit $\gamma(12-\gamma 6)$. Le quarré de la premiere particule eſt 144, duquel i'oſte 6, quarré de la derniere particule, & reſte 138, dont la racine eſt $\gamma 138$, que ie ſouſtrais de la premiere particule 12, & reſte $12-\gamma 138$, que ie double, & viennent $24-\gamma 552$, dont la racine eſt $\gamma(24-\gamma 552)$, qui eſt le reſte requis.

Mais ſi les racines ſont diſſemblables: pour faire la ſouſtraction, il faut diuiſer la plus grande par la moindre, & du quotient oſter 1; (ſinon que les racines propoſees fuſſent incommenſurables: Car alors la ſouſtraction ſe fera plus commodément par l'interpoſition du ſigne —). Puis par le reſte ſoit multipliee la moindre racine, & le produit ſera le reſte requis. Comme pour exemple, ſoit $\gamma(2+\gamma 3)$ qu'il faut ſouſtraire de $\gamma(8+\gamma 48)$. Ie diuiſe ceſte-cy par celle-là, & vient au quotient $\gamma 4$, c'eſt à dire 2, dont i'oſte vne vnité, & reſte 1 par lequel ie multiplie la moindre racine $\gamma(2+\gamma 3)$, & vient la meſme $\gamma(2+\gamma 3)$ pour le reſte de la ſouſtraction.

Item ſoit $\gamma(486-\gamma 162)$, de laquelle faut ſouſtraire $\gamma(\gamma 6-\gamma 2)$ $\gamma(12+\gamma 6)$ delaquelle il faut ſouſtraire: ie diuiſe celle-là par celle-cy, & vient au quotient $\gamma 9$, c'eſt à dire 3, dont i'oſte 1, &

reſte 2, par leſquels ie multiplie la moindre racine $\gamma(\gamma 6 - \gamma 2)$, & vient au produict $\gamma(\gamma 96 - \gamma 32)$ pour le reſte de la ſouſtraction requis.

De l'extraction des racines des binomes, & reſidus.

CHAP. XXIIII.

QVand deux quelconques nombres ſont conioints par le ſigne +, ils ſont ordinairement nommez Binome : comme $\gamma 12 + \gamma 3$: & $\gamma 18 + \gamma 8$. Mais eſtans accouplez par le ſigne —, ils ſont appellez Apoteme ou Reſidu: Comme $\gamma 12 - \gamma 3$: & $\gamma 18 - \gamma 8$. Et plus de deux nombres ainſi accouplez, ſont nommez Trinome, Quatrinome, &c. Comme $\gamma 17 + \gamma 10 + \gamma 3$: ou $\gamma 17 - \gamma 10 + \gamma 3$, ſont dits Trinome: & $\gamma 17 + \gamma 10 + \gamma 3 + \gamma 2$: ou $\gamma 17 - \gamma 10 + \gamma 3 + \gamma 2$, ſont appellez Quatrinome, &c. Mais Euclide au 10. liure, prop. 37 & 74 appelle ſeulement Binome, ou reſidu, quand les deux nombres conioints par le ſigne + ou —, ſont rationnels commenſurables en puiſſance ſeulement: il conſtitue de ſix ſortes de Binome, & autant de reſidu ; chacun deſquels il definit, & enſeigne à trouuer au meſme liure. Or pour extraire la racine quarree d'iceux Binomes & reſidus, il y a diuerſes manieres, deux deſquelles nous enſeignerons icy, & au prealable le probleme ſuiuant.

Couppper vn nombre donné en deux parties, telles que le nombre produit d'icelles ſoit egal à vn nombre donné, qui ne ſoit plus grand que le quarré de la moitié d'icelny nombre propoſé à diuiſer, ou (qui eſt le meſme) que la quatrieſme partie du quarré dudit nombre.

Qu'il

Qu'il faille couppper le nombre 20 en deux parties, telles que multipliées entr'elles, leur produit soit 75, qui est moindre que 100, quart du quarré d'iceluy nombre proposé 20. Soit osté 75 de 100, quarré de la moitié de 20, resteront 25, dont soit pris la racine quarree, laquelle sera 5, & soit icelle adiouſtée à 10, moitié du nombre proposé à diuiser, & viendront 15, qui sera le plus grand nombre cherché; mais icelle racine 5 estant ostee d'icelle moitié 10, resteront 5, qui sera le moindre nombre requis: tellement donc que les deux nombres 15 & 5, sont parties dunombre 20, telles que multipliees entr'elles leur produit est 75, ainsi qu'il estoit requis.

Maintenant soit le binome $38+\sqrt{288}$, duquel il faut extraire la racine quarree. Soit couppé le plus grand nom 38 en deux parties, telles que leur produict soit le nombre 72, quatriesme partie du quarré du moindre nom, sçauoir de 288: lesquelles parties seront trouuées par le Probl. cy-dessus, estre 36 & 2: d'iceux deux nombres soient prises les racines quarrees, & icelles seront 6 & $\sqrt{2}$, qui conioinctes par le signe + feront $6+\sqrt{2}$, qui sera la racine quarree du binome proposé. Mais icelles racines 6 & $\sqrt{2}$ estans accouplees par le signe — feront $6-\sqrt{2}$, qui sera la racine quarree du residu $38-\sqrt{288}$. Item la racine quarree du binome $\sqrt{32}+\sqrt{24}$, sera trouuee en la mesme maniere estre $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{2}}}$. Car $\sqrt{32}$ plus grand nom d'iceluy binome estant couppé en deux parties, telles que leur produict soit 6, quatriesme partie de 24, quarré du moindre nom; icelles parties seront trouuees estre $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$, dont les racines conioinctes par le signe +, sont $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{2}}}$.

Pour autrement extraire la racine quarree du

binome $38+\sqrt{288}$, il faut du quarré du plus grand nom, oſter le quarré du moindre nom, & reſteront 1156, deſquels ſoit pris le quart, qui ſera 289, duquel ſoit pris la racine quarree, laquelle ſera 17, qu'il faut adiouſter & ſouſtraire de la moitié du plus grand nom, ſçauoir de 19, & viendront 36, & 2, deſquels deux nombres ſoient priſes les racines quarrées, & ſeront 6, & $\sqrt{2}$, qui accouplees par le ſigne +, feront $6+\sqrt{2}$ pour la racine quarree du binome $38+\sqrt{288}$, comme deuant. Par la meſme maniere la racine quarree du reſidu $\sqrt{60}-\sqrt{12}$, ſera trouuee eſtre $\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{12})}-\sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{12})}$.

Quant à la preuue, elle ſe fait comme en l'extraction des nombres abſolus, ſçauoir eſt, multipliant la racine trouuee par ſoy-meſme.

Or voila ſommairement les operations plus ordinaires & vſitees en l'Algebre numeralle: Et afin de donner aux apprentifs & peu verſez en ceſte ſcience, tant plus de cognoiſſance de ſa pratique, nous finirons ce traicté par quelques problemes ou queſtions, auec leurs ſolutions, au moyen deſquelles, & des preceptes cy-deuant enſeignez, on en pourra ſouldre infinis autres.

Diuerſes queſtions & problemes, auec leurs ſolutions.

CHAP. XXV.

1. *EN vne armée de 24000 hommes, il y a de trois nations, ſçauoir, François, Suiſſes & Allemans: mais le nombre des François & des Suiſſes enſemble eſt ſeptuple du nombre des Allemans: & le nombre des François ioinct à celuy des Allemands eſt quintuple des Suiſſes: On demande quel eſt le nombre de chaque nation?*

Premierement posons 1ℛ pour le nombre des Allemans : donc le nombre des François & des Suisses ensemble sera 24000—1ℛ, & partant 7ℛ seront egales à 24000—1ℛ. Adioutons donc 1ℛ de part & d'autre, & nous aurons 8ℛ egales à 24000; par consequent 1ℛ, qui est le nombre des Allemands sera 3000: parquoy le nombre des François & des Suisses ensemble est 21000. Or posons 1ℛ pour les Suisses: & les François seront 21000—1ℛ: Et puis que le nombre des François & des Allemands ensemble, est quintuple de celuy des Suisses, 24000—1ℛ: seront egales à 5ℛ: adioutons de part & d'autre 1ℛ, & viendront 6ℛ egales à 24000: partant 1ℛ vaudra 4000, qui est le nombre des Suisses: & par consequent il y a 17000 François.

2 *Il y a une armee composee de François, Allemans & Anglois: les François sont 25000: les Allemans sont moitié des François & Anglois, & les Anglois sont la huictiesme partie des François & Allemans: il faut trouuer le nombre tant des Allemans que des Anglois, & combien il y a d'hommes en toute l'armee.*

Soit posé 1ℛ pour les Allemans: donc les François & les Anglois ensemble seront 2ℛ, & toute l'armee sera 3ℛ. Et puis que les Anglois sont la huictiesme partie des François & des Allemans ensemble; & que les Allemans & François sont ensemble 1ℛ +25000: les Anglois seront $\frac{1}{8}$ℛ +3125. Parquoy veu que les François sont 25000, les Allemans 1ℛ, & les Anglois $\frac{1}{8}$ℛ +3125, toute l'armee sera $1\frac{1}{8}$ℛ +28125 egale à 3ℛ. Ostant donc $1\frac{1}{8}$ℛ de part & d'autre, l'equation sera entre 28125, & $1\frac{7}{8}$ℛ: parquoy diuisant 28125 par $1\frac{7}{8}$, viendra le nombre 15000, pour la valeur de 1ℛ, qui est le nombre des Allemans; & partant

les François & Allemans feront enſemble 40000, dont la huictieſme partie eſt 5000 pour le nombre des Anglois: & par conſequent toute l'armée ſera de 45000 hommes.

3. *Il y a vne colomne quadrangulaire rectangle de laquelle la baſe a les coſtez en raiſon ſeſquitierce, & ſa hauteur eſt au plus grand coſté de la baſe en raiſon double ſuperbipartiente tierce, & la ſolidité d'icelle colomne contient 93312 toiſes: il faut trouuer chacune des dimenſions ſuſdictes.*

Le moindre coſté de la baſe ſoit poſé 3ℛ, & le plus grand 4ℛ: mais la hauteur $10\frac{2}{3}$ℛ afin qu'elle ſoit au plus grand coſté 4ℛ, en raiſon double ſuperbipartiente tierce, & le plus grand coſté au moindre en raiſon ſeſquitierce. Ces trois nombres multipliez entr'eux produiſent 128c, egaux à 93312 ſolidité de la colomne. Diuiſant donc 93312 par 128, viennent 729 pour 1c, & 9 pour 1ℛ: donc le moindre coſté de la baſe, lequel nous auons poſé eſtre 3ℛ, ſera 27: & le plus grand 4ℛ, ſera 36; & la hauteur $10\frac{2}{3}$ℛ ſera 96. Et ces trois nombres 27, 36, 96 multipliez entr'eux produiſent la ſolidité propoſée 93312.

4. *Il y a vn rectangle, duquel l'aire eſt 30, & les coſtez d'iceluy ſont en raiſon ſeſquialtere: il faut trouuer iceux coſtez, & le diametre.*

Soit poſé le moindre coſté 2ℛ, & partant le plus grand qui doit eſtre ſeſquialtere à iceluy ſera 3ℛ: de la multiplication des coſtez entr'eux, ſera produit 6q egaux à 30, aire donné. Diuiſant donc 30 par 6, 1q, ſera 5, & 1ℛ, $\sqrt{5}$. Et pource que nous auons poſé le moindre coſté eſtre 2ℛ, iceluy ſera $\sqrt{20}$, nombre double de $\sqrt{5}$; & le plus grand coſté 3ℛ ſera $\sqrt{45}$, nombre triple de $\sqrt{5}$. Et pource que les quarrez des

costez 20 & 45 sont ensemble egaux au quarré du diametre, le quarré d'iceluy diametre sera 65, & iceluy diam. $\sqrt{65}$.

5. *Il y a vn rectangle dont la difference des costez est* $\sqrt{32}$, *& leur raison triple: trouuer tant iceux costez, que l'aire d'iceluy rectangle.*

Posons que le moindre costé soit 1R: Donc l'autre sera 3R, puis qu'ils sont en raison triple: Mais puis que leur difference est 2R, & la donnee est $\sqrt{32}$: icelles 2R seront egales à $\sqrt{32}$; & consequemment 1R vaudra $\sqrt{8}$, qui est le moindre costé, & partant le plus grand qui luy est triple sera $\sqrt{72}$: Et puis que l'aire d'vn rectangle s'obtient en multipliant vn costé par l'autre, si on multiplie $\sqrt{72}$ par $\sqrt{8}$, viendront $\sqrt{576}$, c'est à dire 24 pour l'aire du rectangle proposé.

6. *Il y a vn rectangle duquel les costez sont en raison septuple, & les quarrez d'iceux pris ensemble, ont raison centuple à la somme d'iceux costez: Trouuer les costez, l'aire, & le diametre dudit rectangle.*

Soit posé le moindre costé 1R, & le plus grand 7R: donc la somme d'iceux costez sera 8R, & leurs quarrez sçauoir 1q & 49q adioustez ensemble feront 50q, centuple de 8R. Il y a donc equation entre 50q & 800R. Et diuisant 800 par 50, viendront 16, pour 1R, moindre costé: le plus grand qui est en raison septuple sera donc 112, & l'aire sera 1792, produit d'vn costé par l'autre: Mais le diametre sera $\sqrt{12800}$. Car les quarrez des costez sont 256, & 12544, la somme desquels est 12800, centuple de 128, qui est la somme d'iceux costez, & partant le quarré du diametre sera 12800, dont la racine quarree, sçauoir est $\sqrt{12800}$ sera ledit diametre.

7. *Il y a vn rectangle, duquel l'aire est* 80, *& la differen-*

ce des coſtez eſt 2: trouuer le diametre, & les coſtez d'iceluy rectangle.

Soit poſé le moindre coſté de 1ℛ; & partant le plus grand ſera 1ℛ+2. Ces coſtez multipliez entr'eux font l'aire 1𝔮+2ℛ, lequel eſt egal à l'aire donné 80. Oſtant donc 1ℛ de chacun, l'equation ſera entre 1𝔮, & 80—2ℛ. La moitié du nombre des racines eſt 1, dont le quarré eſt 1, qui adiouſté à 80, ſera 81, dont la racine quarree eſt 9, de laquelle oſtant la ſuſdite moitié 1, reſtera 8, eſtimation de 1ℛ, qui eſt pour le moindre coſté: Donc le plus grand excedant iceluy de 2 ſera 10. Iceux coſtez multipliez entr'eux produiſent 80 aire donné, & les deux quarrez des coſtez ſont 64 & 100, egaux au quarré du diametre: & partant le quarré du diam. ſera 164, & iceluy diam. √164.

8. *Il y a vn rectangle duquel le diametre eſt 30, & la ſomme des coſtez 42: trouuer iceux coſtez, & l'aire du rectangle.*

Soit poſé vn coſté de 1ℛ, & partant l'autre ſera 42—1ℛ: donc leurs quarrez ſeront 1𝔮, & 1764—84ℛ+1𝔮, qui ſont enſemble egaux au quarré du diametre. Parquoy l'equation ſera entre 2𝔮+1764—84ℛ & 900. Et adiouſtant 84ℛ à chacun, elle ſera entre 84ℛ+900. & 2𝔮+1764. Et oſtant 900 de chacun, reſtera equation entre 84ℛ, & 2𝔮+864. Et derechef oſtant 864 de chacun, elle ſera entre 2𝔮, & 84ℛ—864. Parquoy diuiſant tout par 2, l'equation viendra entre 1𝔮 & 42ℛ—432. La moitié du nombre des racines eſt 21, dont le quarré eſt 441, duquel oſtant 432, reſtera 9, dont la racine quarree eſt 3, qui adiouſtee à la ſuſdite moitié 21, viendra 24 pour le plus grand coſté: & partant reſtera 18 pour le moindre: & iceux coſtez multipliez entr'eux, produiſent 432 pour l'aire du rectangle.

9 *Il y a vn quarré duquel le diametre & le costé ensemble font 6 : trouuer iceux costé & diametre.*

Soit posé le costé 1ℛ, & partant le diametre sera 6—1ℛ. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré du costé est 1q; & le quarré du diametre est 36—12ℛ+1q: il y aura equation entre 2q, & 36—12ℛ+1q: parquoy ostant 1q de chacun, demeurera equation entre 1q, & 36—12ℛ: maintenant la moitié du nombre des racines est 6, dont le quarré est 36, qui adiouſtez au nombre 36, viennent 72, dont la racine est ⩗72, de laquelle estant ostee la susdite moitié 6, restera ⩗72—6, pour la valeur de 1ℛ; & autant sera le costé du quarré; lequel estant osté de 6, restera 12—⩗72 pour le diametre.

10 *Il y a vn autre quarré duquel le diametre surpasse le costé de 3: trouuer lesdits costé & diametre.*

Pour le costé soit posé 1ℛ, & partant le diametre sera 1ℛ+3. Et pource que le quarré du diametre est double du quarré du costé; & le quarré du costé est 1q; & le quarré du diametre 1q+6ℛ+9: L'equation sera entre 2q, & 1q+6ℛ+9; & ostant 1q de chacun, restera l'equation entre 1q, & 6ℛ+9. La moitié du nombre des racines est 3, dont le quarré est 9, qui adiousté au nombre 9, faict 18, dont la racine est ⩗18, à laquelle soit adiousté la susdite moitié 3, & sera faict ⩗18+3, valeur de 1ℛ, qui est pour le costé du quarré: & partant le diametre sera ⩗18+6.

11. *Il y a vn quarré duquel le costé multiplié par le diametre faict 10 : trouuer lesdits costé & diametre.*

Soit posé le costé de 1ℛ: & puis que iceluy costé multipliant le diametre fait 10: par le contraire diuisant 10, le quotient sera ledit diametre, & par consequét iceluy diametre sera $\frac{10}{1ℛ}$. Et pource que le quar-

ré du diametre eſt double du quarré du coſté, ſçauoir eſt de $1q$, & le quarré dudit diametre eſt $\frac{200}{1q}$; il y aura equation entre $2q$, & $\frac{100}{1q}$, laquelle par la multiplication en croix ſera reduitte à celle d'entre $2qq$, & 100. Diuiſant donc 100 par 2, viendra 50 pour la valeur de $1qq$: & $1\mathcal{R}$ ſera $\sqrt{\sqrt{50}}$, & tel eſt le coſté du quarré propoſé, & partant ſi on diuiſe 10 par $\sqrt{\sqrt{50}}$, viendra au quotient $\sqrt{\sqrt{200}}$ pour le diametre dudit quarré.

12. *Il y a vn quarré duquel le coſté multiplié par la difference d'entre iceluy coſté, & le diametre fait 15: trouuer le diametre, & le coſté dudit quarré.*

Soit poſé le coſté $1\mathcal{R}$, & partant la difference d'entre le coſté & le diametre ſera $\frac{15}{1\mathcal{R}}$, laquelle eſt trouuee diuiſant 15 par $1\mathcal{R}$, ſçauoir eſt afin que le quotient multiplié par le diuiſeur $1\mathcal{R}$, produiſe le nombre diuiſé 15. Et pource que le diametre excede le coſté de ceſte difference, le diametre ſera $1\mathcal{R}+\frac{15}{1\mathcal{R}}$. Et d'autant que le quarré du diametre eſt double du quarré du coſté: & le quarré d'iceluy coſté eſt $1q$, & le quarré du diametre eſt $\frac{2qq+30q+225}{1q}$, il y aura equation entre $2q$, & $\frac{2qq+30q+225}{1q}$, qui par multiplication en croix ſera reduite à l'equation d'entre $2qq$, & $1qq+30q+225$. Oſtant donc $1qq$ de chacun, l'equation ſera entre $1qq$ & $30q+225$. La moitié du nombre des quarrez eſt 15, dont le quarré eſt 225, qui adiouſté à 225, vient 450, dont la racine quarree eſt $\sqrt{450}$, à laquelle adiouſtant la ſuſdite moitié 15, viendra $\sqrt{450}+15$ pour $1q$; & partant $1\mathcal{R}$ ſera $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$: & autant eſt le coſté requis, dont le quarré $\sqrt{450}+15$ eſtant doublé donnera $\sqrt{1800}+30$, pour le quarré du diametre: & partãt iceluy diam. ſera $\sqrt{(\sqrt{1800}+30)}$, duquel eſtant ſouſtraict le coſté, reſtera la difference $\sqrt{(\sqrt{1800}+30)}-\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$, qui multipliee par le

costé $\sqrt{(\sqrt{450}+15)}$ sera produict le nombre 15.

13. *Il y a un triangle duquel les segmens de la base faits par la perpendiculaire sont 16 & 5, mais l'aggregé des deux costez est 33: On demande combien est chacun desdits costez, & consequemment l'aire d'iceluy triangle?*

Ie pose que le moindre costé soit $1\mathfrak{R}$: donc l'autre costé sera $33-1\mathfrak{R}$, & partant les quarrez d'iceux costez seront $1q$, & $1q-66\mathfrak{R}+1089$, du moindre d'iceux quarrez soit osté le quarré du moindre segmét, & restera $1q-25$ pour le quarré de la perpendic. Mais du quarré du plus grand costé soit aussi osté le quarré du grand segment, & resteront encore $1q-66\mathfrak{R}+833$ pour le quarré de la perpend. Partant il y a equation entre $1q-25$, & $1q-66\mathfrak{R}+833$. Parquoy adioustant & soustraiant de part & d'autre selon les preceptes des Equations, viendront $66\mathfrak{R}$ egales à 858. Donc la valeur de $1\mathfrak{R}$ sera 13, qui est le moindre costé requis, & partant l'autre sera 20, & la superficie 126.

14. *Il y a un triangle rectangle, duquel un costé de l'angle droict est $\sqrt{18}+3$, mais l'autre costé & l'hypotenuse sont ensemble $\sqrt{162}+9$: on demande combien est chaque costé.*

Posons $1\mathfrak{R}$ pour le costé de l'angle droict requis; & partant l'hypotenuse sera $\sqrt{162}+9-1\mathfrak{R}$: donc les quarrez des deux costez dudit angle droict seront $27+\sqrt{648}$, & $1q$; lesquels deux quarrez ensemble sont egaux au quarré de l'hypotenuse, c'est assauoir à $243-18\mathfrak{R}+1q+\sqrt{52488}-\sqrt{648}q$: Parquoy si on oste de part & d'autre $\sqrt{648}$, viendra equation entre $1q+27$, & $243-18\mathfrak{R}+1q+\sqrt{41472}-\sqrt{648}q$: (car ostant $\sqrt{648}$ de $\sqrt{52488}$, qui sont commensurables, restera $\sqrt{41472}$) & si de chaque terme d'icelle equation on osté $1q$, & 27, restera encore equation entre 0, & $216-18\mathfrak{R}+\sqrt{41472}-\sqrt{648}q$: mais ad-

iouſtant de part & d'autre 18ℛ, & ⁄6489, l'equation viendra entre ⁄6489+18ℛ, & 216+⁄41472. Or d'autant que le nombre ⁄6489 a eſté procreé multipliant ⁄162 par 18ℛ bis, il doit eſtre pris pour nõbre de racines, ſuiuant ce que nous auons dit à la page 760: & partant tout ce nombre ⁄6489+18ℛ eſt le nombre des racines, & conſequemment il faut par iceluy nombre (delaiſſant les ſignes coſſiques 9 & ℛ) diuiſer l'autre nombre de l'equation 216+⁄41472, afin d'auoir la valeur d'vne racine: pour faire laquelle diuiſion il faut, ſuiuant ce qui eſt enſeigné au ch. 20. multiplier tant le diuiſeur ⁄648+18, que le diuidande 216+⁄41472, par ⁄648—18: quoy faiſant viendra 324 pour nouueau diuiſeur, & ⁄3359232+1296 pour nouueau diuidande: & la diuiſion faite, le quotient ſera ⁄32+4, qui eſt la valleur de 1ℛ: & autant eſt le coſté cherché, que nous auons poſé eſtre 1ℛ, lequel coſté eſtant ſouſtrait de ⁄162+9, reſtera ⁄50+5 pour l'hypotenuſe, puis que l'aggregé d'iceluy coſté, & de ladite hypotenuſe eſt ⁄162+9.

15. *Il y a vn iardin rectangulaire, dont la diagonalle excede la longueur dudit iardin de 4 perches, & la largeur de 8. On demande combien eſt la longueur & la largeur dudit iardin, & conſequemment l'aire d'iceluy.*

Ie poſe que la largeur dudit iardin ſoit 1ℛ: donc la diagonalle ſera 1ℛ+8, & ſon quarré 1q+16ℛ+64, duquel eſtant oſté le quarré de la largeur, ſçauoir 1q, reſtent 16ℛ+64 pour le quarré de la longueur dudit iardin, & partant icelle longueur ſera ⁄(16ℛ+64), qui oſtee de la diagon. reſteront 1ℛ+8—⁄(16ℛ+64), qui ſont egaux à l'excez donné 4: adiouſtant donc & ſouſtraiant de part & d'autre ainſi qu'il appartient, viendra 1q egal à 8ℛ+48. Parquoy la valeur

de 1ℛ sera 12 : & autant est la largeur dū iardin, & consequemment la diagonalle d'iceluy sera 20, la longueur 16, & la superficie 192.

16. *Il y a vn autre iardin rectangulaire, dont les quatre costez auec la diagon. font ensemble 38, & la superficie d'iceluy est 48. Assauoir la longueur & largeur dudit iardin.*

Ie pose 1ℛ pour la somme de la longueur & largeur dudit iardin, & consequemment les quatre costez seront 2ℛ, & la diagon. 38—2ℛ: partant son quarré est 1444—152ℛ+ 4ℚ: à iceluy quarré soit adiousté le double de la superficie donnee, sçauoir 96, & viendront 1540—152ℛ+ 4ℚ, qui sont egaux au quarré de la somme de la longueur & largeur, qui est 1ℚ. Adiousțons & sousțraions de part & d'autre ainsi qu'il appartient, & viendra 1ℚ egal à $50\frac{1}{3}$ℛ—$513\frac{1}{3}$. Parquoy 1ℛ vaut 14 : Et autant est la somme de la longueur & largeur du iardin proposé. Parquoy les quatre costez seront ensemble 28, & la diagonalle 10. Nous auons donc maintenant l'aggregé des deux costez d'vn rectangle, sçauoir 14, & la diagon. d'iceluy 10: Partant nous trouuerons suiuant ce qui est enseigné cy-deuant en la 8. question que la longueur du iardin proposé est 8, & sa largeur 6.

17. *Il y a vne piece de terre en forme de Rhombe, dont chaque costé est de 20 perches, & la difference des diagon. 4: Assauoir chacune desdites diagon. & la superficie de ladite piece.*

Ie pose que la moitié de la moindre diagon. soit 1ℛ: Donc la moitié de l'autre sera 1ℛ+ 2 : & partant les quarrez d'icelles moitiez seront 1ℚ, & 1ℚ+ 4ℛ+ 4, lesquels quarrez font ensemble 2ℚ+ 4ℛ+ 4, & sont egaux au quarré du costé dōné, qui est 400. Parquoy procedant à la reduction de ceste equation ainsi qu'il appartient, sera trouué 1ℚ egal à 198—2ℛ, & partant la

valeur de 1℞ sera √199—1, & par consequent la moindre diagon. requise sera √796—2, & y adioustant la difference donnee, viendront √796+2 pour la plus grande diagonalle, laquelle multipliee par la susdite moitié √199—1, donne 396 pour la superficie de ladite piece de terre.

18. *Il y a vne autre piece de terre en Rhombe, dont chaque costé est de 15 perches, & a superficie 216: On demande combien est chaque diagonalle de ladite piece.*

Ie pose que la moitié de la petite diagonallè soit 1℞: Donc son quarré est 1q, qui osté de 225, quarré du costé dõné 15, restent 225—1q pour le quarré de la moitie du grand diametre, qui partant est √(225—1q), & icelle moitié estant multipliee par tout l'autre diam. sçauoir est par 2℞, viendront √(9009—499) pour la superficie de la piece. Mais elle a esté proposee de 216: Il y a donc equation entre 216, & √(9009—499), & consequemment entre leurs quarrez 46656, & 9009—499. Donc aussi entre 199, & 2259—11664: partant 1℞ vaut 9, & consequemment la moindre diagonalle est 18, & la grande 24.

19. *Il y a encore vn Rhombe, duquel la somme des quatre costez & des deux diagonalles est 68, & la difference d'icelles diagonalles 4: On demande combien est chaque costé dudit Rhombe, chacune des diagonalles, & la superficie.*

Ie pose que le costé dudit Rhombe soit 1℞: Donc les quatre costez ensemble seront 4℞, & les diag. ensemble 68—4℞. Et puis que la differẽce d'icelles est proposee 4, la moindre desdites diag. sera 32—2℞, & la plus grande 36—2℞. Parquoy leurs moitiez seront 16—1℞, & 18—1℞, dont les quarrez font ensemble 2q—68℞+580, & sont egaux au quarré du costé dudit Rhombe, c'est à dire à 1q. Parquoy adioustant &

soustraiant de part & d'autre ainsi qu'il appartient, on trouuera 1q egal à 68ℵ—580 : & partant la valeur de 1ℵ sera 10, la moindre diagon. 12, & la plus grande 16. Mais multipliant l'vne d'icelles diagon. par la moitié de l'autre viendront 96 pour la superficie dudit Rhombe proposé.

20. *Vn marchand estant allé trafiquer à trois foires ; il a autant gaigné à la premiere qu'il y auoit porté d'argent, tellement qu'apres ceste premiere negotiation il auoit le double de son argent : à la seconde son gain estoit 6 liures dauantage que la racine quarree de ce double ; mais à la troisiesme son gain estoit 4 liures dauantage que le quarré du gain fait à la seconde foire : & apres toutes ces negotiations, il trouue qu'il a gaigné à ces trois foires 1786 liures. On demande quelle somme d'argent ce marchand auoit au commencement, & combien il a gaigné à chaque foire.*

Supposons qu'à la seconde foire il aye gaigné 1ℵ : donc puis que ce gain est 6 dauantage que la racine quarree du double de ce qu'il auoit porté ou gaigné à la premiere foire ; si nous multiplions 1ℵ—6 en soy, viendront 1q—12ℵ+36, pour iceluy double ; & pourtãt le gain de la premiere foire sera $\frac{1}{2}$q—6ℵ+18 : mais le gain de la troisiesme est 4 dauantage que le quarré du gain de la seconde que nous auons posé estre 1ℵ : donc iceluy gain sera 1q+4. Adioustons ces trois gains ensemble 1q+4, 1ℵ, & $\frac{1}{2}$q—6ℵ+18, & viendront $1\frac{1}{2}$q—5ℵ+22 pour tous lesdits gains, qui partant sont egaux à 1786. Ostons de part & d'autre 22, & l'equation viendra entre $1\frac{1}{2}$q—5ℵ, & 1764 ; adioustons les 5ℵ, & nous aurons l'equation entre $1\frac{1}{2}$q, & 5ℵ+1764. Puis à cause de la fraction, reduisons & multiplions en croix, & l'equation viendra entre 3q, & 10ℵ+3528 : & diuisons tout par 3,

viendra equation entre 19, & $3\frac{1}{3}$ ℞+1176. Parquoy prenant la racine quarree de ce nombre, nous trouuerons 36 pour la valeur d'vne racine: Et partant la somme du gain fait à la seconde foire sera 36 liures; & puis qu'elle vaut 6 liures dauantage que la racine quarree du double de la sõme gaignee à la premiere foire, ostons 6 liures, & resteront 30, dont le quarré 900, est le double de la somme, tant de l'argent porté à la premiere foire, que du gain fait à icelle, parquoy le marchand auoit porté 450 liures à ladite foire, & y gaigna autant. Mais puis que le gain fait à la troisiesme foire est 4 liures dauantage que le quarré de la somme du gain fait à la seconde, multiplions le gain 36 en soy, & viendront 1296, à quoy adiouſtons 4, & nous aurons 1300 liures pour le gain fait à ladite troisiesme foire: & que cela soit, adiouſtons ensemble tous ces trois gains 450, 36 & 1300 liures; viendront 1786 liures pour tout le gain fait aux trois foires susdites, ainsi que veut la proposition.

21. *Deux hommes mettant leur argent ensemble, la somme est 200 escus, mais diuisant l'argent du second par celuy du premier, le quotient est* $1\frac{1}{2}$: *Il faut trouuer l'argent de chacun.*

Soit posé 1℞ pour le premier, & pour le second 1A: il faut donc resoudre la seconde racine en premiere ainsi. Pource que les deux ensemble ont 200 escus; il y aura equation entre 1℞+1A, & 200. Ostant 1℞ de chacun, restera l'equation entre 1A, & 200—1℞: donc 1A sera reduite en 200—1℞. Parquoy ie pose derechef le nombre du premier estre 1℞, & celuy du second 200—1℞, qui font ensemble 200 escus. Ie diuise maintenant le nombre du second par celuy du premier, & vient $\frac{200-1℞}{1℞}$ egal à $1\frac{1}{2}$, laquelle

equation, par la multiplication en croix, sera reduite à l'equation d'entre 400—2ℛ, & 3ℛ. Et adioustant 2ℛ à chacun, l'equation sera entre 400, & 5ℛ: diuisant donc 400 par 5, le quotient sera 80 pour le nombre du premier: & partant le second aura 120, qui diuisez par 80, le quotient est $1\frac{1}{2}$

22. *Trois hommes ayans de l'argent, le premier dit aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit autant qu'eux: le second dit aussi aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus il auroit le double de leur argent: pareillement le troisiesme dit aux deux autres, que s'il auoit encore 100 escus, il auroit le triple de leur argent: sçauoir combien a chacun.*

Soit posé l'argent du premier estre 1ℛ: donc auec 100, il aura 1ℛ+100, & autant sera la somme du second & du troisiesme, & tous les trois auront 2ℛ+100. Or soit posé la somme du second estre 1A: Donc auec 100, il aura 1A+100, lequel nombre est double de la somme du premier & du tiers, laquelle est 2ℛ+100—1A: (Pource que ayans tous trois 2ℛ+100, si on oste 1A, c'est à sçauoir l'argent du second, restera 2ℛ+100—1A pour la somme du premier & du troisiesme.) Partant il y aura equation entre 1A+100, & 4ℛ+200—2A. Et adioustant 2A à chacun, l'equation sera entre 3A+100, & 4ℛ+200: & ostant 100 de chacun, demeurera l'equation entre 3A, & 4ℛ+100. Si donc les touts sont diuisés par 3, l'equation viendra entre 1A, & $\frac{4}{3}$ℛ+$\frac{100}{3}$: & partant puis que le second est posé auoir 1A, la somme d'iceluy sera $\frac{4}{3}$ℛ+$\frac{100}{3}$. Finalement la somme du troisiesme soit posee estre 1B. Donc auec 100, il aura 1B+100, qui est nombre triple de la somme du premier & du second, laquelle est $\frac{7}{3}$ℛ+$\frac{100}{3}$, compo-

ſee de 1℞ ſomme du premier, & de $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$ ſome du ſecond : Il y aura donc equation entre 1B + 100, & $\frac{21}{3}$℞ + $\frac{300}{3}$; c'eſt à dire entre 1B + 100, & 7℞ + 100, & oſtant 100 de chacun, l'equation ſera entre 1B, & 7℞ : & partant la ſomme du tiers, qui a eſté poſee 1B, ſera 7℞. Parquoy puis que le premier a 1℞, le ſecond $\frac{4}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$: & le tiers 7℞ : tous les trois enſemble auront $9\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$. Mais tous les trois auoient auſſi 2℞ + 100 : Il y a donc equation entre $9\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$, & 2℞ + 100 : & oſtant 2℞ de chacun, reſtera equation entre $7\frac{1}{3}$℞ + $\frac{100}{3}$, & 100 : & oſtant derechef $\frac{100}{3}$, c'eſt à dire $33\frac{1}{3}$ de chacun, demeurera equation entre $7\frac{1}{3}$℞, & $66\frac{2}{3}$: diuiſant donc $66\frac{2}{3}$ par $7\frac{1}{3}$, viendra $9\frac{1}{11}$ pour 1℞, ſomme du premier : & le ſecond ayant $1\frac{1}{3}$℞ + $33\frac{1}{3}$, aura $45\frac{5}{11}$: & le tiers ayant 7℞, aura $63\frac{7}{11}$. Car ainſi le premier auec 100, aura $109\frac{1}{11}$, egale à la ſomme du ſecond & tiers : & le ſecond auec 100, aura $145\frac{5}{11}$, qui eſt le double de la ſomme du premier & tiers : & finalement le tiers auec 100, aura $163\frac{7}{11}$, qui eſt le triple de la ſomme du 1 & 2.

Fin du ſommaire de l'Algebre.

ELEMENT DIXIESME.

DEFINITIONS.

1 GRANDEVRS commensurables, sont celles là qui sont mesurees par vne mesme mesure.

Ainsi les deux lignes droictes A & B, estans mesurees par vne mesme ligne C, seront dites commensurables. Ainsi aussi vne ligne de 6 pieds est commensurable à vne autre ligne de 7 pieds, pource qu'elles sont toutes deux mesurees tant par la ligne d'vn pied, que par celle d'vn demy pied, d'vn tiers de pied, &c. Semblablement les superficies, qui sont mesurees par vne mesme superficie, sont dites commensurables: Item les corps, ou solides qui sont mesurés par vn mesme corps, sont aussi dits commensurables.



2 Mais les grandeurs incommensura-

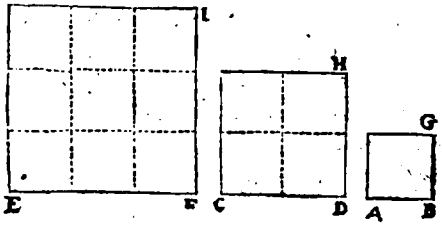
bles, ſont celles-là qui n'ont aucune commune meſure.

Telles grandeurs ſont le diametre & le coſté de quelconque quarré: car icelles grandeurs n'ont aucune commune meſure, comme il ſera demonſtré à la derniere prop. de ce liure. Il y a encores pluſieurs autres lignes incommenſurables, ſçauoir eſt auſquelles on ne peut donner aucune commune meſure, beaucoup deſquelles ſeront expliquees en ce 10 liure; & enſeigné par quelles manieres elles peuuent eſtre trouuees: derechef, les ſuperficies ſont dites incommenſurables, & les ſolides incommenſurables, qui n'ont aucune commune meſure.

3 Les lignes droictes commenſurables en puiſſance, ſont celles-là deſquelles les quarrez peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie.

Les lignes droictes ſont conſiderees ou ſelon leur longueur ou ſelon leur puiſſance; & en l'vne & l'autre ſorte elles ſont dites commeſurables, & incommenſurables. Aux deux premieres definitions Euclide a expliqué quelles ſont les lignes commenſurables, & incommenſurables conſiderees ſelon leurs longitudes, mais en ceſte-cy, & en la ſuiuante, il declare quelles ſont celles dites commenſurables, & incommenſurables en puiſſance. Il dit donc icy que les lignes droictes dont les quarrez peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie ſont commenſurables en puiſſance: Ainſi les lignes droictes AB & CD ſeront dites commenſurables en puiſſance, d'autant que leurs quarrez AG & CH peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie AG: Item les lignes droictes CD & EF, ſeront auſſi dites

commensurables en puissance, pource que leurs quarrez CH & EI peuuent estre mesurez par l'espace ou quarré



AG. Semblablement, appliquant les nombres aux lignes; vne ligne de 3 pieds sera dite commensurable en puissance à vne autre ligne de 6 pieds, parceque leurs quarrez 9 & 36 peuuent estre mesurez par vne mesme superficie: Ainsi aussi vne ligne ayant 2 pieds en longueur, & vne autre √8 seront dictes commensurables en puissance, pource que leurs quarrez 4 & 8 sont mesurez par vn mesme espace superficiel: derechef, vne ligne estant √√20, & vne autre √√125 seront pareillement dites commensurables en puissance, pource que leurs quarrez √20 & √125 sont mesurez par vne mesme superficie √5: car elle est deux fois en √20, & 5 fois en √125.

Or est à noter que toutes lignes droictes commensurables en longitude, le sont aussi en puissance; car les quarrez d'icelles lignes sont mesurez par le quarré de leur commune mesure, ainsi qu'il appert aux trois premiers exemples cy-dessus.

4 Mais les lignes droictes incommensurables en puissance, sont celles-là desquelles les quarrez n'ont aucune commune superficie qui les puisse mesurer.

Comme par exemple, vne ligne eſtant de 2 pieds, & vne autre √6, icelles deux lignes ſeront dites incommenſurables en puiſſance, pource qu'il n'y a aucune ſuperficie qui meſure leurs quarrez 4 & √6: de meſme √8 & √12 ſeront auſſi dictes incommenſurables en puiſſance, car nul eſpace ſuperficiel ne meſure leurs quarrez 8 & √12.

Or eſt icy à noter que toutes lignes (ou nombres) incommenſurables en puiſſance, le ſont auſſi en longitude, mais non pas au contraire. Ainſi vne ligne de 2 pieds ſera bien incommenſurable en longitude à vne autre ligne de √8: mais non pas en puiſſance: & 2 qui eſt incommenſurable en puiſſance à √8, l'eſt auſſi en longitude.

5 Cela eſtant ainſi, il eſt euident qu'à toute ligne droicte propoſee, on trouuera infinies lignes droictes commenſurables, & infinies incommenſurables: les vnes en longitude & puiſſance, les autres en puiſſance ſeulement. Or ceſte ligne droicte propoſee, eſt appellee rationelle.

C'eſt à dire que quand on propoſe quelque ligne droicte de grandeur cogneue & determinee, icelle eſt appellee rationelle, pource que c'eſt ſelon elle que nous ratiocinons: & appliquant les nombres à telles lignes, nous les poſerons touſiours d'vn de ces nombres abſolus, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

6 Et les lignes droictes commenſurables à ceſte ligne rationelle, ſoit en longitude & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeu-

lement ſont auſſi appellees rationelles.

7 Mais les lignes incommenſurables à ceſte ligne rationelle, ſont dictes irrationelles.

Si comparant quelque ligne droicte, à la ligne prinſe pour rationelle, & ſur laquelle nous ratiocinons, elle eſt trouuee commenſurable à icelle rationelle, ſoit en longueur, & puiſſance, ſoit en puiſſance ſeulement, telle ligne eſt auſſi rationelle; mais ſi elle eſt incommenſurable à icelle ligne rationelle propoſee, tant en longitudo qu'en puiſſance, ceſte dicte ligne eſt appellee irrationelle.

8 Le quarré deſcrit ſur vne ligne rationelle propoſee, eſt appellé rationel.

Tout ainſi que ceſte ligne-là, laquelle eſt cogneuë & determinee de certaine quantité eſt dicte rationelle; ainſi auſſi le quarré deſcrit ſur icelle ligne, eſt appellé rationel, pource qu'iceluy eſt certain & cogneu: & les ſuperficies comparees à iceluy quarré, ſont auſſi dictes rationelles, ou bien irrationelles, ſelon qu'elles ſeront trouuees commenſurables ou incommenſurables à iceluy quarré rationel, ainſi qu'il eſt dit és deux definitions ſuiuantes.

9 Les figures commenſurables à ce quarré rationel, ſont auſſi rationelles.

10 Mais celles qui luy ſont incommenſurables, ſont irrationelles & ſourdes.

11 Et les lignes droictes qui peuuent

icelles figures irrationelles, ſont irrationelles & ſourdes.

Or vne ligne droicte eſt dicte pouuoir vne figure, quand le quarré deſcrit ſur icelle eſt egal à icelle figure, d'autant que tout quarré eſt la puiſſance de ſa racine ou de ſon coſté. Ainſi il a eſté dit cy-deſſus que deux lignes ſont commenſurables en puiſſance, lors que non pas les lignes, mais les quarrez d'icelles lignes, peuuent eſtre meſurez par vne meſme ſuperficie.

Or à ces definitions nous adiouſterons (apres Clauius) vne demande, & quelques communes ſentences, dont l'vſage ſera trouué en ce liure

DEMANDE.

Qu'on puiſſe multiplier quelconque grandeur tant de fois qu'elle excede quelconque grandeur propoſee de meſme genre.

COMMVNES SENTENCES.

1 Vne grandeur meſurant tant de grandeurs qu'on voudra, meſure auſſi la compoſee d'icelles.

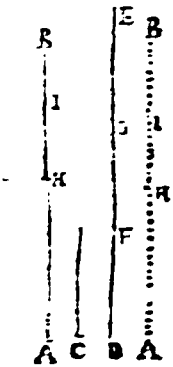
2 Vne grandeur meſurant quelconque grandeur, meſure pareillement toute grandeur que celle-là meſure.

3 Vne grandeur qui meſure toute vne

grandeur, & vne retranchee d'icelle, mesure aussi le reste.

THEOR. 1. PROP. I.

Estans proposees deux grandeurs inegales, si de la plus grande l'on retranche plus de la moitié, & du reste encore plus de la moitié, & qu'en continuant cela se fasse tousiours ainsi: Il demeurera en fin vne grandeur plus petite que la moindre des deux proposees.



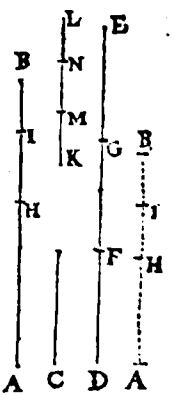
Soient proposees deux grandeurs inegales AB & C, desquelles AB est la plus grande: Ie dis que si d'icelle AB on retranche plus de la moitié, & du reste encores plus de la moitié, & qu'on continue tousiours ainsi, il restera en fin quelque grandeur plus petite que C.

Qu'il ne soit ainsi. Soit la grandeur C multipliee tant de fois que le produict excede la plus grande AB, & la produite d'icelle multiplication soit DE, laquelle sera multiplice de C, & plus grande que AB: qu'elle soit donc diuisee en parties egales à C, comme en DF, FG, GE: Item de AB soit retranché plus de la moitié, AH, & du reste HB encore plus de la moitié HI, &

en continuant touſiours cecy iuſques à ce que AB ſoit diuiſee en autant de parties que DE, ſçauoir AH, HI, & IB. D'autant que DE eſt plus grande que AB, & que le retranché DF n'eſt pas plus grand que la moitié de DE: comme le retranché AH, eſt plus grand que la moitié de AB, le reſte FE ſera plus grand que le reſte HB: ſemblablement ſi du plus grand reſte FE, on oſte FG, qui n'eſt pas plus que la moitié, & du plus petit reſte HB on oſte plus de la moitié HI; le reſte IB ſera plus petit que le reſte GE egal à C: & par conſequent IB derniere partie de AB, ſera plus petite que C. Eſtans donc propoſees deux grandeurs inegales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

On demonſtrera ſemblablement que le meſme aduiendra ſi de AB, on oſte la moitié AH, & du reſte HB la moitié HI.

AVTREMENT. Ayant fait la meſme conſtruction que deſſus, ſoit priſe KL autant multiple de IB que DE eſt multiple de C. Donc icelle KL eſtant diuiſee en KM, MN, NL, parties egales chacune à IB, il y aura autant de parties en KL, qu'en DE. Mais d'autant que AH eſt plus grande que HB, (ou egal ſi on a oſté ſeulement la moitié de AB) & icelle HB plus grande que IB: auſſi AH ſera plus grande que IB, c'eſt à dire que KM. Derechef, puis que HI eſt plus grande que IB,



(ou egal à icelle) & que icelle IB eſt egale à MN; auſſi HI ſera plus grande que MN: (ou egal) &

partant la toute AI sera plus grande que la toute KN. Adiouſtant donc les egales IB, NL; la toute AB ſera plus grande que la toute KL. Mais DE eſt encore plus grande que AB: Donc DE ſera bien plus grande que KL. Et puis que comme DE eſt à C, ainſi KL eſt à IB; (car KL eſt priſe autant multiple de IB, que DE de C) auſſi C ſera plus grande que IB par la 14. p. 5. & partant le reſte IB moindre que C. Ce qu'il faloit demonſtrer.

THEOR. 2. PROP. II.

Si de deux grandeurs inegales propoſees on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, ſans que le reſte meſure la grandeur precedente: telles grandeurs ſeront incommenſurables.

Soient propoſees deux grandeurs inegales AB & CD, deſquelles la moindre AB ſoit retranchee de la plus grande CD: puis le reſte CD ſoit oſté de AB, & qu'ainſi continuellement & alternatiuement la plus petite eſtant oſtee de la plus grande, le reſte ne meſure iamais ſa grandeur precedente, c'eſt à dire que le plus petit reſte ne meſure iamais le plus grand reſte: Ie dis que AB & CD ſont incommenſurables.



Autrement, il faudra qu'elles ſoient commenſurables: & partant qu'elles ayent vne

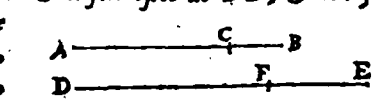
commune mesure, laquelle soit E, s'il est possible. Maintenant, de la plus grande CD soit retranchee CF egale à AB: Et s'il se peut faire, soit continué ce retranchement iusques à ce que le reste DF soit plus petit que AB. Donc E commune mesure, mesurera la toute CD & la retranchee CF, egale à AB, ou multiplice d'icelle, par la 2. com. sent. & elle doit aussi mesurer le reste DF par la 3. com. sent. Item soit retranchee DF de AB tant de fois que faire se pourra, iusques à ce que le reste GB soit plus petit que E, qui mesure FD, & par consequent sa multiplice AG; par la 2. comm. sent. donc aussi le reste GB, par la 3. comm. sent. ce qui est absurde. Partant AB & CD n'auoient point de commune mesure; & par consequent sont incommensurables. Parquoy si de deux grandeurs inegales proposees, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Nous conuertirons ceste prop. ainsi:

Si de deux grandeurs incommensurables proposees l'on retranche touſiours alternatiuement la plus petite de la plus grande, le reste ne mesurera iamais la grandeur precedente.

Soient proposees deux grandeurs incommensurables AB, DE, dont la moindre AB soit ostee de DE, & le reste soit FE: Item de AB soit ostee FE, & le reste soit EC, & ainsi continuellement la plus petite de la plus grande: Ie dis que le reste ne mesurera iamais la grandeur prec. Car si faire se peut que CB mesure la preced. FE. Donc puis que CB mesure FE,



& icelle FE mesure AC, aussi CB mesurera AC par la 2. com. sent. Mais elle mesure aussi soy-mesme. Donc CB mesurera pareillement la toute AB par la 1. comm. sent. Mais AB mesure DF: Donc par la 2. com. sent. CB mesurera la mesme DF: Et puis qu'on a posé qu'elle mesure aussi FE, elle mesurera la toute DE par la 1. com. sent. Mais il a esté demonstré qu'icelle CB mesure aussi AB: elle mesure donc AB & DE: ce qui est absurde, puis qu'elles sont osté posées incommensurables.

A ce theor. Clauius adiouste cestuy-cy.

Si de deux grandeurs commensurables proposees, on oste touſiours alternatiuement la moindre de la plus grande, quelque grandeur reſtante meſurera la precedente.

Car si iamais le reſte ne meſuroit la grandeur precedente, les propoſees ſeroient incommenſurables par ceſte 2. prop. ce qui eſt abſurde, puis qu'elles ſont poſees commenſurables.

Parquoy il eſt facile de cognoiſtre, ſi deux quelconques grandeurs propoſees ſont commenſurables, ou non: Car retranchant alternatiuement la moindre de la plus grande, ſi quelque reſte meſure le precedent, les grandeurs propoſees ſeront commenſurables, comme il appert de la demonſtration du premier theor. de ce Scholie: Mais ſi le reſte ne meſure iamais la grandeur precedente, les grandeurs propoſees ſeront incommenſurables, comme Euclide a demonſtré en ceſte 2. prop.

PROBL. 1. PROP. III.

Eſtans donnees deux grandeurs commenſurables, trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient donnees deux grandeurs commenſura-

bles AB, CD, & il faut trouuer leur plus grande commune meſure. Or AB, qui eſt moindre que CD, meſurera icelle, ou elle ne la meſurera point: Si elle la meſure, il eſt euident qu'elle ſera la plus grande commune meſure. Si elle ne la meſure point, ſoit alternatiuement retranchee la plus petite de la plus grande iuſques à ce que le reſte meſure le reſte: (ce qui doit aduenir, d'autant que les grandeurs donnees ſont commenſurables) donc que AB ſoit retranchee de CD, & que le reſte ED meſure AB. Ie dis qu'icelle ED ſera la plus grande commune meſure d'icelles grandeurs AB, CD.



Car puis qu'elle meſure AB, elle meſurera auſſi CE ſon egale: & ſe meſurant ſoy meſme, elle meſurera auſſi la toute CD, par la 1. com. ſent. Que ſi on nie qu'elle ſoit la plus grande commune meſure, qu'on en trouue vne autre plus grande, ſçauoir G, (s'il eſt poſſible) donc par les communes ſentences G meſurera AB, CD, & le rettanché CE egal à AB, & par conſequent le reſte ED, qui eſt plus petit; ce qui eſt impoſſible: donc vne plus grande magnitude que ED, n'eſt commune meſure d'icelles AB, CD: Partant ED eſtoit la plus grande commune meſure. Eſtans donc donnees deux grandeurs commenſurables, nous auons trouué leur plus grande commune meſure. Ce qu'il falloit faire.

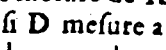
COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte que ſi vne grandeur meſure deux grandeurs, qu'elle meſurera auſſi la plus grande commune meſure d'icelles. Car il a eſté demonſtré que ſi G meſure A B & C D, qu'elle meſurera auſſi leur plus grande commune meſure E D.

PROBL. 2. PROP. IIII.

Trois grandeurs commenſurables eſtans donnees, trouuer la plus grande commune meſure d'icelles.

Soient donnees trois grandeurs commenſurables A, B, C, deſquelles il faut trouuer la plus grande commune meſure. Soit premierement trouuee D plus grande commune meſure de A & B par la 3. propoſition 10. Or ſi D meſure auſſi C, il eſt manifeſte que D eſt la plus grande commune meſure de toutes les trois grandeurs A, B, C. Car ſi vne plus grande magnitude que D meſure les grandeurs A, B, C, par le corollaire de la precedente prop. elle meſurera auſſi la plus grande commune meſure d'icelles A & B, c'eſt à dire D, qui eſt moindre grandeur, ce qui eſt impoſſible. Que ſi D ne meſure pas C, au moins D, C, ſeront commenſurables : car veu que les grandeurs A, B, C ſont commenſurables, quelque commune meſure d'icelles meſurera, D plus grande meſure



d'icelles A & B, par le corol. de la 3. prop. 10. mais ceſte meſme meſure-là meſurera auſſi C: donc D & C, ſeront commenſurables. Soit donc trouuee par la ſuſdicte 3. propoſition 10. E plus grande commune meſure d'icelles D, C: & icelle E ſera la plus grande meſure des grandeurs donnees A, B, C. Car d'autant que E meſure D & C; & D meſure A & B, par la 2. com. ſent. E meſurera auſſi icelles A & B. Mais elle meſure auſſi C. Donc E eſt meſure commune d'icelles A, B, C. Que ſi on nie qu'elle ſoit la plus grande commune meſure, qu'on en trouue vne autre plus grande, ſçauoir F, s'il eſt poſſible. Donc puis que F meſure A & B, par le ſuſdit coroll. de la 3. prop. 10. elle meſurera auſſi leur plus grande commune meſure D. Mais elle meſure auſſi C: donc F meſurant D & C, meſurera pareillement E plus grande meſure d'icelles: ce qui eſt abſurde. Donc vne plus grande grandeur que E ne meſure pas les grãdeurs A, B, C: Et partant E eſt la plus grande commune meſure d'icelles. Parquoy eſtans donnees trois grandeurs commenſurables, nous auons trouué leur plus grande commune meſure. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

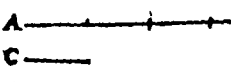
Par cecy eſt euident que ſi vne grandeur meſure trois grandeurs, qu'elle meſure auſſi la plus grande commune meſure d'icelles. Car il a eſté demonſtré que ſi F meſure A, B, C, qu'elle meſurera pareillement E plus grande commune meſure d'icelles.

Par ſemblable maniere, eſtans donnees plus de trois grandeurs commenſurables, nous trouuerons leur plus gran-

de commune mesure: & ce mesme collraire aura aussi lieu.

THEOR. 3. PROP. V.

Les grandeurs commensurables, sont entr'elles comme nombre à nombre.



Soient deux grandeurs commensurables *A* & *B*. Ie dis qu'elles sont entr'elles comme nombre à nombre.

Car puis qu'elles sont commensurables, elles auront vne commune mesure, laquelle soit C: & autant de fois que C mesure A, que l'vnité F mesure le nombre D; & autant de fois que C mesure B, que l'vnité mesure aussi le nombre E. Or puis que la grandeur C & l'vnité F, mesurent egallement la grandeur A & le nombre D; la grandeur A contiendra la grandeur C autant de fois que le nombre D contient l'vnité F; & partant comme A est à C, ainsi le nombre D est a l'vnité F. Mais puis que la grandeur C mesure la grandeur B, & l'vnité F le nombre E, egalement; comme C est à B, ainsi l'vnité F est au nombre E. Donc en raison egale, A sera à B, comme le nombre D est au nombre E par la 22. prop. 5. Donc les grandeurs commensurables sont entr'elles comme nombre à nombre. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 4. PROP. VI.

Si deux grandeurs ſont l'vne à l'autre comme nombre à nombre, elles ſeront commenſurables.



Soient deux grandeurs A & B, qui ſoient l'vne à l'autre comme le nombre C eſt au nombre D: Ie dis qu'elles ſeront commenſurables.

Car la grandeur A ſoit entẽdue eſtre diuiſee en autant de parties egales qu'il y a d'vnitez au nõbre C, & l'vne d'icelles parties ſoit egale à E: donc E eſt à A, ainſi que l'vnité F eſt au nombre C. Mais par l'hypotheſe A eſt à B, comme le nombre C eſt au nombre D: donc en raiſon egale, E ſera à B, comme l'vnité F à D, par la 22. prop. 5. Mais l'vnité F meſure le nombre D: donc auſſi E meſure B: mais E meſure pareillement A. Donc E eſt commune meſure de A & B: & partant par la premiere deff. de ce liure A & B ſont commenſurables. Parquoy ſi deux grandeurs ſont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt euident qu'eſtant propoſez deux nombres comme C & D, & vne ligne droicte comme A, qu'il ſera aiſé de trouuer vne autre ligne droicte, à laquelle ſoit A comme le nombre C eſt au nombre D: Car diuiſant A en

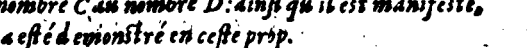
autant

autant de parties egales qu'il y a d'unitez au nombre C; & on prend une ligne droicte B, contenant autant d'icelles parties qu'il y a d'unitez au nombre D; alors A ſera à B, comme le nombre C au nombre D: ainſi qu'il eſt manifeſte, parce qui a eſté demonſtré en ceſte prop.

De cecy appert derechef, par quelle maniere on peut (eſtans donnez deux nombres, & une ligne droicte,) trouuer une autre ligne droicte, le quarré de laquelle ſoit au quarré de la donnee comme nombre à nombre. Car s'il faut trouuer une ligne droicte, au quarré de laquelle ſoit le quarré de la ligne A, comme le nombre C eſt au nombre D: il faudra trouuer ainſi que deſſus la ligne B, à laquelle ſoit A comme le nombre C eſt au nombre D: puis ſoit trouuee par la 13. prop. 6. la moyenne prop. entre icelles A & E: & le quarré de A ſera au quarré d'icelle moyenne prop. comme le nombre C au nombre D. Car le quarré de A ſera (par le corol. de la 20. prop. 6.) au quarré de ladite moyenne prop. comme A à B: & partant comme le nombre C au nombre D.

THEOR. 5. PROP. VII.

Les grandeurs incommenſurables, ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre.



Soient deux grandeurs incommenſurables A & B: Ie dis qu'elles ne ſont pas entr'elles comme nombre à nombre.

Ce qui eſt manifeſte: car ſi elles eſtoient entr'elles comme nombre à nombre, elles ſeroient commenſurables par la 6. prop. 10. ce qui eſt contre

l'hypotheſe, ayans eſté poſées incommenſurables. Parquoy les grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR 6. PROP. VIII.

Si deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, elles ſeront incommenſurables.

Que les grandeurs A & B ne ſoient entr'elles comme nombre à nombre : Ie dis qu'elles ſont incommenſurables.

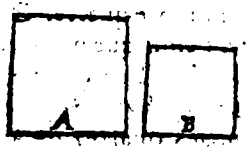
A——
B——

Ce qui eſt euident : car ſi elles eſtoient commenſurables, il faudroit qu'elles fuſſent comme nombre à nombre par la 5. prop. 10. Ce qui eſt contre noſtre hypotheſe, puis qu'elles ont eſté poſees n'eſtre entr'elles comme nombre à nombre. Parquoy ſi deux grandeurs ne ſont entr'elles comme nombre à nombre, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. IX.

Les quarrez deſcrits ſur lignes droictes commenſurables en longitude, ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré : Et les quarrez qui ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les coſtez commenſurables en longitude. Mais les quarrez deſcrits de lignes droictes in-

commensurables en longitude, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré? Et les quarrez n'estans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ont les costez incommensurables en longitude.



Soient les lignes droictes A & B commensurables en longitude: Ie dis que leurs quarrez sont entre eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Car puis que les lignes A & B sont commensurables en longitude, elles seront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Soit donc A à B, comme le nombre C au nombre D: & les quarrez d'iceux C & D soient E & F. Or les quarrez de A & B sont en raison doublee de leurs costez, par la 20. prop. 6. Item les nombres quarrez E & F sont aussi en raison doublee de leurs costez, par la 11 prop. 8. Donc le quarré de A est au quarré de B, comme le nombre quarré E est au nombre quarré F: C'est à sçauoir en raison doublee des costez A & B, ou des nombres C & D, qui sont en la mesme raison que les lignes A & B.

Pour la seconde partie. Soit le quarré de A au quarré de B, comme le nombre quarré E au nombre quarré F: Ie dis que les lignes A & B seront

commensurables en longitude. Car par la 10. pr. 6. & 11. prop. 8. la raison des quarrez aux quarrez, est la raison doublee de leurs costez: & partant comme le costé A au costé B, ainsi le nombre C au nombre D, puis que leurs raisons doublees sont egales. Donc par la 6. prop. 10. A & B sont commensurables en longitude.

Pour la troisiesme partie, soient les lignes droictes A & B incommensurables en longitude. Ie dis que leurs quarrez ne sont entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré. Car si les quarrez de A & B estoient ainsi que nombre quarré à nombre quarré, icelles A & B seroient commensurables en longitude contre l'hypothese.

Finalement, les quarrez de A & B n'estans entre eux comme nombre quarré à nombre quarré. Ie dis qu'elles sont incommensurables en longitude. Car autrement leurs quarrez seroient (par la premiere partie) comme nombre quarré à nombre quarré, contre l'hypothese. Parquoy les quarrez descrits de lignes droictes commensurables en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

Il est manifeste par les choses cy-dessus demonstrées, que les lignes commensurables en longitude, le sont aussi en puissance: mais que celles qui sont commensurables en puissance ne le sont pas tousiours en longitude. Que les incommensurables en longitude, ne le sont pas pourtant en puissance: & que celles incommensurables en puissance, le sont aussi en longitude.

Car d'autant que les quarrez d'icelles lignes commens. en longitude, sont entr'eux comme nombre quarré à nom-

bre quarré, c'est à dire simplement comme nombre à nombre: iceux quarrez seront commensurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes commensurables en longitude le sont aussi en puissance.

Puis apres, veu que les lignes dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ains seulement comme nombre à nombre, sont commens. en puissance (car leurs quarrez sont commensurables par la 6. prop. 10.) & non en longitude, comme il a esté demonstré: il appert que les lignes commensurables en puissance ne le sont pas pourtant en longitude, sinon que les quarrez d'icelles lignes soient entr'eux, comme nombre quarré à nombre quarré.

Derechef, puis que les lignes desquelles les quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, mais toutesfois comme nombre à nombre sont incommensurables en longitude, & commensurables en puissance: il appert que les lignes incommensurables en longitude ne le sont pas tousiours en puissance: ains qu'il n'y a que celles dont les quarrez ne sont entr'eux comme nombre à nombre, qui soyent aussi incommens. en puissance, veu que leurs quarrez sont incommens. par la 8. prop. 10.

Finalement est manifeste que les lignes incommens. en puissance, le sont aussi en longitude: car si elles estoient commens. en longit. elles le seroient aussi en puissance, comme appert par la premiere partie de ce corollaire: ce qui est contre l'hypothese.

SCHOLIE.

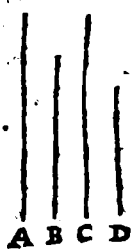
Il est à noter qu'és deux premieres parties de ceste proposition s'entend aussi des lignes inexplicables par nombres, pourveu qu'elles soient commensurables en longitude: comme si les quarrez de A & B estoient 12 & 3, leurs costez

seroient √12 & √3, qui sont inexplicables par nombres, toutesfois commens. Car par la 20. prop. 6. 12 seront à 3 en raison doublee de √12 à √3. Mais 12 est quadruple de 3: Ainsi le costé A sera double du costé B, par la 10. def. 5. Car la double raison doublee est quadruple.

THEOR. 8. PROP. X.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, & que la premiere soit commensurable à la seconde, la troisiesme, sera aussi commensurable à la quatriesme. Que si la premiere est incommensurable à la seconde, la troisiesme sera aussi incommens. à la quatriesme.

Soient quatre grandeurs prop. A, B, C, D: & soit A 1; commensurable à B 1e. Ie dis que C 3e. sera aussi commensurables à D 4e.



Car A estant commensurable à B, elles seront entr'elles comme nombre à nombre, par la 5. prop. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D; Partant C est à D, comme nombre à nombre: & par consequent commensurable par la 6. prop. 10.

que si A estoit incommens. à B. Ie dis que C seroit aussi incommensurable à D. Car A & B ne seroient pas comme nombre à nombre par la 7. prop. 10. Mais comme A à B, ainsi C à D: donc C n'est pas à D comme nombre à nom-

bres: & par consequent incommensurable par la 8. propos. 10. Si donc quatre grandeurs sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

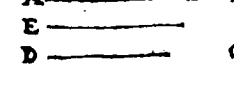
Trouuer deux nombres plans dissemblables, c'est à dire, qui ne soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.

Soit pris quelconque nombre quarré A, & vn autre non quarré B. Ie dis qu'iceux nombres A & B sont plans dissemblables. Car A 16. B 20. *s'ils estoient plans semblables, ils seroient comme nombre quarré à nombre quarré, par la 26. pr. 8. & partant A estant nombre quarré, aussi B seroit quarré par la 24. pr. 8. contre l'hypothese. Donc A & B, ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré.*

PROBL. 3. PROP. XI.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables à vne ligne rationelle proposee, sçauoir vne en longitude seulement, & l'autre en longitude & puissance.

Soit la ligne rationelle proposee A, à laquelle il faut trouuer deux autres lignes incommensurables, l'vne seulement en longitude, & l'autre en longitude & puissance.



Soient trouuez par le lemme precedent deux

nõbres B,&C,qui ne soient entr'eux cõme nombre quarré à nombre quarré : Item par le corol. de la 6. prop. 10. soit trouuee la ligne D, de laquelle le quarré soit au quarré de la ligne A, cõme le nõbre C est au nombre B. Or d'autãt qu'iceux quarrez de A & D sont comme nombre à nombre, ils seront commensurables entr'eux par la 6. prop. 10. Mais n'estans pas comme nombre quarré à nombre quarré, ils n'auront pas les costez A & D commens. en longitude, par la 9. prop. 10. Donc les lignes droictes A & D sont commensurables en puissance seulement: la ligne D est donc la premiere requise.

Maintenant soit trouuée la ligne E moyenne prop. entre A & D, par la 13. prop. 6. & icelle E sera la seconde ligne demandee: car puis que par le corol. de la 20 propos. 6 le quarré de A est au quarré de E comme A est à D, & icelles A & D sont incommensurables en longitude, comme il a esté demonstré: le quarré de A sera aussi incommensurable au quarré de E, par la 10 propos. 10. Parquoy les lignes A & E sont incommens. en puissance, & par le corol. de la 9. prop. 10. elles sont aussi incommens. en longitude. Nous auons donc trouué deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La ligne A soit 5: donc la ligne D sera √ 20, laquelle il appert estre incommensurable en longitude à A, mais commensurable en puissance. Mais la ligne E estant moyenne prop. entre A 5, & D √ 20, elle sera √√ 500, qui est incommens. tant en longit. que puissance à A 5.

THEOR. 9. PROP. XII.

Les grandeurs commensurables à vne autre, sont aussi commensurables entr'elles.

Soient les deux grandeurs A & B, commens. chacune à la grandeur C : Ie dis qu'elles sont commensurables entr'elles.



Car puis que A & C sont commensur. icelles seront comme nombre à nombre par la 5. p. 10. & soit comme le nombre D au nombre E. Derechef puis que C & B sont commens. C sera à B, comme nombre à nombre, & soit comme le nombre F au nombre G. Soient pris par la 4. prop. 8. les trois nombres H, I, K, les plus petits continuellement proportionnaux, selon les raisons de D à E, & F à G: tellement que H soit à I comme D à E, c'est à dire comme A à C, & I à K, comme F à G, c'est à dire comme C à B. Donc puis que A est à C, comme H à I, & C à B, comme I à K; en raison egale, A sera à B, comme H à K, c'est à dire comme nombre à nombre: & partant A & B sont commens. par la 6. prop. 10. Donc les grandeurs commensurables à vne autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 10. PROP. XIII.

Si de deux grandeurs, l'vne eſt commenſurable à vne troiſieſme, & l'autre incommenſ. icelles grandeurs ſeront incommenſ. entr'elles.

Soient deux grandeurs A & B, deſquelles A ſoit commenſ à C; & B incommenſ. à la meſme C. Ie dis que A & B ſont incommenſ. entr'elles. Car ſi B eſtoit commenſ. à A, lequel A eſt poſé auſſi commenſ. à C, par la 12. prop. 10. B & C ſeroient commenſ. contre l'hypotheſe. Donc A & B ne ſont commenſ. Parquoy ſi de deux grandeurs, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

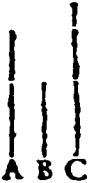
A——
C——
B——

THEOR. 11. PROP. XIV.

Si de deux grandeurs commenſ. l'vne eſt incommenſ. à vne tierce grandeur, auſſi ſera l'autre à la meſme.

Soient deux grandeurs commenſurables A & B, & que A ſoit incommenſurable à la tierce C: Ie dis que B & C ſont auſſi incommenſurables.

Autrement. ſi B eſt commenſurable à C, elle ſera auſſi commenſurable à A, par la 12. prop. 10. contre noſtre hypotheſe: donc B eſt incommenſurable à C: Parquoy ſi de deux grandeurs commenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

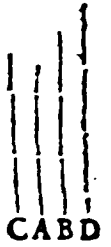


SCHOLIE.

Les Interpretes d'Euclide colligent de ceste prop. le theoreme suivant, utile aux choses demonstrees en ce liure.

Les grandeurs commensurables à des incommensurables, sont aussi incommensurables entr'elles.

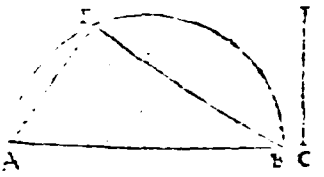
Soient deux grandeurs A & B incommensurables, ausquelles C & D soient commensurables, sçauoir est C à A, & D à B. Ie dis que C & D sont incommensurables entr'elles. Car puis que A & C sont posees commensurables, & A incommensurable à B, l'autre C sera aussi incommens. à A par la 14. prop. 10. Derechef, puis que D & B sont posees commensurables, & B a esté demonstree incommensurable à C, D sera aussi incommensurable à la mesme C par la 14. prop. 10. Ce qui estoit proposé.



LEMME.

Estans donnees deux lignes droictes inegales, trouuer combien la plus grande peut plus que la plus petite.

Soient donnees les deux lignes droictes AB & C, desquelles AB est la plus grande: & il faut trouuer combien la ligne AB peut plus que la ligne C. Soit



descrit sur AB le demy cercle ADB, & dans iceluy soit accommodee AD egale à C, par la 2. prop. 4. & soit menee DB. Ie dis que AB peut plus que C du quarré de BD:

Car d'autant que l'angle D eſt au demy cercle, il eſt droict par la 31. p. 3. & par la 47. p. 1. le quarré de AB: ſera egal aux quarrez de AD, BD: & partant AB pourra plus que AD, c'eſt à dire que C, du quarré de BD. Ce qui eſtoit propoſé.

Semblablement eſtans données deux lignes droictes, en trouuer vne autre pouuant icelles.

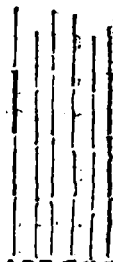
Soient données les deux lignes droictes AD, BD: & il faut trouuer vne ligne droicte qui puiſſe icelles. Soient poſees icelles AD, BD à angle droict D, & tiré AB. Il eſt euident qu'icelles AB peut les deux AD & BD, puis que par la 47. p. 1. le quarré d'icelle AB, eſt egal aux deux quarrez de AD, BD.

THEOR. 12. PROP. XV.

Si quatre lignes droictes ſont proportionnelles, & la premiere peut plus que la ſeconde du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude: auſsi la troiſieſme pourra plus que la quatrieſme du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Que ſi la premiere peut plus que la ſeconde du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude: auſsi la troiſieſme pourra plus que la quatrieſme du quarré

d'vne ligne qui luy sera incommensurable en longitude.

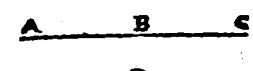
Soient 4. lignes droictes proportionnelles A, B, C, D, & que A puisse plus que B du quarré de E; & C plus que D du quarré de F. Ie dis que comme A sera commensurable ou incommens. en longitude à E, ainsi C sera commensurable, ou incommensurable en longitude à F.



Car puis que A, B, C, D, sont proportionneles, comme le quarré de A sera au quarré de B, ainsi le quarré de C sera au quarré de D, par la 22. prop. 6. Mais le quarré de A est egal aux quarrez de B, E, par l'hypothese, & le quarré de C aux quarrez de D, F: donc aussi les quarrez de B, E, seront au quarré de B, comme les quarez de D, F, au quarré de D; & en diuisant, cõme le quarré de E sera au quarré de B, ainsi le quarré de F au quarré de D; & par la 22. p. 6. cõme la ligne E sera à la ligne B, ainsi la ligne F sera à la ligne D; & en changeant, comme B à E, ainsi D à F. Donc puis que comme A à B, ainsi C à D, & comme B à E ainsi D à F; en raison egale, comme A sera à E, ainsi C à F: Et par la 10. p. 10. si A est commens. ou incommensurable à E, aussi C sera commens. ou incommensurable à F: Parquoy si quatre lignes droictes sont proportionnelles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 13. PROP. XVI.

Si deux grandeurs commenſurables ſont conioinctes, la compoſee ſera commenſurable à chacune de ſes parties: Et ſi la compoſee eſt commenſurable à vne de ſes parties, icelles ſeront commenſurables entr'elles.



Soient iointes deux grandeurs commenſur. AB & BC: Ie dis que la compoſee AC, eſt auſſi commenſurable à chacune d'icelles A B & B C.

Car puis que AB & B C ſont commenſurables, elles auront vne commune meſure, laquelle ſoit D. Donc puis que D meſure AB & BC, elle meſurera auſſi la toute AC, par la 1. c. ſent. Partant la toute AC eſt commenſ. à ſes parties.

Pour la ſeconde partie. Que la toute AC ſoit commenſ. à vne de ſes parties, ſçauoir à A B: Ie dis qu'icelles parties AB, BC ſeront commenſurables entr'elles. Car puis que AC & A B ſont commenſurables, elles auront vne commune meſure, comme D, laquelle meſurant la toute AC & la retranchee AB, elle meſurera auſſi le reſte B C par la 3. commune ſent. Partant AB & BC ſeront commenſurables entr'elles, puis qu'elles ont vne commune meſure D. Parquoy ſi deux grandeurs commenſurables, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que si vne grandeur composee de deux, est commensurable à l'vne d'icelles, qu'elle le sera aussi à l'autre. Comme si AC est commensurable à AB, elle le sera aussi à BC. Car par la seconde partie de ceste prop. AB, BC sont commensurables: donc par la premiere partie AC sera commensurable à chasque partie, AB, BC.

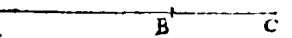
SCHOLIE.

Soit AB √ 18, & BC √ 8, lesquelles sont commens. La composee AC sera √ 50, laquelle est commens. tant à √ 18, que à √ 8. Car √ 50 est à √ 18, comme 5 à 3; & à √ 8 comme 5 à 2.

THEOR. 14. PROP. XVII.

Si on conioinct deux grandeurs incommensurables, la composee sera incommensurable à chacune de ses parties: Et si la composee est incommensurable à l'vne de ses parties, icelles parties seront incommensurables entre-elles.

Soient conioinctes deux grandeurs incommen. AB & BC: Ie dis que la toute AC est incommens. à vne chacune de ses parties A B & BC.



Autrement, si AC estoit commens. à AB, elle le

ſeroit auſſi à BC: car la commune meſure qui meſureroit AC & le retranché AB, meſureroit auſſi le reſte BC, par la 3. com. ſent. Et partant AB & BC ſeroient commenſ. (ce qui eſt contre l'hypotheſe.) Donc AC & AB ſont incommenſ. Il s'enſuiura le meſme inconuenient ſi on nie que AC & BC ſoient incommenſurables.

Pour la ſeconde partie: Ie dis que ſi AC & BC, ſont incommenſ. que AB & BC ſeront auſſi incommenſ. Autrement ſi elles eſtoient commenſurables: La toute AC, ſeroit auſſi commenſurable à ſa partie BC par la 16. p. 10. contre noſtre hypotheſe. Donc AB & BC ſont incommenſ. Par meſme argument nous demonſtrerons que ſi AC & AB ſont incommenſ. que AB & BC ſont auſſi incommenſurables. Parquoy ſi on conioint deux grandeurs incommenſurables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il reſulte de ces choſes, que ſi vne grandeur compoſee de deux, eſt incommenſurable à l'vne d'icelles, qu'elle le ſera auſſi à l'autre. Comme ſi AC compoſee de AB & BC eſt incommenſurable à AB, elle le ſera auſſi à BC. Car ſi AC eſtoit commenſ. à icelle BC, elle le ſeroit auſſi à AB, par le coroll. de la precedente prop. ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc AC & BC ne ſont commenſurables, mais incommenſurables.

SCHOLIE.

Soit AB 8, & BC √ 28, leſquelles ſont incommenſurables. La compoſee AC ſera 8 + √28 incommenſurable à chacune d'icelles AB 8, & BC √ 28.

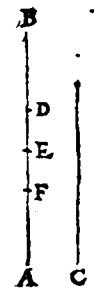
THEOR.

THEOR. 15. PROP. XVIII.

S'il y a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, deffaillant d'vne figure quarrée, & que le rectangle diuiſe icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude: Et ſi la plus grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſ. en longitude, eſtant appliqué vn rectangle ſur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & deffaillant d'vne figure quarrée; le rectangle diuiſera icelle plus grande ligne en parties commenſurables en longitude.

Soient deux lignes inegales AB & C, & par la 28. p. 6. ſur la plus grande AB ſoit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, deffaillant d'vne figure quarrée, c'eſt à dire d'vne ligne egale

à ſon autre coſté. Et ſoit iceluy rectangle contenu ſoubs AD & DB commenſurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſ. en longitude.



Qu'il ne ſoit ainſi. Soit la ligne AB couppee en deux egalement en E, & ſoit faicte EF egale à ED: Il eſt euident que AF ſera egale à DB; puis que les toutes AE, EB ſont egales, & auſſi les retranchees EF, ED. Maintenant, puis que AB eſt couppee en deux egalement en E, & en deux inegalement en D, par la 5. p. 2. le rectangle de AD & DB auec le quarré de ED, ſeront egaux au quarré de BE, lequel n'eſtant par l'hypotheſe que le quart du quarré de AB, quatre fois le rectangle de AD & DB, & quatre fois le quarré de ED, ſont egaux au quarré de AB. Mais quatre fois le rectangle de AD & DB valent le quarré de C, d'autant que par l'hypotheſe le rectãgle de AD, & DB eſt le quart du quarré de C. Dõc le quarré de AB eſt plus grand que le quarré de C, de quatre fois le quarré de ED, ou du ſeul de FD egal à iceux par le Schol. de la 4. p. 2. puiſque FD eſt double de ED. Dauãtage, puis que AD & DB ſont poſees commenſ. en longitude, la toute AB ſera auſſi commenſ. en longitude à ſa partie DB par la 16. p. 10. Et partant à ſon egale AF, & à toutes les deux ioinctes en vne: & par conſequent au reſte de la ligne FD par la meſme 16. p. 10. Donc la ligne droicte AB peut plus que C, du quarré de FD, qui luy eſt commenſurable en longitude.

Pour la ſeconde partie, que AB puiſſe plus que C

du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude, & qu'a icelle AB soit appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'vne figure quarree, lequel rectangle diuise AB és parties AD, DB: Ie dis qu'icelles parties AD & DB seront aussi commens. en longitude. Car demeurant la mesme construction que dessus, il sera demonstré comme là que AB peut plus que C du quarré de FD. Mais AB a esté posee pouuoir plus que C du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & partant AB sera commens. en longitude à icelle FD. Et puis que AB composee de FD, AF, & DB comme d'vne, est commensurable en longitude à la partie FD; la mesme AB sera aussi commensurable en longitude à l'autre partie composee de AF, DB par le coroll. de la 16. p. 10. Mais icelle composee de AF, DB, est aussi commens. en long. à DB, puis qu'elle est double d'icelle: donc puis que chacune d'icelles AB, DB est commensurable en longit. à la composee de AF, DB; aussi AB, DB seront commensurables entr'elles en longitude par la 12. p. 10. & partant veu que la toute AB composee de AD, DB est commensurable en longitude à icelle DB; aussi icelles AD, DB seront commensurables en longitude entr'elles par la 16. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

L'application mentionnee au commencement de la demonst. cy-dessus se fera bien plus briefuement par le 60. de nos Problemes geometriques, posant AB somme des extremes de trois proportionnelles, & la moitié de C, moyenne.

Quant à l'application des nombres soit AB 30, & C 24: donc les segmens AD & DB, seront 24 & 6, desquels le produict, c'est à dire le rectangle, est 144, qui est egal au quart de 576, quarré de C 24, & deffaillant du quarré de DB 6, c'est à dire 36: & sont icelles parties AD 24, DB 6, commens. en longitude: car l'vne est quadruple de l'autre. Ainsi FD, qui peut auec C le quarré de AB, sera 18: car le quarré de AB est 900, & celuy de C 576; & partant reste pour le quarré de FD, 324, dont la racinee quarree est 18, commensurable en longitude à AB. L'autre partie sera aussi euidente par l'adaption des nombres cy-dessus.

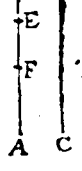
La proposition suiuante sera aussi facilement entendue, si on pose AB 12, & C √ 96: car les segmens AD, DB, seront 6 + √ 12. & 6 — √ 12: & FD √ 48, qui est à 12 incommensurable en longitnde, &c.

THEOR. 16. PROP. XIX.

S'il y-a deux lignes droictes inegales, & à la plus grande on applique vn rectangle egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree, & qu'iceluy rectangle diuise icelle plus grande ligne en parties incommens. en longitude; la plus grande ligne pourra plus que la plus petite du quarté d'vne ligne qui luy sera incommens. en longitude. Que si la plus

grande peut plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude, eſtant appliqué vn rectangle ſur la plus grande ligne, egal au quart du quarré de la plus petite, & defaillant d'vne figure quarree, le rectangle diuiſera la plus grande ligne en parties incommenſurables en longitude.

Soient deux lignes inegales A B & C, & ſur la plus grande AB ſoit appliqué (par la 28. prop. 6.) vn rectangle egal au quart du quarré de C, defaillant d'vne figure quarree: & ſoit iceluy rectangle contenu ſous AD, DB incommenſurables en longitude. Ie dis que AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude. Car ayant conſtruit comme en la precedente pr. nous demonſtrerons ſemblablement que AB peut plus que C du quarré de FD. Il faut donc demonſtrer que AB & FD ſont incommenſ. en longit. D'autant que les lignes AD, DB ſont poſees incommenſ. en longitude la toute AB ſera auſſi incommenſ. en long. à la partie DB par la 17. p. 10. Mais DB eſt commenſurable en longitude à la compoſee de AF, DB, veu que ceſte cy eſt double de celle-là: donc puis



que de ces deux lignes cómen. icelle DB eſt incommenſ. en longitude à AB; la compoſee de AF, DB ſera auſſi incommenſ. en long. à la meſme AB par la 14. prop. 10. Et d'autant que AB compoſee de AF, DB comme vne, & de FD, eſt incommenſ. en long. à la compoſee de AF, DB; la meſme AB ſera auſſi incommenſ. en long. à FD, par le corol. de la 17 p. 10. Donc AB peut plus que C du quarré de FD, qui luy eſt incommenſurable en longitude.

Maintenant, ſi AB peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & ſur icelle AB eſt appliqué vn rectangle egal au quart du quarré de C, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel rectangle diuiſe AB és parties AD, DB. Ie dis qu'icelles AD, DB ſont incommenſ. en long Car nous demonſtrerons comme deuant (les meſmes choſes eſtans conſtruictes) que AB peut plus que C du quarré de FD, & qu'icelles AB & FD ſont incommenſurables en longitude: & puis que AB eſt compoſee de FD, & de AF, DB ioinctes en vne. icelle AB ſera auſſi incommenſ. en longitude à la compoſee de AF, DB par le corol. de la 17. p. de ce liure. Mais la compoſee de AF, DB eſt commenſ. en longit. à icelle DB, puis que celle-là eſt double de ceſte-cy. Donc puis que AB eſt incommenſurable en longit. à la compoſee de AF, DB, ſcelle AB ſera auſſi incommenſ. en long. à DB, par la 14. p. 10. Et partant puis que AB compoſee de AD. DB eſt incommenſ. en long. à DB, icelles AD, DB ſeront auſſi incommenſ. en long. entr'elles par la 7. p. 10. Parquoy s'il y a deux lignes droictes inegales, & ſur la plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

LEMME.

Puis qu'il a eſté demonſtré que les lignes commenſurables en longitude, le ſont auſſi en puiſſance, mais que celles commenſ. en puiſſance ne le ſont pas touſiours en longitude: il eſt manifeſte que s'il y a quelque ligne comm. en longitude à vne propoſee rationnelle: elle doit eſtre appellee rationnelle & commenſurable à icelle, non ſeulement en longitude, mais auſſi en puiſſance: car les lignes commenſ. en long. le ſont touſiours auſſi en puiſſance. S'il y a auſſi quelque ligne droicte commenſ. en puiſſance & longitude à l'expoſee rationele, elle ſera auſſi dite rationele commenſ. en longitude & puiſſance. Que ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſance à icelle, mais incommenſ. en longitude, elle ſera auſſi dicte rationelle commenſ. à icelle en puiſſance ſeulement.

SCHOLIE.

Il appert par ce que deſſus, qu'il y a de trois ſortes de lignes rationeles commenſurab. entr'elles en longitude. Car de deux lignes rationeles commenſurables entr'elles en longitude, ou l'vne eſt egale à l'expoſee rationele; & partant l'vne & l'autre commenſ. en longitude à la rationele: ou l'vne ny l'autre n'eſt egale à l'expoſee rationele, & toutesfois commenſ. en longit. à icelle: ou finablement l'vne & l'autre eſt commenſ. à l'expoſee rationele en puiſſance ſeulement. Or nous trouuerons ces trois genres de lignes rationeles en ceſte maniere. Soit vne rationele propoſee A diuiſee en quatre parties egales: c'eſt à ſçauoir en



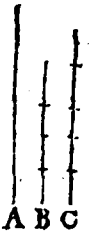
autant qu'il y a d'vnitez au nombre B: puis apres eſtant pris quelque autre nombre C, la ligne D ſoit vne partie de A: & autant de fois que D meſure A autant de fois elle meſure quelque ligne E: Item autant de fois que l'vnité eſt en C, qu'autant de fois la meſme D meſure quelque autre ligne F. Donc puis que A & E ſont compoſees de parties egales en nombre, qui ſont egales à D: elles ſeront egales. Derechef, puis que D meſure toutes les trois lignes A, E, F, elles ſeront commenſurab. en longitude: parquoy E & F ſont rationeles commenſ. en longitude à la rationele A: mais elles ont eſté demonſtrées eſtre auſſi commenſ. entr'elles en longitude. Nous auons donc trouué deux rationeles E & F commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la ration. expoſee A, & deſquelles l'vne ſçauoir eſt E, egale à A.

Or maintenant que D meſure deux lignes C & E par deux nombres F & G differens de B, tellement que l'vne & l'autre ligne C & E ſoit inegale à A. Donc comme deſſus les trois lignes A, C, E, ayans D pour meſure commune, ſeront commenſ. en longitude: parquoy C & E ſont rationeles commenſ. en longit. à la rationelle A: mais elles le ſont auſſi entr'elles. Nous auons donc trouué deux rationeles C & E commenſ. en longitude, tant entr'elles qu'à la rationele propoſee A: l'vne ny l'autre deſquelles n'eſt egale à icelle A.



Finalement par la 11. prop. 10. à l'expoſee rationele A ſoit trouuée la ligne B, incommenſurable en longitude ſeulement, laquelle ſoit couppee en tant de parties egales qu'on voudra, & ſoit priſe C, compoſee de quelconque nombre d'icelles parties de B: & icelles B & C ſeront commenſ. en longitude. Ie dis qu'elles ſont auſſi commenſ. en puiſſance

ſeulement à l'expoſee rationele A. Car puis que A & B ſont commenſurable en puiſſance ; le quarré de A ſera commenſ. au quarré de B : Mais au meſme quarré de B, eſt auſsi commenſ. le quarré de C, pource que B, C eſtans commenſ. en longitude, elles le ſeront auſsi en puiſſanee. Donc par la 12. prop. 10. les quarrez de A & C, ſont pareillement commenſ. entr'eux. Parquoy C eſt commenſ. en puiſſance à icelle A. Et pource que des deux lignes B & C commenſ. en longitude, B eſt incommenſ. en longitude à A : par la 14. prop. 10. G ſera auſsi incommenſ. en longitude à la meſme A. Donc C eſt commenſ. à A ſeulement en puiſſance. Et pource que B & C, commenſurables en puiſſance à l'expoſee rationele A, ſont rationeles ; elles ſeront deux rationeles commenſurables en longitude entr'elles, mais en puiſſance ſeulement à l'expoſee rationele A ; elles ſont donc les deux lignes requiſes à trouuer.



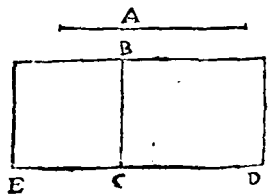
Que ſi quelqu'vn deſire trouuer tant qu'on voudra de lignes rationeles commenſurables en longitude entr'elles, cela ſe fera ainſi qu'il enſuit : Soit pris quelconque meſure D, (regardez la derniere figure de la page precedente) & ſoient compoſees autant qu'on voudra de lignes A, C, E, d'autant de parties egales à icelle D ; qu'il y a d'vnitez en autant de nombres inegaux B, F, G : car les lignes A, C, E, ayans la commune meſure D, ſeront commenſurables en longitude.

Or il eſt auſsi euident que toutes lignes rationeles, ſont commenſ. non ſeulement à vne expoſee rationele, mais auſsi entr'elles. Car puis que par la 6. d. 10. les lignes rationeles ſont celles qui ſont commenſ. à l'expoſee rationele, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement, & que par la 12. p. 10. les commenſurables à vne meſme, ſont auſsi

commenſ. entr'elles; il eſt manifeſte que toutes lignes rationeles, ſont commenſ. entr'elles.

THEOR. 17. PROP. XX.

Le rectangle compris de deux lignes rationeles commenſ. en longitude ſelon quelqu'vne des manieres cy-deuant dites, eſt rationel.



Soit vne expoſee rationele A, & le rectangle BD compris ſous BC, CD rationeles commenſ. en longitude, ſelon quelque vne des manieres cy-deſſus dites: Ie dis que Iceluy rectangle eſt rationel.

Car ſi ſur l'vne d'icelles BC, CD, ſçauoir BC, on faict le quarré BE, il ſera commenſurable au quarré de la rationele A par la 3. def. 10. puis que BC eſt rationele commenſurable à la rationele expoſee A, ou en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement. Et puis que BC, ou CE, CD ſont commenſ. en longitude (car BC, CD ont eſté poſees rationeles commenſurables en longitude entr'elles) & par la 1. p. 6. comme EC eſt à CD, ainſi EB à BD, par la 10. p. 10. EB, BD ſeront auſſi commenſ. tellement donc que le quarré de A, & le rectangle BD ſont commenſurables au quarré EB; & partant commenſ. entr'eux par la 12. prop. 10. Mais le quarré de A eſt rationel par la 8 d. 10. Donc par la 9. d. 10. le

rectangle BD sera aussi rationel: Parquoy le rectangle compris de deux lignes rationeles, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

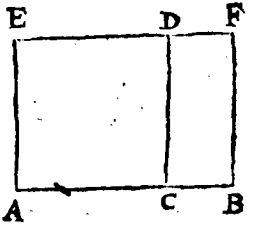
SCHOLIE.

Soit BC 3 & CD 4: donc le rectangle BD sera 12. Derechef soit BC √3 & CD √12: Le rect. BD sera √36, c'est à dire 6. Et derechef si BC est √8, & CD √18: Le rectangle BD sera √144, c'est à dire 12. Ainsi iceluy rectangle est rationel.

THEOR. 18. PROP. XXI.

Si vn rectangle rationel a l'vn des costez rationel, il aura aussi l'autre costé rationel: & iceux costez seront entr'eux commensurables en longitude.

Soit le rectangle rationel DB ayant le costé CD rationel: Ie dis que BC sera aussi rationel commensurable en longitude à CD.



Car sur DC, soit faict le quarré AD, lequel sera rationel par la 8. d. 10. Et comme le rectangle est au quarré, ainsi CB est à CA par la 1. prop. 6. Mais le quarré & le rectangle sont rationnaux, & pariant commensurables. Donc par la 10. prop. 10. CB & CA, ou CD son egale, seront rationeles & commensurables en longitude. Parquoy si vn rectangle rationnel a l'vn des costez rationel, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle DB 6, & la ligne CD √3 : BC ſera donc √12, qui eſt commenſ. en longitude à √3 : Car elle eſt double d'icelle. Soit derechef DB 12, & la ligne droicte CD √8, l'autre coſté BC ſera √18, qui eſt commenſ. en longitude à CD √8. Car ſi on diuiſe √18 par √8, prouiendra √2 1/4 c'eſt à dire √ 9/4 qui eſt 3/2 : & partant √18 eſt à √8, comme 3 à 2, c'eſt à dire comme nombre à nombre ; & par conſequent commenſ. en longitude.

LEMME.

Trouuer deux lignes droictes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

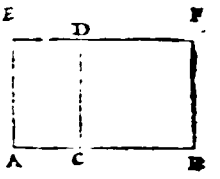
Soit trouué par la 11. p. 10. quelque ligne droicte incommenſurable en longitude ſeulement à vne ligne droicte rationele propoſee, & icelles ſeront les requiſes : car puis qu'elles ſont commenſurables en puiſſance ſeulement par la conſtruction, elles ſeront auſſi rationeles par la 6. d. 10.

Que ſi à la ligne trouuee, on en trouue encore vne autre, moindre ou plus grande que la propoſee rationele, il eſt manifeſte par la 12. prop. 10. que toutes les trois ſeront commenſurables entr'elles en puiſſance ſeulement, & partant rationeles.

THEOR. 19. PROP. XXII.

Le rectangle compris de deux lignes droites rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, eſt irrationel : & la ligne droicte qui peut iceluy eſt irrationelle. Soit icelle appellee Mediale.

Soit le rectangle AD, compris de deux lignes rationelles DC & CA commensurables en puissance seulement. Ie dis que le rectangle est irrationel: & la ligne qui peut iceluy, pareillement irrationelle, qui doit estre appelle Mediale.



Car si sur la rationelle CD on descrit le quarré DB, il sera rationel, & sera au rectangle AD, comme BC ou CD son egale, est à CA, par la 1. prop. 6. Mais DC & CA sont incommens. en longitude: donc par la 10. prop. 10. le quarré BD, & le rectangle AD seront incommens. Or le quarré est rationel: donc par la 10. def. 10. le rectangle sera irrationel; & par la 11. la ligne qui peut iceluy sera aussi irrationelle: & soit icelle ligne appellee Mediale, pource que le quarré d'icelle est egal au rectangle compris sous les rationelles DC, CA commensurables entr'elles en puissance seulement, & par consequent moyenne prop. entre icelles rationelles par la 17. p. 6. Donc le rectangle compris de deux lignes droictes rationelles commensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Pour donc facilement definir la ligne mediale, nous dirons icelle estre vne ligne irrationelle, moyenne proportionelle entre deux lignes rationelles, entr'elles commensurables en puissance seulement. Ou bien celle qui peut vn rectangle contenu sous deux lignes rationelles commensurables entr'elles en puissance seulement.

Et faut noter que le quarré d'icelle ligne mediale, ou le

rectangle irrationnel qu'elle peut, eſt auſsi nommé medial, pource qu'il eſt moyen prop. entre les quarrez d'icelles lignes rationelles commenſ. entr'elles en puiſſance ſeulement, non qu'il faille pourtant entendre que tout rectangle medial ſoit touſiours contenu ſous deux lignes droictes rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, tel qu'eſt le medial CF: car il en aduient quelquesfois autrement, comme ſe verra cy-apres.

La ligne DC ſoit 2, & BCV8. Le rectangle BD ſera V32, qui eſt irrationel; & ſera dict medial, mais la ligne pouuant iceluy eſt VV32, laquelle on appelle mediale.

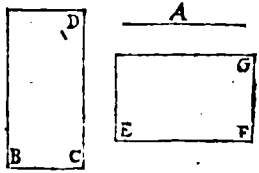
THEOR. 20. PROP. XXIII.

Le quarré d'vne ligne mediale appliqué ſur vne ligne rationelle, faict l'autre coſté rationel commenſ. en puiſſance ſeulement à la ligne à laquelle ſe faict l'application.

Auparauant que venir à ce qui eſt icy propoſé, eſt à notter que pour appliquer ſur vne ligne rationele vn rectangle egal au quarré d'vne ligne mediale, autrement & plus facilement que par la 45. prop. 1. Il faut en premier lieu poſer quelconque ligne rationelle, en ſecond lieu la mediale, & chercher la tierce proportionelle, laquelle ſera l'autre coſté du rectangle: car par la 17. propoſition 6, le quarré de la moyenne eſt egal au rectangle des extrmes.

Venons maintenant à la demenſtration de la propoſition.

Soit la mediale A, le quarré delaquelle soit appliqué sur la ligne rationelle BC, faisant le rectangle BD: Ie dis que BC & CD sont rationelles commens. en puissance seulement.



Car A estant mediale, elle pout vn rectangle compris de deux lignes rationelles comméſ. en puissance seulement, autrement elle ne seroit dicte mediale: Soit donc iceluy rectangle EG, contenu sous les rationelles EF, FG commensurables en puissance seulement. Et pource que A, par l'hypotheſe peut aussi le rectangle BD: Iceux rectangles B D, EG seront egaux, & par la 14 prop. 6. ils auront les costez reciproques, ſçauoir que comme BC à EF, ainsi FG à CD, & par la 22. prop. 6 les quarrez d'icelles lignes seront proport. Mais le quarré de BC ligne rationelle, est commens. au quarré de EF, aussi ligne rationelle: donc par la 10. prop. 10. le quarré de FG sera aussi commens. au quarré de CD; & partant les lignes F G, C D seront com. au moins en puissance, & le quarré de FG estant rationel, le quarré de CD sera aussi rationel; & par consequent les lignes CB & CD seront rationelles. Or qu'icelles BC & CD soient commens. en puissance seulement, il est euident par ce qui a esté demonstré à la 21. prop. 10. Car si elles estoient commensurables en longitude, le rectangle BD seroit rationel, & nous l'auons posé medial, c'est à dire egal au quarré de la mediale A. Donc les lignes BC & CD sont incómensurables en

longitude. Parquoy le quarré d'vne ligne mediale appliqué sur vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

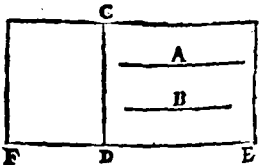
SCHOLIE.

Soit le quarré de A √40, mais BC soit 2. Si donc à BC on applique √40, l'autre costé CD sera √10. qui est incommens. en longitude à BC, mais commens. en puissance. Que si BC est √5, CD sera √8, aussi comm. en puissance seulement. Mais si la mediale A estoit √√35, & BC √5: le quarré de A seroit √35: & CD √7, commens. en puissance seulement à BC.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Vne ligne droicte commensurable à vne ligne mediale, est aussi mediale.

Soit la mediale A, à laquelle soit commensurable la ligne droicte B. Ie dis qu'icelle B est aussi mediale.



Car soit proposee la rationelle CD, & sur icelle appliqué le rectangle CE egal au quarré de A: Item sur la mesme rationelle CD soit appliqué le rectangle CF egal au quarré de B. D'autant que le quarré de la mediale A, est appliqué sur la rationelle CD, l'autre costé DE est rationel commensurable en puissance seulement à CD, par la 23. prop. 10. Mais A & B estans commensurables, leurs quarrez (ou leurs egaux rectangles CE, & CF) seront aussi commens.

Mais

Mais par la 1. prop. 6. comme CE est à CF, ainsi la ligne droicte E D est à la ligne droicte D F : Donc par la 10. prop. 10. E D, DF, seront commens. en longit. Mais la ligne ED est rationnelle, & incommensurable en longitude à la ligne CD : donc aussi DF est rationelle & incommens. en longit. à la mesme CD, par la 14. prop. 10. & partant puis qu'icelles CD, DF sont rationelles, elles seront commensurables en puissance seulement, & par la 22. pr. 10. le rectangle C F compris sous icelles CD, DF sera medial, & la ligne B qui peut iceluy rectangle, sera aussi mediale : ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que toute figure commensurable à une figure mediale, est aussi mediale : d'autant que les quarrez egaux à icelles figures seront aussi commensurables, & par consequent commensurables les lignes qui les pourront, à tout le moins en puissance, & l'une d'icelles estant mediale, l'autre qui luy sera commens. sera aussi mediale par ceste proposition.

SCHOLIE.

Soit AV 100, BV 128, CD 4. Donc DE sera V 12½ & DF V 8 commens. entr'elles : car elles sont comme 5 à 4 : & DF est commens. en puiss. seulement à CD ; & par consequent le rectangle CF, qui est V 128, est medial, & la ligne BV 128, qui peut iceluy, aussi mediale.

LEMME I.

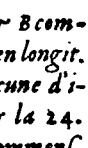
Or ce qui a esté dit des lignes rationeles au lemme de la 19. prop. de ce liure, nous le dirons aussi des mediales : sçauoir est que les lignes droictes commens. en long. à une me-

diale, eſt dite mediale, & comm. à icelle, non ſeulement en longit. mais auſſi en puiſſance. Car vniuerſellement les lignes droictes comm. en longit. le ſont auſſi en puiſſance. Et s'il y a quelque ligne comm. en puiſſance & longit. à vne mediale, elle ſera pareillement dite mediale, & à icelle commenſ. en longit. & puiſſance. Que ſi derechef il y a quelque ligne commenſ. en puiſſance à vne mediale, mais incomm. en longit. elle ſera auſſi dite mediale commenſ. à icelle en puiſſance ſeulement.

LEMME 2.

Trouuer deux lignes mediales commenſurables en longitude: Item deux commenſurables en puiſſance ſeulement.

Soient trouuees les deux lignes A & B commenſ. à la mediale C, c'eſt à ſçauoir A en longit. & B en puiſſance ſeulement: & chacune d'icelles A & B ſeront auſſi mediales par la 24. prop. 10. Veu donc que A & C ſont commenſ. en longit. & B, C en puiſſance ſeulement, eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.

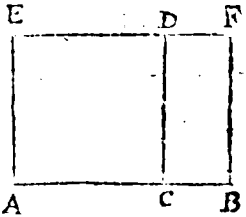


Or il eſt à noter qu'encore que toute ligne droicte commenſ. à vne mediale, ſoit mediale, neantmoins toute ligne mediale n'eſt pas commenſ. à quelque mediale que ce ſoit. Car deux mediales ſe peuuent donner incomm. en longit. & puiſſance, comme apparoiſtra par la 36. prop. de ce liure, où nous enſeignerons auſſi à trouuer deux telles lignes mediales.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en longitude, eſt auſſi medial.

Soit le rectangle DB, compris de deux mediales commens. en longitude DC & BC: Ie dis qu'il eſt medial.



Car ſi ſur la ligne DC on deſcrit le quarré DA, il ſera medial, eſtant deſcrit ſur vne ligne mediale: & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi AD eſt à DB: mais CD, ou CA ſon egale, eſt commenſurable en longitude à BC: Partant par la 10. prop. 10. le quarré medial AD, ſera commenſurable au rectangle DB: & par le corollaire de la 14. prop. 10. iceluy rectangle ſera medial. Donc le rectangle compris de deux lignes mediales, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

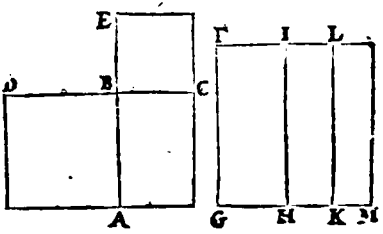
Si les mediales DC, CB commenſ. en longitude ſont √√2 & √√32: le rectangle d'icelles, ſçauoir DB, ſera √√64, c'eſt à dire √8, qui eſt medial.

THEOR. 23. PROP. XXVI.

Le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt rationel, ou media!.

Soient les deux modiales commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant le rectangle AC: Ie dis qu'iceluy rectangle eſt rationel ou medial.

Qu'ainſi ne ſoit: Sur A B & B C ſoient deſcrits les quarrez AD & CE, leſquels eſtans faits ſur lignes mediales ſeront mediaux.



Maintenant ſoit propoſee la ligne rationelle F G, & ſur icelle ſoient deſcrits les trois rectangles F H, I K, L M, egaux aux trois figures AD, AC, CE, par la 45. prop. 1. Et d'autant que les quarrez AD & CE ſont mediaux, leurs egaux rectangles FH, LM ſeront mediaux: leſquels appliquez ſur la rationelle F G, leurs autres coſtez G H & K M, ſeront rationnaux commenſ. en puiſſance ſeulement à FG par la 23. prop. 10. Mais d'autant que les quarrez AD & CE ſont commenſurab. (eſtans faicts ſur lignes commenſur. en puiſſance) leurs egaux rectangles FH & LM ſeront auſſi commenſ. mais par la 1. p. 6. comme FH eſt à LM, ainſi la ligne droicte GH eſt à la ligne droicte KM: donc par la 10. prop. 10. GH & KM ſeront commenſ. en longitude; & par la 10. prop. 10. le rectangle de GH & KM ſera rationel. Et pource que A B, B D ſont egales, & BC, BE auſſi egales, comme DB eſt à BC, ainſi AB à BE. Mais comme D B à BC, ainſi AD à AC par la 1. prop. 6. & comme AB eſt à BE, ainſi AC à CE: donc comme AD à AC, ainſi AC à CE: & partant AD, AC, CE ſont proportiónaux: & par conſequent leurs egaux FH, HL, LM ſeront auſſi proportionnaux. Mais par la 1. prop. 6. les lignes

GH,HK,KM ſont entr'elles, comme les rectangles FH,HL,LM : elles ſeront donc proportionelles: & par la 17. prop 6 le rectangle de GH, KM, ſera egal au quarré de HK. Or le rectangle d'icelles GH. KM a eſté demonſtré rationel : donc auſſi le quarré de HK ſera rationel : & par conſequent la ligne HK ſera auſſi rationelle : & par la 6. def. 10. elle ſera pareillement commenſurable à la rationelle propoſee FG, ou à ſon egale HI, ſoit en longitude & puiſſance, ou en puiſſance ſeulement : Si en longitude, le rectangle HL contenu ſous icelles HI HK, ou le rectangle AC qui luy eſt egal, ſera rationel par la 20. prop. 10. mais ſi HK eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à HI, iceluy rectangle HL ou AC ſera medial par la 22. prop. 10. Parquoy le rectangle compris de deux lignes mediales commenſurables en puiſſance, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soient les mediales AB & BC, √√8, & √√2 : (deſquelles les puiſſances ſont commenſurables, car elles ſont en raiſon double.) Le rectangle d'icelles AC ſera √√16, c'eſt à dire 2, qui eſt rationel. Mais ſi AB eſt √√12, & BC √√3, (deſquelles les puiſſances ſont commenſ. eſtans en raiſon double.) Le rectangle AC ſera √√36, c'eſt à dire √6, qui eſt vn medial.

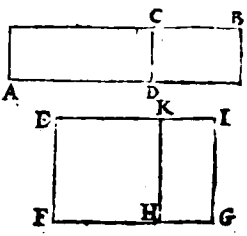
THEOR. 24. PROP. XXVII.

Vne figure mediale n'eſt pas plus grande qu'vne figure mediale, d'vne figure rationelle.

Soit la figure mediale AB qui excede le medial

AC du rectangle DB: ie dis que DB n'eſt pas figure rationelle.

Qu'il ne ſoit ainſi: Sur vne propoſée rationelle EF ſoient faicts les rectangles EG & EH, egaux aux rectangles AB & AC par la 45. prop. 1. tellement que HI ſera egal à DB: partant iceux rectangles EG, EH ſeront mediaux, leſquels eſtans appliquez ſur la rationelle EF, les autres coſtez FG & FH ſeront lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement à EF par la 23. prop. 10.



Maintenant ſi on dit que HI eſt rationel; eſtant appliqué ſur la rationelle KH, l'autre coſté GH ſera rationel commenſurable en longit. à KH par la 21. prop. 10. mais FH eſt incom. en long. à KH, ou EF: donc par la 14. pr. 10. FH & GH ſeront incomm. en longit. mais comme FH à GH, ainſi le rectangle de FH & GH au quarré de GH par la 1. prop. 6. (car ils ſont de meſme hauteur.) Partant par la 10. prop. 10. le quarré de GH eſt incomm. au rectangle de FH & GH. Il le ſera auſſi à deux fois le rectangle de FH & GH par la 14. pr. 10. Or le meſme quarré de GH eſt comm. au quarré de FG, (icelles lignes GH, FG eſtans rationelles) & par la 16. pr. 10. les deux quarrez de FH & GH, enſemble ſeront commenſurables au ſeul quarré de GH: mais iceluy quarré eſt incommenſurable à deux fois le rectangle de FH & GH: donc par la 13. prop. 10. les deux quarrez de FH & GH ſeront enſemble incommenſur. à deux fois le

rectãgle de FH & GH. Mais iceux deux quarrez, & deux fois le rectangle de FH & GH ſont egaux au quarré de FG par la 4. pr. 2. donc par la 17. p. 10. le quarré de FG ſera incomm. aux deux quarrez de FH & GH enſemble: leſquels eſtans rationaux, (car ils ſont faicts ſur lignes rationelles) le quarré de FG ſera irrationel, par la 10. def. 10. & par conſequent la ligne FG irrationelle: Ce qui eſt abſurde, car nous auons monſtré qu'elle eſt rationelle: donc le rectangle HI, ou ſon egal DB, n'eſtoit pas rationel Parquoy vne figure mediale n'eſt pas plus grande, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Soit le rectangle medial AB √50, & le rectangle AC √18: le rectangle reſtant DB ſera √8, qui eſt medial. Derechef AB eſtant √32, & AC √20; le reſtant DB ſera √32 — √20, qui n'eſt pas rationel.

PROBL. 4. PROP. XXVIII.

Trouuer deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel.

Soient deux lignes rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement A & B, (trouuees par le lemme qui precede la 22. prop. de ce liure) entre leſquelles (par la 13. prop.) ſoit trouuée la moyenne proportionelle C; puis (par la 12. prop. 6.) aux trois A, B, C, ſoit trouuée la quatrieſme proportionelle D: Ie dis que C & D ſont les deux mediales demandees.



Car puis que C eſt moyenne proport. entre A & B, le rectangle de A & B (lequel par la 22. p. 10. eſt medial) ſera egal au quarré de C par la 17. p 6. & par la 22. prop. 10. C qui peut le rectangle medial, eſt mediale: Item, puis que comme A à B, ainſi C à D, & que A eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à B, auſſi le ſera C à D par la 10. prop. 10. Mais C eſt ligne medialle: donc D qui luy eſt commenſ. en puiſſance ſeulement ſera auſſi ligne medialle par la 24. prop. 10. Ie dis en outre que le rectangle contenu d'icelles medialles C & D eſt rationel. Car d'autant que comme A eſt à B, ainſi C à D, en permuttant, comme A à C, ainſi B à D: mais comme A eſt à C, ainſi C à B. Donc C ſera auſſi à B, comme B à D par la 11. prop. 5. parquoy B eſt moyenne prop. entre C & D, & par la 17. prop. 6. le quarré d'icelle B ſera egal au rectangle de C & D. Mais iceluy quarré de B, ligne rationelle, eſt rationel: donc le rectangle comprins de C & D eſt auſſi rationel. Nous auons donc trouué C & D mediales comm. en puiſſance ſeulement qui comprénent vn rectangle rationel: Ce qu'il failloit faire.

SCHOLIE.

Soit A √ 20, & B √ 12. donc la moyenne prop. C ſera √ √ 240. & puis que cõme A à B, ainſi C à D, D ſera √ √ 86 2/3. Or les puiſſances de √ √ 240, & √ √ 86 2/3 ſont commenſ. car elles ſont comme 5 à 3: & le rectangle contenu d'icelles eſt √ √ 20736, c'eſt à dire 12, egal au quarré de √ 12, qui eſt auſſi 12: & partant iceluy rectangle de C & D, commenſ. en puiſſance ſeulement eſt rationel.

PROBL. 5. PROP. XXIX.

Trouuer deux lignes mediales commen-

surables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial.

Soient trois lignes rationelles commens. en puissance seulement A, B, C, trouuees comme il est enseigné au lemme qui precede la 22. prop. 10. & par la 13. prop. 6. entre A & B soit trouuee la moyenne proportionelle D: puis par la 12. pr. 6. soit fait comme B à C, ainsi D à E: Ie dis que D & E sont les deux mediales demandées.



Car en premier lieu, il est euident que D est mediale par la 22. prop. 10. d'autant que par la 17. propos. 6. elle peut le rectangle irrationel de A & B: mais comme B à C, ainsi D à E, & B est commens. en puissance seulement à C, aussi par la 10. pr. 10. D sera commens. en puissance seulement à E: Et par la 24. prop. 10. D estant mediale, E sera aussi mediale commens. en puissance seulement à D.

D'auantage, ie dis que le rectangle d'icelles deux mediales D & E est aussi medial. Car puis que comme B à C, ainsi D à E, en permutant B sera à D comme C à E: mais B est à D comme D à A; partant comme D est à A, ainsi C est à E: & par la 16. prop. 6. le rectangle des extremes D & E sera egal au rectangle des moyennes A & C. Mais le rectangle de A & C, rationnelles commens. en puissance seulement, est medial par la 22. prop. 10. Donc par le corollaire de la 24. prop. 10. le rectangle de D & E sera aussi medial. Parquoy nous auons trouué deux lignes medialles commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE I.

Soit A 20, *B* √200, *& C* √80. *Donc la moyenne prop. D, ſera* √√80000. *Et puis que comme B à C, ainſi D à E; icelle E ſera* √√12800. *Or les puiſſances de D & E, ſont commenſurables, car elles ſont comme 5 à 2: & le rectangle d'icelles eſt* √√1024000000, *c'eſt à dire* √32000, *egal au rectangle de A & C, qui eſt* √32000.

Or és choſes ſuiuantes nous aurons beſoin de ce probleme cy.

Trouuer deux nombres plans ſemblables.

Soient pris quatre nombres proportionnaux A, B, C, D, c'eſt a dire que comme A eſt à B, ainſi C ſoit à D. Mais A & B ſe multiplians entr'eux faſſent E: Item C & D ſe multiplians faſſent F. Donc E & F ſeront nombres ſemblables, puis qu'ils ont les coſtez proportionnaux.

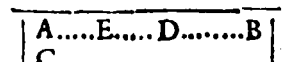
A 6.	C 12.
B 4.	D 8.
E 24.	F 96.

Or d'autant qu'il a eſté demonſtré és 28 & 29. p. 9. que ſi on multiplie vn nombre impair ou pair, par vn pair, eſt produit vn nombre pair: mais vn impair, ſi on multiplie vn impair par vn impair: il appert par quelle maniere peuuent eſtre trouuez deux plans ſemblables, l'vn & l'autre deſquels ſoit pair ou impair; ou vn ſeul pair, & l'autre impair: Car ſi les coſtés pris ſont nombres pairs, les plans d'iceux ſeront auſſi pairs; mais ſi les nombres ſont impairs, les plans d'iceux ſeront auſſi impairs. Que ſi les coſtez de l'vn ſont nombres impairs, mais de l'autre pairs, le plan de ceux là ſera impair, mais de ceux-cy pair: Semblablement les plans ſeront pairs, ſi chacun a vn coſté nombre pair, & l'autre impair, &c.

LEMME I.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le compoſé d'iceux ſoit auſſi nombre quarré.

soient trouuez par les choſes cy-deſſus dictes deux plans ſemblables AB & C, chacun deſquels ſoit pair ou impair. Et d'autant que par les 24 & 26. prop. 9. ſi d'vn nombre pair on en oſte vn pair, ou bien vn impair d'vn impair, le reſte eſt pair:



eſtant oſté BD egal à C de AB, le reſte AD ſera pair; & iceluy AD eſtant diuiſé en deux egalement en E: Ie dis que le nombre fait de AB en BD (qui eſt vn quarré par la 1. prop. 9.) auec le quarré du nombre ED, fait vn quarré. Car puis que le nombre AD eſt diuiſé en deux egalement en E, & iceluy eſt adiouſté DB; le nombre qui eſt fait de AB en BD, auec le quarré du nombre DE, ſera egal au quarré du nombre EB, par le 6. theor. de ceux que nous auons demonſtré à la 14. p. 9. Parquoy les deux nombres quarrez, ſçauoir celuy fait de AB en DB, & celuy du nombre DE adiouſtez enſemble feront vn quarré, ſçauoir celuy qui ſera produict de BE. Ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

De ces choſes eſt manifeſte que quand AB & C ſont ſemblables, eſtre trouuez en la meſme maniere les deux nombres quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre fait de AB en BD, eſt auſſi quarré.

Que ſi les nombres AB & C ne ſont prins ſemblables, l'vn & l'autre toutesfois pair, ou impair, ſeront trouuez en la meſme maniere les deux quarrez des nombres BE, ED, deſquels l'excez, ſçauoir le nombre fait de AB en DB n'eſt quarré. Car s'il eſtoit quarré, par la 2. propoſit. 9. les nombres AB, BD, c'eſt à dire AB & C, ſeroient plans ſembla-

bles, Ce qui eſt abſurde, puis qu'ils ont eſté poſez diſſemblables.

SCHOLIE 2.

Parquoy s'il faut trouuer deux nombres quarrés, deſquels l'excez ſoit auſsi nombre quarré, nous prendrons comme cy-deſſus, deux plans ſemblables, l'vn & l'autre deſquels ſoit pair, ou impair, ſçauoir AB & C, & acheuerons comme il eſt dict au precedent lemme.

Que s'il faut trouuer deux quarrez, deſquels l'excez ne ſoit quarré, il faudra prendre deux nombres plans diſſemblables, & paracheuer comme deſſus. Ce qu'on obtiendra plus facilement, diuiſant vn nombre quarré en deux nombres, l'vn deſquels ſoit quarré, & l'autre non: Comme 16 en 4 & 12: ou 36 en 16 & 20: & ainſi des autres.

LEMME 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que le compoſé d'iceux ne ſoit nombre quarré.

Soient deux nombres plans ſemblables AB, & C pairs, ou impairs, & ſoit fait meſme conſtruction qu'au lemme precedant: tellement que le quarré fait de la multiplication des nombres ſemblables AB, DE entr'eux, auec le quarré de DE, ſoit egal au quarré de BE: en apres, de DE ſoit oſtee l'vnité EF. Donc le quarré de DF ſera moindre que le quarré de DE, à cauſe de l'inegalité des coſtez. Ie dis que le nombre compoſé des nombres quarrez, deſquels l'vn eſt fait de AB en BD, & l'autre de DF en ſoy, n'eſt pas quarré. Car ſi ce compoſé eſtoit nõbre quarré, il ſeroit plus grand, ou egal, ou moindre

A..H..I.E.F.G...D.....B
C.....

que le quarré de BF : Soit premierement plus grand, s'il eſt poſſible ; donc le coſté d'iceluy ſera plus grand que le coſté BF; partant egal, ou plus grand que le nõbre BE: (car il ne ſera moindre, pource qu'entre BE, BF, nombres differens de l'vnité, ne tombe aucun milieu, & le ſuſdit coſté ſeroit milieu entre iceux, s'il eſtoit poſé plus grand que BF, mais moindre que BE.) Si on dit qu'il eſt egal, tellement qu'au quarré de BE, ſoit egal le nombre quarré compoſé du quarré de AB en BD, & du quarré de DF; puis qu'au meſme quarré de BE, a eſté demonſtré au lemme precedent eſtre egal le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DE; auſſi celuy fait de AB en BD, auec le quarré de DF, ſera egal à celuy là fait de AB en BD, auec le quarré de DE. Oſtant donc le commun quarré fait de AB en DB, le reſte quarré de DF, ſera egal au reſte quarré de DE; & partãt le coſté DF auſſi egal au coſté DE, la partie au tout: ce qui eſt abſurde. Donc le coſté du quarré compoſé des quarrez, deſquels l'vn eſt fait de AB en BD, & l'autre de DE en ſoy, n'eſt pas egal au nombre BE. Mais il n'eſt pas plus grand. Car ſi faire ſe peut, le coſté d'iceluy ſoit egal au nombre BI, qui eſt plus grand que BE. Donc puis que le quarré de BI plus grand coſté, eſt plus grand que le quarré de BE moindre coſté; pareillement le compoſé des quarrez, deſquels l'vn eſt fait de AB en BD, & l'autre de DF en ſoy, (puis que ce compoſé eſt poſé egal au quarré de BI) ſera plus grand que le quarré de BE. Mais au preced. lemme le quarré de BE a eſté demonſtré egal au nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DE: oſtant donc le commun nombre fait de AB en BD, reſtera le quarré de DF, plus grand que le quarré de DE, & partant le coſté DF plus grand que le coſté DE, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc le coſté du quarré compoſé des quarrez, deſquels l'vn eſt fait de AB en BD, & l'autre de DE en ſoy, n'eſt pas plus

DIXIESME

Ce qui eſt abſurde, puis qu'il contient des

SCHOLIE 2.

LEMME 2.

Trouuer deux nombres quarrez, tels que

A..H..I.E.F.G..D..
C.....

grand que le coſté BF : mais il a eſté demonſtré qu'il n'eſt pas auſſi egal, ny moindre. Donc iceluy quarré compoſé n'eſt pas plus grand que le quarré de BF.

Soit maintenant, ſi faire ſe peut, le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, egal au quarré de BF: & ſoit poſé AH double de l'vnité EF. Donc puis que le tout AD eſt double du tout ED, (car AD a eſté diuiſé en deux egalement en E) & l'oſté AH double de l'oſté EF, auſſi le reſte HD ſera double du reſte FD par la 7. prop. 7. & partant HD eſt diuiſé en deux egalement en F: Parquoy par le 6. theor. de ceux que nous auons demonſtré ſur la 14. prop. 9. le nombre fait de HB en BD, auec le quarré de DF, ſera egal au quarré de BF: Mais au meſme quarré de BF, eſt poſé egal le nombre fait de AB en BD enſemble auec le quarré de DF. Donc le nombre fait de HB en BD, auec le quarré du nombre DF, eſt egal à celuy fait de AB en DB, auec le quarré de DF. Oſtant donc le commun quarré de DF, reſtera le nombre fait de HB en BD, egal à celuy fait de AB en DB. Parquoy puis que HB, AB multiplians le meſme BD, produiſent nombres egaux, & que par la 18. p. 7. les multiplians ont meſme raiſon que les produicts: HB ſera egal à AB, la partie au tout. Ce qui eſt abſurde. Donc le nombre fait de AB en DB, auec le quarré de DF, n'eſt pas egal au quarré de BF.

Soit finalement, ſi faire ſe peut, le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, moindre que le quarré de BF; & partant le coſté d'iceluy, moindre que le coſté BF, lequel ſoit BG, tellement que le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, ſoit egal au quarré de BG: Soit pris AI double d'iceluy EG. Donc puis que le tout AD eſt double du tout FD, & l'oſté AI double de l'oſté EG, par la 7. prop. 7. le reſte ID ſera auſſi double du reſte

GD: & partant ID eſt diuiſé en deux egalement en G. Parquoy par le 6. theor. demonſtré ſur la 14. prop. 9. le nombre fait de IB en BD auec le quarré de DG, eſt egal au quarré de BG. Mais au meſme quarré de BG a eſté poſé egal le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF: Donc le nombre fait de IB en BD, auec le quarré de DG, eſt egal à celuy fait de AB en BD, auec le quarré de DF. Oſtant donc les quarrez de DG & DF, deſquels celuy de DG eſt moindre, reſtera le nombre fait de IB en BD, plus grand que celuy fait de AB en BD, la partie que le tout. Ce qui eſt abſurde. Donc le nombre fait de AB en BD, auec le quarré de DF, n'eſt pas moindre que le quarré de BF: mais il a eſté demonſtré qu'il n'eſt pas auſſi plus grand, ny egal. Donc le nombre produit de AB en BD, auec le quarré de DF, n'eſt pas quarré. Ce qui eſtoit propoſé à demonſtrer.

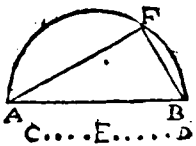
SCHOLIE 3.

Par cecy nous trouuerons facilement deux nombres, tels que le compoſé d'iceux ne ſoit à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré. Car ſi par le Lemme precedent on trouue deux quarrés, tels que le compoſé d'iceux ne ſoit quarré, ce compoſé non quarré ne ſera à l'vn ny à l'autre d'iceux comme nombre quarré à nombre quarré. Nous obtiendrons le meſme, diuiſant quelconque nombre quarré en deux nombres non quarrez: Car ainſi le quarré total ne ſera à l'vn ny à l'autre d'iceux nombres eſquels il eſt diuiſé, en raiſon de nombre quarré à nombre quarré.

PROB. 6. PROP. XXX.

Trouuer deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement,

& que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude.



Soit propoſee la rationele AB, & ſoient trouuées (comme il a eſté enſeigné au 2. Scholie de la preced. prop.) les deux nombres quarrez CD, CE, l'excez deſquels DE ne ſoit quarré: puis par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit trouuée AF, au quarré de laquelle ſoit le quarré de AB, comme le nombre CD eſt au nombre DE; & apres auoir deſcrit vn demy cercle ſur AB, en iceluy ſoit accommodee la ligne droite AF: & ioinct BF. Iedis que AB & AF ſont les deux lignes requiſes.

Car d'autant que le quarré de AB eſt au quarré de AF comme le nombre CD eſt au nombre DE, ils ſeront commenſurables par la 6. pr. 10. & partant auſſi leurs coſtez AB & AF, au moins en puiſſance: mais AB eſt rationnele, & par conſequent auſſi rationele AF qui luy eſt commenſurable: mais les quarrez de AB & AF n'eſtans entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, par la 9. pr. 10. les lignes AB & AF ſeront incommenſurables en longitude: elles ſeront donc rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Maintenant veu que l'angle F au demy cercle eſt droit par la 31. pr. 3. le quarré de AB ſera egal au deux quarrez de AF & FB, c'eſt à dire que la ligne

AB

AB peut plus que la ligne AF, du quarré de FB. Et d'autant que comme CD eſt à DE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de AF, par conuerſion de raiſon, comme le nombre quarré CD ſera au nombre quarré CE, ainſi le quarré de AB ſera au quarré de FB; car ainſi que CD excede DE du quarré de CE, ainſi auſſi le quarré de AB ſurpaſſe le quarré de AF du quarré de FB.) Parquoy les lignes droictes AB, FB ſont commenſurables en longitude par la 9. pr. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commenſurables en puiſſance ſeulement, & la plus grande AB peut plus que AF du quarré de la ligne FB, qui luy eſt commenſurable en longitude: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

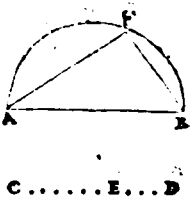
La rationele AB ſoit 6: AF ſera √20: & partant BF ſera 4, commenſ. en longitude à AB.

PROB. 7. PROP. XXXI.

Trouuer deux lignes rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & que la plus grande puiſſe plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſurable en longitude.

Soit expoſée la rationele AB, & ſoient trouuez (comme il a eſté enſeigné au lemme 2. de la prop. 29. de ce liure) deux nombres quarrez tels que le compoſé d'iceux ne ſoit quarré, ou pluſtoſt ſoit diuiſé quelque nombre quarré CD, en deux nom-

bres non quarrez, CE, ED, afin que le tout CD ne soit à l'vn ou à l'autre d'iceux CE, ED, comme nombre quarré à nombre quarré: puis sur AB soit descrit le demy cercle AFB; & par le corollaire de la 6. pr. 10. soit trouuee la ligne droicte AF, au quarré de laquelle soit le quarré de AB, comme le nombre CD est au nombre CE: & finalement icelle AF estant accommodee au cercle soit menee BF. Ie dis que AB & AF sont les deux lignes demandees.



Car on prouuera tout ainsi qu'à la precedente, que AB & AF sont rationeles commensurables en puissance seulement, (car leurs quarrez ne sont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré;) & que AB peut plus que AF du quarré de BF. Et d'autant que comme CD est à CE, ainsi le quarré de AB est au quarré de AF; par conuersion de raison comme CD sera à DE, ainsi le quarré de AB sera au quarré de BF. Mais CD n'est pas à DE comme nombre quarré à nombre quarré: donc aussi le quarré de AB ne sera pas au quarré de BF comme nombre quarré à nombre quarré. Parquoy les lignes droictes AB, BF seront incommensurables en longitude, par la 9. prop. 10. Nous auons donc trouué deux rationeles AB, AF commensurables en puissance seulement, telles que la plus grande AB peut plus que AF, du quarré de la ligne BF, qui luy est incommensurable en longitude: Ce qu'il falloit faire,

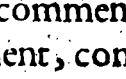
SCHOLIE.

si la rationele AB est 3, AF sera √6, & BF √3.

PROB. 8. PROP. XXXII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel; & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuées par la 30. prop. de ce liure deux lignes rationeles A & B commensurables en puissance seulement, & que la plus grande A puisse plus que la plus petite B du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude: Item par la 13. pr. 6. soit trouuee C moyenne proportionnele entre A & B; & finalement par la 12. prop. 6. aux trois lignes A, B, C, soit trouuee la 4. proportionele D. Ie dis que C & D sont les deux lignes demandees.



Car puisque A & B sont rationeles commensurables en puissance seulement, par la 22. pr. 10. le rectangle d'icelles A & B sera irrationel; & la ligne C pouuant iceluy par la 17. prop. 6. (car elle est moyenne prop. entre A & B) sera mediale. Et d'autant que comme A est à B ainsi C à D; & A est commensurable en puissance seulement à B, aussi C sera commensurable en puissance seulement à D par la 10. prop. 10. Mais puis que C est mediale, pa-

la 24. prop. 10. D ſera auſſi mediale. Et d'autant que comme A eſt à B, ainſi C à D: en permutant comme A ſera à C, ainſi B ſera à D: mais par la conſtruction comme A eſt à C, ainſi C eſt à B: pareillement donc comme C ſera à B, ainſi B ſera à D: & partant le rectangle de C & D ſera egal au quarré de B, par la 17. pr. 6. & puis que le quarré de la rationele B eſt rationel, le rectangle compris ſous C & D, qui luy eſt egal, ſera auſſi rationel. Et veu que comme A eſt à B, ainſi C à D; & peut plus que B du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, auſſi par la 15. prop. 10. C pourra plus que D du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales C & D, commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel, C pouuant plus que D du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: Ce qu'il falloit faire.

Que ſi on vouloit que C pûſt plus que D du quarré d'vne ligne qui luy fuſt incommenſ. en longitude, il ne faudroit que trouuer A & B, telles qu'elles ſont requiſes par la precedente prop. au lieu que cy deſſus elles ont eſté trouuées par la 30. prop. 10. & acheuer le tout comme deſſus.

SCHOLIE.

Soit A 8, B √28: le rectangle d'icelles ſera √1792, & la ligne C √√1792, qui eſt mediale. Et puis que comme A 8, eſt à B √28, ainſi C √√1792 eſt à D, icelle ſera √√343: donc C & D ſont deux mediales com. en puiſſance ſeulement, leſquelles contiennent vn rationel 28, & la plus grande C peut plus que la moindre D, d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude. Car ſi du quarré d'icelle C, on oſte

le quarré de D, restera √567, & seront commens. en longit les deux mediales, √√1792 & √√567. Car elles sont cõme 4. à 3. Derechef soit A8, & B√20: le rectangle d'icelles sera √1280, & la ligne C √√1280, & partant D sera √√125: donc C & D sont mediales comprenant vn rationel 20, & C peut plus que D du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude.

PROB. 9. PROP. XXXIII.

Trouuer deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande puisse plus que la plus petite du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude.

Soient trouuées trois lignes rationneles commens. en puissance seulement, A, B, C, & que A puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commens. en longitude: (ce qu'on obtiendra trouuant premierement par la 30. p. 10. les deux rationelles A & C commensurables en puissance seulement, & que A puisse plus que C du quarré d'vne ligne qui luy soit commensurable en longitude: puis à C & A soit trouuée B commens. en puissance seulement, par ce qui est enseigné au lemme qui precede la 22. p. 10.) Item par la 13. p. 6. soit trouuée D moyenne prop. entre A & B: puis

A
D
B
C
E

par la 12. p. 6. ſoit faict comme D à B, ainſi C à E. Ie dis que D & E ſont les deux lignes demandées.

Car puis que D eſt moyéne prop. entre A & B, par la 17. p. 6. elle peut le rectangle d'icelles A & B, qui eſt irrationel, & par conſequent D eſt mediale par la 22. p. 10. Mais d'autant que comme D à B, ou A à D, ainſi C à E, en permutant cõme A ſera à C, ainſi D ſera à E. Mais A & C ſont commenſ. en puiſſance ſeulemẽt: donc auſſi D & E: & par la 24. p. 10. D eſtãt mediale, E le ſera auſsi. Et derechef puis que cõme D à B ainſi C à E, par la 16. p. 6. le rectangle des extrémes D & E ſera egal au rectangle des moyénes B & C. Mais par la 22. p. 10. le rectangle de B & C rationneles commenſ. en puiſſance ſeulement eſt medial. Dõc par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de D & E ſera auſsi medial. Finalement, puis que comme A à C, ainſi D à E; & A peut plus que C du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude, par la 15. p. 10. D pourra auſsi plus que E du quarré d'vne ligne qui luy ſera commenſurable en longitude. Nous auons donc trouué deux mediales D & E commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit faire.

Que ſi on trouue A, B, C, rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, tellement que B puiſſe plus que C du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incomm. en longitude, & on acheue de conſtruire comme deſſus; on demonſtrera ſemblablement que D & E ſont mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande D, peut plus que E du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude.

SCHOLIE.

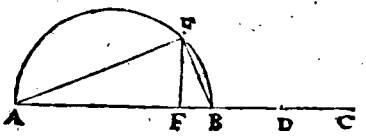
Soit A 8, B √ 48, & C √ 28: le rectangle compris de A & B sera donc √ 3072, & la ligne droicte D √ √ 3072, qui est mediale, & A estant à C, comme D à E, icelle sera √ √ 588. Donc D & E, sont mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn medial, & la plus grande D peut plus que la moindre E du quarré d'vne ligne, qui luy est commensurable en longitude. Car si du quarré d'icelle D, on oste le quarré de E, le reste sera √ 972, qui est commensurable en longitude à icelle D √ √ 3072. Derechef si A est 8, B √ 48, & C √ 20; D sera encore √ √ 3072, mais E sera √ √ 300. Donc D & E sont deux mediales commensurables en puissance seulement, qui contiennent vn medial, & la plus grande D, peut plus que la moindre E, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

PROB. 10. PROP. XXXIV.

Trouuer deux lignes droictes incommensurables en puissance, qui facent le composé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle contenu d'icelles, medial.

Soient deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement AB & BC, & que la plus grande AB puisse plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy soit incommensurable en longitude, trouuée comme il à esté enseigné en la 31. prop. 10. & apres auoir couppé en deux egalement CB au poinct D, soit appliqué vn rectangle sur BA

egal au quarré de BD, defaillant d'vne figure quarrée par la 28 p.6. & ſoit iceluy rectangle compris de AE & EB; & apres auoir



fait vn demy cercle ſur la ligne AB, & mené la perpendiculaire EF, ſoient menées BF & FA: Ie dis qu'icelles lignes ſont les requiſes.

Car puis que AB & BC ſont inegales, & que la plus grande AB peut plus que la moindre BC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & que le rectangle de AE, EB appliqué ſur AB, & defaillant d'vne figure quarrée, eſt egal au quart du quarré de BC, (c'eſt à dire au quarré de DB) car nous auons demonſtré au ſcholie de la 4. p.2. que le quarré de BC eſt quadruple du quarré de BD) les deux lignes AE & EB ſeront incommenſ. en longitude par la 19.p.10 Mais par le ſcholie de la 13. p.6. EF eſt moyenne proport. entre icelles AE, EB; & partant comme il a eſté demonſtré à la 11. p. 10. elle ſera incommenſ. en puiſſance à EA. Mais comme FE à EA, ainſi BF à FA par la 4. p. 6. (car iceux triangles ſont equiangles par la 8. p. 6.) donc puis que FE, EA ſont incommenſ. en puiſſance, par la 10. p.10. BF & FA ſeront auſſi incõmenſ. en puiſſance. Item le quarré de AB, eſt egal aux deux de BF & FA par la 47.p 1. lequel quarré de BA eſt rationel, eſtant la ligne AB rationele; partant le compoſé des quarrez de BF & FA, ſera auſſi rationel. Et dautant que par l'hypotheſe le rectangle de AE, EB, eſt egal au quarré de BD, & qu'il eſt auſſi egal au quarré de la moyenne proport. EF, par la 17. prop. 6. le quarré de

EF ſera egal au quarré de BD : partant la ligne EF eſt egale à BD : & par la 16. p. 6. le rectangle de BF & FA ſera egal au rectangle de BA & EF, ou BD ſon egale. (car par la 8. & 4. prop. 6. AB eſt à BF comme FA à EF.) Or par la 1. pr. 6. le rectangle de AB & DC eſt double du rectangle de AB & BD : (car la baſe BC eſt double de la baſe BD.) Mais le rectangle de AB & BC eſt medial par la 22. prop. 10. donc auſſi ſa moitié rectangle de AB & BD : & par conſequent medial ſon egal rectangle de BF & FA. Nous auons donc trouué les deux lignes AF, FB, incommenſurables en puiſſance, qui font le compoſé de leurs quarrez rationel, mais le rectangle compris d'icelles, medial : ce qu'il falloit faire.

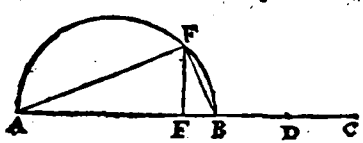
SCHOLIE.

Si AB eſt 6, & BC √12 : BD ou EF ſera √3 : & par conſequent AE ſera 3 + √6, & EB 3 − √6. : & puis que le quarré de AF eſt egal aux quarrez de AE, EF : icelle AF ſera √(18 + √216) : mais, BF ſera √(18 − √216). Donc icelles AF, FB ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir 36, eſt rationel, mais le rectangle compris d'icelles, ſçauoir eſt √108, eſt medial.

PROB. 11. PROP. XXXV.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez medial: mais qu'elles comprenent vn rectangle rationel.

Soient deux mediales commenſ. en puiſſance ſeulement AB & BC, comprenant vn rectangle rationel, & que AB puiſſe plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incõmenſurable en longitude, trouuées comme il a eſté enſeigné en la 31. p. 10. & ſoit acheuée la conſtruction comme en la precedente. Ie dis que BF & FA ſont les deux lignes demandées.



Car nous demonſtrerons ainſi qu'en la precedente prop. qu'icelles BF & FA ſont incommenſ en puiſſance: & le quarré de BA eſt medial, eſtant deſcrit ſur vne ligne mediale, & egal aux deux de BF & FA par la 47. p. 1. Partant le compoſé des deux quarrez de BF & FA eſt medial. Et dautant que le rectangle de AB, BC (comme il a eſté demonſtré en la preced. prop.) eſt double du rectangle de AB, BD; & qu'il eſt rationnel par la conſtruction, auſſi iceluy rectangle de AB, BD ſera rationel. Mais il a eſté demonſtré en la precedente qu'il eſt egal au rectangle de BF & FA: & par conſequent iceluy eſt auſſi rationel. Nous auons donc trouué deux lignes AF & BF incommenſurables en puiſſance, qui font le compoſé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles rationel: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB eſt $\sqrt{\sqrt{432}}$, *& BC* $\sqrt{\sqrt{48}}$: *BD ou EF ſera* $\sqrt{\sqrt{3}}$, *&* $AF\sqrt{(\sqrt{108}+\sqrt{72})}$; *mais BF eſt* $\sqrt{(\sqrt{108}-\sqrt{72})}$: *& partant icelles AF, BF ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir eſt* $\sqrt{432}$,

eſt medial : mais le rectangle compris d'icelles, ſçauoir eſt √36, c'eſt à dire 6, eſt rationel.

PROB. 12. PROP. XXXVI.

Trouuer deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, qui facent le compoſé de leurs quarrez medial, & auſſi le rectangle d'icelles medial, & incommenſurable au compoſé de leurs quarrez.

Soient deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement AB & BC, (*voyez la figure precedente*) comprenant vn rectangle medial, & que la plus grande AB puiſſe plus que la plus petite BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longitude, trouuées comme nous auons enſeigné à la fin de la 33. prop. 10. & apres auoir acheué la conſtruction comme en la 34. p. 10. Ie dis que BF & FA ſont les lignes demandées.

Car premierement elles ſont incommenſurables en puiſſance : comme en la demonſtration de la 34. p. 10. & le quarré de BA eſtant medial comme en la precedente, le compoſé des quarrez de BF & FA ſera auſſi medial : Item le rectangle de AB & BC eſtant medial par l'hypotheſe, le rectangle de AB & BD (ou EF ſon egale) qui eſt ſa moitié, ſera auſſi medial par le corollaire de la 24. p. 10. & par conſequent medial le rectangle de BF & FA qui luy eſt egal, comme il a eſté demonſtré en la 34. prop. 10. Et d'autant que par l'hypotheſe AB eſt incommen-

surable en longitude à BC, & qu'à icelle BC eſt commenſurable en longitude ſa moitié BD, par la 13. p. 10. BD ſera auſſi incommenſurable en longitude à AB, & par la 1. prop. 6. le quarré de AB ſera au rectangle de AB & BD (d'autant qu'ils ſont tous deux de la hauteur de AB) comme AB à BD, c'eſt à dire incommenſurable, par la 10. prop. 10. & par conſequent le rectangle de BF & FA egal au rectangle de AB & BD, ſera incõmenſurable au quarré de BA, c'eſt à dire au compoſé des quarrez de BF & FA. Nous auons donc trouué deux lignes droites AF, BF incommenſurables en puiſſance, faiſant le compoſé de leurs quarrez medial, & le rectangle contenu ſous icelles medial, & incommenſurable au compoſé d'iceux quarrez: ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si AB eſt √√192, & BC √√48; BD ou ſon egale EF ſera √√3, & AF √(√48+√24), & BF √(√48—√24): Parquoy icelles AF, BF ſont incommenſurables en puiſſance, & le compoſé de leurs quarrez, ſçauoir eſt √192, eſt medial incommenſ. à √24, rectangle medial compris d'icelles AF, BF.

Or de ce probleme eſt manifeſte le ſuiuant.

Trouuer deux mediales incommenſurables en longitude & puiſſance.

Car puis que tant le compoſé des quarrez des lignes AF, BF, que le rectangle compris d'icelles, eſt medial, & qu'iceluy rectangle eſt incommenſ. à ce compoſé, auſſi les lignes pouuans iceluy compoſé, & rectangle, ſeront pareillement mediales incommenſ. tant en longitude que puiſſance. Car ſi elles eſtoient commenſ. en puiſſance, auſſi les quarrez d'icelles, c'eſt à dire le compoſé des quarrez des lx

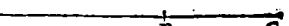
gnes, AF, BF, & le rectangle sous icelles AF, FB, seroient commens. ce qui n'est pas. Parquoy si on prend AB pouuant le compose des lignes AF, FB; & vne autre ligne pouuant le rectangle d'icelles AF, FB, c'est à dire vne moyenne proportionnelle entre AF, FB, seront trouuees deux mediales incommensurables en longit. & puissance.

ICY COMMENCENT les sixaines des lignes rationnelles par composition.

THEOR. 25. PROP. XXXVII. Six. I.

Si deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement sont composées, la toute sera irrationnelle: & soit icelle appellée Binome.

Soient composées deux lignes rationelles



commens. en puissance seulement AB & BC, trouuées par le lemme qui precede la 22. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationnelle.

Car par la 1. prop. 6. le rectangle de AB & BC est au quarré de BC, comme AB à BC: mais AB, BC sont incommens. en longit. par l'hypothese. Donc par la 10. prop. 10. le rectangle de AB, BC sera incommens. au quarré de BC: & partant par la 14. prop. 10. deux fois le rectangle de AB & BC sera incommens. au quarré de BC. Mais d'autant que les lignes AB & BC sont rationnelles commens. en puissance seule-

ment, leurs quarrez seront commensurables entr'eux, & le composé de tous deux sera commensurable au seul de BC, par la 16. prop. 10. & partant par la 24. p. 10. les deux quarrez d'icelles AB & BC seront incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, & par la 17. p. 10. le composé de deux fois le rectãgle & des deux quarrez, c'est à dire le quarré de la toute AC (car par la 4. prop. 2. ce quarré est egal aux quarrez de AB, BC, & deux fois le rectangle d'icelles AB BC) est incommens. aux deux quarrez de AB & BC lesquels estans rationnaux, & le composé d'iceux rationnel, le quarré de AC qui luy est incommensurable sera irrationel, par la 10. def. 10. & par consequẽt la ligne AC irrationelle : or icelle sera appellee binome, pour ce qu'elle est composée de deux noms, c'est a dire de deux lignes rationelles AB, BC, commensurables en puissance seulement. Si donc deux lignes rationelles commensurables en puissance seulement, &c. Ce qu'il failloit demonstrer.

SCHOLIE.

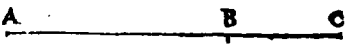
Soit AB 1, BC √3 : la toute AC sera 2+√3, & son quarré est 7+√48.

Or il appert de ce que dessus, que de deux lignes rationelles commens. en puissance seulement, sont procreées deux lignes irrationelles. Car la ligne moyenne prop. entre icelles rationelles est irrationelle par la 22. prop. de ce liure, laquelle est appellée mediale. Et la composée d'icelles, par la 37. prop. 10. est vne irrationelle, qui est dite binome.

THEOR. 26. PROP. XXXVIII.

Si deux lignes mediales commensurables en puissance seulement, com-

prenant vn rectangle rationel ſont compoſées, la toute ſera irrationelle : & ſoit icelle appellee bimedialle premiere.



Soient compoſées deux mediales AB & BC commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel, trouuees par la 28. prop. 10. Ie dis que la toute AC eſt irrationelle.

Car puis que par la 1. prop. 6. comme AB eſt à BC, ainſi le rectangle compris ſous AB, BC eſt au quarré de BC; & que AB, BC ſont incommenſurables en longitude, par la 10. prop. de ce liure, iceluy rectangle de AB, BC ſera auſſi incommenſurable au quarré de AB. Mais le rectangle de AB, BC eſt commenſurable à deux fois iceluy: & au quarré de BC eſt commenſurable le compoſé des quarrez d'icelles AB, BC: (car puiſque AB, BC ſont commenſurables en puiſſance, leurs quarrez ſeront commenſur. & partant le compoſé d'iceux quarrez ſera auſſi commẽſurable au quarré de BC par la 16. prop. 10.) Donc le compoſé des deux quarrez de AB, BC ſera incommenſurable à deux fois le rectangle compris d'icelles lignes AB, BC par la 14. prop. 10. Parquoy le compoſé d'iceux deux quarrez & rectangles, c'eſt à dire le ſeul quarré de AC, qui leur eſt egal par la 4. prop. 24 ſera auſſi incommenſurable à deux fois le rectangle de AB, BC par la 17. prop. 10. Mais à deux

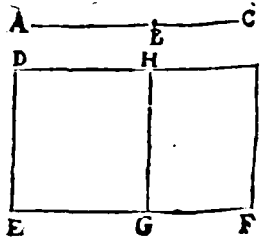
fois iceluy rectangle de AB, BC est commensurable vn seul rectangle d'icelles AB, BC : donc par la 13. prop. 10. le quarré de AC sera incommensurable au rectangle compris sous AB, BC : & iceluy rectangle estant rationel par l'hypothese, iceluy quarré de AC sera irrationel par la 10. def. 10. & pource la ligne AC sera aussi irrationelle par la 11. def. 10. Et icelle ligne soit appellée bimediale premiere. Si donc deux lignes medialles comm. en puissance seulement, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit $AB\sqrt{\sqrt{54}}$, *&* $BC\sqrt{\sqrt{24}}$: *La toute* AC *sera donc* $\sqrt{\sqrt{54}+\sqrt{\sqrt{24}}}$, *irrationelle nommee bimediale premiere.*

THEOR. 27. PROP. XXXIX.

Si deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial sont composées, la toute sera irrationelle : & soit icelle appellée bimediale seconde.



Soient composées les deux mediales AB & BC commens. en puissance seulement, comprenãt vn rectang. medial, trouuees par la 29. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

Car soit vne ligne rationelle proposee DE, sur laquelle

laquelle soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AC, & le rectangle DG egal au compoſé des quarrez de AB & BC par la 45. prop. 1. Et d'autant que par la 4. prop. 2. le quarré de AC, c'eſt à dire le rectangle DF, eſt egal aux deux quarrez de AB, BC auec deux fois le rectangle d'icelles AB, BC: le rectangle HF ſera egal à deux fois le rectangle de AB, BC: & puis que par l'hypotheſe le rectangle de AB, BC, eſt medial, par le coroll. de la 24. prop 10. le double rectangle de AB, BC, qui luy eſt commenſurable, c'eſt à dire le rectangle HF, ſera auſſi medial. Derechef, puis que les quarrez des mediales AB, BC ſont commenſ. le compoſé d'iceux, c'eſt à ſçauoir le rectangle DG, ſera auſſi commenſurable à vn chacun d'iceux par la 16. prop. 10. Mais chacun d'iceux quarrez des mediales AB, BC, eſt medial: Donc par le coroll. de la 24. prop. 10. le rectangle DG ſera auſſi medial: Ainſi les deux rectangles DG & HF eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationelle DE, (car GH eſt egale à la rationelle DE,) leurs autres coſtez EG & FG ſeront rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à DH par la 25. propoſi. 10. Maintenant le rectangle de AB & BC eſt au quarré de BC comme AB eſt à BC, par la 1. prop. 6. c'eſt à dire incommenſurable par la 10. prop. 10. & partant le double du rectangle de AB & BC ſera auſſi incommenſ. au quarré de BC: & les deux quarrez de AB & BC eſtans commenſurables entr'eux, les deux enſemble ſeront commenſurables au ſeul de BC, par la 16 prop. 10. & par la 14. prop 10. les deux quarrez de AB & BC ſeront incommenſurables à deux fois le rectangle de AB & BC: & par conſequent

auſſi leurs egaux rectangles DG & HF : & par la 1.p.6. & 10.p.10. EG & FG lignes rationelles ſeront incommenſurables en longitude : elles ſeront donc commenſurables en puiſſance ſeulement ; (car autrement elles ne ſeroient rationelles ſi elles eſtoient incommenſurables,) & par la 37. prop 10. la toute compoſee EF ſera irrationelle : & le rectangle DF ſera irrationel : car s'il eſtoit rationel la ligne DE eſtant rationelle, il faudroit par la 21. prop. 10. que l'autre coſté EF fut auſſi rationel, ce qui n'eſt pas : DF eſt donc irrationel : & partant auſſi irrationel ſon egal quatré de AC ; & par conſequent la ligne AC irrationelle, qui ſera appellee bimediale ſeconde. Si donc deux mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par cecy que le rectangle compris d'vne ligne rationelle & d'une irrationelle, eſt auſſi irrationel. Car il a eſté demonſtré que le rectangle DF compris de la rationelle DE, & irrationelle EF, ne peut eſtre rationel.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{\sqrt{18}}$, & BC $\sqrt{\sqrt{8}}$: La toute AC ſera $\sqrt{\sqrt{18}+\sqrt{\sqrt{8}}}$, qui eſt irrationelle, appellee bimediale ſeconde.

THEOR. 28. PROP. XL.

Si on adiouſte enſemble deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle me-

dial, mais le composé de leurs quarrez soit rationel; la toute sera irrationelle: & soit icelle appellee ligne majeure.

Soient assemblees, les deux lignes AB & BC incommensur. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel, trouuees par la 34. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationelle.



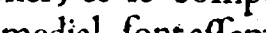
Car d'autant que le rectangle compris sous AB & BC est posé medial, deux fois le mesme rectangle sera aussi medial par le corollaire de la 24. prop.10. & partant irrationel. Mais par l hypothese le composé des quarrez de AB & BC est rationel: partant incommensurable à deux fois le rectangle de AB & BC par la 10.def.10. Et par la 17.prop.10.le composé des deux rectangles, & des deux quarrez (qui est le quarré de AC par la 4.prop.2) sera incommens. au composé des deux quarrez de AB & BC, qui est rationel: partant le quarré de AC sera irrationel, & son costé AC aussi irrationel; lequel sera appellé ligne Majeure. Parquoy si on adiouste deux lignes droictes incommensurables, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Soit AB $\sqrt{(18+\sqrt{216})}$, *& BC* $\sqrt{(18-\sqrt{216})}$: *la toute AC sera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{216})}+\sqrt{(18-\sqrt{216})}$, *qui est irrationelle nommee ligne majeure.*

THEOR. 29. PROP. XLI.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial, sont assemblees; la toute sera irrationelle: & soit icelle appellee ligne pouuant vn rationel, & vn medial.



Soient composées les deux lignes AB & BC, telles que demande la propos. & qu'enseigne à trouuer la 31. prop. de ce liure. Ie dis que la toute AC est irrationelle.

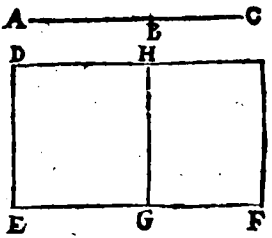
Car puis que le composé des quarrez de AB & BC est medial, & leur rectangle rationel; deux fois icelluy rectangle sera aussi rationel, & incommensurable au composé des quarrez de AB & BC, lequel estant medial, par la 17. prop. 10. le composé des deux quarrez, & des deux rectangles, sçauoir le quarré de AC par la 4. prop. 2. sera incommens. à deux fois le rectangle de AB & BC, lequel est rationel: Ainsi par la 10. def. 10. le quarré de AC sera irrationel: & par consequent la ligne AC aussi irrationelle. laquelle sera appellee ligne pouuant vn rationel & vn medial. Parquoy si deux lignes droictes incommensurables en puissance, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Soit AB √(√108+√72), & BC √(√108—√72) : La toute AC sera donc √(√108+√72)+√(√108--√72).

THEOR. 30. PROP. XLII.

Si deux lignes droictes incommensurables en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial, sont composées ; la toute sera irrationnelle : Soit icelle appellee ligne pouuant deux mediaux.



Soient composées les deux lignes AB & BC, telles que demande la prop. & qu'enseigne à trouuer la 36. prop. 10. Ie dis que la toute AC est irrationnelle.

Soit exposee la rationnelle DE, sur laquelle soit faite mesme construction qu'en la 39. prop. 10. sçauoir que le rectangle DF soit egal au quarré de AC: DG aux deux quarrez de AB & BC, lequel sera medial, comme le composé d'iceux quarrez, & incommens. au rectangle H F, egal à deux fois le rectangle de AB & BC, aussi medial, ainsi qu'il a esté

demonſtré en la 39. prop. 10. & par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. EG & GF ſeront auſſi incommenſurables en longitude. Mais les deux rectangles DG & HF eſtans mediaux, & appliquez ſur la rationelle DE, feront les deux autres coſtez EG & FG rationnaux par la 23. prop. 10. Ainſi EG & FG ſeront rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 37. prop. 10. la toute EF ſera irrationelle. Mais DE eſtant rationelle, le rectangle DF ſera irrationel par le coroll. de la 39. prop. 10. Partant la ligne qui peut iceluy rectangle, ſçauoir AC ſera irrationelle: laquelle on appellera ligne pouuant deux mediaux. Si donc deux lignes droictes incommenſurables en puiſſance, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

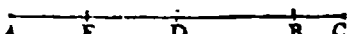
SCHOLIE.

Soit $AB\sqrt{(\sqrt{48}+\sqrt{24})}$ *&* $BC\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$. *Donc la toute* AC *ſera* $\sqrt{(48+\sqrt{24})}+\sqrt{(\sqrt{48}-\sqrt{24})}$.

LEMME I.

Si vne ligne droicte eſt couppee en deux inegalement en vn poinct, & derechef en deux inegalemẽt en vn autre poinct, & que les parties de l'vne des diuiſions ſoient inegales aux parties de l'autre diuiſion, chacune à la ſienne: les quarrez des deux parties de la plus inegale diuiſion ſeront enſemble plus grands que les quarrez des parties de la moins inegale.

Soit la ligne droicte AC diuiſee inegalement en B: & encores inegalement en E, & les premieres parties



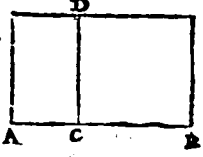
AB, BC soient plus inegales ques les posterieures CE, AE: (c'est à dire que AE soit plus grande que BC.) Ie dis que les quarrez de AB & BC, sont plus grands ensemble que ceux de AE & EC ensemble.

Car si AC est couppee en deux egalement en D; d'autant que AB, & BC sont plus inegales que CE, AE, & que AE est plus grande que BC, il appert que ED sera plus petite que BD: or par la 5. p. 2. le rectangle de AB & BC, auec le quarré de BD, est egal au quarré de DC: Item le rectangle de AE & EC, auec le quarré de DE, est aussi egal au quarré de DC: partant le rectangle de AE & EC auec le quarré de DE, est egal au rectangle de AB & BC, auec le quarré de BD. Et en ostant les quarrez inegaux des lignes inegales DE, BD, le rectangle de AE & EC demeurera plus grand que le rectangle de AB & BC: & partant son double sera aussi plus grand que le double du rectangle de AB & BC. Maintenant les deux quarrez de AB & BC, auec deux fois le rectangle de AB & BC, sont egaux au quarré de AC par la 4. p. 2. auquel sont aussi egaux les deux quarrez de AE & EC, & deux fois le rectangle de AE & EC: & par consequent les composez des quarrez & rectangles sont egaux entr'eux: mais les deux rectangles de AE & EC, ont esté demonstrez plus grands que les deux de AB & BC: partant les deux quarrez de AB & BC seront plus grands que les deux quarrez de AE & EC: Ce qui estoit proposé.

LEMME 2.

Vne figure rationelle excede vne figure rationelle, d'vne figure rationelle.

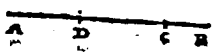
Soient les deux figures rationelles AE & AD, estant AE plus grande que AD de CE: Ie dis que CE est figure rationelle.



Car AE & AD estans rationelles, elles seront aussi commens. & par la 16. prop. 10. AD & CE seront commens. entr'elles, & par consequent rationelles.

THEOR. 31. PROP. XLIII.

La ligne binome ne peut estre diuisee en ses noms, qu'en vn poinct seulement.



Soit le binome AB diuisé en ses noms au poinct C: tellement que AC, CB, soient rationelles commensurables en puissance seulement, comme veut la 37. prop. Ie dis qu'on ne peut diuiser AB en ses noms en vn autre poinct, sçauoir est que les lignes soient rationelles commens. en puissance seulement.

Car s'il se peut faire, soit diuisee derechef AB en ses noms au poinct D. Or il appert que AB n'est couppee en deux egalement és poincts C & D. Car AC & CB, ou AD & DB, seroient commens. en longitude contre l'hypothese: il faut donc que AB soit couppée inegallement esdits poinct C & D; & que les parties AD & DB soient inegalles aux parties AC & CB, chacune à la sienne: car si elles estoient egales, icelle AB seroit diuisee à la seconde diuision au mesme poinct qu'à la premiere. Si donc AD & DB sont parties moins inegales que

AC & CB, par le lemme qui suit la 42. prop. 10. le composé des quarrez de AC & CB sera plus grand que le composé des quarrez de AD & DB: Et d'autant qu'iceux composez sont rationnaux (car ce sont quarrez construicts sur lignes rationelles) leurs excez sera aussi rationel par le lemme preced. Or est il que le composé des quarrez de AC & CB, auec deux fois le rectangle de AC & CB est egal au composé des quarrez de AD & DB, auec deux fois le rectangle de AD & DB: (car iceux sont chacun egaux au quarré de AB par la 4. prop. 2.) Il faudra donc que d'autant que les quarrez de AC & CB, sont plus grands que les quarrez de AD & DB, d'autant les rectangles de AC, CB soient plus petits que les rectangles de AD & DB: mais il a esté demonstré que l'excez des quarrez est rationel: donc l'excez des rectangles sera aussi rationel: (puis que ces excez sont egaux) qui est contre la 27. prop. 10. Car iceux rectangles par la 22. prop. 10. sont mediaux, d'autant que les lignes AC & CB: ou AD & DB, sont rationnelles commens. en puissance seulement. Donc le binome AB n'a pû estre diuisé en ses noms qu'en C: car en quelque autre poinct qu'on le diuise, il s'ensuiura tousiours la mesme absurdité. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il est à notter qu'és cinq sortes de lignes irrationelles qui suyuent, iamais les deux noms d'icelles ne peuuent estre egaux: car comme il a esté dict cy-dessus, ils seroient commens. en longitude, & ils ont esté demonstrez incommensurables en long. faut aussi remarquer que quand on dict qu'icelles lignes ne peuuent estre diuisées en leurs noms qu'au poinct proposé, faut entendre que le contredisant ap-

portant vne autre diuiſion, les parties d'icelles doiuent eſtre inegales aux parties de la propoſee.

THEOR. 32. PROP. XLIV.

La bimediale premiere eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la bimediale premiere AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, tellement que AC & BC ſoient mediales commenſ. en puiſſance ſeulemẽt,



comprenant vn rectangle rationel, comme veut la 38. prop. 10 Ie dis qu'on ne la peut diuiſer en ſes noms en vn autre poinct.

Car s'il ſe peut faire, ſoit AB derechef diuiſee en D, ſçauoir que AD & DB ſoient mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel. Nous demonſtrerons tout ainſi qu'en la precedente propoſition, que deux fois le rectangle de AD & DB ſeront autant plus grands que deux fois le rectangle de AC & BC, que les quarrez de AD & DB ſont plus petits que les quarrez de AC & BC : Or tous ces rectangles ſont rationnaux par l'hypotheſe. Donc leurs excez ſera rationel par le lemme qui precede la 43. prop. 10. & par conſequent l'excez des quarrez ſera auſſi rationel, ce qui eſt abſurde : car iceux quarrez, eſtans deſcrits ſur lignes mediales, ſont mediaux, ainſi qu'il appert par la 16. propoſition 10. & coroll. de la 24. propoſition 10. partant l'excez d'iceux ne ſera rationel par la 27. prop. 10. Donc la ligne bime-

diale premiere AB ne pouuoit estre diuisee en ses noms sinon au poinct C. Ce qu'il falloit demonstrer.

LEMME.

Si vne ligne droicte est couppee inegallement, les quarrez des deux parties seront plus grands ensemble que deux fois le rectangle d'icelles parties.

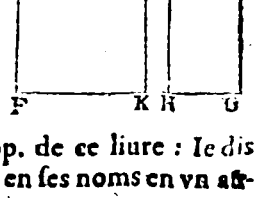


Soit la ligne droicte AB couppee inegallement en C: Ie dis que les quarrez de AC, CB, sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB.

Car ayant pris CD egale à la moindre partie CB, par la 7. prop. 2 les quarrez de AC, CD, c'est à dire de AC, CB, sont egaux à deux fois le rectangle de AC, CD, (c'est à dire de AC, CB) auec le quarré de AD: & partant les deux quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle d'icelles AC, CB: ce qui estoit proposé.

THEOR. 33. PROP. XLV.

La bimediale seconde, est diuisee en ses noms en vn poinct seulement.



Soit la bimediale seconde AB diuisee en ses noms au poinct C, en sorte que AC & BC soient mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, comme veut la 37. prop. de ce liure: *Ie dis* qu'elle ne peut estre diuisee en ses noms en vn au-

tre poinct que C.

Car si faire se peut qu'elle soit encore diuisee en AD & DB, en sorte que dessus : & soit vne ligne rationelle proposee EF, sur laquelle (par la 44. prop. 1 soit construit le rectangle EG, egal au quarré de AB. Item EH egal aux deux quarrez de AC, CB : le reste IG sera egal à deux fois le rectangle de AC, CB, puis que par la 4. prop. 2. le quarré de AB est egal aux deux quarrez de AC, CB, auec deux fois le rectangle d'icelles AC, CB. En la mesme maniere si sur EF on applique EK égal aux quarrez de AD, DB : le reste LG sera egal à deux fois le rectangle de AD, DB. Et pour autant que les quarrez de AC, CB, sont inegaux aux quarrez de AD, DB : leurs egaux rectangles EH, EK seront aussi inegaux : & partant les lignes FH, FK, seront inegales. Et derechef puis que les quarrez de AC, CB sont plus grands que deux fois le rectangle de AC, CB par le lemme precedent ; EH sera aussi plus grand que IG : & partant EH plus grand que la moitié de EG : & consequemment la ligne FH plus grande que la moitié de la ligne FG. Nous demonstrerons par mesmes raisons que FK, est aussi plus grande que la moitié de FG. Donc les parties FH & HG, sont inegales aux parties FK, KG, chacune à la sienne. Et pource que AC, CB sont mediales, & commensurables en puissance ; les quarrez d'icelles seront aussi mediaux & commensurables ; & par la 16. prop. 10. le composé d'iceux sera aussi commensurable à vn chacun d'eux ; lesquels estans mediaux, leur composé, c'est à sçauoir le rectangle EH, sera aussi medial par le corol. de la 24. prop. 10. Par mesme raison EK sera

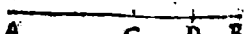
demonſtré medial: parquoy EH, EK appliquez ſur la rationelle EF, auront les coſtez FH, FK rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement à la rationele EF, par la 23. prop. 10. Pareillement, puis que le rectangle de AC, CB eſt poſé medial; le double d'iceluy, ſçauoir eſt IG, ſera auſſi medial par le corol. de la 24. prop. 10. & eſtant appliqué ſur la rationele HI, l'autre coſté HG ſera auſſi rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à icelle HI, par la 23. p. 10. Et puis que AC, CB ſont incommenſurables en longitude, & par la 1. prop. 6. comme AC eſt à CB, ainſi le quarré de AC eſt au rectangle de AC, CB: (car ils ont AC pour hauteur,) par la 10. prop. 10. le quarré ſera incommenſurable au rectangle. Mais au quarré de AC eſt commenſurable le compoſé des quarrez de AC CB; (car d'autant que AC, CB ſont commenſurables en puiſſance, & partant les quarrez d'icelles commenſurables, le compoſé d'iceux quarrez ſera auſſi commenſurable au quarré de AC, par la 16. prop. 10.) & le rectangle de AC, CB eſt commenſurable à ſon double. Donc auſſi le compoſé des quarrez de AC, CB, c'eſt à dire le rectangle EH, eſt incommenſurable au double du rectangle de AC, CB, c'eſt à dire à IG, par le ſcholie de la 14. prop. 10. & d'autant que par la 1. prop. 6. comme EH eſt à IG, ainſi FH eſt à HG, par la 10. prop. 10. icelles FH, HG ſeront incommenſurables en longitude. Mais elles ont eſté demonſtrees rationeles: Donc les lignes FH, HG ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement. Et par la 37. prop. 10. la toute FG ſera binome, & diuiſee en ſes noms au poinct H. En la meſme maniere nous demonſtre-

tons auſſi FG binome eſtre diuiſee en d'autres noms à vn autre poinct K; ce qui eſt abſurde: car par la 43.p.10. elle ne peut eſtre diuiſee en ſes noms qu'en vn ſeul poinct. Donc AB bimediale ſeconde ne peut eſtre diuiſee en ſes noms qu'au poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 34. PROP. XLVI.

La ligne majeure, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne majeure AB, diuiſée en ſes noms au poinct C, tellement que AC & BC ſoient incommenſurables en puiſſance: & le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: mais le rectangle compris d'icelles, medial, comme veut la 40.prop. de ce liure. Ie dis qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.



Car ſi faire ſe peut, qu'elle ſoit diuiſee en ſes noms en vn autre poinct D. Donc en quelque lieu que ſoit le poinct D, nous demonſtrerons tout ainſi qu'en la 45. p. de ce liure, que les compoſez des quarrez de AC & BC; & de AD & DB ont vn meſme excez que les doubles rectangles de AC, BC: & de AD, DB. Mais d'autant que les compoſez quarrez ſont rationaux par l'hypotheſe, & par conſequent leur excez rationel: il faudroit donc que l'excez des doubles rectangles (leſquels ſont mediaux par le corol. de la 24. prop. 10.) fut rationel; ce qui eſt contraire à la 27. prop. 10. Donc la ligne majeure AB, ne ſera diuiſee en ſes noms en autre poinct

qu'en C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 35. PROP. XLVII.

La ligne pouuant vn rationel & vn medial, eſt diuiſee en ſes noms; en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial AB, diuiſee en ſes noms au poinct C,



en ſorte que AB & BC ſoient incommenſurables en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit medial: mais le rectangle d'icelles, rationel, comme veut la 41. prop. 10. Ie dis qu'on ne pourra diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.

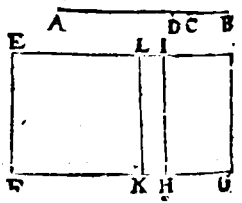
Car il s'enſuiuroit meſme abſurdité qu'en la precedente prop. ſçauoir que ſi on la diuiſoit encores au poinct D, il s'enſuiuroit comme là, que l'excez tant des quarrez, que des rectangles ſeroit rationel, & medial. Parquoy la ligne pouuant vn rationel, & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 36. PROP. XLVIII.

La ligne pouuant deux mediaux, eſt diuiſee en ſes noms en vn poinct ſeulement.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuiſee en ſes noms au poinct C, en ſorte que AC & BC ſoient incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial incomm. au compoſé de leurs quarrez auſſi medial, comme veut la 42. prop. 10. Ie dis

qu'on ne peut diuiſer icelle AB en ſes noms en vn autre poinct que C.



Car ſi faire ſe peut, qu'icelle AB ſoit encore diuiſee au poinct D: & ſur la rationele propoſee EF ſoit faite pareille conſtruction qu'en la 45 p. 10 ſçauoir eſt le rectangle EG egal au quarré de AB, & EH egal aux deux quarrez de AC & CB: & partant IG, egal au double du rectangle de AC & BC, (comme il a eſté demonſtré en ladite 45. p. 10.) & les deux rectangles EH & IG, qui ſont mediaux par la ſuſdite demonſtration, feront les lignes FH & HG rationeles: mais le compoſé des quarrez de AC & BC eſt incommenſurable au double de leur rectangle: (car par l'hypotheſe il eſt incommenſurable à iceluy rectangle de AC, CB,) partant auſſi les rectangles EG & EH ſeront incommenſurables. Ainſi les lignes rationeles FH & HG ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement: & par la 37 prop 10. AB ſera binome diuiſé en ſes noms au poinct H. Que ſi on veut dire que AB peut encore eſtre diuiſé en ſes noms au poinct D: il s'enſuiura, comme en icelle 45. prop. 10. que le binome FG, diuiſé en ſes noms au poinct H, ſe pourroit encore diuiſer en ſes noms au poinct K, contre la 42. prop. 10. Ainſi AB ne pouuoit eſtre diuiſee en ſes noms qu'au ſeul poinct C. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SECONDES DEFINITIONS.

Vne ligne rationele eſtant propoſee, & vn binome diuiſé en ſes noms; lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude:

1. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee: toute la ligne ſoit appellée Binome premier.

2. Mais ſi le plus petit nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée: toute la ligne ſoit appellée Binome ſecond.

3. Que ſi ny l'vn ny l'autre nom n'eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſée: toute la ligne ſoit appellée Binome troiſieſme.

Et lors que le plus grand nom peut plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude.

4. Si le plus grand nom eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee: toute la ligne ſoit appellee Binome quatrieſme.

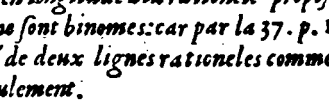
5. Mais si le plus petit nom est commensurable en longitude à la rationele proposee: toute la ligne est appellee Binome cinquiesme.

6. Que si ny l'vn ny l'autre nom n'est commensurable en longitude à la rationele proposee; la toute soit appellee Binome sixiesme.

Il n'est rien dit icy des lignes, desquelles les deux noms soient commensurables en longitude à la rationele proposee: parce que telles lignes ne sont binomes: car par la 37. p. 10. tout binome est composé de deux lignes rationeles commensurables en puissance seulement.

PROB. 13. PROP. XLIX. Six. 3.

Trouuer vn Binome premier.



Estans trouuez deux nombres quarrez AB, CB (comme nous auons enseigné au scholie 2. de la 29. prop. 10.) desquels l'excez AC ne soit quarré, à fin que AB, CB soient entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, & AB, AC ne soient ent'eux comme nombre quarré à nombre quarré; à vne rationele proposée D, soit pris EF commens. en longit. & icelles D & EF

ſeront rationeles commenſurables en longitude. En apres, par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit faict que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de FG. Ie dis que la toute EG eſt binome premier.

Car puis que les quarrez de EF, FG, qui ſont entr'eux comme les nombres AB, AC, ſont commenſurables par la 6 prop. 10. auſſi les lignes EF, FG ſeront commenſurables, au moins en puiſſance: Et d'autant que EF eſt rationele, auſſi FG ſera rationele. Mais pource que AB, AC ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré, les quarrez d'icelles rationeles EF, FG ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré; & partant les lignes EF, FG ſont incommenſurables en longitude par la 9. pr. 10. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 37. pr. 10. la toute EG ſera binome. Ie dis auſſi qu'il eſt premier. Car puis que les quarrez de EF, FG ſont entr'eux comme les nombres AB, AC: & AB eſt plus grand que AC, auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG: que ce ſoit donc du quarré de H: (iceluy quarré ſera trouué par le lemme qui ſuit la 14. prop. 10.) Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG: par conuerſion de raiſon comme AB à CB, ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré. donc le quarré de EF ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes EF, H ſont commenſ. en longitude par la 9. pr. 10. Veu donc que le plus grand nom EF eſt commenſ. en longit. à la rationele D, & peut plus que le moin-

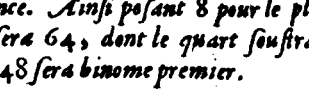
dre nom FG du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude; EG ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Nous auons donc trouué vn binome premier: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Soit la rationele propoſee D 8, & EF 6; faiſant donc que comme AB 9 eſt à AC 5, ainſi 36 quarré de EF, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √20: & partant la toute EG, ſera 6+√20, qui eſt binome premier: car le plus grand nom eſt commenſurable à nombre abſolu, qui tient icy lieu de rationele, & peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt commenſurable en long. à icelluy plus grand nom. Iceluy binome premier ſera trouué plus briefuement que deſſus, poſant quelconque nombre pour le plus grand nom, & pour le moindre la racine quarrée des trois quarts de ſa puiſſance. Ainſi poſant 8 pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 64, dont le quart ſouſtrait reſte 48; & partant 8+√48 ſera binome premier.

PROB. 14. PROP. L.

Trouuer vn Binome ſecond.



Eſtans trouuez les deux nõbres quarrez AB, CB, comme en la prop. precedente, & pris FG commenſurable en longitude à vne rationele propoſée D: icelles D & FG ſeront rationeles commenſurables: puis apres par le corol. de la 6. pr. 10. ſoit fait que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG ſoit au quarré de EF. Ie dis que EG eſt binome ſecond.

Car on demonſtrera premierement tout ainſi qu'en la precedente que EG eſt binome. Et puis que comme le nombre AC eſt au nombre AB, ainſi le quarré de FG eſt au quarré de EF, en changeant comme AB à AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de FG. Mais AB eſt plus grand que AC: Donc auſſi le quarré de EF ſera plus grand que le quarré de FG, & ſoit du quarré de H. Nous demonſtrerons maintenant comme en la precedente prop. que H & EF ſont commenſurables en longitude. Et partant que le plus grand nom EF, peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude, & le moindre nom FG commenſurable en longitude à la rationele D: & par les ſec. def. EG, ſera binome ſecond. Nous auons donc trouué vn binome ſecond, ainſi qu'il eſtoit requis.

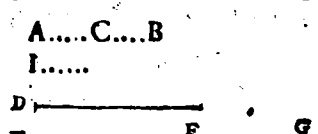
SCHOLIE.

La rationele propoſee D ſoit 7, & FG 5: faiſant donc que comme AC 3 eſt à AB 9, ainſi 25 quarré de FG ſoit au quarré de EF; icelle EF ſera √45: & partant la toute EG ſera √45+5, qui eſt binome ſecond: pource que le plus grand nom d'iceluy peut plus que le moindre d'vn quarré, dont la racine eſt commenſ. en longitude à iceluy plus grand nom, & que le moindre nom eſt auſſi commenſur. au nombre rationel propoſé. Or pour trouuer plus briefuement que deſſus iceluy binome ſecond, il faut prendre pour le moindre nom quelconque nombre, & au quarré d'iceluy adiouſter le tiers, & la racine quarree de ce qui en viendra ſera le plus grand nom. Ainſi prenant pour le moindre nom 6, ſon quarré eſt 36, dont le tiers luy eſtant adiouſté ſera 48: & partant √48+6 ſera binome ſecond.

PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troiſieſme.

Eſtans trouuez deux nombres AB, CB comme en la 49. prop. 10. ſoit pris vn autre nombre I qui ne ſoit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qui ſe fait prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car puis qu'il n'eſt quarré, il ne ſera au quarré AB, comme nombre quarré à nombre quarré. Derechef, puis qu'il eſt non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par le binaire: & partãt il ne tombera pas entre I & AC vn moyen proportionel, comme nous auons demonſtré au ſcholie de la 8 p. 8. Ils ne ſeront donc pas plans ſemblables: & partant ne ſeront entr'eux comme nombres quarrez.) & apres auoir expoſé la rationele D, par le corol. de la 6. p. 10. ſoit fait que comme I à AB, ainſi le quarré de D ſoit au quarré de EF: par ainſi les quarrez de D & EF, eſtans entr'eux comme nombre à nombre, ſeront commenſurables par la 6. prop. 10. & partant les lignes D & EF le ſeront auſſi, au moins en puiſſance. Parquoy D eſtant rationele, EF le ſera auſſi. Mais parce que I n'eſt pas à AB, c'eſt à dire le quarré de D au quarré de EF, comme nombre quarré à nombre quarré: D & EF ſeront incommenſurables en longitude par la 9. pr. 10. Derechef ſoit fait par le ſuſdit corol. que comme



PROB. 15. PROP. LI.

Trouuer vn binome troisiesme.

Estans trouuez deux nombres AB, C, comme en la 49 prop. 10. soit pris vn autre nombre: qui ne soit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qui se fait prenant I nombre non quarré prochainement plus grand que AC. Car s'il n'est quarré, il ne sera au quarré AB, comme nombre quarré à nombre quarré. Dereches qu'il est non quarré prochainement plus grand que AC, il differe d'iceluy par l'vnité, ou par plus: parquoy il ne tombera pas entre I & AC comme proportionel, comme nous auons demonstré en la 8 p. 8. Ils ne seront donc pas plus grands que de la 8 p. 8. Ils ne seront donc pas plus grands que sibles: & partant ne seront entr'eux comme nombres quarrez.) & apres auoir exposé la raison de le corol. de la 6. p. 10. soit fait que comme I à AC, ainsi le quarré de D soit au quarré de E: les quarrez de D & EF, estans entr'eux comme nombre à nombre, seront commensurables par la 6 prop. 10. & partant les lignes D & EF seront au moins en puissance. Parquoy D sera rationele, EF le sera aussi. Mais parce que I n'est pas à AC, c'est à dire le quarré de D au quarré de EF comme nombre quarré à nombre quarré: D & EF seront incommensurables en longitude par la 9 prop. 10. fait par le susdit corol. que ces

AB est à AC, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG: & par la 6. prop. 10 iceux quarrez de EF, FG, estans comme nombre à nombre, seront commensurables entr'eux: & partant les lignes EF, FG aussi commensurables, au moins en puissance: & EF estant rationele, FG le sera aussi. Et d'autant que AB n'est pas à AC, c'est à dire le quarré de EF au quarré de FG, comme nombre quarré à nombre quarré, les lignes EF, FG seront incommensurables en longitude par la 9. prop. 10. & partant icelles EF, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. la toute EG sera binome. Ie dis aussi qu'elle est binome troisiesme. Car d'autant que comme I est à AB, ainsi le quarré de D est au quarré de EF; & comme AB à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de FG: par raison egale comme I sera à AC, ainsi le quarré de D sera au quarré de FG. Mais I n'est pas à AC, comme nombre quarré à nombre quarré: donc les quarrez de D & FG ne seront aussi comme nombre quarré à nombre quarré: & partant les lignes D & FG, seront incommensurables en longitude par la 9. p. 10. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF est au quarré de FG; & AB est plus grand que AC, aussi le quarré de EF sera plus grand que le quarré de FG: soit donc plus grand du quarré de H. Maintenant nous demonstrerons comme en la 49. prop. de ce liure, que EF & H sont commensurables en longitude. Donc le plus grand nom EF, peut plus que le moindre FG du quarré de H, qui luy est commensurable en longitude, & l'vne ny l'autre d'icelles EF, FG n'est commensurable en longitude à la proposee ratio-

nele D, comme il a esté demonstré: partant EG sera binome troisiéme par les secondes definitions. Nous auons donc trouué vn binome troisiesme. Ce qu'il falloit faire.

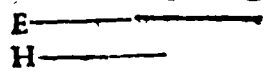
SCHOLIE.

La rationele proposée D soit 6: faisant donc que comme 16, est à AB 9, ainsi 36 quarré de D soit au quarré de EF; icelle EF sera √54: & faisant que comme AB 9 est à AC 5, ainsi 54 quarré de EF soit au quarré de FG; icelle FG sera √30: & partant la toute EG sera √54+√30, qui est binome troisiesme, parce que l'vn ny l'autre nom est commensurable en longitude au nombre rationel proposé, & que le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré, duquel la racine est commensurable en longitude au plus grand nom. Or pour trouuer ce binome plus promptement que dessus, on posera la racine quarree de quelconque nombre non quarré pour le plus grand nom, & la racine quarree des trois quarts du mesme nombre pour le moindre nom. Ainsi posant pour le plus grand nom √20, l'autre nom sera √15: & partant √20+√15 sera binome troisiesme.

PROB. 16. PROP. LII.

Trouuer vn binome quatriesme.

Estans trouuez deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB, ne soit à l'vn ny à l'autre comme nombres quarrez, (suiuant ce que nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. prop. de ce liure) soit exposé la rationele D, & pris EF commens. en long. à icelle rationele D; & par consequent EF sera



auſſi rationele: Et ayant conſtruit le reſte comme en la 49. p. 10. Nous demonſtrerons comme là que la toute EG eſt binome. Item que le quarré de EF peut plus que le quarré de FG du quarré de H; & que par conuerſion de raiſon, comme AB eſt à CB, ainſi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'eſt à CB comme nombre quarré à nombre quarré: Donc le quarré de EF ne ſera au quarré de H, comme nombre quarré à nombre quarré: & par la 9. p. 10. les lignes EF & H, ſont incommenſ. en longitude: parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre nom FG du quarré de H, qui luy eſt incommenſurable en longitude, & qu'icelle EF eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee D: EG ſera binome quatrieſme par les def. ſecondes. Nous auons donc trouué vn binome quatrieſme: Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele expoſee D ſoit 8, & EF 6: faiſant donc que comme AB 9 eſt AC 6, ainſi le quarré de EF, ſçauoir 36, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera trouuee de √24: & partant la toute EG ſera 6+√24, qui eſt binome quatrieſme: pource que le plus grand nom eſt commenſurable en longitude au nombre rationel propoſé, & qu'iceluy nom peut plus que le moindre nom d'vn quarré dont la racine eſt incommenſurable en longitude à iceluy plus grand nom. On trouuera ce binome plus promptement que deſſus poſant pour le plus grand nom quelconque nombre: & pour le moindre la racine quarree de la moitié du quarré d'iceluy. Ainſi poſant 6 pour le plus grand nom, ſon quarré ſera 36, dont la moitié ſera 18, & partant 6+√18 ſera binome quatrieſme.

PROB. 17. PROP. LIII.

Trouuer vn binome cinquieſme.

Eſtans trouuez les deux nombres AC, CB comme en la precedente prop. & fait la conſtruction comme en la 50 p. on demonſtrera comme en ladite 50. prop. que EG eſt binome. Item que le quarré de EF eſt plus grand que le quarré de FG du quarré de H: Et comme en la precedente, qu'icelles EF & H ſont incommenſurables en longitude: & partant par les ſecondes def. EG eſt binome cinquieſme. Nous auons donc trouué vn binome cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

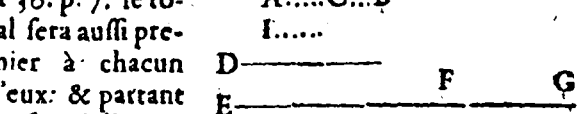
La rationele propoſee D ſoit 7, & FG 6: donc faiſant que comme AC 6 eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF, ſçauoir eſt 36, ſoit au quarré de EF: icelle EF ſera trouuee de √54: partant la toute EG ſera √54 + 6, qui eſt binome cinquieſme: car le moindre nom eſt commenſ. en longitude au nombre rationel propoſé, & le plus grand nom peut plus que le moindre d'vn quarré dont la racine eſt incommenſ. en long. à iceluy plus grand nom. Pour autrement trouuer tel bineme, ſoit poſé pour le moindre nom quelconque nombre, & la moitié du quarré d'iceluy eſtant adiouſtee au meſme quarré, la racine du tout ſera le plus grand nom: Ainſi poſant 4 pour le moindre nom, ſon quarré ſera 16, dont la moitié 8 luy eſtant adiouſtee ſerone 24, dont la racine ſera √24; & partant √24 + 4 ſera binome cinquieſme.

PROB. 18. PROP. LIV.

Trouuer vn Binome ſixieſme.

Soient trouuez deux nombres AC, CB, tels que

le composé d'iceux AB ne soit à l'vn ny à l'autre comme nombre quarré à nombre quarré: (ce qu'on fera adioustant ensemble deux nombres premiers: Car par la 30. p. 7. le total sera aussi premier à chacun d'eux: & partant ne sera à l'vn ny à l'autre comme



nombre quarré à nombre quarré par les choses demonstrées à la fin du 8. liure) puis soit pris quelque autre nombre non quarré I, afin qu'iceluy ne soit à AB, ny à AC, comme nombre quarré à nombre quarré. En apres, soit vne rationele proposee D: & par le corol de la 6. p. 10 soit fait que comme I est à AB, ainsi le quarré de D soit au quarré de EF: & ayãt acheué comme en la 51. pr. 10. nous demonstrerons comme là que EG est binome: Item que D & FG sont incommens. en longitude, & que le quarré de EF est plus grand que le quarré de FG du quarré de H. Finalement nous demonstrerons comme en la 49. pr. que par conuersion de raison, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais AB n'est pas à CB, comme nombre quarré à nombre quarré, ny par consequent le quarré de EF au quarré de H: donc par la 9. pr. 10. les lignes droictes EF & H, seront incommens. en longitude. Parquoy puis que le plus grand nom EF peut plus que le moindre FG, du quarré de la ligne H, qui luy est incommens. en longitude: & que l'vn ny l'autre d'iceux noms n'est commens. en longitude à l'exposee rationele D, par les secondes def. EG sera bi-

PROB. 17. PROP. LII.

Trouuer vn binome cinquiesme.

Estans trouuez les deux nombres AC, C
me en la precedente prop. & fait la co
comme en la 30 p. on demonstrera comme
se 10. prop. que EG est binome. Item que
de EF est plus grand que le quarré de FG
de H: Et comme en la precedente, qu'icelle
I sont incommensurables en longitude, &
par les secondes def. EG est binome cin
Nous auons donc trouué vn binome cin
Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele proposee D soit 7, & FG 6, ainsi
que comme AC 6 est à AB 9, ainsi le quarré de
36, soit au quarré de EF: icelle EF sera √
sera la toute EG sera √54+6, *qui est binome*
re: car le moindre nom est commens. en longitude
rationel proposé, & le plus grand nom peut
uenir à son quarré dont la racine est semblable
celuy plus grand nom. Pour autrement trouu
soit posé pour le moindre nom quelconque nom
re du quarré d'iceluy est aduiuste au quarré
racine du tout sera le plus grand nom. Et
le moindre nom, son quarré sera 16, dont la
ant adiouste ce seront 24, dont la racine sera
√54+4 *sera binome cinquiesme.*

PROB. 18. PROP. LIII.

Trouuer vn Binome sixiesme.

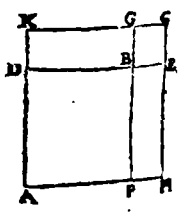
Soient trouuez deux nombres AC, C

nome sixiesme. Nous auons donc trouué vn binome sixiesme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele proposee D soit 6: faisant que comme 16 est à AB 8, ainsi le quarré de D, c'est à sçauoir 36, au quarré de EF: icelle EF sera trouuee de √48: & faisant que comme AB 8 est à AC 5, ainsi 48 quarré de EF soit au quarré de FG: icelle FG sera trouuee de √30: partant la toute EG sera √48+√30, qui est binome sixiesme: car l'vn & l'autre nom est incommensurable en longitude au nombre rationel proposé, & le plus grand nom peut plus que le moitié d'vn quarré, dont la racine est incommens. à iceluy plus grand nom. Or pour trouuer plus promptement que dessus tel binome il n'y a qu'à prendre les racines quarrees de deux nombres non quarrez, dont l'vn soit double de l'autre: Ainsi pesant √12 pour le plus grand nom, l'autre sera √6; & partant √12+√6 sera binome sixiesme.

LEMME.



Les quarrez AB, BC estans conioincts à l'angle B, tellement que les costez DB, BE facent vne seule ligne droicte DE; & par consequent les costez FB, BG aussi vne seule ligne droicte FG: estant achevé le parallelogramme HK: Ie dis qu'iceluy est quarré; & le rectangle FE moyen proportionnel entre les quarrez AB, BC; & DC moyen proportionnel entre les quarrez AC, BC.

Car d'autant que DB est egale à FB, & BE à BG: la toute DE sera egale à la toute FG. Mais par la 34. pr. 1. la ligne DE est egale à l'vne & à l'autre d'icelles AH,

KC: & FG à AK, HC: & par conſequent chacune d'icelles AH, KC eſt egale à l'vne & à l'autre AK, HC: donc le parallelogramme HK eſt equilateral. Mais par la 29. prop. 1. il eſt auſſi rectangle, & partant quarré. Derechef, puis que DB, BE, ſont egales à FB, BG, chacune à ſa correſpondante, comme DB eſt à BE, ainſi FB à BG. Mais par la 1. prop. 6. comme DB à BE, ainſi AB à FE: & comme FB à BG, ainſi FE à BC: donc comme AB à FE, ainſi FE à BC: & partant FE eſt moyen prop. entre AB, BC. Et finalement, veu que comme AD à DK, ainſi KG à GC, icelles eſtans egales chacune à la ſienne: en compoſant comme AK à DK, ainſi KC à GC. Mais comme AK à DK, ainſi AC à DC: & comme KC à GC, ainſi DC à BC par la 1. prop. 6. Donc comme AC à DC, ainſi DC à BC: & par conſequent DC eſt moyen prop. entre AC, BC.

Or voila comme Commandin propoſe & demonſtre ce lemme: mais Clauius le propoſe ainſi.

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra, le rectangle contenu ſous les parties, eſt moyen proportionnel entre les quarrez d'icelles. Item le rectangle contenu ſous la toute, & vne des parties, eſt moyen prop. entre le quarré de la toute, & le quarré de ladite partie.

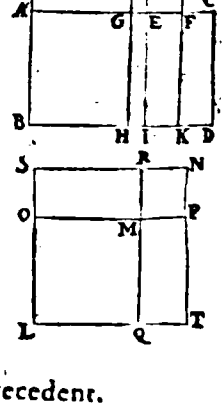
Ce qui eſt la meſme choſe que deſſus.

THEOR. 37. PROP. LV. Six. 4.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier, la ligne pouuant iceluy rectangle eſt binome.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome premier AC: ie dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt l'irrationelle appellee binome.

Car d'iceluy binome AC, le plus grand nom ſoit AE: donc par la def. AE, EC ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement, & AE pourra plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longit. & auſſi AE ſera commenſ. en longit. à la rationelle propoſee AB. Soit couppee EC en deux egalement en F. Donc puis que AE peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en long. ſi ſur icelle AE on applique vn rectangle egal au quart du quarré de EC, c'eſt à dire au quarré de EF, & defaillant d'vne figure quarree, il diuiſera icelle AE en parties commenſ. en long. par la 18. prop. 10. ſoient donc icelles parties AG, GE: & par les poincts G, E, F ſoient menees GH, EI, FK paralleles à icelles AB CD: puis par la 14. pr. 2. ſoient deſcrits les quarrez LM, MN egaux aux deux rectangles AH, GI, & diſpoſez en ſorte que OM, MP facent vne ligne droicte: puis ſoit acheué le rectangle ST, lequel ſera quarré par le lemme precedent.



Maintenant, d'autant que par la conſtruction le rectangle de AG, GE eſt egal au quarré de EF: les lignes AG, EF, GE ſeront proport. par la 17. pr. 6. Donc par la 1. prop. 6. les rectangles AH, EK, GI

ſeront auſſi proportionnaux : parquoy EK ſera moyen porport. entre AH, GI, ou leurs egaux quarrez LM, MN. Mais par le lemme precedent OR eſt auſſi moyen prop. entre iceux quarrez LM, MN: donc OR, EK ſeront egaux. Mais par la 43. prop. 1. OR, QP ſont auſſi egaux : & par la 36. p. 1. EK eſt egal à FD: donc QP ſera auſſi egal à FD: & par conſequent tout le quarré LN egal à tout le rectangle AD : & par ainſi la ligne OP peut le rectangle AD. Ie dis donc qu'icelle OP eſt binome.

Car puis que AG, GE ont eſté demonſtrees commenſ. en longitude, la toute AE ſera auſſi commenſ. en longitude à chacune d'icelles par la 16. prop. 10. Mais AE eſt auſſi commenſ. en longitude à AB: donc par la 12. prop. 10. icelle AB eſt auſſi commenſ. en long. à chacune d'icelles AG, GE: & partant AB eſtant rationelle, AG, GE ſeront auſſi rationelles: & par la 20. prop. 10. les rectangles AH, GI contenus ſous icelles rationelles, ſeront rationaux: donc auſſi rationaux leurs egaux quarrez LM, MN : & par conſequent les lignes OM, MP ſeront auſſi rationelles. Et d'autant que AE eſt [illegible]m. en long. à EC, mais commenſ. à AG, & EC à ſa moitié EF, par le ſcholie de la 14. prop. 10. AG, EF ſeront incommenſ. en long. parquoy AH, EK qui ont meſme raiſon que AG, EF par la 1. p. 6. ſont auſſi incommenſ. par la 10. p. 10. & par conſequent leurs egaux LM, QP: donc par la 10. pr. 10. les lignes OM, MP ſont auſſi incommenſ. en long. puis que par la 1. p. 6. elles ſont en meſme raiſon que LM, QP. Mais OM, MP, ont eſté demonſtrees rationelles : & partant elles ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement : donc la toute OP pouuant le rectangle AD

est binome par la 37. p. 10. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome premier, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationelle AE soit 5, & AC 4+√12. Donc le rectangle AD sera 20+√300: Et puis que AE plus grand nom du binome est 4, & EF moitié du plus petit nom EC, est √3, AG sera 3, & GE 1. Donc le rectangle AH sera 15, & la ligne OM qui peut iceluy rectangle sera √15: Ainsi GI est 5, & MP √5. Mais EF est √3, & EI egale à AB: donc EK sera √75, & son double ED √300. Or si on multiplie OM, MP entr'elles, sera produict MT √75, egal à EK. Mais à iceluy MT est egal MS: donc MS, MT ensemble seront aussi √300. Or les quarrez LM 15, MNS, font ensemble 20: Partant tout le quarré LN est 20+√300, & son costé OP ou LT √15+√5, qui est binome sixiesme.

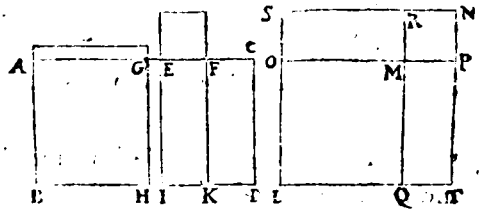
THEOR. 38. PROP. LVI.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle & d'vn binome second, la ligne qui peut iceluy rectangle, est bimediale premiere.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome second AC: Ie dis que (apres auoir fait pareille construction & demonstration qu'en la precedente) la ligne OP qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationelle appellee bimediale premiere.

Car puis que AC est binome second, AE sera incommens. en longit. à la rationelle AB: Item AG & EG

& EG, (qu'on prouuera estre commensurable en longitude entr'elles, comme en la precedente, & par la 16. prop. 10. à leur toute AE) seront par la 14. pr. 10. aussi incommensurables en longitude à icelle AB, laquelle estant rationelle, icelles AG, GE seront aussi rationelles: & par consequent commens. en puissance seulement à icelle rationelle AB. Donc par la 22. prop. 10. les rectangles AH, GI seront mediaux: & leurs egaux quarrez L M, M N aussi mediaux: Et partant les lignes OM, MP mediales, lesquelles on prouuera estre commens. en puissance seulement, tout ainsi qu'en la precedente prop. Et



d'autant que EC est commens. en longitude à la rationelle AB, le rectangle ED sera rationel par la 20. prop. 10. aussi sera sa moitié EK: & par consequent son egal Q P compris des deux mediales OM, MP: & par la 38. prop. 10. OP est bimediale premiere. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

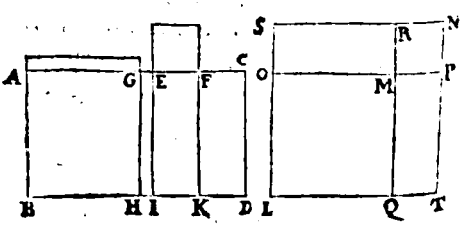
La rationelle AB soit 5, & AC √48+6: donc le rectangle AD sera √12000+30. Et puis que AE est √48, & EC 6: EF sera 3, & son quarré 9, auquel estant posé egal le rectangle de AG, GE, icelles seront √27, &

√3: parquoy le rectangle AH sera √675, & par consequent la ligne OM, qui peut iceluy sera √√675: ainsi GI sera √75, & MP √√75. Or EC est 6: partant ED double de MS √√50625, c'est à dire 15, est 30; & par consequent MS, MT, seront aussi 30. Parquoy tout le quarré LN composé des quarrez LM √675, MN √75, & des deux rectangles MS, MT 30, sera √1200+30, & son costé OP ou LT √√675+√√75, qui est bimediale premiere.

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome troisiesme, la ligne qui peut iceluy rectangle est l'irrationele nommee bimediale seconde.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB & du binome troisiesme AC; (apres auoir construict comme aux precedentes.) Ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, est l'irrationele appellée bimediale seconde.



Car on prouuera comme en la precedente, que les deux lignes OM, MP sont mediales commens.

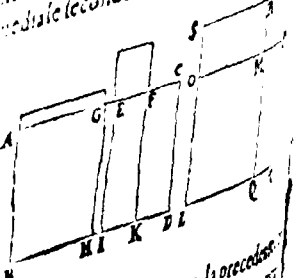
... parquoy le rectangle AH sera ... ligne OM, qui peut iceluy sera ...
... = MP ... Or EC ... par ...
... 62 ... est ... dite ... par ...
... quarré ... MT, sera aussi 150. Parquoy ...
... LN, ... des quarrez LM ... MN ...
... rectangle MS, MT 300, sera ... 1200 + 300. ...
... en ... 1575 + ... 75, qui est bimediale ...

THEOR. 39. PROP. LVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ... rationele, & d'vn binome ... la ligne qui peut iceluy rectangle ... l'irrationele nommee bime...

conde.

Soit le rectangle AD, compris de la ... du binome troisiesme AC, apres ... nome aux precedentes. Ie dis que la ligne ... it iceluy rectangle AD, est l'irrationele ... diale seconde.



... on prouuera comme en la precedente ... OM, MP sont mediales ...

en puissance seulement: Item, d'autant que AC est binome troisiesme, EC est commensurable en puissance seulement à la rationele AB; & par la 22. p. 10. le rectangle ID sera medial, aussi sera sa moitié EKs Et par consequent medial son egal QP (compris des deux mediales OM & MP). Ainsi OM, MP sont deux mediales commensurables en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial, & par la 39. p. 10. OP sera bimediale seconde. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 5, & AC √32 + √24: Donc le rectangle AD sera √800 + √600. Mais d'autant que AE est √32, & EC √24; EF sera √6, au quarré de laquelle est posé egal le rectangle de AG, GE; & partant AG sera √18. & GE √2. Parquoy le rectangle AH sera √450, & GI √50; & par consequent la ligne OM est √√450, & MP √√50. Et puis que EI est 5, & EC √24, le rectangle ED sera √600, lequel est double de MT √150. Donc tout le quarré LN, qui est composé des quarrez LM √450, MN √50, & des rectangles MS, MT √600; sera √800 + √600: & partant son costé OP est √√450 + √√50, qui est bimediale seconde.

THEOR. 40. PROP. LVIII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome quatriesme; la ligne qui peut iceluy rectangle est ligne Majeure.

Soit le rectangle AD, compris du binome qua-

trieſme AC, & de la rationelle AB: (apres auoir conſtruict & demonſtré comme en la 55. prop.) ie dis que la ligne OP, qui peut iceluy rectangle AD, eſt l'irrationelle qu'on appelle ligne majeure.

Car puis que AC eſt binome quatrieſme, le plus grand nom AE eſt commenſur. en longitude à la rationele AB, & peut plus que EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & par la 19. pr. 10. le rectangle defaillant compris ſoubs AG, GE, (qui eſt egal au quart du quarré de EC) diuiſera AE en AG & EG incommenſ. en longitude: & les rectangles AH & GI ſeront incommenſ. par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. Donc auſſi incomm. leurs egaux quarrés LM & MN: & par conſequent les lignes OM, MP ſeront incommenſ. en puiſſance. Mais le rectangle AI compris des rationeles AB, AE, (qui eſt egal aux quarrez LM, MN) eſt rationel par la 20. prop. 10. Et le rectangle QP compris d'icelles lignes OM, MP eſt medial, car ſon egal EK eſt medial, comme ſon double EC par la 22. prop. 10. eſtant ED rationelle commenſ. en puiſſance ſeulement à AB: & par la 40. prop. 10. OP eſt ligne majeure. Si donc vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

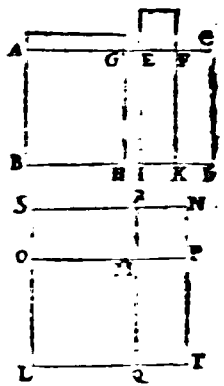
SCHOLIE.

La rationelle AB ſoit 5, & AC 4+√8: Donc le rectangle AD ſera 20+√200. Et puis que AE eſt 4, & EC √8: EF ſera √2, au quarré de laquelle, ſçauoir 2, ayant eſté poſé égal le rectangle de AG, GE: la ligne AG ſera 2+√2, & GE 2—√2: partant le rectangle AH ſera 10+√50, & GI 10—√50: & par conſequent OM eſt √(10+√50) & MP √(10—√50). Or EC eſtoit √8: donc ED double du rect-

gle MT √50, ſera √200. La ſomme des quarrez LM, MN, ſera d'vne 10, à laquelle ſi on adiouſte les plans TM 5 √200, on aura pour tout le quarré LN 10+√100 : & partant ſon coſté OP ſera √(10+√50) +√(10—√50), ou √(20+√200) qui eſt ligne maiſtre.

THEOR. 41. PROP. LIX.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome cinquieſme; la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt ligne irrationele pouuant vn rationel & vn medial.



Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome cinquieſme AC : Ie dis, (apres auoir conſtruict & demonſtré comme en la 55. p. que OP qui peut iceluy rectangle AD, eſt ligne irrationelle, pouuant vn rationel & vn medial.

Car puis que AC eſt binome cinquieſme, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. & comme en la precedente, AG & GE ſeront incomm. en long. Et les lignes OM, MP ſeront incommenſ. en puiſſance, & l'egal au compoſé de leurs quarrez, ſçauoir le rectangle AI, eſt medial par

la 22. pr. 10. car les lignes AB & AE sont rationeles commens. en puissance seulement. Et d'autant que AB, & le plus petit nom EC, sont comm. en longit. par la 20. p. 10. ED est rationel: aussi sera sa moitié EK, & son egal QP compris des lignes OM, MP, & par la 41. prop. 10. OP est ligne irrationele pouuant vn rationel, & vn medial. Si donc vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn binome cinquiesme, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 5, & AC √8+2. Donc le rectangle AD sera √200+10. Et d'autant que AE est √8, & EC 2; EF sera 1, au quarré de laquelle estant egal le rectangle de AGE, le costé AG sera √2+1, & GE √2—1: & partant le rectangle AH sera √50+5, & la ligne OM √(√50+5): & MP √(√50—5), puis que GI est √50—5. Et pource que EI est 5, & EC 2; le rectangle ED sera 10: & par consequent sa moitié MT est 5. Donc la somme des quarrez LM, MN, est √200, à laquelle adiouſtant les rectangles SMT 10, tout le quarré LN sera √200+10: & par consequent son costé OP, est √(√50+5) +√(√50—5), ou bien √(√200+10), qui est ligne pouuant vn rationel, & vn medial.

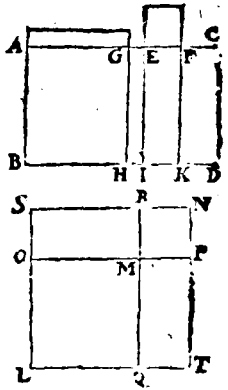
THEOR. 42. PROP. LX.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationelle, & d'vn binome sixiesme, la ligne pouuant iceluy rectangle, est ligne qui peut deux mediaux.

Soit le rectangle AD, compris de la rationelle AB, & du binome sixiesme AC: (apres auoir construit & demonstré comme en la 55. prop. que OP peut ice-

luy rectangle AD.) Ie dis qu'icelle OP eſt ligne pouuant deux mediaux.

Car puis que AC eſt binome ſixieſme, le plus grand nom AE peut plus que le moindre EC du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſurable en longitude, & ſi les deux noms ſont incommenſur. en longitude à la rationelle AB: Et comme il a eſté demonſtré à la 58. prop. 10. OM, MP ſeront incommenſurables en puiſſance: auſſi par la 22. prop. 10. le rectangle AI, qui eſt egal au compoſé de leurs quarrez eſt medial: Item ED qui eſt compris de deux rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement, eſt auſſi medial par la meſme propoſ. auſſi medial ſa moitié EK, & ſon egal QP compris d'icelles lignes OM, MP. Et de plus, iceluy rectangle QP, ou ſon egal EK, eſt incommenſ. au compoſé des quarrez LM, MN, ſçauoir AI: car les lignes AE & EC eſtans incommenſ. en longitude, auſſi AE & EF le ſeront: & partant par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AI & EK ſeront incommenſ. & par la 42. prop. 10. OP ſera ligne pouuant deux mediaux. Parquoy, ſi vn rectangle eſt compris, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

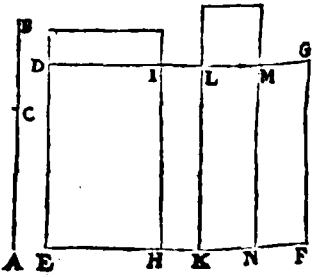
La rationelle AB ſoit 5, AC √12 + √8. Donc le rectangle AD ſera √300 + √200. Et pource que AE eſt √12, & EC √8: EF ſera √2, au quarré de laquelle eſtant egal

le rectangle de AGE; le costé AG sera √3+1, & le costé GE √3—1: Parquoy le rectangle AH sera √75+5, & la ligne OM √(√75+5): & GI estant √75—5, MP sera √(√75—5). Mais EC estant √8, le rectangle ED, qui est double de MT √50, sera √200. Donc les quarrez LM, MN, feront ensemble √300, & les rectangles S MT √200: & partant tout le quarré LN sera √300+√200: & par consequent son costé OP sera √(√75+5)+√(√75—5), ou bien √(√300+√200), qui est ligne pouuant deux mediaux.

THEOR. 43. PROP. LXI. Six. 5.

Le quarré d'vn binome appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome premier.

Soit le binome AB, le plus grand nom duquel est AC; & sur la rationelle DE soit appliqué par la 45. prop. 1. le rectangle DF egal au quarré de AB: Ie dis que l'autre costé DG est binome premier.



Car sur la mesme DE soit construit le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur HI vn autre rectangle IK egal au quarré de CB: Il est donc euident par la 4. prop. 1. que le reste LF est egal à deux fois le rectangle de AC, CB: & en diuisant LG egalement en M, & en menant MN parallele à DE, chasque rectangle LN, MF sera egal au rectangle de AC, CB. Et d'au-

tant que AB eſt binome, AC, CB ſont rationelles commenſ. en puiſſance ſeulement: & leurs quarrez ſeront rationnaux, & leurs egaux rectangles DH & IK auſſi rationaux: & par la 21. prop. 10. les coſtez DI & IL ſeront rationelles commenſ. en longitude à la rationelle DE, &: entr'elles par la 12. prop. 10. Et par la 16. prop. 10. la toute DL ſera commenſ. en longitude à chacune DI, IL, & par la 12. prop. 10. elle ſera rationelle & commenſ. en longitude à DE rationelle: Et d'autant que par la 22. prop. 10. le rectangle de AC, CB eſt medial, ſon double LF ſera auſſi medial: & par la 23. prop. 10. iceluy medial LF eſtant appliqué ſur la rationelle LK, l'autre coſté LG ſera auſſi rationel incommenſ. en longit. à icelle LK, c'eſt à dire à DE, à laquelle DL eſtant commenſ. en longit. par la 13. prop. 10. DL, LG ſont incommenſ. en longit. mais elles ſont rationelles: elles ſeront donc commenſ. en puiſſance ſeulement; & par la 37. prop. 10. DG eſt binome. Ie dis en outre que c'eſt binome premier.

Car il appert par le lemme de la 54. prop. de ce liure, que le rectangle de AC, CB eſt moyen prop. entre les quarrez d'icelles AC, CB: donc auſſi LN moyen prop. entre DH, IK: & par conſequent la ligne LM moyenne prop. entre les lignes DI, IL par la 1. p. 6. & par la 17. p. 6. le rectangle de DI, IL ſera egal au quarré de LM: Et d'autant que les quarrez de AC, CB ſont commenſ. (car icelles AC, CB ſont poſees commenſ. en puiſſance) leurs egaux rectangles DH, IK ſeront auſſi commenſ. Donc auſſi commenſ. en longitude les lignes DI, IL par les 1. prop. 6. & 10. p. 10. Et d'autant que les deux quarrez de AC & CB ſont plus grands que deux fois leur rectangle, par le lemme qui ſuit la 44. prop. de ce li-

ure: DK sera plus grand que LF; & par consequent DL plus grand nom que LG: car icelles lignes sont entr'elles comme DK à LF, par la 1. p. 6. Et puisque le rectangle de DI, IL appliqué sur DL, est egal au quarré de LM, c'est à dire au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarree, & que les parties DI, IL sont commens. en longitude: icelle DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longit. par la 18. prop. 10. & partant icelle DL ayant esté demonstrée commens. en longit. à le rationelle DE, par les secondes def. DG sera binome premier. Donc le quarré d'vn binome appliqué sur vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

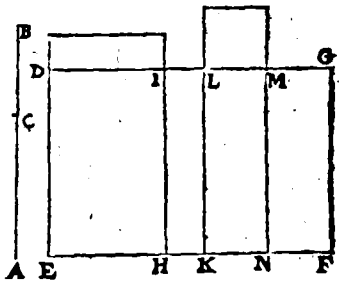
Le binome AB soit $\sqrt{45}+3$, *& la rationelle DE 6: d'autant que le plus grand nom AC est* $\sqrt{45}$, *son quarré est 45, lequel appliqué sur DE 6, fait l'autre costé DI de* $7\frac{1}{2}$: *Et le moindre nom CB estant 3, son quarré est 9, qui appliqué sur IH 6, fait IL de* $1\frac{1}{2}$, *& partant la toute DL est 9. Or le rectangle de ACB est* $\sqrt{405}$, *& son double LF* $\sqrt{1620}$. *Donc la ligne FG sera* $\sqrt{45}$: *& par consequent la toute DG sera* $9+\sqrt{45}$, *qui est binome premier.*

THEOR. 44. PROP. LXII.

Le quarré d'vne bimediale premiere appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome second.

Soit la bimediale premiere AB diuisee en ses noms en C, dont le plus grand soit AC: (apres auoir construit comme en la precedente). Ie dis que DG est binome second.

Car puis que AB est bimediale premiere, par la 38. prop. 10. AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle rationel, duquel le double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. LG sera rationelle commens. en longitude à DE. Mais icelles deux lignes AC & CB estans mediales, leurs quarrez sont mediaux: & partant leurs egaux rectangles DH, IK seront aussi mediaux & commens. Et d'autant que par la 16. p. 10. le total DK est commens. à chacun d'iceux DH, IK. par le coroll. de la 24. prop. 10. iceluy DK sera aussi medial: Et par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel incommens. en longitude à la rationelle DE: & par la 13. prop. 10. DL, LG seront incommens. en longit. & partant rationelles commens. en puissance seulement: & par le 37 prop. 10. DG sera binome. Ie dis d'auantage qu'il est binome premier. Car il se prouuera comme en la precedente, que DL est le plus grand nom, & qu'il peut plus que le moindre LG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude. Nous auons aussi monstré que LG plus petit nom, est commens. en longitude à la rationelle DE: & partant par les secondes def. DG est binome second. Parquoy le quarré d'vne bimediale premiere, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



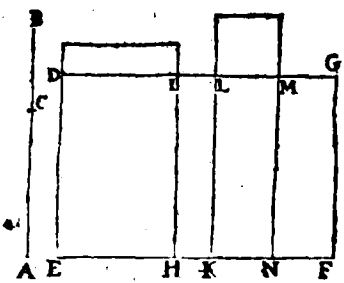
SCHOLIE.

La bimediale AB soit √√108+√√12, & la rationelle DE 4. D'autant que le plus grand nom AC est √√108, son quarré est √108, lequel estant appliqué sur la rationelle DE 4, le costé DI sera √6¾. Ainsi aussi le moindre nom estant √√12, son quarré est √12: & par consequent IL, est √¾, & la toute DL √12. Or le rectangle de ACB est 6: & partant le rectangle KG double d'iceluy est 12, & le costé LG 3. Donc la toute DG sera √12+3, qui est binome second.

THEOR. 45. PROP. LXIII.

Le quarré d'vne bimediale seconde appliqué sur vne ligne rationelle, fait l'autre costé binome troisiesme.

Soit la bimediale seconde AB, diuisee en ses noms en C, desquels AC soit le plus grand. (Apres auoir construit comme en la 61. pr.) Ie dis que DG est binome troisiesme.



Car puis que AB est bimediale seconde, par la 39. prop. 10. AC, BC sont mediales commens. en puissance seulement, comprenant vn rectangle medial; partant les quarrez d'icelles AC, CB seront commens. & mediaux: & aussi leurs egaux rectangles DH, IK; & par la 16. prop. 10. le

total DK eſt commenſ. à chacun d'iceux DH, IK: donc par le coroll. de la 24. prop. 10. DK ſera auſſi medial, & eſtant appliqué ſur la rationelle DE, par la 23. prop. 10. ſon autre coſté DL ſera rationnel incommenſ. en longitude à icelle DE. Derechef, puis que le rectangle de AC, CB eſt medial, ſon double LF le ſera auſſi: & iceluy LF eſtant appliqué ſur la rationelle LK, ſon autre coſté LG ſera rationel incommenſ. en longitude à LK: c'eſt à dire à DE. Donc l'vne & l'autre d'icelles lignes DL, LG, eſt rationelle. & incommenſ. en longit. à la rationelle DE. Et d'autant que comme AC à CB, ainſi le quarré de AC au rectangle de AC & CB, par la 1. prop. 6. Il eſt euident par la 10. prop. 10. que le quarré ſera incommenſ. au rectangle (eſtans les deux lignes incommenſ. en longit.) Mais par la 16. prop. 10. au quarré de AC eſt commenſ. le compoſé des quarrez de AC, CB: & au rectangle de AC, CB eſt commenſ. ſon double: Donc le compoſé des quarrez de AC, CB, c'eſt à dire le rectangle DK, eſt incommenſ. au double du rectangle de AC, CB: c'eſt à dire au rectangle LF, par le ſcholie de la 14. prop. 10. parquoy les lignes DL, LG qui ſont en meſme raiſon que DK, LF ſont incomm. en long. par la 10. p. 10. mais elles ſont rationeles, & partant comm. en puiſſance ſeulement: & par la 37. prop. 10. DG eſt binome.

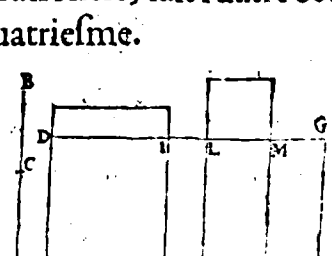
Ie dis d'auantage, qu'il eſt binome troiſieſme. Car il a eſté demonſtré que les deux noms ſont incommenſ. en long. à la rationele DE: Et ſe prouuera comme à la 61. prop. que DL peut plus que LG du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: & par les ſecondes def. DG eſt binome troiſieſme. Donc le quarré d'vne bimediale ſeconde, &c. Ce qui falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

AB soit √72+√√8, & DE 4. Donc DH sera √72, IK √8, & LN ou MF √24, qui appliquez sur DE; DI sera √4½, IL √½ & LM ou MG √1½: & partant la toute DL sera √8, & LG √6. Parquoy la toute DG est √8+√6, qui est binome troisiesme.

THEOR. 46. PROP. LXIV.

Le quarré d'vne ligne majeure appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome quatriesme.



Soit la ligne majeure AB, diuisee en ses nombres en C, dont le plus grand soit AC: (apres auoir construict comme en la 61. p. de ce liure) ie dis que DG est binome quatriéme.

Car puis que AB est ligne majeure, par la 40. p AC, & CB sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel; le rectangle D K egal au composé d'iceux quarrez est aussi rationel, lequel estant appliqué sur la rationelle DE, son autre costé DL sera aussi rationel commens. en longit. à icelle DE par la 21. pr. 10. Item le rectangle L F, double du rectangle de AC, CB, sera medial, lequel appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE par la 23. prop. 10. LG sera rationele incommens. en longit. à DE. Et partant par

la 13. pr. 10. les rationeles DL & LG seront incommensurables en long. Donc commens. en puissance seulement : & par la 37. p.10. DG est binome.

Ie dis dauantage qu'il est binome quatriesme. Car puis que les lignes AC & CB sont incommens. en puissance, leurs quarrez seront incommens. partant aussi leurs egaux rectangles DH, IK, & les lignes DL, IL incommens. Et d'autant que l'on demonstrera comme en la 61. prop. que DL est plus grande que LG, & que sur icelle DL est appliqué le rectangle de DI, IL egal au quart du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarrée, lequel diuise icelle DL à I en parties incomm. en long. par la 19. p. 10. DL, qui est commens. en longit. à la rationele DE, peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longit. & par les secondes def. DG est binome quatriesme. Donc le quarré d'vne ligne majeure, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La ligne majeure AB soit $\sqrt{(10+\sqrt{37\frac{1}{2}})}+\sqrt{(10-\sqrt{37\frac{1}{2}})}$, *& la rationele DE soit* 5. *Donc le rectangle DH sera* $10+\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *IK* $10-\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *& LN ou MF* $\sqrt{62\frac{1}{2}}$; *qui appliquez sur DE, le costé DI sera* $2+\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *IL* $2-\sqrt{1\frac{1}{2}}$, *& LM ou MG* $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. *Parquoy DL sera* 4, *& LG* $\sqrt{10}$: *& par consequent la toute DG est* $4+\sqrt{10}$, *qui est binome quatriesme.*

THEOR. 47. PROP. LXV.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binome cinquiesme.

Soit la ligne pouuant vn rationel & vn medial

AB, diuisee en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC: (apres auoir construit comme en la 61. prop.) Ie dis que DG est binome cinquiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant vn rationel, & vn medial, AC, CB, par la 41 pr.10. sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial: Partant le rectangle DK egal au composé d'iceux quarrez est aussi medial, lequel estant appliqué sur la rationele DE, son autre costé DL sera aussi rationel commens. en puissance seulement à icelle DE par la 23. prop. 10. Item le rectangle de AC, CB estant rationel, son double LF sera aussi rationel, & par la 21. prop. 10. iceluy LF estant appliqué sur LK, c'est à dire sur la rationele DE, son autre costé LG, sera ligne rationele commens. en longit. à icelle DE: & par la 13. prop. 10. les rationeles DL, LG seront commens. en puissance seulement, & par la 36. p. 10. DG sera binome. Ie dis de plus, qu'il est binome cinquiesme. Car LG est commensurable en longitude à la rationele DE, & si on prouuera comme aux precedentes, que DL peut plus que LG, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude, & par les secondes definitions DG est binome cinquiesme. Donc le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{125}+5)}+\sqrt{(\sqrt{125}-5)}$, *& la rationelle DE 5. Donc le rectangle DH sera* $\sqrt{125}+5$, *IK* $\sqrt{125}-5$; *& LN ou MF 10, qui appliquez sur DE, le costé DI sera* $\sqrt{5}+1$, *IL* $\sqrt{5}-1$, *& LM ou MG 2. Parquoy DL sera* $\sqrt{20}$, *& LG 4, & par consequent la toute DG est* $\sqrt{20}+4$, *qui est binome cinquiesme.*

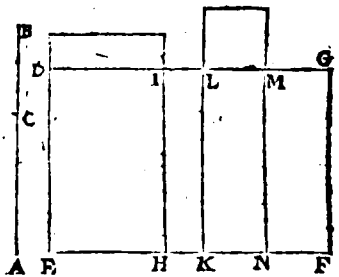
THEOR.

THEOR. 48 PROP. LXVI.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé binomé sixiesme.

Soit la ligne pouuant deux mediaux AB, diuisee en ses noms au poinct C, dont le plus grand est AC. (Apres auoir construit comme aux preced.) ie dis que DG est binome sixiesme.

Car puis que AB est ligne pouuant deux mediaux, par la 42. prop. 10. AC, CB sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incommens. au cõposé de leurs quarrés aussi medial : ainsi il est euident que DK & LF sont mediaux & incommensurables; & par la 23. pr. 10. iceux estans appliquez sur lignes rationelles, leurs autres costez DL, LG seront rationaux commens. en puissance seulement à la rationele DE. Mais iceux costez DL, LG estans entr'eux comme les parallelogrammes DK, LF lesquels sont incommens. seront aussi incommens. en longitude, par la 10. prop. 10. Donc les rationeles DL, LG seront commens. en puissance seulement, & par la 37. prop. 10. DG est binome, duquel les deux noms sont incommens. en longitude à la rationele DE: & comme il a esté demonstré aux pre-



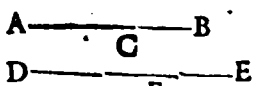
cedentes, le plus grand d'iceux DL peut plus que le moindre LG, du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude, & par les ſecondes def. DG eſt binome ſixieſme. Parquoy le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne AB ſoit $\sqrt{(\sqrt{252}+\sqrt{72})}+\sqrt{(\sqrt{252}-\sqrt{72})}$, *& DE 6. Le rectangle DH ſera donc* $\sqrt{252}+\sqrt{72}$, *IK* $\sqrt{252}-\sqrt{72}$, *& LN, ou MF* $\sqrt{180}$, *qui appliquez à DE, le coſté DI eſt* $\sqrt{7}+\sqrt{2}$, *IL* $\sqrt{7}-\sqrt{2}$, *& LM ou MG* $\sqrt{5}$. *Partant DL eſt* $\sqrt{28}$, *& LG* $\sqrt{20}$; *& par conſequent la toute DG eſt* $\sqrt{28}+\sqrt{20}$, *qui eſt binome ſixieſme.*

THEOR. 49. PROP. LXVII. Six. 6.

La ligne commenſurable en longitude au binome, eſt auſſi binome de meſme ordre.



Soit quelconque binome AB diuiſé en ſes noms au poinct C, deſquels AC eſt le plus grand, & CB le moindre: ſoit la ligne droicte DE commenſurable en longitude au binome AB. Ie dis que DE eſt auſſi binome, & de meſme ordre que AB.

Car ayant fait par la 12. prop. 6. que comme la toute AB eſt à la toute DE, ainſi la retranchee AC ſoit à la retranchee DF, par la 19. p. 5. le reſte CB ſera au reſte FE, comme la toute AB à la toute DE. Et pource que AB, DE, ſont commenſ. en longit. par la 10. pr. 10. AC, DF, & CB, FE, ſeront auſſi commenſ. en longitude. Mais par la 37. pr. 10. AC, CB,

ſont rationeles. Donc auſſi DF, FE ſont rationeles. Et puis que comme AC à DF, ainſi CB à FE, en permutant comme AC ſera à CB, ainſi DF à FE. Mais AC, CB ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: donc auſſi DF, FE ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Et partant par la 37. prop. 10. DE eſt binome. Maintenant ie dis qu'il eſt auſſi binome de meſme ordre que AB.

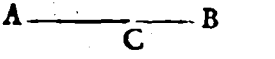
Car ſi AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy ſoit commenſurable en longitude, auſſi par la 15. p. 10. DF pourra de meſme plus que FE. Et ſi AC eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee, auſſi ſera DF par la 12. prop. 10. veu que l'vne & l'autre eſt commenſurable en longitude à la meſme AC; & partant chacune d'icelles AB & DE ſera binome premier. Que ſi CB eſt commenſurable en longitude à la rationelle propoſee, auſſi ſera FE: ainſi AB & DE ſeront binome ſecond: mais ſi AC & CB ſont incommenſ. en longitude à la rationele, auſſi ſeront DF & FE: & par les def. AB & DE ſeront binome troiſieſme. Que ſi AC peut plus que CB du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en longit. auſſi par la 15. prop. 10. DF pourra de meſme plus que FE. Parquoy nous demonſtrerons comme deſſus, que AB, DE ſeront binome 4^e. ou 5^e. ou 6^e. Partant AB, DE, ſeront binomes de meſme ordre. Donc la ligne commenſ. en longitude, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 50. PROP. LXVIII.

La ligne commenſurable en longitude à vne bimediale, eſt auſſi bimediale de meſme ordre.

Soit quelconque bimediale AB, diuisee en ses noms au poinct C, desquels AC est le plus grand: & CB le plus petit; & à icelle AB soit commensurable en longitude la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE est aussi bimediale de mesme ordre qu'icelle AB.

Car (apres auoir construit comme en la precedente) le reste CB sera au reste FE, comme la toute AB à la toute DE: & partant par la 10.p.10.



AC sera commensurable en longitude à DF; & CB à FE. Mais AC, CB sont mediales: donc par la 24. p. 10. DF, FE commensurables à icelles, sont aussi mediales. Et puis que comme AC à DF, ainsi CB à FE: en permutant, comme AC à CB ainsi DF à FE. Mais AC, CB sont commens. en puissance seulement, par la 38. p.10. Doncaussi DF, FE seront commens. en puissance seulement, par la 10. p. 10. mais elles sont aussi mediales: & partant par la 38 ou 39. prop. 10. DE sera bimediale. Dauantage ie dis qu'elle est en mesme ordre que AB. Car d'autant que cõme AC est à DF, ainsi BC à FE, par la 22.p. 6. le quarré de AC sera au quarré de DF, comme le rectangle de AC, BC est au rectangle de DF, FE: (estans iceux rectangles semblables, d'autant qu'ils ont les costez proport.) Mais le quarré de AC est commensurable au quarré de DF, (pource que les lignes AC, DF ont esté demonstrees commens. en long.) Donc par la 10. pr. 10. les rectangles seront aussi commens. Que si l'vn est rationel, l'autre le sera aussi: & par ainsi AB, & DE seroient bimediales premieres, par la 38. prop. 10. Que si l'vn des rectangles est medial, l'autre sera aussi medial, & con.

ſequemment AB & DE ſeront bimediales ſecondes, par la 39. prop. 10. Ainſi DE ſera bimediale, & en meſme ordre que AB. Parquoy la ligne commenſurable en longitude à vne bimediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 51. PROP. LXIX.

La ligne commenſurable à vne ligne majeure eſt auſſi ligne majeure.

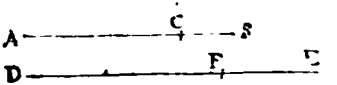
Soit la ligne majeure AB, diuiſee en ſes noms en C, & à icelle ſoit commenſ. DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne majeure.

Car (apres auoir conſtruit comme aux precedentes) AC ſera à CB comme DF à FE, & AC commenſurable à DF, & CB à FE: mais par la 41. prop. 10. AC & CB ſont incommenſ. en puiſſance; les lignes DF & FE le ſeront donc auſſi. Item puis qu'icelles lignes AC, CB, DF, FE ſont proport. par la 22. p. 6. leurs quarrez ſeront porportionnaux: & en compoſant, les deux de AC & BC ſeront au ſeul de CB, comme les deux de DF & FE ſont au ſeul de FE: & en permutant, les deux quarrez de AC & CB, ſeront aux deux de DF & FE, comme le ſeul de CB eſt au ſeul de FE. Mais les lignes CB, FE eſtans commenſ. leurs quarrez ſeront auſſi commenſurables; & partant les deux de DF & FE, ſeront par la 10. prop. 10. commenſ. aux deux de AC & BC: & ſeront rationaux comme iceux. Item, on prouuera comme en la precedente, que le rectangle de DE & FE eſt commenſurable au rectangle de AC & BC; lequel eſtant medial par la 40. prop. 10. auſſi ſera celuy de DF & FE par le corol. de la 24. prop. 10. Parquoy DE ſera ligne majeure. Donc la

ligne commenſ. à vne ligne majeure, eſt auſſi majeure. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 52. PROP. LXX.

La ligne commenſurable à vne ligne pouuant vn rationel & vn medial, eſt auſſi ligne pouuant vn rationel & vn medial.



Soit la ligne AB pouuant vn rationel & vn medial, diuiſée en ſes nõs en C, & à icelle ſoit commenſurable la ligne DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car (apres telle conſtruction qu'aux precedentes) on prouuera que comme AC & BC ſont incommenſur. en puiſſance, auſſi le ſeront DF & FE. Item que le compoſé des quarrez de AC & BC ſera commenſ. au compoſé des quarrez de DF & FE: & le rectangle de AC & BC auſſi commenſurable au rectangle de DF & FE. Mais par la 41. pr. 10. le compoſé des quarrez de AC & BC eſt medial, & leur rectangle rationel: Partant le compoſé des quarrez de DF & FE ſera auſſi medial, & leur rectangle rationel: & par ainſi la toute DE ſera ligne pouuant vn rationel & vn medial, par la ſuſdite 41. prop. de ce liure. Parquoy la ligne commenſ. à vne ligne pouuant vn rationel, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 53. PROP. LXXI.

La ligne commenſurable à vne ligne

pouuant deux mediaux, eſt auſſi ligne pouuant deux mediaux.

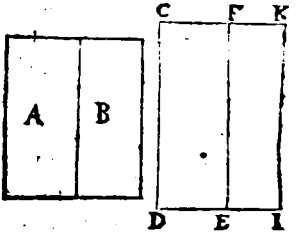
Soit la ligne AB pouuant deux mediaux, diuiſee en ſes noms au poinct C, & à icelle ſoit commenſ. DE. Ie dis qu'icelle DE eſt auſſi ligne pouuant deux mediaux.

Car (apres auoir conſtruit comme aux precedentes) on prouuera tout de meſme que DF & FE ſont incommenſ. en puiſſance; que le compoſé de leurs quarrez eſt medial, & leur rectangle auſſi medial: Mais on prouuera auſſi comme en la 69. pr. que le compoſé des quarrez de AC & BC, eſt au compoſé des quarrez de DF & FE, comme le quarré de CB au quarré de FE: & encore comme en la 68. p. que le quarré de CB eſt au quarré de EF, comme le rectangle de AC & BC, eſt au rectangle de DF & FE: donc par la 11. prop. 5. le compoſé ſera au compoſé, comme le rectangle au rectangle: Et en permutant, comme le compoſé des quarrez de AC & BC eſt incommenſ. à leur rectangle, auſſi le compoſé des quarrez de DF & FE eſt incommenſ. à leur rectangle, & par la 42. pr. 10. DE eſt ligne pouuant deux mediaux. Parquoy la ligne commenſ. à vne ligne pouuant deux mediaux, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 54. PROP. LXXII. Six. 7.

Si vne ſuperficie rationele, & vne mediale ſont iointes; la ligne qui peut tout le compoſé eſt binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure,

ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.



Soient ioinctes deux superficies A rationele, & B mediale: ie dis que la ligne qui peut toutes les deux est binome, ou bimediale premiere, ou ligne majeure, ou ligne pouuant vn rationel & vn medial.

Car premierement les deux superficies ne sçauroient estre egales (car ou elles seroient toutes deux rationeles, ou toutes deux mediales.) Soit donc premierement A plus grande que B: Et sur la rationele CD soit appliqué le rectangle CE egal à A: & sur EF vn autre rectangle FI egal à B, afin que tout le rectangle CI soit egal aux deux superficies proposees A & B. Et puis que A est rationele, & B mediale, aussi le rectangle CE sera rationel, & FI medial, lesquels estans appliquez à la rationele CD; CF sera rationele commens. en longitude à icelle CD par la 21. prop. 10. & FK aussi rationele, mais incommens. en longitude à la mesme CD par la 23. pr. 10. & par la 13. prop. 10. les rationeles CF, FK seront incommens. en longitude: donc commensurables en puissance seulement: & par la 37. prop. 10. CK sera binome diuisé en ses noms en F. Mais puis que A a esté posee plus grande que B, aussi CE sera plus grand que FI; & partant CF sera plus grande que FK par la 1 p. 6. Parquoy CF sera le plus grand nom du binome CK. Or iceluy plus grand nom CF, peut plus que le moindre nom FC du quarré d'vne ligne

qui luy eſt commenſurable ou incommenſurable en longitude. Si commenſ. (eſtant CF commenſ. en longitude à la rationele CD) CK ſera binome premier par la 1. des ſecondes def. Et par la 55. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt binome. Si incommenſ. CK ſera binome quatrieſme, par la 4. des ſecondes def. & par la 58. p. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle CI eſt ligne maieure.

Que ſi la figure A eſtoit plus petite que B, auſſi le rectangle CE ſeroit plus petit que le rectangle FI; & CF ſeroit le plus petit nom commenſ. à la rationele CD: & par ce moyen CK ſeroit binome ſecond, ou cinquieſme: ſi binome ſecond, par la 56. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale premiere. Si binome cinquieſme, par la 59. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt ligne pouuant vn rationel & vn medial. Si donc vne ſuperficie rationele, & vne mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

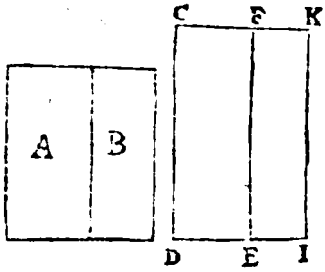
SCHOLIE.

Si la ſuperficie rationelle A eſt 7, & la mediale B √48, la ligne pouuant icelles adiouſtees enſemble ſera 2+√3, qui eſt binome premier: ſi A & B ſont 21 & √432, la ligne pouuant icelles ſera √12+3, qui eſt binome ſecond: mais elle ſera √8+√6, qui eſt binome troiſieſme, ſi A eſt 14 & B √192: mais ſi A eſt 6, & B √32, elle ſera 2+√2, qui eſt binome quatrieſme: ſi A eſt 3 & B √8, elle ſera √2+1 qui eſt binome cinquieſme: & ſi A eſt 5, & B √24, la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera √3+√2, qui eſt binome 6: mais ſi A eſt 4, & B √18, la ligne pouuant la ſuperficie compoſée d'icelles ſera √√8+√√2, qui eſt mediale premiere: mais ſi A eſt 6, & B √12, la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera √(6+12) ou √(3+√6)+√(3—√6): & finalement ſi A eſt 2, & B √8, la ligne pouuant

icelles sera $\sqrt{(\sqrt{8}+2)}$, *ou* $\sqrt{(\sqrt{2}+1)}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$, *qui est ligne pouuant vn rationel & vn medial.*

THEOR. 55. PROP. LXXIII.

Si deux superficies mediales incommensurables sont iointes, la ligne qui peut le composé d'icelles est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.



Soient ioinctes ensemble deux superficies mediales incommens. A & B : Ie dis que la ligne droicte qui peut le composé d'icelles superficies A & B est bimediale seconde, ou ligne pouuant deux mediaux.

Ayant faict sur la rationele CD pareille construction qu'en la prec. prop. les rectangles CE & FI seront mediaux & incommens. Et par la 23.p.10.CF FK seront rationeles commens. en puissance seulement entr'elles, & à la rationele CD: & par la 37. p. 10. CK sera binome. Soit donc CF le plus grand nom: Car CF & FK ne sçauroient estre egales, d'autant qu'elles sont incommens. en longitude: Donc CF peut plus que CG du quarré d'vne ligne qui luy est commens. ou incommens. en longitude. Si com-

menſ. CK eſt binome troiſieſme par la 3. d. ſec. (eſtans les deux noms CF, FK incommenſ. en longit. à la rationele CD) & par la 57. p. 10. la ligne qui peut le rectangle CI eſt bimediale ſeconde: Si incommenſ. par la 6. des ſec. def. CK ſera binome ſixieſme: & la ligne qui peut le rectangle CI eſt par la 60. p. 10. ligne pouuant deux mediaux. Parquoy ſi deux ſuperficies mediales incommenſ. ſont ioinctes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si A eſt √50, & B √48: la ligne pouuant le compoſé d'icelles ſera √√18+√√8, qui eſt bimediale ſeconde: mais ſi A eſt √12, & B √8, ladite ligne pouuant icelles ſera √(√12+√8), ou bien √(√3+1)+√(√3−1), qui eſt ligne pouuant deux mediaux.

COROLLAIRE.

De toutes ces choſes on peut facilement colliger que le binome & les autres lignes irrationeles qui ſuiuent icelle ſont differentes entr'elles & à la mediale. Car le quarré d'vne ligne mediale, appliqué ſur vne ligne rationele, fait l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à la rationele à la quelle il eſt appliqué par la 23. p. 10.

Mais le quarré d'vn binome, faict l'autre coſté binome premier par la 61. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale premiere, faict l'autre coſté binome ſecond, par la 62. p. 10.

Le quarré d'vne bimediale ſeconde, faict l'autre coſté binome troiſieſme, par la 63. p. 10.

Le quarré d'vne ligne maieure, faict l'autre coſté binome quatrieſme, par la 64. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant vn rationel & vn mediul faict l'autre coſté binome cinquieſme, par la 65. p. 10.

Le quarré d'vne ligne pouuant deux mediaux, faict l'autre coſté binome ſixieſme, par la 66. p. 10.

Mais il faut touſiours entendre qu'ils ſoient appliquez ſur vne ligne rationele. Et puis que tous ces coſtez ſont differens entr'eux, il eſt manifeſte que toutes icelles lignes irrationeles ſont differentes ent'elles.

ICY COMMENCENT les ſixaines des lignes irrationeles par le retranchement.

THEOR. 56. PROP. LXXIV.

Si d'vne ligne rationele, eſt retranchée vne ligne rationele commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute; le reſte eſt irrationel : & ſoit appelé Reſidu.



Soit retranchée de la rationele AB la rationele AC, en ſorte que AB & AC, ſoient rationeles commenſurables en puiſſance ſeulemeut : Ie dis que le reſte CB eſt irrationel.

Car par la 1. p. 6. comme AB eſt à AC, ainſi le quarré de AB eſt au rectangle de AB & AC : mais AB eſt incommenſurable en longitude à AC. Donc par la 10. p. 10. le quarré de AB eſt incommenſ. au rectangle de AB & BC : Partant auſſi à ſon double : mais les quarrez de AB & AC, ſont poſez commenſur.

Donc par la 16. prop. 10. les deux ensemble seront commens. au seul de AB: & partant puis que le quarré de AB est incommens. au double du rectangle do AB, AC, par la 14. prop. 10. les quarrez de AB & AC, seront aussi incommens. à deux fois le rectangle de AB & AC, lesquels auec le quarré de CB, estans egaux aux deux quarrez de AB & AC par la 7. pr. 2. il s'ensuiura que le quarré de CB auec deux fois le rectangle de AB & AC seront incommens. à iceux deux rectangles: Et par le coroll. de la 17. p. 10. deux fois le rectangle auec le quarré de CB, (ou les deux quarrez de AB & AC) seront incommens. auquarré de CB: Mais iceux quarrez de AB, AC, estans rationaux; (car ils sont descrits sur lignes rationelles) le quarré de CB sera irrationel: Partant la ligne CB sera aussi irrationelle: Et icelle soit appellee Residu. Si donc d'vne ligne rationelle est retranchee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 2, & AC √3: Donc le reste BC sera 2—√3. Or en ceste prop. & és 5 suiuantes, où Euclide monstre l'origine des Apotomes ou residus, il ne veut dire autre chose, sinon que si des lignes dont il s'agit és prop. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. on retranche le plus petit nom du plus grand, le reste sera irrationel, qu'on appellera Apotome, ou residu, &c.

THEOR. 57. PROP. LXXV.

Si d'vne ligne mediale, est retranchee vne mediale commens. en puissance seulement à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, le

reſte eſt irrationel: Soit appellé reſidu medial premier.



Soit la bimediale AC, de laquelle eſt retranchee la mediale AB, en ſorte que AB & AC ſont mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

Car puis que AB & AC ſont mediales, leurs quarrez ſeront mediaux, & partant incommenſ. au double du rectangle de AB & AC, lequel eſt rationel, vn ſeul rectangle ayant eſté poſé rationel. Mais par la 7. prop. 2. deux fois le rectangle de AB & AC, auec le quarré de BC ſont egaux aux quarrez de AB & AC: donc auſsi deux fois le rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC ſeront incommenſ. au double du rectangle de AB & AC, & par la 17. p. 10. le quarré de BC ſera incommenſ. au double du rectangle de AB & AC: mais iceluy double eſt rationel: donc le quarré de BC ſera irrationel; & partant la ligne BC auſsi irrationelle, qu'on appellera reſi. du medial premier. Parquoy ſi d'vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

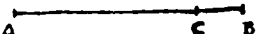
SCHOLIE.

La mediale AC ſoit √√54, & la retranchee AB √√24: donc le reſte BC ſera √√54—√√24.

THEOR. 58. PROP. LXXVI.

Si d'vne ligne mediale eſt retranchee vne ligne mediale commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, comprenant auec

icelle vn rectangle medial ; le reſte eſt irrationel : Soit appellé reſidu medial ſecond.



Soit la mediale AB, de laqueſle eſt retranchee la mediale AC, en ſorte que AB & AC ſoient commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle medial ; Ie dis que le reſte CB eſt irrationel.

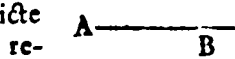
Car puis que les quarrez de AB & AC ſont commenſ. par la 16. prop. 10. le compoſé d'iceux ſera auſsi commenſ. à vn chacun d'eux : & chacun d'iceux eſtant medial, (pource que les lignes AB, AC ſont poſees mediales) auſsi le compoſé d'iceux quarrez eſt medial par le coroll. de la 24. prop. 10. comme auſsi le double du rectangle de AB, AC, puis que le ſeul rectangle de AB, AC eſt poſé medial. Veu donc que par la 7. prop. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de CB : le compoſé des quarrez de AB, AC, qui eſt medial, excedera le double du rectangle de AB, AC, qui eſt auſsi medial, du quarré de CB. Mais par la 27. p. 10. vn medial n'excede pas vn medial, d'vn rationel : donc le quarré de CB n'eſt pas rationel, & partant il eſt irrationel : & conſequemment la ligne BC auſsi irrationelle, qu'on appellera reſidu medial ſecond. Parquoy ſi d'vne ligne mediale on retranche vne ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La mediale AB ſoit $\sqrt{\sqrt{18}}$, *& AC* $\sqrt{\sqrt{8}}$: *donc le reſte CB ſera* $\sqrt{\sqrt{18}} - \sqrt{\sqrt{8}}$.

THEOR. 59. PROP. LXXVII.

Si d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte incommenſurable en puiſſance à la toute, faiſant auec icelle vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel; le reſte ſera irrationel: Soit appellé ligne mineure.



Soit la ligne droicte AC, de laquelle eſt retrãchee AB incommenſ. en puiſſance à la toute AC, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & que le compoſé de leurs quarrez ſoit rationel: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

Car puiſque le compoſé des quarrez de AB, & AC eſt rationel, il eſt incommenſ. au rectangle de AC & AB, lequel eſt medial: partant auſſi au double d'iceluy rectangle. Mais par la 7. prop. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC eſt egal au double du rectangle de AB, AC, enſemble au quarré de CB: donc par le coroll. de la 17. prop. 10. le compoſé d'iceux quarrez de AB, AC ſera auſſi incommenſ. au quarré de CB. Et puis qu'iceluy compoſe eſt poſé rationel, par la 10. def. le quarré de BC eſt irrationel, & la ligne BC irrationelle, qu'on appellera ligne mineure. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

SCHOLIE.

Soit la ligne AC $\sqrt{(18+\sqrt{108})}$, *& AB* $\sqrt{(18-\sqrt{108})}$; *le reste BC sera donc* $\sqrt{(18+\sqrt{108})}-\sqrt{(18-\sqrt{108})}$.

THEOR. 60. PROP. LXXVIII.

Si d'vne ligne droicte est retranchee vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, faisant auec icelle vn rectangle rationel, & le composé de leurs quarrez medial; le reste sera irrationel: Soit appellé ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial.

Soit la ligne droicte AC, de laquelle est retranchee AB incommens. en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle rationel, & que le composé de leurs quarrez soit medial: Ie dis que le reste BC est irrationel.



Car puis que le rectangle de AB & AC est rationel, aussi sera son double, & partant par la 10 def. il sera incommens. au composé des quarrez d'icelles AB, AC, lequel est medial, c'est à dire irrationel. Mais le composé d'iceux quarrez par la 7. pr. 2. est egal au double du rectangle de AB, AC, auec le quarré de BC. Donc aussi le double du rectangle de AB, AC est incommensur. au double d'iceluy rec-

tangle auec le quarré de BC: Et par la 17. pr. 10. iceluy double rectangle sera aussi incommens. au quarré de BC. Et puis qu'iceluy double rectangle est rationel, par la 10. definit. le quarré de BC sera irrationel, & la ligne BC aussi irrationelle: laquelle soit appellee ligne faisant auec vne superficie rationelle, vn tout medial: & ce d'autant que le quarré d'icelle ligne estant adiousté auec vne superficie rationelle fait vn tout medial, comme il apparoistra à la 109. prop. 10. Parquoy si d'vne ligne droicte est retranchee, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

si AC est $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$, *&* $AB\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$; *le reste BC sera* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$.

THEOR. 61. PROP. LXXIX.

Si d'vne ligne droicte, est retranchee vne ligne droicte incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & incommensurable au composé de leurs quarrez aussi medial; le reste est irrationel: soit appellé ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne droicte AB, de laquelle est retranché la ligne AC incommensurable en puissance à la toute, compre-



nant auec icelle vn rectangle medial incommenſ. au compoſé de leus quarrez auſſi medial: Ie dis que le reſte BC eſt irrationel.

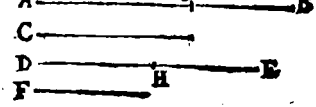
Car puis que par la 7. propoſit. 2. le compoſé des quarrez de AB, AC, eſt egal au double du rectangle de AB, AC auec le quarré de BC: iceluy compoſé des quarrez éxcedera le double du rectangle du quarré de BC. Mais par la 27. prop. 10. vn medial n'excede pas vn medial d'vn rationel: Donc le quarré de BC n'eſt pas rationel; & partant eſt irrationel, &: la ligne BC auſſi irrationelle; laquelle on appellera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial; parce que le quarré d'icelle ligne auec vne ſuperficie mediale fait vn tout medial. Parquoy ſi d'vne ligne droicte eſt retranchee vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AB eſt √(√180+√60), & AC √(√180−√60), le reſte CB ſera √(√180+√60)−√(√180−√60).

LEMME.

S'il y a quatre grandeurs AB, C, DE, F, & que GB excez d'entre AB & C ſoit egal a HE excez d'entre DE & F; auſſi en permuttant l'excez d'entre AB & DE ſera egal à l'excez d'entre C & F. Car puis



que GB eſt l'excez d'entre AB & C, AG ſera egal à C: En la meſme maniere DH ſera egal à F. Donc l'excez d'entre AG & DH ſera egal à l'excez d'entre C & F, puis que ces grandeurs cy ſont egales à celles-là, chacune à la ſienne, & partant adiouſtant à AG & DH choſes

egales GB & HE, l'excez d'entre les toutes AB & DE sera touſiours egal à l'excez d'entre C & F. Ce qui eſtoit propoſé

COROLLAIRE.

De ces choſes appert que quatre grandeurs ayant proportion Arithmetique, en permutant elles ſeront auſſi en proportion Arithmetique.

THEOR. 62. PROP. LXXX.

Au reſidu ne peut conuenir qu'vne ſeule ligne droicte rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute.



Soit le reſidu AB, auquel conuienne la ligne droicte BC, rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute AC: Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne en la meſme ſorte.

Car s'il eſt poſſible, ſoit vne autre ligne BD, s'accordant auec icelle AB, en ſorte que AD & BD ſoient rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement. Maintenant par la 7. pr. 2. les deux quarrez de AC, BC ſont plus grands que deux fois le rectangle de AC, BC du quarré de AB. Pareillement les deux quarrez de AD, & BD ſont plus grands que deux fois le rectangle de AD, BD, du meſme quarré de AB; & en permutant, par le lemme precedent les quarrez excederont autant les quarrez, que les rectangles excedent les rectangles: & d'autant que les quarrez ſont rationaux, leur excez ſera rationel, par le lemme qui precede la 43. pr. 10. & partant les rectangles eſtans mediaux, (pource que par la 22. pr.

10. vn ſeul d'iceux rectangles eſt medial, & par le corol. de la 24. prop. 10. ſon double eſt auſſi medial) leur excez ſera rationel contre la 27. prop. 10. Donc à AB ne peut conuenir autre ligne que BC, rationelle commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute. Parquoy au reſidu ne peut conuenir, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 63. PROP. LXXXI.

Au reſidu medial premier, ne s'accorde qu'vne ſeule ligne mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel.

Soit le reſidu medial premier AB, auquel la mediale BC s'accorde en ſorte que AC & BC, ſoient mediales commenſ. en puiſſance ſeulement, comprenant vn rectangle rationel:

A B C D

Ie dis qu'à icelle AB ne peut conuenir autre ligne droicte que BC en la meſme ſorte.

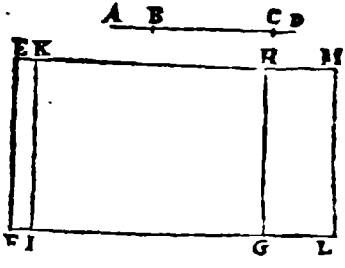
Car ſi faire ſe peut en ſoit vne autre BD. Maintenant par la 7 prop. 2. il ſe prouuera comme en la preced. que l'excez d'entre le compoſé des quarrez de AC, BC, & le compoſé des quarrez de AD, BD. eſt tel que l'excez d'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre ces rectangles eſt rational par le lemme qui precede la 43. prop. 10. pource que chacun d'iceux eſt rationel: & partant l'excez d'entre les quarrez qui ſont mediaux, (eſtans deſcrits ſur lignes mediales) ſeroit auſſi rationel, contre la 27. pr. 10. Donc

à AB ne peut conuenir autre ligne mediale que BC, qui ſoit commenſ. en puiſſance ſeulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 64. PROP. LXXXII.

Au reſidu medial ſecond, ne peut eſtre conioincte qu'vne ſeule ligne mediale commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute, & comprenant auec icelle vn rectangle medial.

Soit conioincte au reſidu medial ſecond AB la mediale BC, commenſurable en puiſſance ſeulement à la toute AC, & faiſant auec icelle vn rectangle medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut pas conuenir vne autre ligne que BC, en la meſme ſorte.



Car ſi faire ſe peut, en ſoit conioincte vne autre BD en la ſorte requiſe. Et ſur la rationele propoſee EF, ſoit appliqué le rectangle EG egal aux deux quarrez de AC, BC; & à la meſme EF ſoit encore appliqué EI egal au quarré de AB: parquoy par la 7. pr. 2. le reſte KG ſera egal à deux fois le rectangle de AC, BC. Item ſur la meſme rationelle ſoit encore appliqué le rectangle EL egal aux deux quarrez de AD, BD: Et puiſque le rectangle

EI eſt egal au quarré de AB, auſſi KL ſera egal à deux fois le rectangle de AD, DB, par la ſuſdite 7. p. 2.

Maintenant les quarrez de AC & BC ſont mediaux (eſtans faits de lignes mediales) & ſi le double rectangle de AB & BD doit eſtre medial: partant leurs egaux rectangles EG & KG ſeront mediaux: leſquels appliquez ſur la rationele EF, auront les autres coſtez EH & KH rationaux comm. en puiſſ. ſeulement à EF par la 23. p. 10. en apres, le quarré de AC eſtant au rectangle de AC & BC, par la 1. p. 6. comme AC eſt à BC, qui ſont incommenſ. en long. par la 10. p. 10. le quarré de AC ſera incommenſ. au rectangle de AC & BC: & partant auſſi à ſon double KG. Item le quarré de BC eſt commenſ. au quarré de AC, & par la 16. p. 10. le rectangle EG egal à iceux quarrez, ſera incomm. au ſeul quarré de AC, auquel KG eſt incommenſ. Et par la 14. p. 10. EG & KG ſeront incommenſ. auſſi ſeront les lignes EH & KH par la 1. p. 6. & 10 p. 10. leſquelles eſtans rationeles ſeront incommenſ. en puiſſance ſeulement: & par la 74. p. 10. EK ſera reſidu & KH ſa conuenable. Par meſme diſcours (ſi on maintient que DC ſoit auſſi adiointe à AB ſelon le requis) EK ſe trouuera reſidu, & KM ſa conuenable: ce qui ſeroit contre la 80. pr. 10. Donc au reſidu medial AB ne peut s'adioindre autre conuenable que BC. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 65. PROP. LXXXIII.

A la ligne mineure, conuient vne ſeule ligne droicte incommenſ. en puiſſance à la toute, comprenant auec icelle

vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle conuienne BC incommens. en puissance à la toute AC, & faisant le composé de leurs quarrez rationel, & le rectangle compris d'icelles AC, BC, medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut estre adiointe autre ligne que BC qui face le mesme.



Car si faire se peut en soit adioustee vne autre BD, qui soit pareillement incommens. en puissance à la toute AD, & faisant le composé des quarrez de AD, BD rationel, & le rectangle compris sous icelles AD, BD, medial. Il se prouuera comme en la 80. prop. 10. qu'il y a mesme excez entre le composé des quarrez de AC, BC, & le composé des quarrez de AD, BD, qu'entre deux fois le rectangle de AC, BC, & deux fois le rectangle de AD, BD. Mais l'excez d'entre les quarrez est rationel par le lemme qui suit la 42. prop. 10. pource que l'vn & l'autre composé est rationel: donc aussi l'excez d'entre les rectangles sera rationel, contre la 27. pr. 10. Car iceux rectangles estans mediaux, l'excez d'iceux ne peut estre rationel. Donc à la ligne mineure AB on ne peut adiouster autre ligne conuenable que BC. Parquoy à la ligne mineure s'accorde vne seule ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 66. PROP. LXXXIIII.

A la ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial, s'accorde vne seule ligne incommens. en puissance

à la toute, & faisant auec icelle vn rectangle rationel: mais le composé de leurs quarrez medial.

Soit la ligne AB faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, à laquelle AB s'accorde la ligne BC, incommens. en puissance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle rationel, mais que le composé de leurs quarrez soit medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'accommoder autre ligne que BC, qui face la mesme chose.

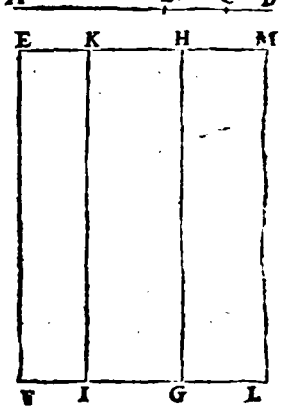


Car s'il est possible, en soit encore vne autre BD: il se prouuera comme en la 80. p. 10. que les quarrez de AC, & BC, excedent les quarrez de AB & BD d'vn mesme excez, que deux fois le rectangle de AC & BC, excedent deux fois le rectangle de AB & BD, lequel excez comme en la precedente seroit rationel & irrationel, si à la ligne AB on pouuoit encore ioindre BD incommens. en puissance à la toute AD, &c. Parquoy à vne ligne faisant auec vne superficie rationelle vn tout medial, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 67. PROP. LXXXV.

A la ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, se conioint vne seule ligne incommensurable en puissance à la toute, comprenant auec icelle vn rectangle medial, & incom-

menſurable au compoſé de leurs quarrez qui eſt auſſi medial.



Soit la ligne AB faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, à laquelle AB s'accorde BC incommenſ. en puiſſance à la toute AC, & comprenant auec icelle vn rectangle medial, incommenſurable au compoſé de leurs quarrez, qui eſt auſſi medial. Ie dis qu'à icelle AB ne peut s'adioindre autre ligne que BC, qui faſſe le propoſé.

Car ſi faire ſe peut, en ſoit adiouſtee vne autre BD. Puis ſoit fait meſme conſtruction qu'en la 82. prop. 10. Donc le compoſé des quarrez de AC & BC eſtant medial, & incommenſ. à deux fois le rectangle de AC & BC auſſi medial, leurs egaux rectangles EG & KG ſeront mediaux, & incommenſurables: Et par la 23. prop. 10. eſtans appliquez ſur la rationelle EF, leurs autres coſtez EH & KH ſeront lignes rationeles, & par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. commenſ. en puiſſance ſeulement; (puis que leurs rectangles ſont incommenſ.) & par la 74. prop. 10. EK ſera reſidu auquel KM ſera conuenablement adiouſtee: Par meſme diſcours (ſi on dit que BD ſoit auſſi conuenable à AB, & faſſe ce qui eſt propoſé) EK ſe trouuera reſidu, & KM ſa conuenable: ainſi le reſidu EK n'auroit pas vne ſeule conuena-

ble, contre la 80. prop. 10. On ne pouuoit donc pas adioindre à AB, autre ligne conuenable que BC, incommensurable en puissance à la toute, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

DEFINITIONS TROISIEMES.

Estant proposée vne ligne rationele, & vn residu: Lors que la toute composée du residu & de sa conuenable, ou adiousstée, peut plus que la conuenable, du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable en longitude;

1. Si la toute est commensurable en longitude à la rationele proposée; le residu soit appellé residu premier.
2. Mais si la conuenable ou adiousstée est commensurable en long. à la rationelle proposée; soit appellé residu second.
3. Que si l'vne ny l'autre n'est commensurable en longitude à la rationele proposée; soit appellé residu troisiesme.

Derechef, lors que la toute peut plus que l'adiousstée, du quarré d'vne ligne qui luy est incommensurable en longitude.

4. Si la toute est commensurable en longitude à la rationele proposée; soit appellé residu quatriesme.
5. Mais si l'adiousstée est commensurable

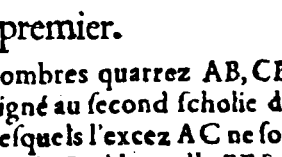
en longitude à la rationele ; ſoit appellé reſidu cinquieſme.

6. Que ſi ny l'vne ny l'autre n'eſt commenſurable en longitude à la rationele ; ſoit appellé reſidu ſixieſme.

PROBL. 19. PROP. LXXXVI.

Trouuer vn reſidu premier.

Eſtans trouuez deux nombres quarrez AB, CB, (comme nous auons enſeigné au ſecond ſcholie de la 29. prop. de ce liure) deſquels l'excez AC ne ſoit quarré, ſoit poſée la rationele D, à laquelle EF ſoit commenſ. en longit. & partant icelle EF ſera auſſi rationele : puis apres par le corol. de la 6. prop. 10. ſoit faict que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF ſoit au quarré de GF. Ie dis que EG eſt reſidu premier.



Car puis que les quarrez de EF, GF, qui ſont comme nombre à nombre, ſont commenſ. par la 10. pr. auſſi les lignes EF, GF ſeront commenſ. au moins en puiſſance : & EF eſtant rationele, GF le ſera auſſi. Mais d'autant que les deux nombres AB, AC ne ſont entr'eux comme nombres quarrez : auſſi les quarrez de EF, GF ne ſeront entr'eux comme nombres quarrez : & partant par la 9. prop. 10. les lignes EF, GF ſont incommenſ. en longit. elles ſont donc rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : & partant le reſte EG ſera reſidu par la 74. prop. 10.

Ie dis dauantage qu'il eſt reſidu premier : car EF eſtant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle CF: ſoit du quarré de H. Et puis que comme le nombre AB eſt au nombre AC, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de GF, par conuerſion de raiſon, comme AB ſera à CB; ainſi le quarré de EF ſera au quarré de H. Mais AB, CB ſont nombres quarrez: Donc les quarrez de EF & H ſont entr'eux commé nombres quarrez : & partant par la 9. p. 10. les lignes EF & H ſont commenſ. en longitude. Par ainſi la toute EF commenſurable en longitude à la rationelle D, peut plus que la conuenable GF, du quarré de la ligne H, qui luy eſt commenſurable en longitude : & partant par la 1. des troiſieſmes def. EG ſera reſidu premier. Nous auons donc trouué vn reſidu premier. Ce qu'il falloit faire.

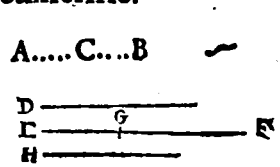
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6 : AB 9, CB 4, & par conſequent AC eſt 5: faiſant donc que comme 9 eſt à 5, ainſi le quarré de EF, c'eſt à dire 36, ſoit au quarré de FG; icelle FG ſera √20 : & partant le reſte EG ſera 6—√20, qui eſt reſidu premier.

Or il appert par les def. preced. que Apotome ou reſidu n'eſt autre choſe que ce qui reſtera ſi de deux nombres poſez rationaux commenſurables en puiſſance ſeulement on ſouſtraict le moindre du plus grand; ce qui ſe fait par l'interpoſition du ſigne—: & par ainſi il n'y a aucune difference entre le binome & le reſidu, ſinon qu'en celuy-là les deux noms ſont conioincts par le ſigne +, & en ceſtuy cy, l'vn eſt ſouſtraict de l'autre par le ſigne—. Parquoy pour promptement trouuer vn reſidu de quelque eſpece que ce ſoit, il n'y a qu'à trouuer le binome de meſme eſpece, ainſi qu'il a eſté dit cy-deuant, puis au lieu du ſigne + apposer le ſigne—.

Comme au scholie de la 49. prop, nous auons trouué ce binome premier $8+\sqrt{48}$; *mais en changeant seulement le signe nous aurons* $8-\sqrt{48}$, *pour residu premier: & ainsi des autres.*

PROBL. 20. PROP. LXXXVII. Trouuer vn residu deuxiesme.



Estans trouuez deux nombres quarrez AB, CB. (comme en la precedente proposition) & l'exposee rationele D, soit prise GF commens. en longitude à icelle D, laquelle sera aussi rationele: puis soit fait que comme le nombre AC est au nombre AB, ainsi le quarré de GF soit au quarré de EF par le corol. de la 6. pr. 10. Ie dis que EG est residu second.

Car puis que les quarrez de GF, EF, ayans la raison des nombres AC, AB, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes GF, EF seront aussi commens. au moins en puissance: & GF estant rationele, EF le sera aussi. Et d'autant que les nombres AC, AB, & partant aussi les quarrez de GF, EF, ne sont entr'eux comme nombres quarrez, par la 9. prop. 10. GF, EF, seront incommens. en longitude: donc les rationeles GF, EF, sont commens. en puissance seulement: & partant par la 74. prop. 10. le reste EG est residu.

Ie dis aussi qu'il est residu second. Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, & soit du quarré de H. Donc puis que comme AC est à AB, ainsi le quarré de GF au quarré de EF; en changeant, comme AB sera à AC, ainsi le quarré de EF

ſera au quarré de GF. Maintenant nous demonſtrerons comme en la prec. que la ligne H eſt commenſ. en longitude à icelle EF. Parquoy puis que la toute EF, peut plus que l'adiouſtee GF, du quarré de H, qui luy eſt commenſ. en longitude, comme auſſi à la rationele propoſee D: par les troiſieſmes def. EG ſera reſidu ſecond. Nous auons donc trouué vn reſidu ſecond, ainſi qu'il falloit faire.

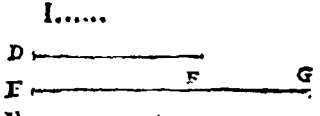
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, FG 5: AB 9, CB 4: & par conſequent AC 5: faiſant donc que comme AC 5 eſt AB 9, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF: icelle EF ſera √45: & partant EG ſera √45—5, qui eſt reſidu ſecond.

PROBL. 21. PROP. LXXXVIII.

Trouuer vn reſidu troiſieſme.

Ayant trouué les deux nombres quarrez AB, CB, comme en la propoſition 86, ſoit pris vn autre nombre I, (comme nous auons enſeigné en la 51. prop. de ce liure) qui ne ſoit à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré: puis eſtant expoſee la rationele D, ſoit fait que comme I eſt à AB, le quarré de D ſoit au quarré de EG, leſquels quarrez par la 6. p. 10. ſeront commenſurables: & partant les lignes D & EG auſſi commenſ. au moins en puiſſance. Donc D eſtant rationele, auſſi EG ſera rationele. Et d'autant que les nombres I & AB, & partant les quarrez de D & EG, ne ſont en raiſon de nombres quarrez, par la



9. prop. 10. les lignes D & EG seront incommens. en longitude. Derechef, soit fait que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EG soit au quarré de GF. Ie dis que EF est residu troisiesme.

Car puis que les quarrez de EG, GF, estans comme nombre à nombre, sont commensurables par la 6. prop. 10. les lignes EG, GF seront auss commens. au moins en puissance. Mais EG estant rationele, GF le sera auss. Et puis que AB, AC, & partant auss les quarrez de EG, GF, ne sont entr'eux comme nombres quarrez; par la 9. prop. 10. les lignes EG, GF seront incommens. en longitude. Donc EG, FG sont rationeles commensurables en puissance seulement: & partant puis que de EG est ostee GF commens. en puissance à icelle, par la 74. pr. 10. le reste EF sera residu.

Ie dis qu'il est auss residu troisiesme: Car puis que comme I est à AB, ainsi le quarré de D est au quarré de EG, & comme AB à AC, ainsi le quarré de EG au quarré de GF; en raison egale, comme I sera à AC, ainsi le quarré de D au quarré de GF. Or les nombres I & AC ne sont entr'eux comme nombres quarrez, ny par consequent auss les quarrez de D & GF: parquoy par la 9. prop. 10. les lignes D & GF sont incommens. en longitude. Donc l'vne & l'autre d'icelles EG, GF est incommens. en longitude à la rationele proposee D. Et comme en la 86. prop. on prouuera que EG peut plus que GF du quarré de la ligne H, qui luy est commensurable en longitude: Et par les tierces def. EF sera residu troisiesme, qu'il falloit trouuer.

SCHOLIE.

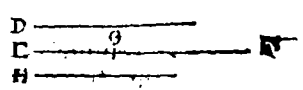
La rationele D soit 6, & soit fait que comme le nombre 16, est

16, est à AB 9, ainsi le quarré de D, sçauoir 36, soit au quarré de EF, & iceluy sera 54, & par consequent la ligne EF V54: Mais faisant que comme AB 9, est à AC 5, ainsi le quarré de EF soit au quarré de FG; icelle FG sera V30, & par consequent EG sera V54—V30, qui est residu troisiesme.

PROBL. 22. PROP. LXXXIX.

Trouuer vn residu quatriesme.

Estans trouuez (comme nous auons enseigné au 3. scholie de la 29. prop.) deux nombres AC, CB, tels que le composé d'iceux AB ne soit à l'vn ny à l'autre AC, CB, comme nombre quarré à nombre quarré: soit proposee la rationele D, à laquelle soit commensurable en longitude EF, laquelle sera par consequent aussi rationele. Que si on acheue de construire comme en la 86. prop. on demonstrera comme là que EG est residu: & d'auantage, ie dis qu'il est residu quatriesme.



Car EF estant plus grande que GF, elle pourra plus qu'icelle, soit du quarré de H. Et puis que comme AB est à AC, ainsi le quarré de EF au quarré de GF; par conuersion de raison, comme AB à CB, ainsi le quarré de EF au quarré de H. Mais les nombres AB, CB, ne font comme nombre quarré à nombre quarré: donc par la 9. prop. 10. les lignes EF & H seront incommens. en longitude. Parquoy la toute EF peut plus que l'adiouste GF, du quarré de H, qui luy est incommens. en longitude, & la mesme EF est commensurable en longitude à la rationele D: partant par les 3. def. EG sera

residu quatrieſme. Nous auons donc trouué vn Apotome ou residu quatrieſme. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, EF 6: faiſant donc que comme AB 9 eſt à AC 6, ainſi 36 quarré de EF ſoit au quarré de FG, icelle ſera √24, & par conſequent le reſte EG ſera 6—√24, qui eſt reſidu quatrieſme.

PROBL. 23. PROP. XC.

Trouuer vn reſidu cinquieſme.

Eſtans trouuez les deux nombres AC, CB, comme en la prop. prec. ſoit fait meſme conſtruction qu'en la 87. puis ſoit demonſtré comme en icelle que GE eſt reſidu. Ie dis en outre qu'il eſt reſidu 5e. Car FE peut plus que GF du quarré de H: Et comme en la 86. prop. nous demonſtrerons par conuerſion de raiſon, que comme AB eſt à CB, ainſi le quarré de EF eſt au quarré de H; & comme en la precedente, les lignes EF & H ſeront incommenſurables en longitude: & la conuenable GF commenſurable en longitude à la rationele D. Parquoy par les 3. def. E G ſera reſidu cinquieſme. Nous auons donc trouué vn reſidu cinquieſme. Ce qu'il falloit faire.

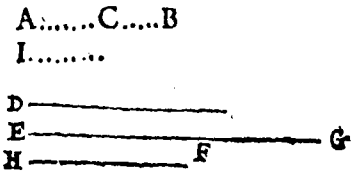
SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9, FG 6, faiſant que comme AC 6, eſt à AB 9, ainſi le quarré de GF ſoit au quarré de EF, icelluy ſera 54, & par conſequent la ligne EF √54; & le reſte EG √54—6, qui eſt reſidu cinquieſme.

PROBL. 24. PROP. XCI.

Trouuer vn reſidu ſixieſme.

Eſtans trouuez les trois nombres AC, CB, & I, comme en la 54. prop. tels que AB ne ſoit à l'vn ny à l'autre d'iceux AC, CB : & I à l'vn ny à l'autre d'iceux AB, AC, comme nombre quarré à nombre quarré : ſoit expoſee la rationele D, & acheuee la conſtruction comme en la 88. prop. Nous demonſtrerons dõc comme là, que D & EG ſont incommenſ. en longitude, & que EF eſt reſidu : en apres, que D & FG ſeront auſſi incommenſ. en longitude ; & partant l'vne & l'autre d'icelles EG, FG eſt incommenſurable en longitude à la rationele propoſee D. Maintenant, que EG puiſſe plus que FG du quarré de la ligne H, laquelle nous demonſtrerons comme en la 89. prop. eſtre incommenſurable en longitude à icelle EG. Donc puis que la toute EG peut plus que la conuenable FG, du quarré de H qui luy eſt incommenſurable en longitude, & que EG ny FG n'eſt commenſ. en long. à la rationele propoſee D, par la derniere des 3. def. EF ſera reſidu ſixieſme. Nous auons donc trouué vn reſidu ſixieſme. Ce qu'il falloit faire.

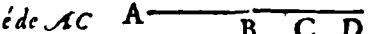


SCHOLIE.

La rationele D ſoit 9 ; & ſoit fait que comme 19 eſt à AB 12, ainſi 81 quarré de D ſoit au quarré de EF ; lequel ſera trouué de 108, & par conſequent icelle ſera √108 ; & faiſant que comme AB eſt à AC 7, ainſi 108 ſoit au quarré de FG ; icelle FG ſera √63, & par conſequent le reſte EG ſera √108—√63, qui eſt reſidu ſixieſme.

Or nous trouuerons encores (comme enſeigne Theon) les ſix reſidus ſuſdits, ainſi qu'il enſuit.

S'il faut trouuer pour exemple le reſidu premier: ſoit trouué par la 49. pr. 10. le binome premier AD duquel le plus grand nom eſt AC, & le moindre CD; puis ſoit couppé de AC la ligne CB egale à CD. Ie dis



que AB eſt reſidu premier. Car d'autant que AC, CD, ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement; auſſi AC, BC ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: Donc par la 74. pr. 10. AB eſt reſidu. Et pource que AC peut plus que CD, ou CB du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude, & AC eſt commenſurable en longitude à la rationele propoſee par la def. du binome premier; AB ſera reſidu premier par la 1. des tierces def. Par la meſme maniere ſeront trouuez tous les autres reſidus, ſçauoir eſt le 2^e^, ſi du ſecond binome nous oſtons le moindre nom du plus grand, &c.

Ainſi ayant trouué le binome premier AD 9 + √45, ſi du plus grand nom AC 9, on oſte le moindre nom, reſtera le reſidu AB de 9 — √45. & ainſi des autres.

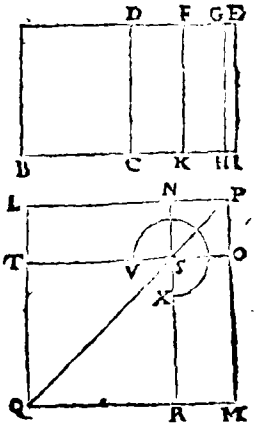
THEOR. 68. PROP. XCII. Six. 4.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu premier, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu premier AD: le dis que la ligne qui peut iceluy rectangle eſt reſidu.

Au reſidu AD ſoit ſa conuenable DE, laquelle ſoit couppee en deux egalement au poinct F, puis

sur la ligne AE soit appliqué vn rectangle defaillant d'vne figure quarree, & egal au quart du quarré de DE, qui est le quarré de FE, & soit iceluy rectangle compris sous AG, GE: en apres, soient menees les lignes FK, GH, EI paralleles à AB, qui rencontrent la ligne BC prolongee en K, H & I: puis soit fait le quarré LM egal au rectangle AH, & le quarré NO egal au rectangle EH, ayant auec LM l'angle LPM commun. Donc les quarrez LM, NO, par la 26. prop. 6. seront au long d'vn mesme diametre, lequel soit PQ: soient continuees les lignes NS, OS, afin d'acheuer le gnomon VX. Maintenant, FE est moyenne proport. entre AG & GE, par la 17. pr. 6. car par l'hypothese le quarré de EF est egal au rectangle de AG & GE, & par la 1. pr. 6. le rectangle KE sera milieu porport. entre les deux rectangles AH & HE: il le sera aussi entre leurs egaux quarrez LM & NO. Mais par le lemme de la 54. pr. 10. le rectangle LO, est aussi milieu proport. entre iceux quarrez: Donc KE, ou DK son egal, sera egal au rectangle LO; & par consequent KG à LS, (estant HE egal à NO.) Iceluy GK sera aussi egal à SM: par ainsi le rectãgle DH sera egal au gnomon VX. Mais tout le quarré LM est egal au rectangle AH. Donc le rectangle AC sera egal au quarré TR. Maintenant, ie dis que la ligne TS, qui peut le rectangle AC est residu.



Car puiſque AD eſt reſidu premier, & DE ſa conuenable : les deux lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, eſtant la toute AE commenſ. en longitude à la rationele AB, & pouuant plus que l'adiouſtee DE, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude : Et par la 18.pr.10. le rectangle defaillant aura les deux coſtez AG & GE commenſ. en longit. & par la 16.pr.10. ils ſeront commenſ. en longit. à la totale AE, laquelle eſtant commenſurable en longit. à la rationele AB, par la 12.prop.10. AE, AG, GE, AB, ſeront toutes rationeles commenſ. en longitude : & par la 20.pr. 10. les rectangles AH & HE ſeront rationaux, & par conſequent leurs egaux quarrez LM & NO auſſi rationaux, & les lignes TO & SO rationeles. Pareillement, les deux lignes DF & FE eſtans egales, & commenſ. elles le ſeront auſſi à leur toute DE, par la 16. pr. 10. laquelle DE eſtant rationele, DF & FE ſeront auſsi rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement à AB, comme leur toute DE : & par la 22.pr.10. leurs rectangles CF & KE ſeront mediaux. Mais le rectangle LO eſt egal au medial KE, partant auſsi medial & incommenſ. au quarré rationel NO, Et par la 1. pr. 6. & 10.pr.10. leurs coſtez TO & SO ſeront incommenſ. en longit. & pour autant qu'ils ſont rationaux, ils ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 74.pr.10. TS eſt reſidu. Si donc vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

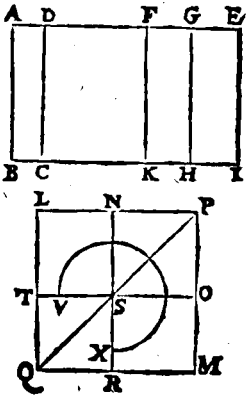
SCHOLIE.

La rationele AB ſoit 8, & AD 9—√45 : DE eſt donc √45, & ſa moitié DF √11¼ : mais AG ſera 7½, & GE 1½. Donc le rectangle BE eſt 72, AH 60, HE 12, CL √7200

& AC 72—√2880, & le rectangle de AG, GE eſt 11¼. Parquoy le quarré LM ſera 60, & NO 12: & partant la ligne LP eſt √60, & NP √12: & par conſequent LN, ou TS ſera √60—√12, qui eſt reſidu; & ſon quarré TR eſt 72—√2880, egal au rectangle AC.

THEOR. 69. PROP. XCIII.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu ſecond, la ligne qui peut iceluy rectangle, eſt reſidu medial premier.



Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu ſecond AD. Ie dis (apres auoir conſtruit comme en la precedente, & demonſtré comme là que le rectangle AC eſt egal au quarré TR) que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, eſt reſidu medial premier.

Car puis que AD eſt reſidu ſecond, & DE ſa conuenable, les deux lignes AE & DE ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, la conuenable DE eſtant commenſurable en longitude à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable en longitude, & par la 18. pr. 10. le rectangle defaillant aura les deux coſtez AG & GE commenſurables en longitu-

de, & par la 16. prop. 10. ils seront aussi commensurables à la totale AE, & par la 14. pr. 10. icelle totale estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi le seront AG & GE, qui sont rationeles (car elles sont commensurables à leur totale AG, qui est rationele) commensurables en puissance seulement à la rationele AB, & par la 22. pr. 10. les rectangles AH & HE seront mediaux; partant mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs costez TO & SO seront lignes mediales. Pareillement DE estant commensurable en longitude à la rationele AB, aussi le sera sa moitié FE, & par la 20. prop. 10. le rectangle KE sera rationel: partant aussi rationel son egal rectangle EO, compris des deux mediales TO & SO, lesquelles sont incommensurables en longitude: (autrement leur rectangle seroit medial par la 25. pr. 10.) & par la 75. pr. 10. TS est residu medial premier. Si donc vn rectangle compris d'vne ligne rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

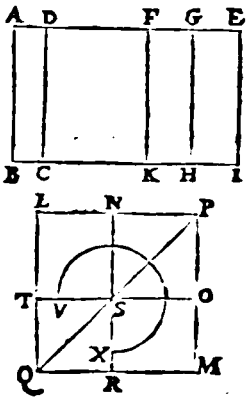
La rationele AB soit 4, AD $\sqrt{45}-5$: DE est donc 5, & sa moitié DF $2\frac{1}{2}$, & par consequent le quarré d'icelle DF ou FE est $6\frac{1}{4}$, auquel estant egal le rectangle de AG, GE, icelles seront $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & $\sqrt{1\frac{1}{4}}$: parquoy le rectangle HE, ou le quarré NO sera $\sqrt{20}$: & partant son costé SO est $\sqrt{\sqrt{20}}$. Mais puis que la ligne AE est $\sqrt{45}$, & AG $\sqrt{31\frac{1}{4}}$: le rectangle BE sera $\sqrt{720}$, & AH, ou le quarré LM $\sqrt{500}$: & par consequent la ligne TO est $\sqrt{\sqrt{500}}$: de laquelle estant ostee SO, restera TS $\sqrt{\sqrt{500}}-\sqrt{\sqrt{20}}$, qui est residu medial premier, & son quarré TR est $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Mais le rectangle AC est autant: car multipliant AB 4 par AD $\sqrt{45}-5$, viendra aussi $\sqrt{720}-\sqrt{20}$. Donc ST residu medial premier pour le rectangle AC.

THEOR. 70. PROP. XCIV.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & d'vn reſidu troiſieſme; la ligne pouuant iceluy rectangle, eſt reſidu medial ſecond.

Soit le rectangle AC, compris de la rationele AB, & du reſidu troiſieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. prop. 10.) Ie dis que la ligne TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme nous auons demõſtré en la ſuſdite prop) eſt reſidu medial ſecond.

Car puis que AB eſt reſidu troiſieſme, & DE ſa conuenable, les lignes AE & DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement, tant entr'elles, qu'à la rationele AB: mais AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en long. & par la 18. prop. 10. AG & GE ſeront commenſ. en longit. & à leur totale AE par la 16 pr. 10. Et ſeront rationeles comme icelle: mais AE eſt commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, & par la 14. pr. 10. AG & GE ſeront commenſurables en puiſſance ſeulement à AB: Et par la 22. propoſ. 10. les rectangles AH & HE ſeront mediaux: donc auſſi mediaux leurs egaux quarrez LM & NO, & leurs coſtez TO & SO ſeront lignes mediales. Pareillement DE eſtant incommenſ. en longit.



à la rationele AB, auſſi le ſera ſa moitié FE, par la 14. p. 10. & par la 22. p. 10. EF eſtant rationele comme ſa double DE, le rectangle KE ſera medial, partant auſſi medial ſon egal LO, compris des deux mediales commmenſ. en puiſſance ſeulement TO & SO : car leurs quarrez LM, NO ſont commenſ. l'eſtans leurs egaux rectangles AH & HE. Or ils ne ſçauroient eſtre commenſ. en longit. car il faudroit par la 1. pr. 6. & 10. pr. 10. que LO & NO fuſſent auſſi commenſurab. & par conſequent leurs egaux rectangles KE & HE : ce qui n'eſt pas. Donc par la 76. p. 10. TS eſt reſidu medial ſecond. Parquoy ſi vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

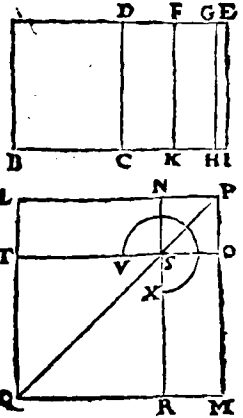
La rationele AB ſoit 4, & AD √54—√30 : donc DE eſt √30; ſa moitié DF √7½, & ſon quarré 7½, lequel eſtant appliqué ſur la ligne AE √54, & defaillant d'vne figure quarrée, les coſtez du rectangle appliqué, ſçauoir AG, GE, ſeront √37½, & √1½. Parquoy le rectangle AC ſera √864—√480, BE √864, CE √480, AH √600, DK √120, & HE √24. Mais le quarré LM eſtant egal à AH, il ſera auſſi √600, NO egal à HE √24 : & partant les coſtez d'iceux quarrez, ſçauoir TO, SO ſont √√600, √√24. & par conſequent TS eſt √√600—√√24, & ſon quarré TR √864—√480, egal au rectangle AC.

THEOR. 71. PROP. XCV.

Si vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele & d'vn reſidu quatrieſme, la ligne qui peut iceluy rectangle eſt ligne mineure.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du residu quatriesme AD: (apres auoir construict comme en la 92.p.10. & demonstré comme là que la ligne TS peut le rectangle AC). Ie dis qu'icelle ligne TS est ligne mineure.

Car puis que AD est residu quatriesme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commensur. en puissance seulement; & AE qui est commensur. en longit. à la rationele AB, peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est incomm. en long. & par la 19. p.10. AG & GE seront incommens. en longitude: partant par la 1.pr. 6. & 10. prop. 10. les rectangles AH & HE seront incommensurables, aussi seront donc leurs egaux quarrez LM & NO: partant les lignes TO & SO seront incommensur. en puissance: Mais AE estant commens. en long. à la rationele AB, par la 20.p.10. le rectangle AI sera rationel: partant aussi rationel sera le composé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement DE estant commensurable en puissance seulement à AB, le rectangle CE sera medial par la 22. prop. 10. aussi sera sa moitié KE: & par consequent son egal LM sera aussi medial: partant les deux lignes TO & SO, qui comprennent iceluy rectangle, mediales, (car elles sont incommensur. en puissance) & le composé de leurs quarrez estant ra-



tionel, par la 77. p. 10. TS est ligne mineure. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La rationelle AB soit 6, AD 9—√54: donc DE est √54, & sa moitié DF √13½, son quarré 13½, lequel appliqué sur AE 9, & defaillant d'vne figure quarrée, les costez AG, GE seront 4½+√6¼, & 4½—√6¼. Parquoy le rectangle AC sera 54—√1944, BE 4, AF 27+√243. DK √486, & HE 27—√243. Mais le quarré LM estant egal à AF, sera aussi 27+√243, & NΦ egal à HE 27—√243. & partant leurs costez TO, SO sont √(27+√243), & √(27—√243): & par consequent TS est √(27+√243) —√(27—√243), & son quarré TR 54—√1944, egal au rectangle AC.

THEOR. 72. PROP. XCVI.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele & d'vn residu cinquiesme, la ligne qui peut iceluy, est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

Soit le rectangle AC, (*voy la figure precedente*) compris de la rationele AB, & du residu cinquiesme AD: (apres auoir construict comme en la 92. pr. 10. & demonstré comme là que la ligne TS peut iceluy rectangle AC). Ie dis que icelle TS est ligne faisant auec vne superficie rationele, vn tout medial.

Car puis que AD est residu cinquiesme, & DE sa conuenable, les lignes AE & DE sont rationeles commens. en puissance seulement, & DE est com-

mensurable en longitude à la rationele AB, & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. & par la 19. p. 10. les lignes AG & GE sont incommens. en longit. & comme en la precedente TO & SO seront incommens. en puissance Mais AE estant incommens. en longitude à la rationele AB, le rectangle AI sera medial par la 22. prop. 10. partant aussi medial le composé de leurs egaux quarrez LM & NO. Pareillement, DE estant commensur. en longitude à la rationele AB, par la 20. prop. 10. le rectangle CE sera rationel, aussi sera sa moitié KE, & son egal LO, compris de deux lignes incommens. en puissance TO & SO, desquelles le composé de leurs quarrez fait vn tout medial, & par la 78. prop. 10. TS sera ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial. Parquoy si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

La rationele AB soit 4, AD √54—6: donc DE est 6, & sa moitié DF 3, son quarré 9, auquel estant egal le rectangle de AGE : AG sera √13½+√4½, & GE √13½—√4½. Mais le rectangle AC sera √864—24, BE √864, AH √216+√72, DK 12, & HE √216—√72: ainsi le quarré LM sera √216+√72, NO √216—√72, & leurs costez TO, SO, √(√216+72), & √(√216—√72), & par consequent TS est √(√216+√72)—√(√216—√72), & son quarré TR sera √864—24.

THEOR. 73. PROP. XCVII.

Si vn rectangle est compris d'vne ligne rationele, & d'vn residu sixiesme, la

ligne qui peut iceluy, eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit le rectangle AC compris de la rationele AB, & du reſidu ſixieſme AD: (apres auoir conſtruict comme en la 92. p. 10.) le dis que TS qui peut iceluy rectangle AC, (comme il a eſté demonſtré en la ſuſdite prop.) eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Car puis que AD eſt reſidu ſixieſme, & DE ſa conuenable, AE & DE ſont rationeles commenſur. en puiſſance ſeulement entr'elles, & à la rationele AB. & AE peut plus que DE du quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longit. Et par la 19. p. 10. AG & GE ſeront incommenſ. en longit. Et comme en la 95. p. 10. TO & SO ſeront incommenſ. en puiſſance; & tout ainſi qu'en la precedente, le rectangle AI eſtant medial, le compoſé de leurs egaux quarrez LM & NO, ſera auſſi medial: Item DE eſtant commenſ. en puiſſance ſeulement à la rationele AB, par la 22. p. 10. le rectangle CE ſera medial: auſſi ſera donc ſa moitié KE, & ſon egal LO. Et AE, DE eſtans incomm. en longit. par la 1. p. 6. & 10. p. 10. les rectangles AI, CE, ſeront incommenſ. & puiſque CE eſt commenſ. à ſa moitié KE, par la 14. p. 10. KE ſera incommenſ. à AI: & partant le medial LO (egal à KE) compris des lignes TO & SO incommenſ. en puiſſance, eſt incommenſ. au compoſé des quarez d'icelles TO & SO (egal à AI) medial: Parquoy par la 79. prop. 10. le reſte TS ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Parquoy vn rectangle eſt compris d'vne ligne rationele, & Ce qu'il falloit prouuer.

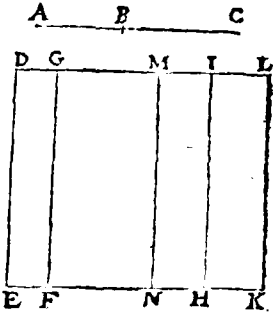
SCHOLIE.

La rationele AB soit 6, AD $\sqrt{108}-\sqrt{63}$: donc DE est $\sqrt{63}$, & sa moitié DE $\sqrt{15\frac{3}{4}}$, son quarré $15\frac{3}{4}$, AG $\sqrt{27}+\sqrt{11\frac{1}{4}}$, GE $\sqrt{27}-\sqrt{11\frac{1}{4}}$: mais le rectangle AC sera $\sqrt{3888}-\sqrt{2268}$, BE $\sqrt{3888}$, AH $\sqrt{972}+\sqrt{405}$, DK $\sqrt{567}$, & HE $\sqrt{972}-\sqrt{405}$: ainsi le quarré LM sera $\sqrt{972}+\sqrt{405}$, NO $\sqrt{972}-\sqrt{405}$, & leurs costez TO, SO, seront $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}$, & $\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$: & par consequent TS est $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}-\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$, & son quarré TR $\sqrt{3888}-\sqrt{2268}$.

THEOR. 74. PROP. XCVIII. Six.5.

Le quarré d'vn residu appliqué sur vne rationelle, fait l'autre costé residu premier.

Soit le residu AB, & BC sa conuenable, tellement que AC, BC soient rationeles commens. en puissance seulement: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. Ie dis que l'autre costé DG est residu premier.



Car à la mesme rationele DE soit appliqué le rectangle DH egal au quarré de AC: & sur IH vn autre rectangle IK egal au quarré de BC, tellement que le total DK est egal au composé des quarrez de AC, BC: lequel estant egal par la 7. prop. 2. à deux fois le rectangle de AC, CB, ensemble auec le quar-

ré de AB, si on oste le quarré de AB, & le rectangle DF; restera GK egal à deux fois le rectangle de AC, CB: partant GL estant couppee en deux egalement en M, & tiré MN parallele à DE: MK sera egal au rectangle de AC, CB. Et pource que AC, CB sont rationeles, leurs quarrez seront aussi rationaux, & partant commens. & par la 16. prop. 10. le composé d'iceux quarrez est commens. à vn chacun d'eux: & partant iceluy composé, ou DK son egal, est rationel, lequel estant appliqué à la rationele DE, par la 21. prop. 10. DL sera rationele commens. en longit. à icelle DE. Derechef, puis que AC, CB sont rationeles commens. en puissance seulement, le rectangle d'icelles, & partant aussi son double GK, sera medial: & iceluy estant appliqué à la rationele GF, par la 23. pr. 10. GL sera rationele incommens. en longitude à GF, ou DE: Et puis que DK rationel, & GK medial, c'est à dire irrationel, sont incommens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10. les lignes DL, GL, seront aussi incommens. en longitude. Parquoy puis qu'elles ont esté demonstrees rationeles, elles seront commens. en puissance seulement: & partant par la 74. prop. 10. le reste DG sera aussi residu. Ie dis dauantage qu'il est residu premier.

Car puis que par le lemme de la prop. 54. le rectangle de AC, CB, ou son egal MK, est moyen prop. entre les quarrez de AC, CB, c'est à dire entre DH, IK: DH, MK, IK seront continuellement proportionaux: & par consequent aussi les lignes DI, ML, IL, & par la 17. prop. 6. le rectangle de DI, IL est egal au quarré de ML, c'est à dire au quart du quarré de GL, par le scholie de la 4. prop. 2. Et puis que les quarrez de AC, CB, ou leurs egaux rectangles DH, IK, sont commens. par la 1. prop. 6. & 10. prop. 10.

les

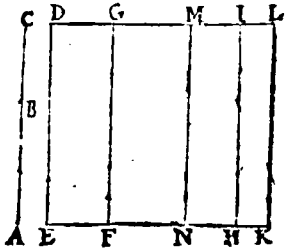
les lignes DI, IL, seront commens. en longit. Parquoy puis que les lignes DL, LG sont inegales, & à la plus grande DL est appliqué le rectangle de DI. IL, egal à la quarte partie du quarré de LG, & defaillant d'vne figure quarree, par la 18. prop. 10. DL pourra plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude: & par la 1. des 3. def DG sera residu premier. Parquoy le quarré d'vn residu appliqué sur vne rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Le residu AB soit √60—√12, & BC √12: donc la toute AC est √60: mais la rationele DE soit 8, sur laquelle estant appliqué le quarré de AB, qui est 72—√2880, l'autre costé DG sera 9—√45: aussi DI sera $7\frac{1}{2}$, IL $1\frac{1}{2}$, DL 9, & GL √45, & GM √$11\frac{1}{4}$: Ainsi le rect. DK sera 72, DH 60, IK 12, GN √720, GK √2880, & DF 72—√2880.

THEOR. 75. PROP. XCIX.

Le quarré d'vn residu medial premier, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu second.



Soit le residu medial premier AB, duquel la conuenable soit BC, tellement que AC, BC, soient mediales comm. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle rationel: & sur la rationele DE soit appliqué le rectangle DF egal au quarré de AB. 10

dis que l'autre costé DG est residu second.

Car soit construit ainsi qu'en la precedente, tellement que derechef DH, IK, soient egaux aux quarrez de AC, BC, & GK double du rectangle compris d'icelles lignes AC, BC, & partant MK egal à vne fois le rectangle de AC, BC. Veu donc que les lignes AC, CB, sont mediales commens. en puissance seulement: les quarrez d'icelles, ou leurs egaux rectangles DH, IK, seront aussi mediaux & commens. & partant par la 16. pr. 10. le tout DK sera aussi commens. à chacun d'iceux: Donc aussi medial, par le coroll. de la 24. prop. 10. Et par la 23. prop. 10. DL sera rationele commens. en puissance seulement à DE: & d'autant que le rectangle de AC, BC est rationel, son double GK sera aussi rationel: & par la 21. pr. 10. GL sera rationele commens. en longitude à DE rationele, & les deux rectangles DK, & GK estans incommens. (car l'vn est rationel, & l'autre medial) les rationeles DL & GL seront commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. 10. DG sera residu: lequel ie dis estre aussi second. Car on prouuera de mesme qu'en la precedente, que la toute DL, peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est commens. en longitude; & partant par les tierces definitions, DG est residu second. Parquoy le quarré d'vn residu medial premier, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

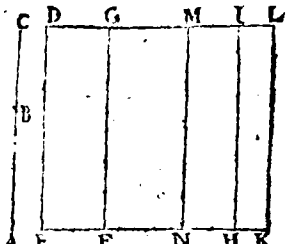
Le residu medial premier AB soit √√500—√√20, & BC √√20: la toute AC sera donc √√500: & estant appliqué sur la rationele DE 4, le quarré de AC, qui est √500, l'autre costé DI sera $\sqrt{31\frac{1}{4}}$, & si à la mesme DE est appliqué IK egal au quarré de BC, qui est √20, IL sera √

$1\frac{1}{4}$: *ainsi la toute DL sera* $\sqrt{45}$. *Derechef appliquant à DE le rect. GN egal au rect. de ACB, qui est* 10, *l'autre costé GM sera* $2\frac{1}{2}$, *& son double GL 5: parquoy DG sera* $\sqrt{45}-5$, *qui est residu second.*

THEOR. 76. PROP. C.

Le quarré d'vn residu medial second, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu troisiesme.

Soit le residu medial second AB, auquel conuienne BC, tellement que AC, CB, soient mediales commens. en puissance seulement, & contiennent vn rectangle medial: Et sur la rationele DE, soit appliqué le rectangle DF. Ie dis que l'autre costé DG est residu troisiesme.



Car ayant construit comme en la 98. prop. on demonstrera comme en la pret. que le rectangle DK est medial, & partant par la 23. prop. 10. son autre costé DL sera rationel commens. en puissance seulement à la rationele DE. Item le rectangle de AC, BC, estant medial, aussi le sera son double GK, & par la 23. pr. 10. GL sera aussi rationele commens. en puissance seulement à la rationele DE: Et puis que AC, BC sont incommens. en longitude, le quarré de AC sera incommens. au rectangle de AC, BC, par la 1. prop. 6. & 10. pr. 10. partant aussi à son double GK: Mais le quarré de AC est aussi commens. au

quarré de BC: (pource qu'iceux quarrez ſont deſcrits ſur lignes commenſ. en puiſſance:) & partant par la 16. prop. 10. le compoſé d'iceux quarrez, c'eſt à dire DK, ſera auſſi commenſ. au quarré de AC, auquel eſt incommenſ. GK; donc par la 13. prop. 10. DK ſera incommenſ. à GK: & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL, ayant meſme raiſon que DK, GK ſeront incomm. en long. Mais eſtans rationeles, elles ſeront commenſ. en puiſſance ſeulement, & par la 74. pr. 10. BG ſera reſidu. Mais ny DL, ny GL ne ſont commenſ. en longitude à la rationele DE, & ſi on prouuera comme en la 98. prop. que DL peut plus que GL du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. en longitude: Et par les tierces def. DG eſt reſidu troiſieſme. Parquoy le quarré d'vn reſidu medial ſecond, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

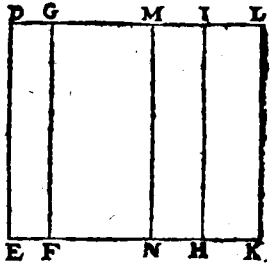
SCHOLIE.

Le reſidu medial ſecond AB ſoit $\sqrt{\sqrt{600}}-\sqrt{\sqrt{24}}$, *& BC* $\sqrt{\sqrt{24}}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{\sqrt{600}}$: *& appliquant ſur la rationele DE 4, le rect. DH egal au quarré de AC, qui eſt* $\sqrt{600}$, *l'autre coſté DI ſera* $\sqrt{37\frac{1}{2}}$, *mais appliquant à la meſme DE le rectangle IK egal au quarré de BC, l'autre coſté IL ſera* $\sqrt{1\frac{1}{2}}$: *& partant la toute DL ſera* $\sqrt{54}$: *& ſi derechef on applique ſur la meſme DE le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui eſt* $\sqrt{120}$, *l'autre coſté GM ſera* $\sqrt{7\frac{1}{2}}$, *& ſon double GL* $\sqrt{30}$: *parquoy DG eſt* $\sqrt{54}-\sqrt{30}$, *qui eſt reſidu troiſieſme.*

THEOR. 77. PROP. CI.

Le quarré d'vne ligne mineure, appliqué ſur vne ligne rationele, fait l'autre coſté reſidu quatrieſme.

Soit la ligne mineure AB, à laquelle BC conuienne, en sorte que AC, BC, soient incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, & le composé de leurs quarrez rationel: & le quarré d'icelle AB soit appliqué sur la rationele DE: ie dis que l'autre costé DG est residu quatriesme.



Car apres auoir construit comme en la 98.p. le rectangle DK sera rationel, & GK medial, par le discours des precedentes: & par la 21. prop. 10. DL sera rationele commens. en longit. à la rationele DE: & GL, par la 23. prop. 10. sera rationele commens. en puissance seulement à icelle rationele DE: & puis que DK est rationel, & GK medial, ils sont incomm. & par la 10. prop. 10. les lignes DL, GL qui sont en mesme raison que DK, GK, seront incommens. en longitude. Mais elles sont rationeles; elles seront donc commens. en puissance seulement: & par la 74. pr. 10. DG sera residu.

Ie dis dauantage qu'il est residu quatriesme. Car puisque les lignes AC, BC sont incomm. en puissance, leurs quarrez seront incommens. Aussi incomm. leurs egaux rectangles DH, IK, & par consequent incommens. les lignes DI, IL, costez du rectangle defaillant d'vne figure quarree egale au quarré de ML, c'est à dire à la quarte partie du quarré de GL, comme il a esté demonstré en la 98. prop. & par la 19. prop. 10. DL (qui est commens. en longitude à la rationele DE) peut plus que la conuenable GL, du

quarré d'vne ligne qui luy eſt incommenſ. en longitude : & par les tierces definitions DG eſt reſidu quatrieſme. Donc le quarré d'vne ligne mineure, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne mineure AB ſoit $\sqrt{(27+\sqrt{243})} - \sqrt{(27-\sqrt{243})}$, *& BC* $\sqrt{(27-\sqrt{243})}$: *la toute AC ſera donc* $\sqrt{(27+\sqrt{243})}$, *le quarré de laquelle appliqué ſur la rationele DE 6, l'autre coſté DI ſera* $4\frac{1}{2}+\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *mais eſtant appliqué ſur la meſme DE, le rectangle IK, egal au quarré de BC, qui eſt* $27-\sqrt{243}$, *l'autre coſté IL ſera* $4\frac{1}{2}-\sqrt{6\frac{3}{4}}$: *& partant la toute DL ſera 9. Que ſi à la meſme DE on applique le rect. GN egal au rectangle de ACB, qui eſt* $\sqrt{486}$, *l'autre coſté GM ſera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}$, *& ſon double GL* $\sqrt{54}$: *& partant DG eſt* $9-\sqrt{54}$, *qui eſt reſidu quatrieſme.*

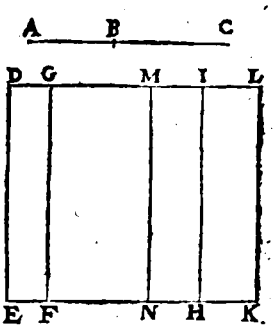
THEOR. 78. PROP. CII.

Le quarré d'vne ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle, vn tout medial, appliqué ſur vne ligne rationelle, fait l'autre coſté reſidu cinquieſme.

Soit la ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial AB, de laquelle le quarré ſoit appliqué ſur la rationele DE : ie dis que l'autre coſté DG eſt reſidu cinquieſme.

Car (apres auoir conſtruit comme en la 98. prop. 10.) AB eſtant ligne faiſant auec vne ſuperficie rationelle vn tout medial, & BC ſa conuenable, les deux lignes AC, BC ſont incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle rationel, & le compoſé de leurs quarrez medial : partant le rectangle DK ſera

medial, & GK rationel, & par la 23. prop. 10. DL sera rationelle incommensur. en long. à la rationelle DE: & par la 21. prop 10. GL sera aussi rationelle, mais commens. en longit. à la rationelle DE: Item les rectangles DK, GK estans incomm. (car l'vn est rationel, & l'autre medial) les lignes DL, GL seront aussi incommens. en longitude. Mais icelles sont rationelles: elles sont donc commens. en puissance seulement, & par la 74. prop. DG sera residu. Mais il a esté demonstré que GL est commens. en long. à la rationelle DE, & on prouuera comme en la precedente, que la toute DL peut plus que la conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longitude: & partant par les tierces def. DG est residu cinquiesme. Donc le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie rationelle, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}-\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{216}-\sqrt{72})}$; *la toute AC sera donc* $\sqrt{(\sqrt{216}+\sqrt{72})}$, *le quarré de laquelle soit appliqué sur la rationelle DE 4, & l'autre costé DI sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}+\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *mais estant appliqué sur la mesme rationelle, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui est* $\sqrt{216}-\sqrt{72}$, *l'autre costé IL sera* $\sqrt{13\frac{1}{2}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}$: *& partant la toute DL sera* $\sqrt{54}$: *Que si à la mesme rationelle on applique le rectangle GN ou NK, egal au rectangle de ACB, qui est 12, l'autre costé ML sera*

3, & son double GL 6: Parquoy DG sera √54—6, qui est residu cinquiesme.

THEOR. 79. PROP. CIII.

Le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, appliqué sur vne ligne rationele, fait l'autre costé residu sixiesme.

Soit la ligne AB, faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, le quarré de laquelle AB soit appliqué sur la rationele DE: Ie dis que l'autre costé DG est residu sixiesme.

Car (apres auoir construict comme en la 98. pr.) AB estant ligne faisant auec vne superficie mediale vn tout medial, & BC la conuenable à icelle AB; les deux lignes AC, BC sont incommens. en puissance, comprenant vn rectangle medial, incomm. au composé de leurs quarrez aussi medial: partant les deux rectangles DK & GK sont mediaux & incommens. & par la 23. prop. 10. DL, GL seront rationeles incommens. en longit. entr'elles, & à la rationele DE: & par consequent commens. en puissance seulement: & par la 74. prop. BG sera residu. Mais on peut prouuer comme en la 101. pr. 10. que la toute DL peut plus que sa conuenable GL, du quarré d'vne ligne qui luy est incommens. en longit. & partant par les tierces def. GD est residu sixiesme. Donc le quarré d'vne ligne faisant auec vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

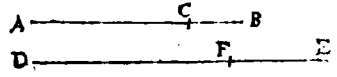
La ligne AB soit $\sqrt{(\sqrt{972}+\sqrt{405})}-\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$, *& BC* $\sqrt{(\sqrt{972}-\sqrt{405})}$: *donc la toute AC sera*

√(√972+√405), au quarré de laquelle ſoit egal le rectangle DH, appliqué ſur la rationele DE: l'autre coſté DI ſera donc √27+√11¼: mais eſtant appliqué ſur la meſme rationele, le rectangle IK egal au quarré de BC, qui eſt √972—√405, l'autre coſté IL ſera √27—√11¼: & partant la toute DL ſera √108: Si derechef on applique ſur la meſme rationele le rectangle MK, ou GN, egal au rectangle de ACB, qui eſt √567, l'autre coſté GM ſera √15¾, & ſon double √63: parquoy DG ſera √108—√63, qui eſt reſidu ſixieſme.

THEOR. 80. PROP. CIIII. Six. 6.

La ligne droicte commenſurable en longitude à vn reſidu, eſt auſſi reſidu, & de meſme ordre.

Soit le reſidu AC, auquel ſoit commenſur. en longitude la ligne droicte DF. Ie dis que DF eſt reſidu de meſme ordre que AC.



Car CB ſoit la conuenable au reſidu AC, tellement que AB, CB ſoient rationeles commenſ. en puiſſ. ſeulement, & par la 12.pr.6. ſoit fait que comme AC eſt à DF, ainſi CB ſoit à FE. Donc par la 12. prop. 5. la toute AB ſera à la toute DE, comme AC à DF, ou CB à FE: & par la 10. p. 10. comme AC eſt commenſ. en long. à DF, ainſi AB à DE, & BC à FE. Et en permutant, comme AB à BC, ainſi DE à FE. Maintenant, comme AB & BC ſont rationeles, auſſi ſeront DE & FE: (car elles ſont commenſ. à icelles, par la 10. p. 10.) Mais AB & BC ſont commenſ. en puiſſance ſeulement: partant DE & FE ſeront auſſi

rationeles commenſ. eu puiſſance ſeulement, & par la 74. prop. DF eſt reſidu.

Ie dis dauantage qu'il eſt reſidu de meſme ordre que AC. Car la ligne AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſurable en longitude: ſi commenſur. auſſi DE pourra plus que FE de meſme façon par la 15. p. 10. (eſtans les quatre lignes proport.) que ſi AB eſt commenſurable en longit. à vne ligne rationele propoſee, auſſi DE qui luy eſt commenſur. en longit. ſera commenſ. en longit. à la meſme rationele propoſee par la 12. prop. 10. Parquoy AC & DF ſeront reſidus premiers: Que ſi BC eſt commenſ. en longit. à la rationele, auſſi ſera FE; & AC, DF ſeront reſidus ſeconds: Et ſi AB & BC ſont incommenſ. en longit. à la rationele, auſſi ſeront DE & FE; & AC, DF ſeront reſidus troiſieſmes. Que ſi AB peut plus que BC du quarré d'vne ligne qui luy ſoit incommenſ. en long. auſſi DE pourra plus de meſme que FE par la 15 pr. 10. Et ſi AB eſt commenſ. en longit. à la rationele, auſſi ſera DE: & AC, DF ſeront reſidus quatrieſmes. Mais ſi BC eſt commenſ. en longit. à la rationele, auſſi ſera FE: & AC, DF ſeront reſidus cinquieſmes. Si AB & BC ſont incommenſ. en longit. à la rationele, auſſi ſeront DE & FE: partant AC & DF ſeront reſidus ſixieſmes: par ainſi DF eſt reſidu de meſme ordre que AC. Parquoy la ligne commenſ. en long. a vn reſidu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Le reſidu AC ſoit √60—√12, & DF √15—√3, leſquelles ſont commenſ. en longit. l'vne eſtant double de l'autre, & la conuenable CB ſoit √12: Donc la toute AB eſt √60: & puis que comme AC eſt à DF, ainſi CB √12 eſt à FE; celle FE ſera √3: & la toute DE √15, commenſ ſeulement en puiſſance à DF.

THEOR. 81. PROP. CV.

La ligne droicte commenſurable à vn reſidu medial, eſt auſſi reſidu medial de meſme ordre.

Soit la ligne DF commenſ. au reſidu medial AC: ie dis que icelle DF eſt auſſi reſidu medial, & de meſme ordre que AC.

Car ayant faict meſme conſtruction qu'en la prec. prop. AB & BC ſeront commenſ. à DE, EF leſquelles ſont mediales commenſ en puiſſance ſeulement, & par la 24. p. 10. DE & FE ſeront mediales commenſurables en puiſſance ſeulement, par la 10. p. 10. Et partant par la 75. ou 76. prop. DF eſt reſidu medial: Ie dis dauantage qu'il eſt de meſme ordre que AC.

Car par la 1. p. 6. le quarré de AB eſt au rectangle de AB, BC comme AB à BC: Item le quarré de DE eſt auſſi au rectangle de DE, FE comme DE à FE. Maisle quarré de AB eſt commenſ. au quarré de DE, eſtant AB & DE commenſ. & par la 10. prop. 10. les deux rectangles ſeront auſſi commenſ. & comme l'vn ſera rationel ou medial, auſſi l'autre ſera rationel ou medial: partant ſi les rectangles ſont rationaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux premiers: & ſi les rectangles ſont mediaux, AC & DF ſeront reſidus mediaux ſeconds. Donc la ligne commenſ. à vn reſidu medial, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

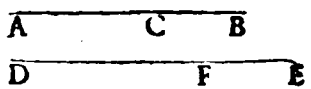
SCHOLIE.

Le reſidu medial AC ſoit $\sqrt{\sqrt{500}} - \sqrt{\sqrt{20}}$, *&* DF $\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}} - \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$: BC *ſera* $\sqrt{\sqrt{20}}$, *& la toute* AB $\sqrt{\sqrt{500}}$: *mais* FE *ſera* $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}}$, *& la toute* DE $\sqrt{\sqrt{31\frac{1}{4}}}$.

THEOR. 82. PROP. CVI.

La ligne commenſurable à vne ligne mineure, eſt auſſi ligne mineure.

Soit la ligne DF, commenſurable à vne ligne mineure AC: ie dis qu'icelle DF eſt auſſi ligne mineure. Car CB eſtant conuenable à icelle AC, apres auoir faict meſme conſtruction qu'en la 104. pr. 10. AB & BC ſeront incommenſ. en puiſſance, comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel. Mais comme AB à CB, ainſi DE à FE, & par la 10. p. 10. DE & FE ſeront incommenſ. en puiſſance. Item puis que comme AB à BC. ainſi DE à FE, par la 22 prop. 6. leurs quarrez ſeront proportionaux: & en compoſant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au quarré de BC, ainſi le compoſé des quarrez de DE, FE, ſera au quarré de FE: & en permutant, comme le compoſé des quarrez de AB, BC ſera au compoſé des quarrez de DE, FE, ainſi le quarré de CB ſera au quarré de FE:



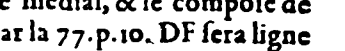
leſquels quarrez de CB & FE ſont commenſ. (car les lignes BC & FE ſont commenſur. comme AC & DF, ainſi qu'il a eſté demonſtré à la 104. p.) & partant par la 10. prop 10. le compoſé des quarrez de AB & BC, (lequel eſt rationel) ſera commenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE, lequel ſera auſſi rationel. Pareillement, puis que comme à la prop. prec. le quarré de AB, eſt au rectangle de AB & CB, comme le quarré de DE eſt au rectangle de DE & FE: en permutant, comme le quarré au quarré, ain-

ſi le rectangle au rectangle: c'eſt à dire commenſur. Car les lignes AB & DE ſont comm. par la 10.pr. 10. & par le corol. de la 24. p. 10. le rectangle de AB & BC eſtant medial, celuy de DE & FE ſera auſſi medial: parrant DE & FE eſtant incommenſ. en puiſſ. comprenant vn rectangle medial, & le compoſé de leurs quarrez rationel, par la 77.p.10. DF ſera ligne mineure. Donc la ligne comm. à vne ligne mineure eſt auſſi ligne mineure. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 83. PROP. CVII.

La ligne droicte commenſurable à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial, eſt auſsi ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Soit la ligne DF comm. à la ligne AC, faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial. Ie dis que DF eſt auſſi ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.



Car ſoit CB conuenable à AC, tellement que AB, CB ſoient incommenſ. en puiſſance, & facent le compoſé de leurs quarrez medial, mais le rectangle compris d'icelles, rationel: Et eſtant faict meſme conſtruction qu'en la 104. prop. on demonſtrera comme en la precedente que les lignes DE, & FE ſont incommenſ. en puiſſance; & que le compoſé des quarrez de AB, CB eſt commenſur. au compoſé des quarrez de DE, FE. Mais celuy-là eſt medial: auſsi ſera donc ceſtuy-cy, par le corol. de

la 24. p. 10. Derechef, comme nous auons demonſtré en la 105. prop. le rectangle de AB, CB eſt commenſurable au rectangle de DE, FE: mais ceſtuy-là eſt poſé rationel: auſſi ſera donc ceſtuy-cy par la 9. d. 10. Veu donc que DE, FE, ſont incommenſ. en puiſſance, & ſont le compoſé de leurs quarrez medial, mais leur rectangle rationel, par la 78. pr. 10. DF ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie ratiopele vn tout medial. Parquoy la ligne commenſurable à vne ligne, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 84. PROP. CVIII.

La ligne commenſurable à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, eſt auſsi ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ligne DF commenſ. à la ligne AC, faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial: Ie dis que DF eſt auſſi ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Car à AC ſoit CB conuenable, tellement que AB, CB ſoient incommenſurables en puiſſance, & facent le compoſé de leurs quarrez medial, & leur rectangle auſſi medial, & incommenſ. au compoſé de leurs quarrez: & ayant fait ſemblable conſtruction qu'aux precedentes, on prouuera comme en la 106. prop. que les lignes DE, FE, ſont incommenſurables en puiſſance, & que le compoſé des quarrez de AB & BC, eſt commenſurable au compoſé des quarrez de DE & FE: & comme en la 105. prop. que le rectangle de AB & BC, eſt commenſurable au rectangle de DE & EF. Mais le rectangle de AB

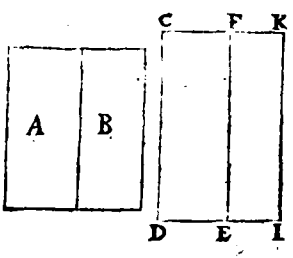
& CB, eſt medial, & incommenſurable au compoſé des quarrez de AB & CB, auſſi medial: partant par le ſcholie de la 14. p 10. le rectangle de DE & FE, ſera medial, & incommenſ. au compoſé des quarrez de DE & FE auſſi medial: & DF ſera ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial. Donc la ligne commenſ. à vne ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 85. PROP. CIX.

Si d'vne ſuperficie rationele, eſt retranchee vne ſuperficie mediale: la ligne qui peut le reſte eſt reſidu, ou ligne mineure.

Soit la ſuperficie rationele AB, de laquelle ſoit retranchee la mediale A: Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu, ou ligne mineure.

Car ſur vne rationele propoſee CD ſoit deſcrit le rectangle CE egal à A, & ſur FE le rectangle FI egal à B. Il eſt euident que CI egal au rationel AB, ſera auſſi rationel, & par la 21. pr. 10. ſon autre coſté CK ſera rationel commenſur. en longitude à CD. Item par la 23. p. 10. CE eſtant medial, CF ſera rationele commenſ. en puiſſance ſeulement à CD, & par la 13. pr. 10. CK & CF ſeront rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement: & partant par la 74. pr. 10. FK ſera reſidu, & FC ſa conue-



nable. Parquoy CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſ. ou incommenſ. en longit. Si commenſurable, FK ſera reſidu premier: & partant la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu par la 92. pr. 10. Si incommenſurable, FK eſt reſidu quatrieſme: & conſequemment la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt ligne mineure par la 95. pr. 10. Parquoy ſi d'vne ſuperficie rationele, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si l'eſpace rationel AB eſt 32, le medial AV 320, & la ligne rationele CD 6, ſur laquelle eſt deſcrit le rectangle CE egal à A, & FI egal à B: les coſtez CF, & FK, ſeront $V8\frac{8}{9}$, *&* $5\frac{1}{3} - V8\frac{8}{9}$: *& partant la toute CK ſera* $5\frac{1}{3}$: *& le rectangle CI 32, duquel oſtant CE, qui eſt V 320, le reſte rectangle FI ſera* $32 - V320$: *& la ligne pouuant iceluy ſera* $V(16 + V176) - V(16 - V176)$, *qui eſt ligne mineure.*

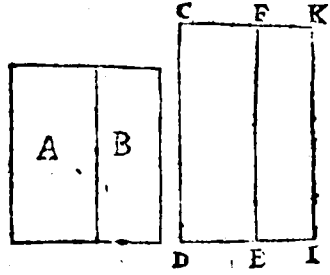
THEOR. 86. PROP. CX.

Si d'vne ſuperficie mediale eſt retranchee vne ſuperficie rationele, la ligne qui peut le reſte, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchee la rationele A. Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu medial premier, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.

Car, ayant conſtruit comme en la preced. puis que la ſuperficie totale AB eſt mediale, auſſi la totale CI eſt

CI est mediale, & par la 23 pr.10. le costé CK est rationel commens. en puissance seulement à la rationele CD. Item puis que le retranché A est rationel, aussi sera son egal CE, & par la 21. pr. 10. CF sera rationele commens. en longitude à la rationele CD: & par la 13.pr.10. CK & CF seront rationeles commens. en puissance seulement; & partant par la 74.pr.10. FK sera residu, & FC sa conuenable. Donc CK peut plus que CF du quarré d'vne ligne qui luy est commensurable ou incommensurable en longitude, & consequemment FK sera residu second, ou residu cinquiesme. Si residu second; la ligne qui peut le rectangle FI (ou son egal B) est residu medial premier par la 93.pr.10. Si residu cinquiesme, la ligne qui peut le rectangle FI, est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial par la 96.pr.10. Parquoy si d'vne superficie mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

Si la superficie mediale AB est √800, & la rationele A 12: le reste B sera √800—12, & la ligne pouuant iceluy sera √(√200+√164) —√(√200—√164), qui est ligne faisant auec vne superficie rationele vn tout medial.

THEOR. 87. PROP. CXI.

Si d'vne superficie mediale, est retran-

chee vne ſuperficie mediale incommenſurable à la toute ; la ligne qui peut le reſte eſt ou reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

Soit la ſuperficie mediale AB, de laquelle ſoit retranchee la ſuperficie mediale A, incommenſ. à la toute AB. Ie dis que la ligne qui peut le reſte B, eſt reſidu medial ſecond, ou ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

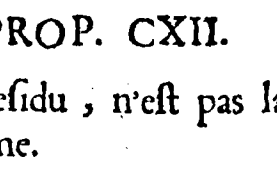
Car ayant fait meſme conſtruction qu'aux precedentes, les rectangles CI, CE ſeront mediaux & incommenſurables entr'eux ; & par la 23. prop. 10. les lignes CK, CF ſeront rationeles incommenſ. en longitude à CD. Et puis que CI, CE ſont incommenſ. les rationeles CK, CF, qui par la 1. prop. 6. ſont en meſme raiſon que CI, CE, ſeront auſſi incommenſ. en longitude, par la 10. prop. 10. & par conſequent elles ſont ſeulement commenſ. en puiſſance : Donc FK ſera reſidu par la 74. pr. 10. & FC ſa conuenable. Partant CK peut plus que FK, du quarré d'vne ligne qui luy eſt commenſurable ou incommenſ. en longitude : ſi commenſ. FK ſera reſidu troiſieſme, par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou ſon egal B) eſt reſidu medial ſecond, par la 94. prop. Si incommenſ. FK ſera reſidu 6^e. par la def. Parquoy la ligne qui peut le rectangle FI (ou B ſon egal) eſt ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, par la 97. prop. Si donc d'vne ſuperficie mediale, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si la superficie mediale AB est √279, & A √40: la superficie restante B sera √279 — √40: & la ligne pouuant icelle sera √(√69¾ + √59¾) — √(√69¾ — √59¾), qui est appellee ligne faisant auec vne superficie medial vn tout medial.

THEOR. 88. PROP. CXII.

La ligne appellee residu, n'est pas la mesme que Binome.



Soit quelconque residu A. Ie dis qu'elle n'est pas mesme ligne que binome.

Car soit la rationele proposee BC, sur laquelle soit appliqué le rectangle CD egal au quarré du residu A: par la 98. prop. BD sera residu premier, auquel si on adiouste sa conuenable DE; BE & DE, seront rationeles commens. en puissance seulement: & BE commens. en longitude à la rationele BC.

Maintenant si on pose A estre binome; BD sera binome premier par la 61. pr. 10. lequel estant diuisé en ses noms au poinct F; (estant BF le plus grand nom) BF & FD seront rationeles commens. en puissance seulement, & BF commensurable en longitude à la rationele BC: & par la 12. pr. 10. BE & BF, seront commens. en longitude. Veu donc que la toute BE est commens. en longit. à la partie BF, par le coroll. de la 16. pr. 10. l'autre partie FE sera aussi

commenſ. en longit. à BE : partant auſſi rationele comme icelle BE. Mais DE qui eſt auſſi rationele, n'eſt pas commenſurable en longitude à BE, & par la 14. pr. 10. FE, DE ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : & partant par la 74. p. 10. FD eſt reſidu, & par conſequent irrationele ; ce qui eſt abſurde : car elle a eſté prouuee rationele : donc le reſidu A ſera differend du binome. Parquoy la ligne appellee reſidu n'eſt pas la meſme que binome. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

De ces choſes on peut facilement colliger que la ligne appellee reſidu, & les cinq ſortes de lignes irrationeles ſuiuantes, ſont differentes de la mediale, & entr'elles. Car le quarré de la mediale appliqué à vne ligne rationele, fait l'autre coſté rationel commenſurable en puiſſance ſeulement à icelle rationele, par la 23. p. 10.

Le quarré du reſidu, fait l'autre coſté reſidu premier, par la 98. p. 10.

Le quarré du reſidu medial premier, fait l'autre coſté reſidu ſecond, par la 99. p. 10.

Le quarré du reſidu medial ſecond, fait l'autre coſté reſidu troiſieſme, par la 100. p. 10.

Le quarré de la ligne mineure, fait l'autre coſté reſidu quatrieſme, par la 101. p. 10.

Le quarré de la ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial, fait l'autre coſté reſidu cinquieſme, par la 102. p. 10.

Le quarré de la ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial, fait l'autre coſté reſidu ſixieſme par la 103. pr. 10.

Puis donc que tous ces coſtez, (qui ſont les latitudes des rectangles) ſont differens ; les lignes qui les peuuent ſeront

auſsi differentes. Mais les quarrez des binomes, & des cinq lignes irrationeles ſuiuantes, eſtans appliquez à vne ligne rationele font l'autre coſté binome de quelque ordre: partant le binome, & les cinq ſuiuantes ſont differentes du reſidu, & des cinq ſuiuantes.

Ainſi toutes les lignes irrationeles cy deuant dictes ſont treize: ſçauoir celles-cy.

1. Mediale.
2. Binome.
3. Bimediale premiere.
4. Bimediale ſeconde.
5. Ligne majeure.
6. Ligne pouuant vn rationel & vn medial.
7. Ligne pouuant deux mediaux.
8. Reſidu.
9. Reſidu medial premier.
10. Reſidu medial ſecond.
11. Ligne mineure.
12. Ligne faiſant auec vne ſuperficie rationele vn tout medial.
13. Ligne faiſant auec vne ſuperficie mediale vn tout medial.

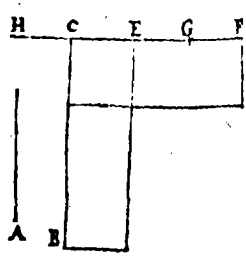
THEOR. 89. PROP. CXIII.

Le quarré d'vne ligne rationele eſtant appliqué à vn binome, fait l'autre coſté reſidu, les noms duquel ſont proportionaux, & commenſ. aux noms du binome: en outre le reſidu eſt de meſme ordre que le binome.

Soit la rationele A, & le binome BC, duquel le plus grand nom ſoit BD: & à icelle BC ſoit appliqué

le rectangle BE egal au quarré de la rationele A. Ie dis que l'autre costé CE est residu duquel les noms, c'est à dire la ligne totale & sa conuenable, sont proportionnaux & commenſ. aux noms BD, DC du binome BC: & en outre qu'iceluy residu est de meſme ordre que ledit binome.

Car au moindre nom CD soit appliqué le rectangle DF aussi egal au quarré de la rationele A: donc les deux rectangles BE, DF, seront egaux, & par la 14. pr. 6. leurs costez seront reciproques, sçauoir que comme BC à DC, ainsi CF à CE; & en diuisant, comme BD à DC, ainsi FE à EC. Mais BD est plus grande que CD: donc aussi FE sera plus grande que EC. Maintenant de EF soit retranchee EG egale à EC, & soit fait que comme FG à GE, ainsi EC soit à CH par la 12. p 6. & en composant, comme FE sera à EG, (ou EC son egale) ainsi EH à CH, & par la 12. p. 5. les deux antecedens FEH seront aux deux consequens ECH, comme l'vn des antecedens EH à l'vn des consequens CH: & partant les trois lignes FH, EH, CH, seront continuellement proportioneles en la raison de FE à EC, ou BD à DC: & par la 22. pr. 6. & 10. pr. 10. comme le quarré de BD est commenſ. au quarré de DC, (car iceux quarrez sont commenſ. puis que BD, DC sont les noms du binome BC) ainsi le quarré de EH sera commenſ. au quarré de CH: & par le coroll. de la 20. p. 6. & 10. p. 10. CH sera commenſ. en longitude à la troisieſme proportionele FH, & par la 16. p. 10.



CH & GF seront commens. en longitude. Et d'autant que le rectangle DF est rationel (estant egal au quarré de la ligne rationele A) & DC ligne rationele : CF sera aussi ligne rationele commens. en longitude à CD par la 21. p. 10. Et CH sera aussi rationele commens. en longitude à CD, par la 12. p. 10. & par la 10. p. 10. comme CD & DB sont rationeles commens. en puissance seulement, aussi CH, EH, seront rationeles commens. en puissance seulement: & partant par la 74. p. 10. CE sera residu, duquel les noms EH, CH sont proportionaux, & commens. aux nõs BD, DC, du binome BC: Car il a esté demonstré que comme BD est à DC, ainsi EH à CH ; & partant en permutant, comme BD sera à EH, ainsi DC à CH. Mais DC, CH ont esté demonstrees commens. en longitude par la 10. p. 10. BD, EH, seront donc aussi commens. en longitude.

Reste donc à prouuer que le residu CE est de mesme ordre que le binome BC : Or les noms de l'vn estans proportionnaux, & commens. aux noms de l'autre : par la 15. p. 10. comme le plus grand nom du binome pourra plus que le plus petit du quarré d'vne ligne qui luy sera commens. ou incommens. en longitude : aussi le plus grand nom du residu pourra plus de mesme. Que si le plus grand nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus nom grand du residu par la 12. p. 10. & ils seront binome premier, & residu premier. Que si le plus petit nom du binome est commens. en longitude à la rationele, aussi sera le plus petit du residu ; & ils seront binome & residu second. Que si ny l'vn ny l'autre nom du binome est commens. à la rationele: semblablement l'vn ny l'autre nom du residu ne sera commens. à la mesme rationele par la

14.p.10. & partant ils seront binome, & residu troisiesme: & ainsi des autres. Parquoy le quarré d'vne ligne rationele estant appliqué sur vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

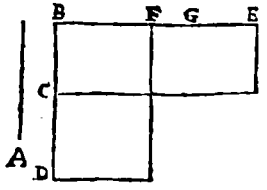
SCHOLIE.

Si la rationele A est 8, le binome BC 9+√45, tellement que BD soit 9, & CD√45: Le quarré de A estant appliqué sur BC, l'autre costé du rectangle CE sera 16—√142 2/9, qui est residu: & puis que comme DC est à CB, ainsi CE à CF, icelle CF sera √91 1/45; & EF√460 4/5—16. Mais EG estant egale à CE, est 16—√142 2/9; GF√115 1/5—32: & d'autant que comme FG est à GF, ainsi EC à CH, icelle sera √142 2/9, & EH 16: Ainsi est manifeste que CE est residu de mesme ordre que le binome BC, & que les noms EH, CH, sont proportionnaux aux noms BD, CD.

THEOR. 90. PROP. CXIIII.

Le quarré d'vne ligne rationele, estant appliqué à vn residu, faict l'autre costé binome, les noms duquel sont proportionaux, & commensur. aux noms du residu: En outre le binome est de mesme ordre que le residu.

Soit la rationele A, & le residu BC, auquel conuienne CD, & sur BC soit descrit le rectangle CE egal au quarré de la rationelle A: Ie dis que l'autre costé BE est binome, dont les noms sont proport. & commens. à BD, CD, noms du residu BC; & en outre



qu'iceluy binome BE eſt de meſme ordre que ledit reſidu BC.

Car ſur BD ſoit deſcrit le rectangle D F egal au meſme quarré de la rationele A : Donc les rectangles CE & DF ſeront egaux, & ayans les coſtez reciproques par la 14. p. 6. BD ſera à BC comme BE à BF ; & par conuerſion de raiſon, BD ſera à CD comme BE à FE. Maintenant ſoit couppée EF en G, par la 10. p. 6. tellement que comme BE eſt à FE, ainſi EG ſoit à GF : Veu donc que comme la toute BE eſt à la toute FE, ainſi EG retranchée de BE, eſt à GF retranchee de FE, auſſi par la 19. prop. 5. le reſte BG ſera au reſte EG, comme la toute à la toute, c'eſt à dire comme la retranchee EG à la retranchee GF : & partant EG eſt moyenne proportionele entre BG & GF. Parquoy comme BG ſera à GF, ainſi le quarré de BG ſera au quarré de EG, par le corollaire de la 20. p. 6. Et puis que comme BD à CD, ainſi BE à FE, c'eſt à dire BG à GE ; & BD, CD noms du reſidu BC ſont rationeles commenſ. en puiſſance ſeulement : par la 10. p. 10. BG, GE ſeront auſſi commenſ. en puiſſance ſeulement : & partant les quarrez d'icelles BG, GE ſont commenſ. & par conſequent les lignes BG, FG qui ont meſme raiſon qu'iceux quarrez, ſont commenſ. en longit. par la meſme 10. p. 10. Et par le corol. de la 16. prop. 10. BG, BF ſeront auſſi commenſ. en longit. Et d'autant que BD plus grand nom du reſidu BC eſt rationele, & le rectangle DF egal au quarré de la rationele A, eſt rationel ; par la 21. p. 10. BF ſera auſſi rationele commenſ. en longit. à BD. Donc par la 12. pr. 10. BG ſera auſſi rationele commenſ. en longit. à la meſme BD. Et puis que BG, GE, ont eſté demonſtrees commenſ. en puiſſance ſeulement, & BG rationele ; GE ſera auſſi rationele.

Donc BG, GE ſont rationeles commenſ. *en puiſſance ſeulement*: Et partant par la 37. pr. 10. BE *eſt* binome: duquel les noms BG, GE, ſont proportionaux, & commenſ. aux noms BD, CD, du reſidu BC. Car il a eſté demonſtré que comme BD à CD, *ainſi* BG à GE: & partant en permutant, comme *BD* à BG, ainſi CD à GE: mais BD a eſté demonſtré commenſurable en longitude à BG: donc auſsi CD ſera commenſ. en longitude à GE, par la 10. p. 10. Reſte donc à prouuer que BE eſt binome de meſme ordre que le reſidu BC: ce qu'on fera procedant tout ainſi qu'en la precedente. Parquoy le quarré d'vne ligne rationele eſtant appliqué ſur vn reſidu, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

si la rationele A eſt 4, & le reſidu BC 9 — √45, CD √45, & BD 9, le rectangle DF ſera 16, & auſsi CE 16: ainſi le coſté BF ſera 1 1/9, & BE 4 + √8 8/9: & par conſequent FE ſera √8 8/9 + 2 1/9; & GE 8 8/9, FG 2 1/9, BG 4: ainſi eſt euident que BE eſt binome en meſme ordre que le reſidu BC, & que les noms d'iceux ſont proportionaux.

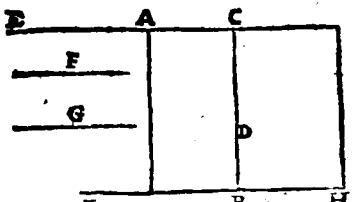
THEOR. 91. PROP. CXV.

Si vn rectangle eſt compris d'vn reſidu, & d'vn binome, deſquels les noms ſont proportionaux & commenſurables; la ligne droicte pouuant iceluy rectangle eſt rationele.

Soit le rectangle AB compris ſous le reſidu AC, & le binome CB, duquel les noms CD, DB ſoient proportionaux, & commenſurables aux noms CE, AE du reſidu AC: & ſoit la ligne droicte F pouuant

iceluy rectangle AB. Ie dis que F est rationele.

Car soit vne rationele proposee G, le quarré de laquelle estant appliqué sur le binome CB, face le rectangle CH. Donc par la 113. prop. l'autre costé BH sera residu, duquel les noms HI, BI sont commensur. & proportionaux aux noms CD, DB, sçauoir est que comme HI à BI, ainsi CD à DB, & parrant ainsi CE à AE: & en permutant, comme la toute HI à la toute CE, ainsi la retranchee BI à la retranchee AE; & par la 19. prop. 5. le reste BH sera aussi au reste AC, comme la toute à la toute. Mais icelles toutes sont commens. en longitude par la 12. prop. 10. pource que l'vne & l'autre est commens. à CD: donc aussi BH, AC seront commensurables en longitude par la 10. prop. 10. & par consequent les rectangles HC & BA estans par la 1. prop. 6. en mesme raison que BH, & AC, ils seront aussi commensurables. Mais HC, egal au quarré de la rationele G, est rationel: donc aussi AB sera rationel; & parrant la ligne F qui peut iceluy AB, sera aussi rationele. Si donc vn rectangle est compris d'vn residu, & d'vn binome, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



COROLLAIRE.

De cecy est manifeste qu'vn rectangle rational, peut estre compris de lignes irrationeles.

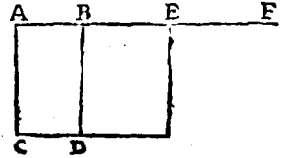
SCHOLIE.

Si le residu AC est $4-\sqrt{8\frac{1}{2}}$, *tellement que les noms d'iceluy CE, & AE soient* 4, *&* $\sqrt{8\frac{1}{2}}$, *mais le binome BC soit*

9+√45, le rectangle AB ſera 16, qui eſt rationel: & partant la ligne F qui peut iceluy eſt 4, & par conſequent rationele. Or la rationele G eſtant 8, le rectangle CH ſera 64, & le coſté BH 16—√142½, HI 16, & EI √142½.

THEOR. 92. PROP. CXVI.

De la ligne mediale naiſſent infinies lignes irrationeles, toutes differentes des deuant dites.



Soit la ligne mediale AB: ie dis que d'icelle naiſſent infinies lignes irrationeles toutes differentes des treize lignes deuant dites.

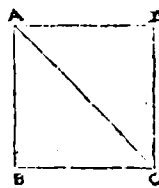
Car ſi ſur l'extremité de la mediale on meine la perpendiculaire AC qui ſoit rationele, & on acheue le rectangle AD, iceluy rectangle ſera irrationel par le corol. de la 39. p. 10. & par la 11. def. 10. la ligne qui peut iceluy rectangle eſt irrationele, ſoit icelle BE; laquelle ſera differente de toutes les lignes deuant dites. Car ſon quarré appliqué à vne ligne rationele AC, fait l'autre coſté AB medial: Ce que ne faiſoit pas vne des 13 lignes deuant dictes. Item ſi on accomplit le rectangle DE, il ſera auſſi irrationel par le meſme corol. & la ligne qui le peut, auſſi irrationele: & ſoit EF, laquelle ſera differente de toutes les lignes deuant dites. Car le quarré de pas vne d'icelles, appliqué à vne ligne rationele, ne fait l'autre coſté tel que BE: & procedant de ceſte façon, on trouuera infinies autres lignes irrationeles differentes entr'elles & des precedentes. Parquoy de la ligne mediale, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Si la mediale AB eſt √√2, & la rationele AC 2, le rectangle AD ſera √√ 32, & la ligne BE qui peut iceluy ſera √√√32: Ainſi le rectangle DE ſera √√√ 512, & la ligne EF qui peut iceluy ſera √√√√512, & ainſi à l'infiny.

THEOR. 93. PROP. CXVII.

Au quarré, la diagonale eſt incommenſurable en longitude au coſté.



Soit le quarré ABCD, duquel AC ſoit diagonale. Ie dis qu'icelle diagonale AC eſt incommenſ. en longitude au coſté AB.

Car par la 47. prop. 1. le quarré de AC eſt double du quarré de AB: mais toute grandeur double d'vne autre eſt comme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c. Donc le quarré de AC eſt au quarré de AB, cõme 2 à 1, ou 4 à 2, ou 8 à 4, &c, qui n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré, comme nous auõs demonſtré au corol. de la 24. prop. 8. & partant par la 9. pr. 10. la diagonale AC, & le coſté AB, ſont incommenſ. en longitude. Donc au quarré, la diagonale eſt incommenſ. en longitude au coſté. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Si AB coſté du quarré eſt 1, la diagonale AC ſera √2: tellement que la raiſon du coſté au diametre eſt comme 1 à √2, c'eſt à dire incommenſ. en longitude.

Fin du dixieſme Element.

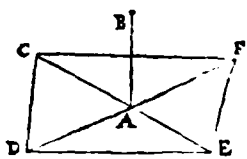
ELEMENT VNZIESME.

DEFINITIONS.

1. SOlide, eſt ce qui a longueur, largeur & profondeur.

2. Mais les termes d'vn ſolide, ſont ſuperficies.

3 Vne ligne droicte eſt perpendiculairement eſleuee ſur vn plan, quand toutes les lignes droictes conſtituees ſur iceluy plan, & menees vers elle la rencontrent en angles droicts.

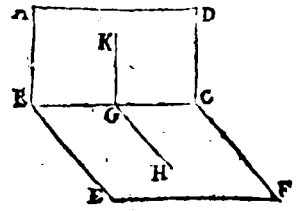


Soit la ligne droicte AB eſleuee au deſſus du plan CDEF, ſur lequel ſoient menees tant de lignes droictes que l'on vaudra CA, DA, EA & FA, qui rencontrant en A ladite ligne AB faſſent les angles droicts CAB, DAB, EAB & FAB: Nous dirons donc qu'icelle

ligne AB est perpendiculaire, ou esleuee à angles droicts sur ledit plan proposé CDEF.

4. Vn plan est esleué perpendiculairement sur vn plan, quand les lignes menees sur l'vn d'iceux perpendiculairement à la ligne de commune section, sont aussi perpendiculaires à l'autre plan.

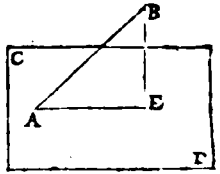
Soit le plan ABCD esleué sur le plan BEFC, tellement que la ligne AD soit en l'air, & la ligne BC leur commune section: mais au plan BEFC, soit tiree la ligne droicte GH perpendiculaire à icelle commune section BC. Maintenant si la mesme ligne GH est aussi perpend. à l'autre plan ABCD, c'est à dire qu'ayant mené en iceluy du poinct G, quelque ligne droicte, comme GK, l'angle HGK soit droict: iceluy plan ABCD sera esleué perpendiculairement ou à angles droicts sur l'autre plan BCEF. Partant lors qu'vn plan est esleué à angles droicts sur quelque autre plan, aussi les lignes droictes menees en l'vn d'iceux à angles droicts à leur commune section, seront perpendiculaires à l'autre plan: tellement que si on dit que le plan ABCD est esleué à angles droicts sur le plan BCEF, & qu'en celuy-là soient menees les lignes droictes AB, KG, DC perpendic. à la commune section BC, nous conclurons qu'icelles lignes sont aussi perpendic. à l'autre plan BCEF, & sont les angles ABE, KGH, DCF droicts.



5. L'inclination d'vne ligne droicte à

vn plan, eſt l'angle aigu contenu d'icelle ligne, & d'vne autre ligne droicte menee au plan de l'inclinante, par le poinct auquel tombe vne perpendiculaire tiree du ſommet d'icelle inclinante ſur ledit plan.

Soit la ligne droicte AB incline au plan CD, & du poinct du ſommet B, ſoit menee BE perpendic. au meſme plan CD, & tiree AE: l'angle aigu BAE ſera l'inclination de ladite ligne AB au plan CD.

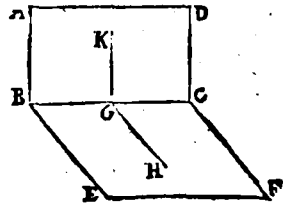


6. Vn plan eſt incliné ſur vn plan, quand les lignes menees ſur l'vn & l'autre plan perpendiculaires à la ligne de commune ſection, & vers vn meſme poinct d'icelle, ne ſont point perpendiculaires les vnes aux autres: & l'inclination d'iceux plans, eſt l'angle aigu compris d'icelles perpendiculaires.

Soit le plan ABCD eſleué au deſſus du plan BCFE, tellement que la ligne AD eſt en l'air, & BC leur commune ſection: mais de quelque poinct d'icelle comme G, ſoient menees GH au plan CE, & GK au plan AC, chacune perpendiculaire à ladite BC. Or ſi leſdites perpendiculaires GH & GK, ne ſont perpendiculaires entr'elles,

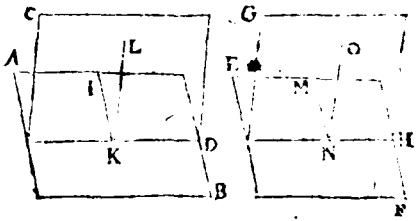
c'eſt

c'eſt à dire que l'angle KGH ne ſoit droict, le plan ABCD ſera incliné au plan BCEF, & l'angle aigu KGH contenu ſous icelles perpendiculaires GH, GK ſera l'inclination d'iceux plans.



7. Vn plan eſt dit eſtre ſemblablement incliné à vn plan, & vn autre à vn autre, lors que les ſuſdicts angles d'inclinations ſont egaux entr'eux.

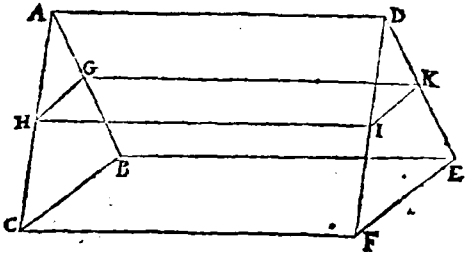
Soient deux plans AB, CD, inclinez entr'eux, & deux autres plans EF, GH, auſſi inclinez entr'eux; mais que l'angle d'inclination de ceux-là, qui eſt IKL, ſoit egal à l'angle d'inclination de ceux-cy, qui eſt MNO: Le plan AB ſera ſemblablement incliné au plan CD, que le plan EF au plan GH, c'eſt à dire que l'inclination de ces deux plans-là ſera ſemblable & egale à l'inclination de ces deux-cy.



8. Plans parallels, ſont ceux leſquels eſtans continuez ne ſe rencontrent point.

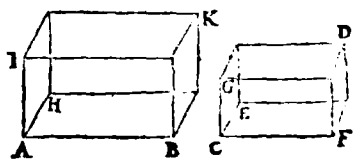
Comme ſi les deux plans ABC, DEF, eſtans prolongez de part & d'autre, ne ſe rencontrent point: iceux plans ſeront parallels entr'eux. Item, les deux plans BCFE, GHIK

ne se pouuant iamais rencontrer estans prolongez, seront aussi dicts plans parallels, mais non pas les deux plans



CHIF, BGKE, lesquels estans continuez se rencontrent en AD.

9. Solides semblables, sont ceux qui sont compris de plans semblables, egaux en nombre.

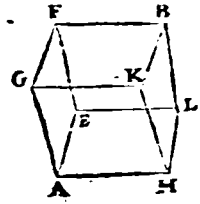


Comme les solides AK, & CD, chacun desquels est contenu & enuironné de six plans ou superficies semblables, seront dicts solides semblables.

10. Solides egaux & semblables, sont ceux qui sont compris & enuironnez de semblables plans, egaux en nombre & grandeur.

C'est à dire que si les plans semblables, qui suiuant la preced. def. contiennent les corps semblables, sont egaux chacun au sien: tels solides ne seront pas seulement dicts semblables, mais aussi egaux: Comme chacun des corps

AB, CD, estant contenu de six plans semblables & egaux, chacun à son correspondant, seront dicts corps ou solides egaux & semblables.



11. Angle solide, est l'inclination ou rencontre de plus de deux lignes, qui se touchans en vn mesme poinct, ne sont constituees sur vn mesme plan. *ou bien*, Angle solide, est celuy qui est contenu sous plus de deux angles plans, qui se rencontrans à vn mesme poinct sont constituez sur plans differens.

Nous auons dit au premier liure que quand deux lignes droictes constituees à vn mesme plan se rencontrent indirectement à vn poinct, elles font vn angle plan, tel qu'est l'angle BAC contenu des deux lignes AB, AC, constituees en vn mesme plan: Mais s'il y interuient vne troisiesme ligne comme AD, qui ne soit constituee au mesme plan, ains que le poinct D soit en l'air hors le plan d'icelles, sera fait au poinct A vn angle solide:



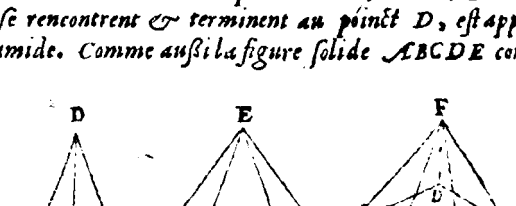
Lequel est aussi constitué par les trois angles plans BAC, BAD, & CAD, qui se rencontrent au mesme poinct A, & sont constituez sur plans differens.

Mais est icy à noter que ceste def. ne comprent que les an-

gles solides qui sont contenus sous plans de deux lignes droictes, ou plus de deux angles plans rectilignes: car elle ne comprend pas l'angle du cone, qui est contenu d'vne seule superficie courbe; ny celuy fait de deux superficies l'vne plaine & l'autre courbe, tel qu'est l'angle fait lors qu'vn Cone est couppé par le sommet. Comme est aussi à noter que les angles solides contenus d'angles plans egaux en multitude & grandeur, sont egaux entr'eux.

12. Pyramide, est vn solide compris de plusieurs plans, se rencontrans en vn mesme poinct, & ayans vn autre plan pour base.

Comme la figure solide ABCD constituee sur le plan ABC auec les trois autres plans ADB, ADC, & CDB, qui se rencontrent & terminent au poinct D, est appelee Pyramide. Comme aussi la figure solide ABCDE consti-

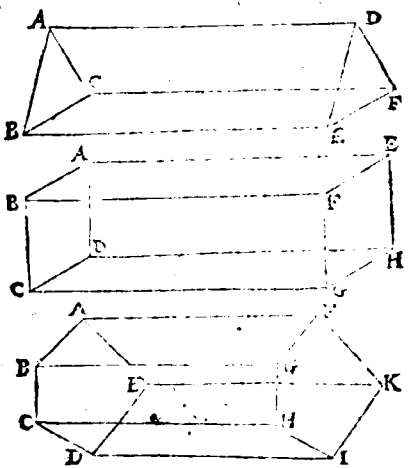


tuee sur la base ABCD, les autres plans se rencontrans au sommet E: Item la figure solide ABCDEF: Chacune desquelles Pyramides prend sa denomination selon la figure de sa base: tellement que celle qui a vn triangle pour base, comme la premiere des trois cy-dessus, s'appelle Pyramide triangulaire: celle qui a vn quadrangle comme la 2e. se nomme Pyramide quadrangulaire: celle qui a vn pentag-

me pour baſe, comme la 3^e. s'appelle Pyramide pentagonalle, &c.

13. Priſme, eſt vn ſolide compris de pluſieurs plans, deſquels deux qui ſont oppoſez ſont egaux, ſemblables & parallels, & les autres ſont parallelogrammes.

Comme la figure ſolide ABCDEF s'appelle priſme, car elle eſt contenue de deux triangles oppoſez ABC, DEF qui ſont egaux ſemblables & parallels, & de trois parallelogrãmes BCFE, BADE, ACFD. ſemblablement la figure ſolide ABCDHEFG, en laquelle les plans oppoſez, egaux, ſemblables & parallels ſont les quadrilateres ABCD, EFGH, & les autres plãs parallelogrãmes,



eſt nommee Priſme : Comme auſſi l'autre figure ſolide ABCDEKFGHC, dont deux des plans qui la contiennent ſont oppoſez, egaux ſemblables & parallels, ſçauoir les pentagones ABCDE, FGHIK, & les autres plans ſont parallelogrammes, eſt nommee Priſme. Parquoy vn priſme n'eſt autre choſe qu'vne colomne d'egale groſſeur qui a les baſes oppoſees egales, ſemblables & paralleles, ſoit qu'icelles

bazes ſoient triangulaires, quadrangulaires, pentagenales, &c. ainſi qu'il appert és figures cy deſſus.

14. Sphere, eſt vne figure contenue de la ſuperficie deſcrite par vn demy cercle, lors que ſon diametre demeurant immobile, iceluy demy cercle eſt tourné iuſques à ce qu'il reuienne où il a commencé de mouuoir.

Encore que nous ayons ſuppleé quelque choſe en ceſte def. de la ſphere, ſi eſt-ce toutesfois que celle de Theodoze rapportee en noſtre Coſmographie ſemble plus claire & intelligible: & des deux nous en auons faict vne autre, qui eſt au commencement de noſtre Geometrie practique, laquelle eſt telle qu'il enſuit.

La ſphere eſt vn corps compris d'vne ſeule ſuperficie, à laquelle toutes les lignes droictes menees d'vn ſeul poinct de ceux qui ſont au dedans d'iceluy corps ſont egales entr'elles: & icelle ſphere eſt deſcrite par vn demy cercle tournant vn tour ſur ſon diametre immobile.

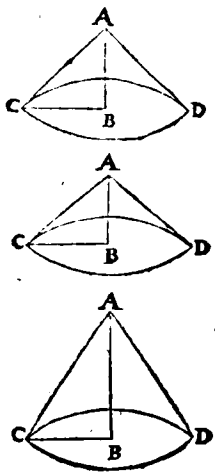
15. L'axe de la ſphere, eſt iceluy diametre immobile à l'entour duquel tourne le demy cercle.

16. Le centre de la ſphere, eſt le meſme que celuy du demy cercle.

17. Mais le diametre de la Sphere, eſt vne ligne droicte, laquelle paſſant par le centre d'icelle, eſt terminee à la ſuperficie de la ſphere.

18. Cone, eſt vn ſolide compris ſous deux ſuperficies deſcrites par vn triãgle rectangle, lors que l'vn des coſtez qui comprennent l'angle droict demeurant immobile, le triangle fait vn tour à l'entour d'iceluy coſté. Et ſi ledit coſté immobile eſt egal à l'autre coſté comprenant l'angle droict, le cone ſera rectangle: mais ſi plus petit; il ſera ambligone: & ſi plus grand; il ſera oxigone.

Soit le triangle ABC, dont l'angle B eſt droict, & le coſté AB demeurant fixe, ſoit imaginé ledit triangle ABC eſtre meu à l'entour dudit coſté AB iuſques à ce qu'il ait fait vne entiere reuolution: alors ſera deſcrite vne figure ſolide contenue ſoubs deux ſuperficies, l'vne plane & circulaire deſcrite par le coſté BC, & l'autre courbe & conuexe deſcrite par le coſté AC oppoſé à l'angle droict: laquelle figure eſt appellee Cone par Euclide & autres Geometres; mais pluſieurs l'appellent auſſi Pyramide ronde.



Que ſi le coſté immobile AB eſt egal à BC autre coſté de l'angle droict, comme en la premiere figure, le Cone ſera dit Orthogonel ou rectangle, pource que l'angle au ſommet A ſera droict, chacun des deux CAB & DAB,

qui le composent estant demy droict, à cause que l'angle B est droict, & les costez AB & BC egaux. Mais si le costé immobile AB est moindre que l'autre costé de l'angle droict BC, comme en la 2. figure, le Cone descrit sera dit Ambligone, pource que l'angle au sommet A sera obtus, attendu que chacun des angles egaux BAC, BAD, qui le composent est plus grand qu'vn demy droict, l'angle ACB qui fait vn droict auec BAC estant moindre qu'iceluy. Et finalement si le costé immobile AB est plus grand que l'autre costé BC, comme en la 3. figure, le Cone descrit sera appellé Oxigone, parce que l'angle au sommet A sera aigu, puis que l'angle ACB sera plus grand qu'vn demy droict, & chacun des angles BAC, BAD qui composent ledit angle A, moindre qu'vn demy droict.

19. L'axe du cone est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle tourne le triangle.

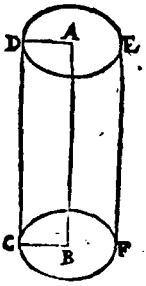
Comme en chacun des trois Cones descrits cy-dessus, l'axe est la ligne droicte immobile AB.

20. Mais la baze du cone, est le cercle descrit par l'autre costé comprenant l'angle droict qui tourne.

Comme és Cones cy-dessus, la base est le cercle descrit par le costé BC.

21. Cylindre, est vn solide compris de trois superficies descrites par vn parallelogramme rectangle, lors que l'vn des costez demeurant immobile, le parallelogramme fait vn tour à l'entour d'iceluy costé.

Soit vn parallelogramme rectangle ABCD, & le costé AB demeurant fixe & immobile soit conceu ledict parallelogramme estre meu allentour dudit costé AB, iusques à ce qu'il soit reuenu au lieu où il a commencé de mouuoir: alors sera descrite vne figure solide CDEF contenue soubs trois superficies, c'est à sçauoir deux planes & circulaires descritès par les costez AD, BC, & l'autre courbe & conuexe descrite par le costé DC: laquelle figure CDEF est appellée Cylindre par Euclide & plusieurs autres Geometres; mais quelques vns l'appellent Colomne ronde.



22. L'axe du Cylindre, est icelle ligne immobile à l'entour de laquelle se meust le parallelogramme.

Comme en la figure precedente la ligne droicte AB qui est demeuree immobile est dicte Axe du Cylindre CDEF.

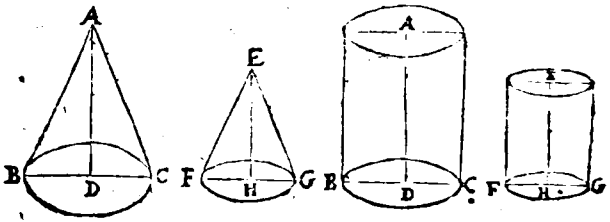
23. Mais les bases du cylindre, sont les cercles descrits par les deux costez opposez, meus allentour.

Ainsi en la figure cy-dessus les cercles DE & CF descrits par les costez opposez AD, BC, seront les bases du Cylindre CDEF.

24. Semblables Cones, & Cylindres, sont ceux desquels les axes & les diametres de leurs bases sont proportionnaux.

Soient deux Cones ABC, EFG: Item deux Cylindres;

& AD, EH soient leurs Axes; & BC, FG les diametres



des bazes. Or si l'axe AD est à l'axe EH, comme le diametre BC est au diametre FG; tant les Cones, que les Cylindres seront semblables entr'eux.

Mais est icy à noter qu'en ceste def. & autres precedentes des Cones & des Cylindres, Euclide ne definit, & n'entend parler cy apres que des Cones & Cylindres droicts, c'est à sçauoir de ceux dont l'axe est perpendiculaire & à angles droicts sur la baze: mais Appolonius Pergeus, & Serenus en traictent vniuersellement, c'est à sçauoir tant des Ortogones, que des inclinez, ou scalenes.

25. Cube est vn solide compris de six quarrez egaux.

26. Tetraedre, est vne figure solide comprise de quatre triangles egaux, & equilateraux.

27. Octaedre, est vn solide compris de huict triangles egaux, & equilateraux.

28. Dodecaedre, est vn solide compris de douze pentagones egaux, equilateraux, & equiangles.

29. Icoſaedre, eſt vn ſolide compris de vingt triangles egaux, & equilateraux.

30. Parallelipipede, eſt vn ſolide compris de ſix quadrangles plans, deſquels les oppoſez ſont parallels.

31. Vne figure ſolide, eſt dicte inſcrite en vne figure ſolide, lors que tous les angles de la figure inſcrite ſont conſtituez, ou és angles, ou és coſtez, ou finablement és plans de la figure en laquelle elle eſt inſcrite.

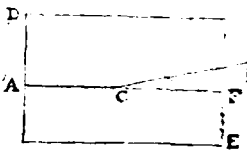
32. Mais vne figure ſolide, eſt dicte circonſcrite à vne figure ſolide, quand ou les angles, ou les coſtez, ou les plans de la figure circonſcrite, touchent tous les angles de la figure à l'entour de laquelle elle eſt deſcrite.

THEOR. 1. PROP. I.

Vne partie d'vne ligne droicte ne peut eſtre ſur vn plan, & l'autre partie en l'air.

Car ſoit, s'il eſt poſſible, vne partie de la ligne droicte AB, ſçauoir AC ſur le plan DE, & l'autre

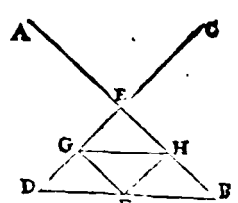
partie CB en l'air. Donc puis que AC eſt ligne droicte poſée au plan DE, elle peut eſtre prolongee directement ſur iceluy plan, lequel prolongement ſoit CF, qui ſera autre que CB, icelle ayant eſté poſee en l'air, & hors dudit plan DE: Et partant les deux lignes droictes ACB, ACF auront vn commun ſegment AC: Ce qui ne peut eſtre par la 10. comm. ſent. Parquoy vne partie d'vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 2. PROP. II.

Si deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, elles ſeront ſur vn meſme plan: & tout triangle eſt en vn meſme plan.

Soient deux lignes droictes AB & CD ſe coupans l'vne l'autre au poinct E; & en EB, ED ſoient pris quelconques poincts B & D, & ſoit tiree la ligne droicte BD, afin de faire le triangle EBD. Ie dis que les deux lignes droictes AB, CD, ſont conſtituees en vn ſeul & meſme plan: Item, que le triangle EBD eſt pareillement en vn meſme plan.



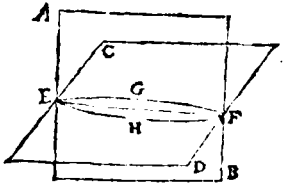
Car ſi quelque partie d'iceluy triangle EBD, comme FBEG eſtoit en vn plan, & la partie reſtante FDG en vn autre plan, auſſi BF, EG ſeroient en vn

plan, & les parties restantes FD, GD, en vn autre plan, c'est à dire en l'air, contre la prec. prop. Par mesmes raisons DEHF partie du mesme triangle BED, ne peut pas estre en vn plan, & l'autre partie BHF en vn autre plan: Ny aussi la partie DGHB ne peut pas estre en vn autre plan que la partie restante GHE: car il arriueroit tousiours la mesme absurdité que dessus, sçauoir est que partie d'vne ligne droicte seroit en vn plan, & l'autre partie en l'air, contre ce qui a esté demonstré à la prec. pr. Partant tout le triangle EBD est en vn seul & mesme plan. Et puis que BE, DE parties des lignes AB, CD, sont en vn mesme plan, il s'ensuit par la prop. precedente qu'icelles AB, CD, sont aussi en vn mesme plan; sçauoir est en celuy auquel nous auons demonstré estre le triangle EBD. Parquoy si deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR 3. PROP. III.

Si deux plans se coupent l'vn l'autre, leur commune section sera vne ligne droicte.

Soient deux plans se coupans l'vn l'autre AB & CD, & leur commune section, soit la ligne EF. Ie dis que icelle commune section EF est vne ligne droicte.



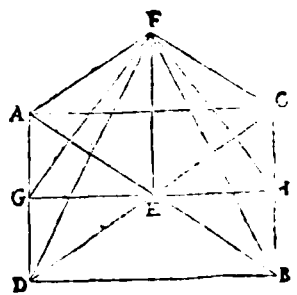
Car si elle n'est telle, des poincts extremes E & F, qui sont communs à tous les deux plans on pourra tirer sur chacun d'i-

ceux plans vne ligne droicte qui ſera autre qu'icelle commune ſection EF : ſoit donc menee au plan AB vne ligne droicte EGF, & au plan CD la ligne droicte EHF. Donc puiſque ces deux lignes droictes EGF, EHF ont meſmes termes E & F, elles encloront vn eſpace: ce qui eſt abſurde. Donc la commune ſection EF ſera ligne droicte. Parquoy ſi deux plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. IV.

Si deux lignes droictes ſe couppent l'vne l'autre, & au poinct de leur commune ſection on eſleue perpendiculairement vne autre ligne droicte, elle ſera auſſi eſleuee perpendiculairement ſur le plan d'icelles.

Soient deux lignes droictes AB & CD, ſe coupans l'vne l'autre au poinct E, & d'iceluy poinct de ſection E, ſoit eſleuee EF perpendiculaire à chacunes d'icelles AB, CD: ie dis qu'elle eſt auſſi perpendiculaire à leur plan.



Car ſoient poſees egales les lignes droictes AE, EB, & CE, ED; puis ſoient tirees les lignes droictes AD, BC; & par le poinct E ſoit menee quelconque ligne droicte GH couppant les lignes AD, BC, és poincts

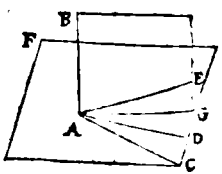
G & H: Item du poinct en l'air F soient tirees les lignes droictes FA, FG, FD, FB, FH & FC. D'autant que les costez EA, ED du triangle AED, sont egaux aux costez EB, EC du triangle BEC, chacun au sien, & les angles AED, BEC contenus par iceux costez aussi egaux par la 15. pr. 1. les bases AD, BC seront pareillement egales, par la 4. prop. 1. Derechef puis que les angles AEG, BEH sont egaux par la 15. pr. 1. les deux angles AEG, EAG du triangle AGE seront egaux aux deux angles BEH, EBH, du triangle BHE, & le costé AE est egal au costé BE: donc par la 26. prop. 1. les deux costez AG, GE, seront egaux aux deux costez BH, HE. Et puis que les deux costez FE, EA du triangle FEA sont egaux aux costez FE, EB du triangle FEB, & les angles contenus d'iceux costez aussi egaux, sçauoir droicts par l'hypothese, par la 4. prop. 1. les bases FA, FB seront egales. Par mesme raison seront aussi egales les lignes FD, FC. Dauantage, veu que les costez FA, AD du triangle FAD, sont egaux aux costez FB, BC du triang. FBC, & la base FC egale à la base FD, par la 8. p. 1. les angles FAD, FBC seront aussi egaux: Parquoy les costez FA, AG du triang. FAG, estans egaux aux costez FB, BH, du triangle FBH, les bases FG, FH, seront pareillement egales par la 4. p. 1. Et finalement, puis que les costez FE, EG, du triangle FEG, sont egaux aux costez EF, EH du triangle FEH, & les bases FG, FH aussi egales, les angles FEG, FEH seront pareillement egaux par la 8. pr. 1. & partant par la 10. d. 1. la ligne droicte FE sera perpendiculaire à la ligne GH, qui la touche en E, & constituee au mesme plan que les lignes AB, CD, par la 2. p. 11.

On pourra semblablement mener tant de lignes droictes qu'on voudra sur le mesme plan, lesquelles

rencontrant la perpendiculaire FE en E, y feront angles droicts, par les mesmes raisons que dessus: & par la 2. d. 11. icelle FE sera perpendiculaire au plan des lignes AB & CD. Si donc deux lignes droictes se couppent l'vne l'autre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte rencontre en vn poinct perpendiculairement trois autres lignes droictes, icelles trois lignes droictes seront en vn mesme plan.



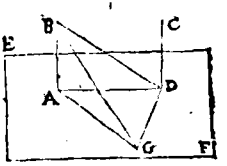
Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à trois autres lignes droictes AC, AD, AE, au poinct de leur rencontre A. Ie dis qu'icelles trois lignes AC, AD, AE, sont sur vn mesme plan.

Car puis que deux d'icelles quelles qu'elles soient sont en vn mesme plan par la 2. prop. 11. soient AC, AD, au plan FC: Si donc on dit que AE n'est point sur le mesme plan FC, mais qu'elle est esleuee en l'air, elle pourra estre au mesme plan que AB par la 2. p. 11. & soient toutes deux au plan BE. Ainsi FC, & BE sont deux plans differens, lesquels se touchans au poinct A, ne sont pas parallels, partant estans continuez tant qu'il sera de besoin ils se coupperont, & leur commune section sera vne ligne droicte par la 3. p. 11. soit la ligne AG, laquelle par ce moyen sera au mesme plan que AC; & partant par la 4. d. 11. BA, & GA se rencontreront

treront en angles droicts: mais par hypotheſe AB & AE ſe rencontrent auſſi en angles droicts: par ainſi les angles BAE, BAG eſtans au plan BG tiré par les lignes BA, AG, ſeroient egaux, la partie au tout: ce qui eſt impoſſible: Donc AE n'eſtoit pas eſleuee en l'air, ains eſtoit au meſme plan que AC & AD. Parquoy ſi vne ligne droicte rencontre en vn poinct, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si deux lignes droictes ſont eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan, elles ſeront paralleles.



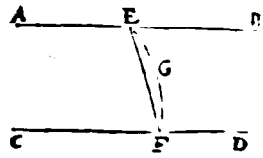
Soient deux lignes droictes AB, CD eſleuees perpendiculairement ſur vn meſme plan EF, & aux poincts A & D. Ie dis qu'icelles AB, CD, ſont paralleles entr'elles.

Car des ſuſdits poincts A & D du plan EF, ſoit menee la ligne droicte AD, & du poinct D la ligne droicte DG perpendiculaire à icelle AD par la 11. prop. 1. puis ayant poſé icelle DG egale à AB, ſoient menees les lignes BD, BG, AG. D'autant que les deux triangles ABD & AGD ont les deux coſtez AB, DG egaux, & AD commun, & l'angle BAD egal à l'angle GDA (car ceſtuy-là eſt droict par la 3. def. 11. & celuy-cy eſt auſſi droict par la conſtruction) par la 4. prop. 1. la baſe BD ſera egale à la baſe AG. Item les deux triangles AGB & GDB ayans les deux coſtez AB, AG egaux aux deux coſtez DG,

BD, chacun au ſien, & la baſe BG commune, par la 8. prop. 1. les deux angles BAG, BDG ſeront egaux. Mais l'angle BAG eſt droict par la 3. def. 11. donc BDG ſera auſſi droict: & partant la ligne DG eſt perpendiculaire à BD: Mais elle eſt auſſi perpendiculaire à chacune d'icelles AD, CD par la 3. def. 11. Parquoy GD touche perpendiculairement en vn poinct D, les trois lignes DA, DB, DC: & partant par la 5. pr. 11. icelles trois lignes ſeront en vn meſme plan, c'eſt à dire que CD ſera au plan mené par les lignes AD, DB. Mais par la 2. pr. 11. les trois lignes AB, BD, AD qui conſtituent le triangle ABD ſont en vn meſme plan: partant AB & CD ſeront auſſi en vn meſme plan. Mais par la 3. def. 11. elles font les deux angles BAD, CDA droicts: Donc par la 28. pr. 1. icelles lignes AB, DC ſont paralleles entr'elles. Parquoy ſi deux lignes droictes ſont eſleuees, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 7. PROP. VII.

Si deux lignes droictes ſont paralleles, & de l'vne à l'autre on mene vne ligne droicte, elle ſera au meſme plan des lignes paralleles.



Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & de l'vne à l'autre ſoit menee la ligne droicte EF. Ie dis qu'icelle ligne EF eſt au meſme plan des lignes paralleles AB & CD.

Car ſi elle n'eſt au meſme plan, ains en vn autre:

que celuy-cy couppe ceſtuy-là és poincts E & F, & la commune ſection d'iceux plans ſoit EGF, laquelle ſera ligne droicte par la 3. pr. 11. donc les deux lignes droictes EF, EGF, ayans meſmes termes E & F, enfermeront vn eſpace: ce qui eſt abſurde. Donc la ligne droicte EF n'eſt pas en vn autre plan que celuy auquel ſont les paralleles AB, CD. Parquoy ſi deux lignes droictes ſont paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

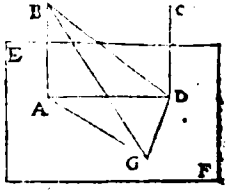
SCHOLIE.

Ceſte meſme propoſition eſt auſſi veritable, encore que les deux lignes AB, CD ne ſoient paralleles, pourveu qu'elles ſoient en vn meſme plan, comme il eſt manifeſte par la demonſtration.

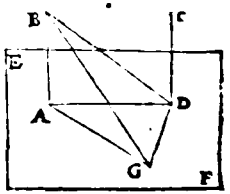
THEOR. 8. PROP. VIII.

S'il y a deux lignes droictes paralleles, deſquelles l'vne ſoit à angles droicts à quelque plan: auſſi l'autre ſera à angles droicts ſur le meſme plan.

Soient deux lignes droictes paralleles AB & CD, & que l'vne d'icelles AB ſoit éleuée perpendiculairement ſur le plan EF. Ie dis que l'autre CD eſt auſſi eſleuee perpendiculairement ſur le meſme plan EF. Car eſtant menee au plan EF la ligne droicte AD, l'angle BAD ſera droict par la 3. d. 11. Mais les deux lignes AB, CD eſtans paralleles, les deux angles BAD, CDA ſont



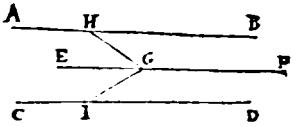
egaux à deux droicts par la 29. pr. 1. donc l'angle CDA ſera droict. Maintenant au meſme plan EF ſoit menee DG perpendiculaire à AD, & ayant poſé icelle DG egale à AB, ſoient menees les lignes AG, BG, BD. D'autant que les coſtez BA, AD du triangle ABD ſont egaux aux coſtez GD, DA du triangle ADG, chacun au ſien, & les angles BAD, ADG contenus d'iceux coſtez auſſi egaux, eſtans droicts; les bazes BD, AG ſeront egales par la 4. prop. 1. Item, les coſtez BA, AG du triangle GBA eſtans egaux aux coſtez GD, DB du triangle BDG, & la baze BG commune à tous les deux triangles; les angles BDG, BAG contenus deſdicts coſtez ſeront egaux par la 8 prop. 1. Mais BAG eſt droict par la 3. def. 11. donc BDG ſera auſſi droict. Parquoy GD ſera perpendiculaire à chacune d'icelles AD, BD, leſquelles faiſant angle à D s'y entrecouperont eſtans prolongees: & par la 4. prop. 11. icelle GD ſera eſleuee perpendiculairement au plan mené par les lignes AD & BD: mais par la preced. prop. icelles deux lignes BD & AD ſont au meſme plan des paralleles AB & CD: donc GD eſt perpendiculaire ſur le plan où eſt la ligne CD: partant l'angle CDG ſera droict. Mais nous auons demonſtré que l'angle ADC eſt auſſi droict: donc par la 4. prop. 11. CD ſera perpendiculaire au plan de GD & AD, c'eſt à dire au plan EF. Parquoy s'il y a deux lignes droictes paralleles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.



THEOR. 9. PROP. IX.

Les lignes droictes paralleles à vne mesme, lesquelles ne sont en vn mesme plan qu'icelle, sont aussi paralleles entr'elles.

Soient les lignes droictes AB, CD, paralleles à la ligne EF, & ne soient en vn mesme plan qu'icelle. Ie dis que AB, CD, sont aussi paralleles entr'elles.

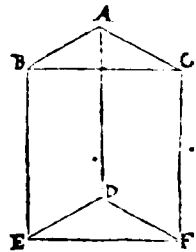


Soit pris en EF quelconque point G, duquel soient tirees à icelle EF deux perpendiculaires, sçauoir GH au plan des paralleles AB, EF; & GI au plan des paralleles CD, EF. D'autant que EF est perpendiculaire aux deux lignes GH, GI, qui s'entretouchent en G: elle le sera aussi au plan tiré par icelles par la 4. prop. 11. Parquoy puis que AB, EF, sont paralleles: & EF est perpendiculaire au plan mené par GH, GI: aussi AB sera perpendiculaire au mesme plan par la 8. pr. 11. par mesme raison CD sera perpendiculaire au plan passant par GH, GI: & partant par la 6. prop. 11. AB, CD estans perpendiculaires à vn mesme plan, sont paralleles entr'elles. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 10. PROP. X.

Si deux lignes droictes s'entretouchans, sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, & ne sont

en vn meſme plan, elles comprendront angles egaux.



Soient deux lignes droictes AB & AC s'entretouchans en A, leſquelles ſoient paralleles à deux autres lignes droictes DE & DF ſe touchans l'vne l'autre en D : & AB, AC ne ſoient au meſme plan que DE, DF. Ie dis que les angles BAC, EDF, cõprins par icelles ſont egaux.

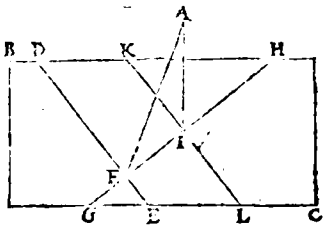
Car eſtans priſes egales les quatre lignes AB, AC, DE, DF, ſoient menees les lignes AD, BE, CF, BC, EF. Donc AB & DE eſtans egales & paralleles, AD & BE ſeront auſſi egales & paralleles par la 33. pr. 1. & par meſme raiſon AD & CF ſeront auſſi egales & paralleles : & partant par la prec. prop. BE & CF ſeront auſſi egales & paralleles entr'elles : & par la 33. pr. 1. BC & EF ſeront pareillement egales & paralleles entr'elles. Parquoy les deux triangles ABC & DEF auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez chacun au ſien, & par la 8. prop. 1. les angles BAC, EDF, ſeront egaux. Si donc deux lignes droictes, &c. Ce qui falloit demonſtrer.

PROBL. 1. PROP. XI.

D'vn poinct donné en l'air, mener vne ligne droicte perpendiculaire ſur le plan qui eſt au deſſous d'iceluy poinct.

Soit le poinct A en l'air, duquel il faut tirer vne perpendiculaire au plan BC, qui eſt au deſſous d'i-

celuy poinct A. Au plan BC, ſoit menee comme on voudra la ligne DE; à laquelle de A ſoit tiree la perpendiculaire AF par la 12. pr. 1. Et au plan BC par F, ſoit tirée GH perpendiculaire à DE par la 11. prop. 1. Et à icelle GH ſoit tiree de A la perpendiculaire AI par la 12. prop. 1. Ie dis qu'icelle AI eſt perpendiculaire au plan BC.



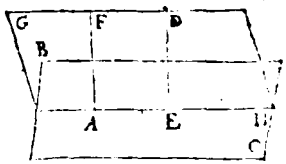
Car au plan BC, ſoit tiree par I, la ligne KIL parallele à DFE par la 31. prop. 1. Donc puis que DF eſt perpendiculaire aux deux lignes FA, FH, par la conſtruction: & partant auſſi perpendiculaire au plan tiré par icelles FA, FH par la 4. prop. 11. pareillement KI ſera perpendiculaire au meſme plan par la 3. p. 11. Et d'autant que par la 2. prop. 11. AI eſt en vn meſme plan que FA, FH, & touche la ligne KI en I, l'angle KIA ſera droict par la 2. def. 11. & AI ſera perpendiculaire aux deux KI, IF. Donc par la 4. p. 11. AI ſera perpendic. au plan où ſont les lignes KI, IF, ſçauoir au plan BC. Nous auons donc d'vn poinct donné en l'air abaiſſé vne perpendiculaire au plan d'au-deſſous d'iceluy poinct: Ce qu'il falloit faire.

PROBL. 2. PROP. XII.

A vn plan donné, & d'vn poinct donné en iceluy, eſleuer vne ligne perpendiculaire.

Soit le plan donné BC, & le poinct donné en iceluy soit A : il faut d'iceluy poinct A esleuer vne ligne perpendiculaire audit plan BC.

Soit pris en l'air comme on voudra le poinct D, & d'iceluy soit menee sur le plan BC, la perpendiculaire DE par la preced. prop. laquelle rencontrant le plan BC au poinct A, on aura faict ce qui estoit requis : Mais si elle ne rencontre iceluy poinct A, ains quelque autre poinct E, dudict poinct A soit menee AF parallele à ED, par la 31. prop. 1. Ie dis qu'icelle AF sera perpendiculaire au plan BC. Car DE, AF estans paralleles, & DE perpendic. au plan BC par la construction, par la 8. pr. 11. AF sera aussi perpendiculairement esleuee sur le mesme plan BC. Parquoy à vn plan donné, &c. Ce qu'il falloit faire.



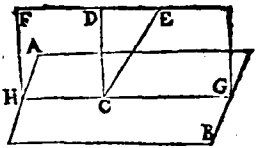
THEOR. 11. PROP. XIII.

D'vn plan donné, & d'vn mesme poinct d'iceluy, on ne leuera pas en l'air d'vn mesme costé, deux lignes droictes perpendiculaires.

Soit donné le plan AB, & le poinct en iceluy C : Ie dis que du poinct C, on n'esleuera pas en l'air deux lignes droictes perpendiculaires sur iceluy plan, & de mesme costé.

Car, s'il est impossible, du poinct C, soient esle-

uees en l'air les deux perpendiculaires CD & CE: par la 2. p. 11. elles seront en vn mesme plan, & soit iceluy FG, lequel d'autant qu'il touche le plan AB au poinct C, n'est point parallele à iceluy AB: partant iceux plans estans continuez se coupperont,

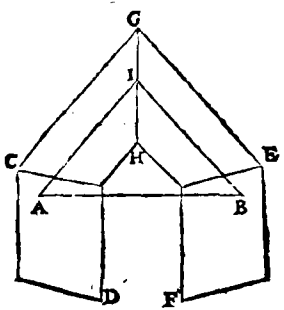


& leur commune section sera vne ligne droicte, laquelle soit GCH. Et parce que les lignes CD & CE sont perpendiculaires à iceluy plan AB, les angles ECG & DCG seront droicts, & partant egaux: la partie au tout: ce qui est impossible. Il ne se peut donc esleuer du poinct C, deux lignes perpendiculaires au plan AB, & de mesme costé. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 12. PROP. XIV.

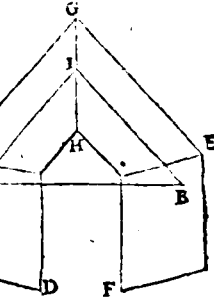
Si vne ligne droicte est perpendiculaire à deux plans, iceux plans seront parallels.

Soit la ligne droicte AB perpendiculaire à chacun des plans CD, & EF: ie dis qu'iceux plãs sont parallels entr'eux.



Car s'ils ne sont parallels, estans continuez il se rencontreront: que ce soit donc de la part de C, E, & que GH soit la ligne de leur

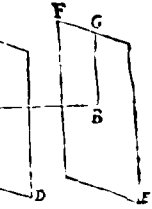
cómune section, en laquelle soit pris cõme on voudra le poinct I, & d'iceluy soient menees les lignes IA, IB és plans GCD, GEF. Maintenãt puis que la ligne AB est posee perpendiculaire à chacun d'iceux plans GCD, GEF, au triangle AIB les angles IAB & IBA, seront droicts, contre la 17. prop. 1. donc les deux plans CD, EF prolongees ne se rencontreront point; & partant ils sont parallels. Si donc vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

Commandin demonstre la conuerse de ceste prop. qui est telle.

S'il y-a deux plans parallels, la ligne droicte qui est perpendiculaire à l'vn d'iceux, sera aussi perpendiculaire à l'autre.

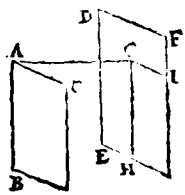


Soient deux plans parallels, CD, EF, & la ligne droicte AB soit perpendiculaire au plan CD: Ie dis qu'icelle AB est aussi perpendiculaire au plan EF: car si elle n'est perpendiculaire soit tiree audit plan EF, la ligne droicte BG de la part que AB fait l'angle moindre qu'vn droict; & par AB, BG soit mené vn autre plan, duquel & du plan CD la commune section soit la ligne droicte AH. Et d'autant que l'angle ABG est aigu, les plans estans proln-

gez, les lignes droictes BG, AH se rencontreront, & partant aussi les plans, lesquels ont esté posez parallels: ce qui est absurde. Donc AB est perpendiculaire au plan EF. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 13. PROP. XV.

Si deux lignes droictes s'entretouchans sont paralleles à deux autres lignes droictes s'entretouchans, n'estans toutesfois en vn mesme plan: les plans passans par icelles; seront aussi parallels.



Soient deux lignes droictes AB & AC, s'entretouchans en A, paralleles à deux autres lignes DE, DF, s'entretouchans en D, & ne soient en vn mesme plan qu'icelles. Ie dis que le plan BC mené par icelles AB, AC est parallel au plan EF tiré par les lignes DE, DF.

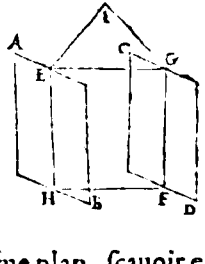
Car par la 11. prop. 11. de A soit tiree sur le plan EF la perpendiculaire AG, rencõtrant le plan EF en G: puis par la 31. prop. 1. audit plan EF, soient tirees de G, les lignes GH, GI paralleles à DE, DF. Maintenant d'autant que AB, GH sont paralleles à DE, icelles AB, GH seront paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. & partant par la 29. pr. 1. les angles BAG, AGH sont egaux à deux droicts. Mais AGH est droict, par la 3. def. 11. Donc BAG sera aussi droict. Par mesme raison on prouuera l'angle CAG estre droict. Parquoy, veu que la ligne GA est perpendi-

culaire aux deux AB, AC; par la 4. prop. 11. elle sera aussi perpendiculaire à leur plan BC: Mais par la construction elle l'est aussi au plan EF. Donc par la prec. prop. les plans BC, EF seront parallels. Parquoy si deux lignes droictes s'entretouchans, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 14. PROP. XVI.

Si deux plans parallels sont couppez par vn autre plan, les lignes de communes sections seront paralleles.

Soient deux plans parallels AB & CD, couppez par le plan EF, & les communes sections d'iceux soient EH, GF. Ie dis qu'icelles HE & GF sont paralleles entr'elles.



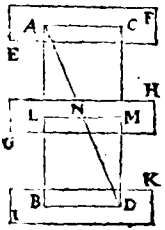
Car si elles ne sont paralleles, estans prolongees elles se rencontreront au plan couppant EF: Que ce soit donc au poinct I. Or d'autant que toute la ligne droicte HEI est en vn mesme plan, sçauoir en AB prolongé; & aussi toute la ligne droicte FGI en vn mesme plan, sçauoir en CD prolongé; les plans AB, CD estans prolongez se rencontreront aussi en I: ce qui est absurde, ayans esté posez parallels. Donc HE, FG estans continuez ne se rencontrent point; & partant sont paralleles entr'elles. Parquoy, Si deux plans parallels sont couppez, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 15. PROP. XVII.

Si deux lignes droictes sont couppees par

des plans parallels, elles seront couppees proportionnellement.

Soient les deux lignes AB, CD, trauersans les trois plans parallels EF, GH, IK, tellement qu'icelles lignes sont couppees par iceux plans és poincts A, L, B, C, M, D. Ie dis qu'elles sont couppees proportionellement, c'est à dire que les segmens d'icelles compris entre les susdicts plans sont proportionaux, sçauoir que comme AL est à LB, ainsi CM à MD.

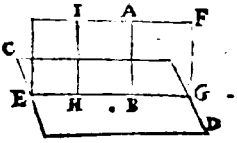


Car és plans EF, IK, soient menees les lignes droictes AC, BD: & tiré AD rencontrant le plan GH au poinct N, duquel soient menees les lignes LN, NM, au mesme plan GH: & le triangle ABD, par la 2. prop. 11. sera en vn mesme plan: semblablement le triangle ADC aussi en vn mesme plan. Et d'autant que les plans parallels GH, IK sont couppez par le plan du triangle ABD: leurs communes sections LN, BD seront paralleles par la prec. prop. Par mesme raison MN, AC, seront aussi paralleles. Parquoy par la 2. p. 6. comme AL sera à LB, ainsi AN sera à ND: Item comme AN à ND, ainsi CM à MD: Et partant par la 11. prop. 5. comme AL sera à LB, ainsi CM sera à MD. Si donc deux lignes droictes sont couppees par des plans parallels, &c. Ce qui estoit à prouuer.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Si vne ligne droicte est esleuee perpen-

diculairement sur vn plan, aussi tous les plans procedans d'icelle, seront perpendiculaires au mesme plan.



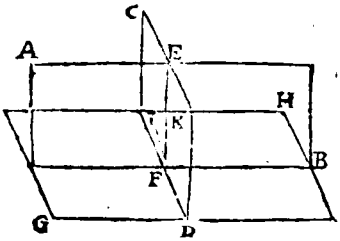
Soit la ligne AB perpendiculaire sur quelque plan CD: Ie dis que tous les plans menez de la ligne AB, vers quelle part on voudra, seront esleuez perpendiculairement sur le mesme plan CD.

Car par AB soit tiré le plan EF, couppant le plan CD par la ligne droicte EG: & en icelle soit pris quelconque poinct H, duquel au plan EF soit menee HI parallele à AB par la 31. prop. 1. Donc puis que AB, IH sont paralleles, & AB a esté posee perpendiculaire au plan CD; aussi IH sera perpendiculaire au mesme plan CD, par la 8. prop. 11. & partant aussi perpendiculaire à la commune section EG, par la 3. d. 11. Par mesme discours toutes autres lignes qui seront tirees au plan EF paralleles à icelle AB, seront perpendiculaires au plan CD: & par consequent à la ligne EG. Parquoy par la 4. def. 11. le plan EF sera perpendiculaire au plan CD. Par mesme raison seront demonstrez tous autres plans tirez par la ligne AE, estre perpendiculaires au plan CD. Si donc vne ligne droicte est esleuee perpendiculairement sur vn plan, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 17. PROP. XIX.

Si deux plans esleuez perpendiculairement sur vn autre plan s'entrecou-

pent, leur ligne de commune section est perpendiculaire sur iceluy plan.



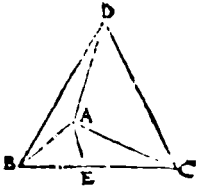
Soient les deux plans se couppans l'vn l'autre AB & CD, esleuez perpendiculairemẽt sur le plan GH, & soit la ligne de leur commune section FE: ie dis qu'icelle EF est perpendiculaire au mesme plan GH.

Car, ou EF est perpend. à BF, DF, communes sections des plans AB, CD auec ledit plan GH, ou non: Que si elle leur est perpend. par la 4.p.11. elle le sera aussi audit plan GH, mené par icelles BF, DF. Mais si on dit que EF est seulement perpendic. à l'vne ou l'autre desdites sections BF, DF; qu'elle le soit à BF. Donc puis que le plan AB est perpend. au plan GH, par la 4. def.11. la ligne EF (qui au plan AB est menee perpendicul. à BF, commune section d'iceluy auec le plan GH) sera perpendic. au plan GH. Lon conclura le mesme si ladite EF est concedee perpendic. à la section DF: car alors icelle EF sera perpend. au plan GH par ladite 4. def. puis qu'elle est posee perpendic. à DF commune section du plan CD auec le plan GH, & menee audit plan CD qui est perpendic. à iceluy plan GH. Finalement, si on croit EF n'estre perpendic. à l'vne ny l'autre d'icelles communes sections BF, DF, du poinct F soit menee au plan AB la ligne FI perpend. à BF par la 11.pr.1. & au plan CD, la ligne FK per-

pend. à la ſection DF. Donc puis que le plan AB eſt perpend. au plan GH, par la 4. d. 11. la ligne FI (laquelle eſt perpend. à DF commune ſection d'iceux plans AB, GH) ſera auſſi perpendic. à iceluy plan GH. Par meſme raiſon FK ſera encore perpend. au meſme plan GH. Par ainſi FI, FK ſeront d'vn meſme poinct F donné au plan GH eſleuees perpendiculairement ſur iceluy plan: Ce qui eſt contre la 13. pr. 11. Parquoy EF ſera perpendiculaire au plan GH. Si donc deux plans eſleuez perpendicul. &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 18. PROP. XX.

Si vn angle ſolide eſt compris de trois angles plans, deux d'iceux pris comme on voudra, ſont plus grands que le troiſieſme.



Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans BAC, CAD, DAB. Ie dis que deux d'iceux leſquels on voudra, comme BAD & DAC ſont plus grands enſemble que le troiſieſme BAC.

Car ſi on dit que BAC eſt plus grand que les deux autres: au plan tiré par AB, AC, ſoit fait l'angle BAE egal à l'angle DAB par la 23. p. 1. & la ligne AE egale à la ligne AD: puis au meſme plan ſoit menee par E la ligne droicte BC, couppant les lignes AB, AC, en B & C: & ~~du triangle ABD~~ tirees les lignes BD, DC. Maintenant puis que les deux coſtez AB & AD du triangle ABD ſont egaux aux deux co-

ſtez

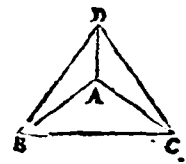
ſtez AB & AE du triangle ABE, chacun au ſien, & les angles contenus d'iceux coſtez auſſi egaux; la baſe DB ſera egale à la baſe BE, par la 4. pr. 1. Item puis que lon poſe l'angle BAC plus grand que les deux autres BAD, CAD, & que le retranché BAE eſt egal à l'vn d'iceux BAD, le reſte CAE ſera plus grand que l'autre CAD: mais les deux coſtez EA & AC du triangle ACE, ſont egaux aux deux coſtez AD & AC du triangle CAD, & l'angle CAE eſt plus grand que l'angle DAC: & partant par la 24 p.1. la baſe EC ſera plus grande que la baſe DC: adiouſtant donc les egales EB & DB, les deux CE, EB, c'eſt à dire la toute BC, ſera touſiours plus grande que les deux CD, DB: & partant au triangle ABC le coſté BC eſt plus grand que les deux autres: ce qui eſt contre la 20. p. 1. Donc l'angle BAC n'eſt point plus grand que les deux autres BAD, CAD. Que ſi on dit qu'il eſt egal, il s'enſuiura par le meſme diſcours que BC eſt egal à BD & CD: ce qui contreuient touſiours à la 20. pr. 1. Il eſt donc plus petit que les deux autres. Parquoy ſi vn angle ſolide eſt compris de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 19. PROP. XXI.

Tous les angles plans d'vn angle ſolide, ſont plus petits que quatre angles droicts.

Soit l'angle ſolide A, compris des trois angles plans CAB, BAD, DAC. Ie dis qu'iceux trois angles plans ſont plus petits que quatre angles droicts. Car eſtans tirees les trois lignes droictes BC, CD,

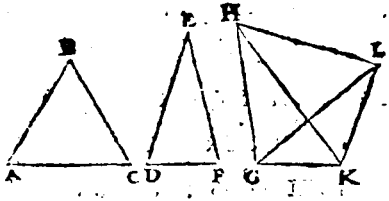
BD, ſeront conſtituez trois angles ſolides B, C, D, deſquels chacun eſt contenu ſous trois angles plans, ſçauoir B, ſous ABC, ABD, CBD: & C ſous ACB, ACD, BCD: & D ſous ADB, ADC, BDC. Et d'autant que par la 20. pr. 11. de chacun d'iceux angles ſolides, deux angles plans leſquels on voudra ſont plus grands que le troiſieſme, les deux angles ABC, ABD, ſeront plus grands que le troiſieſme DBC; & les deux ACB, ACD, ſeront plus grands que le troiſieſme BCD: Item les deux CDA, & BDA, ſont plus grands que BDC: & partant les ſix angles ABC, BCA, ACD, CDA. ADB, DBA enſemble, ſeront plus grands que les trois de la baſe triangulaire BCD, c'eſt à dire que deux droicts: (car iceux trois angles vallent autant par la 32. p. 1.) Mais d'autant qu'iceux ſix angles auec les trois qui ſont l'angle ſolide A, vallent ſix droicts, par la 32. prop. 1. (Car ce ſont les angles de trois triangles plans ABC, ACD, ABD,) ſi on oſte ces ſix-là, qui ſont plus grands que deux droicts; les trois qui ſont l'angle ſolide A, demeureront plus petits que quatre droicts. Parquoy tous les angles plans, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



THEOR. 20. PROP. XXII.

S'il y a trois angles plans, deſquels deux pris comme on voudra ſoient plus grands que l'autre, & les lignes droictes comprenant iceux, egales; il ſe

peut faire que des lignes droictes qui conioignent icelles egales, soit constitué vn triangle.



Soient trois angles plans ABC, DEF, GHK contenus de lignes droictes egales BA, BC, ED, EF, HG & HK: deux desquels pris comme on voudra sont plus grands que l'autre. Ie dis que des trois lignes droictes AC, DF, GK, qui conioingnent icelles lignes egales, peut estre constitué vn triangle, c'est à dire que deux d'icelles lignes AC, DF, GK de quelque façon qu'elles soient prises, sont plus grandes que la troisiesme.

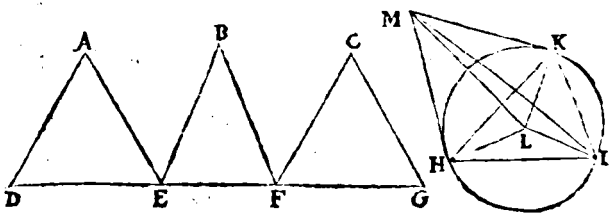
Car premierement si les trois angles B, E, H sont egaux, puis que les lignes qui les contiennent sont egales, par la 4. pr. 1. les bases AC, DF, GK seront egales: & partant deux d'icelles lesquelles on voudra seront ensemble plus grandes que la troisiesme. Mais si lesdits angles proposez sont egaux, puis que deux d'iceux pris cõme on voudra sont plus grands que le troisiesme, si on en met deux ensemble tels qu'on voudra, comme si à GHK on adiouste KHL egal à E par la 23. pr. 1. & ayant fait HL egale à EF on tire LK & GL: l'angle total GHL sera plus grand que le troisiesme ABC, & la base GL par la 24. pr. 1. sera plus grande que la base AC: (car les deux costez sont egaux aux deux costez) & à plus forte raison les deux GK, KL, qui par la 20. pr. 1. sont plus grandes qu'icelle GL, seront plus grandes que la

troiſieſme AC. Et par meſme diſcours on monſtrera touſiours que deux d'icelles baſes AC, DF, GK, priſes comme on voudra, ſont plus grandes que la troiſieſme : Partant d'icelles on pourra faire vn triangle par la 22. prop. 1. S'il y-a donc trois angles plans, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

PROBL 3. PROP. XXIII.

Faire vn angle ſolide de trois angles plans, deſquels deux pris comme on voudra ſont plus grands que le tiers. Mais il faut qu'iceux trois angles ſoient moindres que quatre droicts.

Soient trois angles plans A, B, C, moindres que quatre droicts, & deſquels deux quels qu'ils ſoient ſont plus grands que l'autre. Il faut faire vn angle ſolide de trois angles plans egaux à iceux A, B, C.



Soient poſees egales les ſix lignes droictes AD, AE, BE, BF, CF, & CG qui comprennent les angles propoſez, leſquels ſoient ſouſtenus des trois baſes DE, EF, FG. Donc puis que par la precedente prop. on peut faire vn triangle d'icelles lignes DE, EF, FG, ſoit fait le triangle HIK, ayant les trois coſtez egaux

à icelles baſes DE, EF, FG par la 22. prop. 1. lequel ſoit circonſcrit du cercle HIK par la 5. p. 4. & du centre L ſoient menees les trois lignes LH, LI, LK: & apres auoir par la 12. p. 11. eſleué en l'air perpendiculairement LM, par le lemme de la 14. pr. 10. ſoit icelle retranchee en ſorte, que ſon quarré auec le quarré de LH, ſoit égal au quarré de l'vn des coſtez d'iceux angles plans: puis ſoient menees les lignes HM, IM, KM: Ie dis que HIMK eſt vn angle ſolide, compris de trois angles plans, egaux aux trois donnez A, B, C.

Car les trois lignes LH, LI, LK eſtans egales, & LM perpendiculaire à icelles: les trois lignes HM, IM, KM, ſeront egales, d'autant qu'elles peuuent autant l'vne comme l'autre par la 47. pr. 1. & puis qu'elles peuuent autant que l'vn des coſtez des angles plans donnez, elles ſeront egales aux coſtez d'iceux angles plans: puis les trois baſes HI, IK, KH eſtans egales aux baſes des angles donnez, par la 8. prop. 1. les trois angles plans faiſant l'angle ſolide au poinct M, ſeront egaux aux trois donnez A, B, C. Nous auons donc fait vn angle ſolide de trois angles plans, &c. Ce qu'il falloit faire.

SCHOLIE.

Si quelqu'vn obiectoit icy que la perpendiculaire LM ne peut pas touſiours eſtre retranchée, en ſorte que ſon quarré auec le quarré de LH ſoit egal au quarré de l'vn des coſtez des angles donnez: comme par exemple, ſi iceluy coſté eſtoit egal ou plus petit que HL. Ie dis que cela n'arriue iamais, non pas ſeulement qu'il ſoit egal à HL: Car ſi HL & IL eſtoient egaux à AD & AE: & la baſe HI egale à la baſe DE, par la 8. p. 1. (& ainſi des deux autres triangles) les trois angles au poinct L ſeroient egaux aux trois angles A, B, C, chacun au ſien: ce qui eſt euidemment faux:

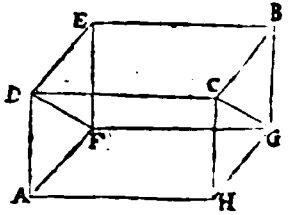
Car touſiours par hypotheſe les trois angles A, B, C, ſont plus petits que quatre droicts; & par le coroll. de la 15. p. 1. les trois au poinct L ſont egaux à quatre droicts.

THEOR. 21. PROP. XXIV.

Si vn ſolide eſt compris de plans parallels; les plans oppoſez d'iceluy ſeront parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Soit le ſolide AB compris de ſix plans parallels AC, FB, AG, DB, AE, HB: Ie dis que les plans oppoſez ſont parallelogrammes ſemblables, & egaux.

Car puis que les plans AC & FB ſont parallels, eſtans couppez par les plans AE & HB: les lignes de commune ſection AD, FE ſont paralleles: Item HC & GB, par la 16. prop. 11. par la meſme raiſon les plans AG & DB eſtans parallels, les lignes de commune ſection AF & DE: Item GH & BC ſont paralleles: partant AE & HB ſont parallelogrammes. Par le meſme diſcours AG, DB; AC, FB, ſe prouueront eſtre parallelogrammes. Ie dis maintenant que les parallelogrammes oppoſites ſont ſemblables & egaux. Car puis que les lignes AF, AD, ſont paralleles aux lignes HG, HC, & non en meſmes plans, mais en oppoſez: par la 10. prop. 11. les angles DAF, CHG, ſeront egaux: par meſme raiſon les autres angles du parallelogramme AE, ſeront egaux aux autres angles du parallelo-

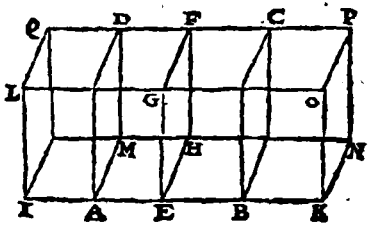


gramme HB. Et puis que par la 34. prop. 1. au parallelogramme AC les costez AD, HC sont egaux, comme aussi les costez AF, HG, du parallelogramme AG, comme AD sera à AF, ainsi HC à HG, & partant comme AF à FE, ainsi HG à GB, &c. Donc les costez des parallelogr, AE, HB, au long des angles egaux, seront proportionaux: & partant ils sont parallelogram. semblables. Maintenant estans tirez les diametres DF, CG: veu que les costez AD, AF, du triangle ADF, sont egaux aux costez HC, HG. du triangle HCG, & les angles DAF, CHG, aussi egaux: par la 4. prop. 1. les triangles ADF, HCG, seront pareillement egaux: lesquels estans moitiez des parallelogram. AE, HB, par la 34. prop. 1. iceux parallelogram. seront aussi egaux entr'eux. Par mesme discours on demonstrera les autres parallelogrammes opposez AG, DB: AC, FB, estre semblables & egaux. Si donc vn solide est compris de plans parallels, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

THEOR. 22. PROP. XXV.

Si vn solide parallelipipede est couppé par vn plan parallel aux plans oppposez, les solides couppez seront l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soit le solide parallelipipede AB CD couppé par le plan EF parallel aux deux opposez AD & BC, & faisant deux solides AF & EC: ie dis

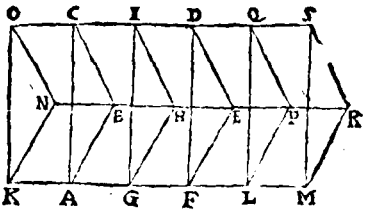


qu'iceux solides seront l'vn à l'autre, comme la base AH à la base BH.

Car la ligne AB estant prolongee de part & d'autre, soient faites egales AI à AE, & BK à BE, & soient accomplis les parallelogrammes IM, & BN: Item les solides AQ & BP. Doncques puis que AI, AE, sont egales, les parallelogrammes IM, AH seront aussi egaux par la 1. p. 6. & par la precedente les plans opposez LD, GD seront semblables & egaux: Item AL, AG semblables & egaux à MQ, MF, plans opposez & ainsi des autres: & par la 9. def. de ce liure, le solide AQ est egal au solide AF. Par le mesme discours le solide BP sera egal au solide FB: partant le solide IF est autant multiplice du solide AF, comme la base IH est multiplice de la base AH: Item le solide EP est autant multiplice du solide EC, cõme la base EN est multiplice de la base BH: & partant comme la base IH sera plus grande, egale ou plus petite que la base AH, ainsi le solide IF sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide AF. Tout de mesme comme la base EN sera plus grande, egale, ou plus petite que la base BH, ainsi le solide EP sera plus grand, egal, ou plus petit que le solide EC. Maintenant soient quatre grandeurs, les deux bases AH, BH, & les deux solides AF, EC: desquelles de la premiere & troisiesme, (sçauoir de la base AH & du solide AF) on a pris les equemultiplices HI base, & IF solide: Item de la seconde & quatriesme, (sçauoir de la base BH, & du solide EC) les equemultiplices EN base, & EP solide, lesquels nous auons monstré estre comme demande la 6. def. 5. plus grands, egaux ou plus petits, en quelconque multiplication qu'elles soient prinses: & partant comme la base AH à la base BH, ainsi le solide AF

au solide EC. Parquoy si vn solide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

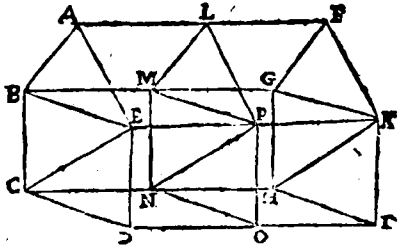


Ceste propos. se peut acommoder à tous prismes: Car si quelconque prisme est couppé par vn plan parallel aux plans opposez: tout ainsi que la base sera à la base, ainsi le solide sera au solide. Car soit premierement le prisme AB CDEF, duquel les plans opposez sont les triangles ABC. DEF: & soit iceluy couppé par le plan GHI parallel aux plans opposez. Ie dis que comme la base AI est à la base FI, ainsi le solide ABCIHG est au solide FEDIHG. Car soit imaginé le prisme ABCDEF estre prolongé de part & d'autre tant qu'on voudra: & de AF prolongees soient prises AK egale à GF, & FL, LM egales à FG: En apres, par les poincts G, L, M, soient entendus les plans KNO, LPQ, MRS parallels aux plans ABC, GHI, FED. Donc puis que les plans parallels ABC, GHI, sont couppez par le plan AI: leurs communes sections AC, GI, seront paralleles par la 16. prop. 11. Mais à cause que AD est parallelog. AG, CI seront aussi paralleles. Donc AI est parallelog. Par mesmes raisons seront demonstrez AH, CH estre parallelog. Et pource que les costez AC, AB, du triangle ABC, sont egaux aux costez GI, GH, du triangle GHI, (car par la 34. prop. 1. AC est egal à GI, & AB à GH) & par la 10. prop. 11. les angles BAC, HGI sont aussi egaux: (pource que les lignes AB, AC sont paralleles aux lignes GH, GI, & en diuers plans) par la 4. prop. 1. les

triangles ABC, GHI sont egaux entr'eux, & equiangles: Parquoy par la 4. prop. 6. les costez d'alentour les angles egaux, seront proportionnaux; & partant iceux triangles seront semblables. Donc le solide ABCIHG, contenu des deux plans opposez ABC, GHI egaux, & semblables, & des parallelog. AI, IB, GB, est vn prisme. Par mesme raison ABCONK, GHIDEF, DEFLPQ, & LPQSRM seront prismes: Et pource que les parallelogrammes AI, KC sont egaux & semblables, comme aussi AH, KB, & CH, OB; tous les plans du prisme ABCIHG, seront egaux & semblables à tous les plans du prisme ABCONK. Parquoy par la 10. def. 11, les prismes ABCIHG, ABCONK sont egaux. Par mesme raison les prismes GHIDEF, DEFLPQ, LPQSRM seront egaux. Partant le prisme KNOIHG sera autant multiple du prisme ABCIHG, que la base KI de la base AI; & le prisme GHISRM autant multiplice du prisme GHIDEF, que la base GS de la base GD. Et pource que si la base KI, (multiplice de la base AI premiere grandeur) est egale à la base GS, (multiplice de la base GD 2. grandeur) aussi le prisme KNOIHG, (multiple du prisme ABCIHG 3. grandeur) est egal au prisme GHISRM, (multiple du prisme GHIDEF 4. grandeur:) Mais si la base KI est plus grande que la base GS, aussi le prisme est plus grand que le prisme; & si moindre, moindre, en quelconque multiplication: par la 6. def. 5. comme la base AI premiere grandeur, sera à la base GD 2. grandeur, ainsi le prisme ABCIHG 3. grandeur sera au prisme GHIDEF 4. grandeur. En la mesme maniere on demonstrera que le prisme est au prisme, comme la base AH est à la base GE, & comme la base CH est à la base EI. Ce qui estoit proposé.

Soit maintenant le prisme ABCDEFGHIK, duquel les plans opposez sont polygones, c'est à sçauoir pentagones, & soit couppé par le plan LMNOP. Ie dis derechef, que com-

me la baſe CM eſt à la baſe NG, ainſi eſt le ſolide ABCD ELMNOP, au ſolide LMNOPFGHIK. Car ſi les plans oppoſez parallels ſont reſouds en triangles; auſſi le priſme ſera reſoud en autant de priſmes qu'il y aura de triangles és plans oppoſez. Parquoy comme la baſe BP ſera à la baſe MK, ainſi le priſme AB EPML ſera au priſme LMPKGF, par les choſes demonſtrees cy deſſus. En la meſme maniere, comme la baſe CP eſt à la baſe NK, ainſi le priſme BCEPMN ſera au priſme MNPKGH; & le priſme CDEPNO au priſme NOPKHI. Mais par la 1. prop. 6. comme BP eſt à MK: & CP à NK, ainſi eſt la ligne EP à la ligne PK, c'eſt à dire comme CN eſt à NH, & comme CN eſt à NH, ainſi eſt CM à NG. Donc les priſmes ABE PML, BCEPMN, CDEPNO, ont meſme raiſon aux priſmes LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, que CM à NG, & partant ont la meſme entr'eux. Mais par la 12. prop. 5. comme un ſeul eſt à un ſeul, ainſi ſont les trois aux trois. Donc comme le priſme BCEPMN ſera au priſme MNP KGH, c'eſt à dire comme la baſe CM à la baſe NG, ainſi le priſme ABCDELMNOP compoſé des trois ſera au priſme LMNOPFGHIK compoſé des trois. Ce qui eſtoit propoſé. Il y aura meſme demonſtration en quelconque autre priſme.



COROLLAIRE.

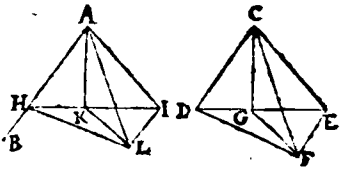
De cecy reſulte que ſi quelconque priſme eſt couppé par un plan parallel aux plans oppoſez, que la ſection eſt une figure egale & ſemblable aux plans oppoſez. Car il a eſté

demonſtré au premier priſme que le triangle GHI eſt egal, & ſemblable au triangle ABC, & partant au triangle DEF: Et il y a meſme demonſtration en tous. Le meſme ſe doit entendre des parallelipipedes.

PROBL. 4. PROP. XXVI.

Sur vne ligne droicte donnée, & à vn poinct donné en icelle, conſtituer vn angle ſolide egal à vn angle ſolide donné.

Soit la ligne droicte donnée AB, & le poinct donné en icelle A; & il faut conſtruire ſur icelle AB, & au poinct A, vn angle ſolide egal à l'angle ſolide C compris de trois angles plãs DCE, ECF, FCD.



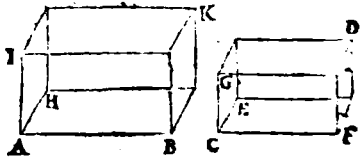
Soit tiree de F, la ligne FG perpendiculaire au plan des lignes CD, CE, par la 11. prop. 11. & ſoient menees les lignes DF, FE, EG, GD, CG: en apres ſoit priſe AH egale à CD: & par la 23. prop. 1. ſoit fait l'angle HAI egal à l'angle DCE; & la ligne AI egale à la ligne CE. Derechef au plan tiré par AH, AI. ſoit fait l'angle HAK egal à l'angle DCG, & la ligne AK egale à la ligne CG: puis par la 12. prop. 11. de K ſoit tiree au plan auquel ſont les trois AH, AK, AI, la perpendiculaire KL: laquelle ſoit poſee egale à FG, & ſoit menee la ligne AL. Ie dis que l'angle ſolide A, contenu des trois angles plans HAI, HAL, LAI, eſt egal à l'angle ſolide donné C.

Car eſtans menees les lignes HK, KI, IL, LH: veu que les coſtez AH, AK du triangle AHK, ſont egaux aux coſtez CD, CG du triangle CDG, & les angles HAK, DCG egaux par la conſtruction: les baſes HK, DG ſeront egales par la 4. prop. 1. Et d'autant que des angles egaux HAI, DCE, eſtans oſtez les angles egaux HAK, DCG, demeurent egaux les angles KAI, GCE: leſquels par la conſtruction ſont comptis de lignes egales: par la 4. prop. 1. les baſes KI, GE, ſeront auſſi egales. Les coſtez KH, KL ſont auſſi egaux aux coſtez GD, GF, & les angles HKL, DGL droicts: donc par la meſme 4. prop. 1. les baſes HL, DF, ſeront egales. Parquoy puis que les coſtez AH, AL du triangle AHL, ſont auſſi egaux aux coſtez CD, CF du triangle CDF: (car les coſtez AK, KL, ſont egaux aux coſtez CG, GF, par la conſtruction, & comprenent angles droicts: partant les baſes AL, CF ſont egales par la 4. p. 1.) les angles HAL, DCF ſeront pareillement egaux par la 8. p. 1. Finalement, pource que les coſtez KI, KL ſont egaux aux coſtez GE, GF: & les angles IKL, EGF droicts; par la 4. pr. 1. les baſes IL, EF ſont egales: partant puis que les coſtez AI, AL du triangle AIL ſont egaux aux coſtez CE, CF du triangle CEF, par la conſtruction, les angles IAL, ECF ſeront auſſi egaux par la 8. p. 1. donc les trois angles plans HAI, HAL, LAI, compoſans l'angle ſolide A, ſont egaux aux trois angles plans DCE, DCF, FCE, compoſans l'angle ſolide C; & partant l'angle ſolide A eſt egal à l'angle ſolide C. Parquoy nous auons conſtitué ſur vne ligne droicte, &c. Ce qu'il falloit faire.

PROB. 5. PROP. XXVII.

Sur vne ligne droicte donnee, deſcrire

vn ſolide parallelipipede ſemblable, & ſemblablement poſé à vn ſolide parallelipipede donné.



Soit la ligne donnee AB, ſur laquelle il faut conſtruire vn ſolide parallelipipede ſemblable, & ſemblablement poſé au parallelipede donné CD.

Sur la ligne AB, & au poinct en icelle A, ſoit fait par la prec. vn angle ſolide egal à l'angle ſolide C, lequel ſoit compris des trois angles plans HAI, BAI, BAH: tellement que HAI ſoit egal à ECG; BAI à FCG; & BAH à FCE: puis par la 12. prop. 6. ſoit fait comme CF eſt à CG, ainſi AB à AI, & comme CG à CE, ainſi AI à AH: & en raiſon egale, AB ſera à AH comme CF à CE. Et ſoient paracheuez les parallelogr. BH, HI, BI, BK, KI, KH, qui accompliront le parallelipipede AK. Ie dis qu'iceluy parallelipipede AK eſt ſemblable & ſemblablement poſé au donné CD.

Car d'autant que AB eſt à AI, comme CF à CG, & l'angle BAI egal à l'angle FCG, le parallelogramme BI eſt ſemblable au parallelogramme FG: par la meſme raiſon le parallelog. BH ſera ſemblable au parallelog. FE: & HI à EG. Partant trois parallelogrammes du ſolide AK ſont ſemblables & ſemblablement poſez, à trois parallelog. du ſolide CD. Mais par la 24. prop. 11. les trois oppoſez ſont egaux, & ſemblables. Parquoy les ſix plans du ſolide AK

ſont ſemblables & ſemblablement poſez aux ſix plans du ſolide CD: & partant par la 9. defin. les ſolides AK & CD ſeront ſemblables & ſemblablement poſez. Nous auons donc ſur vne ligne droicte donnee, deſcrit vn parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit faire.

THEOR. 23. PROP. XXVIII.

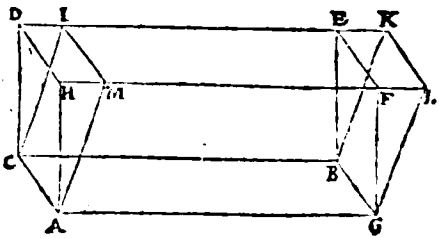
Si vn ſolide parallelipipede eſt couppé par vn plan paſſant par les diagonales des plans oppoſez, il ſera couppé en deux egalement.

Soit le ſolide parallelipipede AB couppé par le plan CDFG, (*Voyez la figure de la page* 1034) par les diagonales des plans oppoſez DF, CG. Ie dis qu'il eſt couppé en deux egalement.

Car puis que les plans AE, HB, ſont parallelogr. egaux & ſemblables par la 34. prop. 1. les triangles ADF, EFD, CGH & GCB ſont egaux entr'eux: mais les coſtez qui contiennent les angles egaux DAF, DEF, CHG, & CBG ſont proportionnaux: donc iceux triangles ſeront auſſi ſemblables par la 6. pr. 6. & le plan AG eſt egal & ſemblable au plan DB, & AC à FB par la 24. prop. 11. (car ce ſont plans oppoſez.) Partant les deux priſmes ADCHGF, FEBGCD, ſont compris de parallelogrammes, & de triangles oppoſez ſemblables & egaux, & par la 10. def. iceux priſmes ſont egaux. Parquoy puis qu'ils compoſent le parallelipipede AB: iceluy ſera couppé en deux egalement par le plan DCGF. Si donc vn ſolide parallelipipede eſt couppé par vn plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 24. PROP. XXIX.

Les ſolides parallelipipedes ayans meſme baſe, & meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ſont colloquees en meſmes lignes droictes; ſont egaux entr'eux.



Soient conſtituez ſur la baſe AB, & en meſme hauteur, les ſolides parallelipipedes ADEG, AIKG, deſquels les lignes inſiſtantes AH, AM, GF, GL; CD, CI, BE, BK ſont colloquees en meſmes lignes droictes HL, DK. Ie dis que le ſolide ADEG eſt egal au ſolide AIKG. Car d'autant que les parallelogrãmes AF, AL conſtituez ſur meſme baſe AG ſont egaux ent'eux par la 35. p. 1. ſi on en oſte le trapeze commun GM, teſteront egaux les triangles AHM, DFL: Et puis que par la 34. prop. 1. ils ont leurs coſtez egaux, chacun au ſien, ils ſeront equiangles, & partant auſſi ſemblables par la 4. prop. 6. Pour meſmes raiſons les triangles CDI, BEK, ſeront auſſi egaux & ſemblables. Mais par la 24. prop. 11. le parallelog. AD eſt egal & ſemblable au parallelog. GE: Item le parallelogr. AI au parallelogr. GK. Et par la 36. prop. 1. DM eſt egal à EL; attendu que leurs baſes HM, FL

ſont

ſont egales (car HF, ML ſont egales entr'elles, chacune d'icelles eſtant egale à AG; & oſtant MF qui leur eſt commune, reſtent MH, FL egales.) Parquoy les cinq plans du priſme AHMIDC ſont egaux & ſemblables aux cinq plans du priſme GFLKEB: & par la 10. def. 11. leſdits priſmes ſeront egaux: partant ſi on adiouſte à chacun d'iceux priſmes le commun ſolide AMICBEFG, ſeront faits egaux les parallelipipedes ADEG, AIKG. Parquoy les ſolides parallelip. ayans vne meſme baſe, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

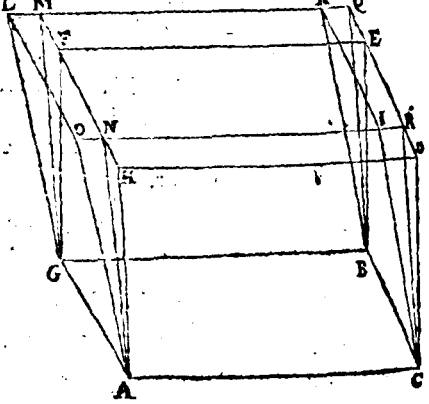
THEOR. 25. PROP. XXX.

Les ſolides parallelipipedes conſtituez ſur meſme baſe, & de meſme hauteur, & deſquels les lignes inſiſtantes ne ſont colloquees en meſmes lignes droictes, ſont egaux entr'eux.

Sur vne meſme baſe AB, & en meſme hauteur (c'eſt à dire entre meſme plans parallels) ſoient conſtituez les ſolides parallelipides CF, CL deſquels les lignes inſiſtentes menees des quatre angles de la baſe AH, AO, GF, GL, CD, CI, BE, BK ne ſont pas colloquees en meſmes lignes droictes. Ie dis que le ſolide CF eſt egal au ſolide CL.

Car puis que les plans HE, DK oppoſez à la baſe commune AB, ſont en vn meſme plan, à raiſon de la meſme hauteur des parallelipipedes; ſoient prolongees en icelay plan les lignes HF, DE, iuſques à ce qu'elles rencontrent LK auſſi prolongees en M & Q: ſoit encore prolongee OI, qui rencontre

HF & ED en N & R, puis soient tirees les lignes droictes AN, GM, BQ, CR. D'autant que les lignes continuees LK, OI sont paralleles, comme aussi HF, DE; le quadrilatere NMQR sera parallelogramme, qui ayant les costez oppositez egaux & parallels, aussi ANMG, CRQB, ANRC, GMQB, seront parallelog. & partant le solide CM sera parallelipipede: & par la prec. prop. il sera egal au parallelip. CF, puis qu'estans constituez sur mesme base AB, & de mesme hauteur, les lignes insistantes AH, AN, GF, GM, CD, CR, BE, BQ sont colloquees en mesmes lignes droictes HM, DQ. Mais pour mesmes raisons le parallelipip. CM est aussi egal au parallip. CL, ayans mesme base, & les lignes insistantes colloquees en mesmes lignes droictes LQ, OR. Donc le parallelipipede CF sera egal au parallelip. CL. Parquoy les solides parallelipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.



SCHOLIE.

On conuertira tant ceste proposition que la precedente en ceste maniere.

Les solides parallelipipedes egaux ayans mesme base, soit que les lignes insistentes soient colloquées en mesmes lignes droictes, ou non, sont de mesme hauteur.

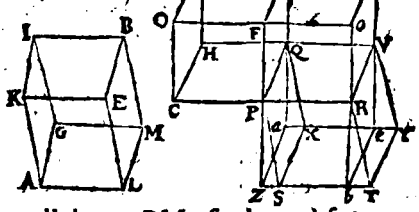
Car si l'on dit que l'vn est plus haut, si d'iceluy on coupe vn parallelipipede de mesme hauteur que l'autre, le couppé & l'autre seront egaux, par la 29. ou 30. prop. 11. & puis que cest autre est posé egal au tout, le couppé sera egal au tout. Ce qui est absurde.

THEOR. 26. PROP. XXXI.

Les solides parallelipipedes constitués sur bases egales, & de mesme hauteur, sont egaux entr'eux.

Soient les solides parallelipipedes AB, CD constituez sur bases egales AE & CF, & de mesme hauteur. Ie dis qu'iceux solides sont egaux entr'eux.

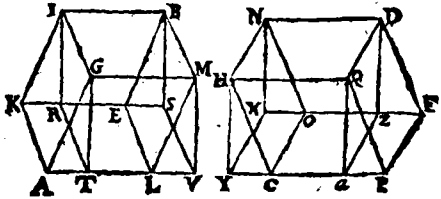
Car premierement les lignes insistentes AG, LM, KI, EB soient perpendiculaires à la base AE, & les insistentes CH, PQ, ON, FD perpendic. à la base CF; toutes lesquelles perpendicul. seront egales entr'elles, puis que les parallelip. sont de mesme hauteur: & apres auoir continué CP iusques à R, & fait PR egale à KE, au plan de OP prolongé, soit fait l'angle RPS egal à l'angle AKE, & fait PS egale à KA: puis soit acheué le parallelogr. PM, sur lequel soit con-



ſtruit le parallelip. QSTV à la hauteur de la perpendiculaire PQ. Donc puis que les coſtez PR, PS ſont egaux aux coſtez EK, KA, & les angles RPS, EKA egaux, les parallelogrammes PT, KL ſeront egaux & ſemblables. Derechef puis que les coſtez PQ, PS ſont egaux aux coſtez KI, KA, & les angles QPS, IKA droicts par la 3. def. 11. pource qu'icelles IK, PQ ſont poſees perpendiculaires aux plans AE, PT: auſſi les parallelogrammes QS, AI, ſeront egaux & ſemblables. Item les coſtez PR, PQ eſtans egaux aux coſtez KE, KI, & les angles RPQ, EKI droicts, par la meſme def. les parallelogrammes PV, KB ſeront auſſi egaux & ſemblables. Parquoy puis que les trois parallelog. PT, QS, PV, du parallelipipede QSTV ſont egaux & ſemblables aux trois KL, AI, KB, du parallelip. AIBL, par la 24. prop. 11. tant ceux-là, que ceux-cy ſeront egaux & ſemblables à leurs autres parallelogrammes oppoſez: & partant par la 10. definit. les parallelipipedes AB, SV ſeront egaux entr'eux. Maintenant que EP, TS prolongees ſe rencontrent en Z: & DQ, YX, en *a*, & ſoit acheué le parallelipipede ZV. Item que ND, *e*V prolongees ſe rencontrent en *d*, & OF, *b*R, en *c*, & ſoit acheué le parallelipipede DR. Donc puis que les parallelipipedes SV, ZV, ont meſme baſe PV, & meſme hauteur, & que les lignes inſiſtentes PZ, RT, R*b*: Q*x*, Q*a*, VY, V*c*, ſont colloquees entre meſmes lignes droictes ZT, *a* Y: iceux ſolides ſeront egaux entr'eux par la 29. prop. 11. Mais le parallelipipede SV eſt demonſtré egal au parallelipipede AB: donc le parallelipipede ZV ſera egal au meſme AB. Et d'autant que par la 35. pr. 1. les parallelogrammes PT, P*b* ſont egaux, & PT egal à AE, auſſi P*b* ſera egal au meſme AE, c'eſt à

dire à CF (car AE, CF ſont poſees baſes egales:) & par la 7. pr. 5. comme CF ſera à P*o*, ainſi P*b* ſera à P*o*: & par la 25 pr. 11. comme la baſe CF eſt à la baſe P*o*, ainſi le ſolide CD eſt au ſolide P*d*, puis que le parallelipipede C*d* eſt couppé par le plan PD parallel aux plans oppoſez CN, R*d*: Semblablement comme P*b* eſt à P*o*, ainſi le ſolide ZV au ſolide P*d*, pource que le parallelipipede D*b* eſt couppé par la plan PV parallel aux plans oppoſez F*d*, *ze*. Donc par la 9. prop. 5. les parallelipipedes CD, ZV ſeront egaux, puis qu'ils ont meſme raiſon au ſolide P*d*, ſçauoir eſt la meſme qu'ont les baſes CF, P*b* à la baſe P*o*. Parquoy puis que le parallelipipede ZV a eſté demonſtré egal au parallelipipede AB: les parallelipipedes AB & CD ſeront pareillement egaux: ce qui eſtoit propoſé.

Maintenant, ſi les lignes inſiſtentes AG, LM, KI, EB; CH, PQ, ON, FD, ne ſont perpendiculaires, ſur les baſes AE, CF, ſoient tirees des poincts (apres auoir continué les lignes AL, KE & PC, FO, tant qu'il ſera de beſoin) G, I, B, M, & H, N, D, Q, & ſur les plans d'audeſſous d'iceux poincts les perpendiculaires GT, IR, BS, MV, & HY, NX, DZ, Q*a*, par la 11. prop. 11. & ſoient tirees RT, SV, XY, Z*a*, pour faire les parallelipipedes ITVB, NY*a*D, leſquels par ce qui a eſté demonſtré cy-deſſus ſeront egaux entr'eux, car ils ſont ſur baſes egales GB, HD; & de meſme hauteur:



Mais par la 29. ou 30. prop. 11. le solide ITVB est egal au solide AB; & le solide NYaD egal au solide CD: donc le solide AB sera egal au solide CD. Parquoy les solides parallelipipedes constituez sur baſes egales, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

On conuertira ceſte 31. prop. en ceſte maniere.

Les solides parallelipipedes egaux, constituez sur baſes egales, sont de meſme hauteur: & les solides parallelipipedes egaux, qui sont en meſme hauteur: sont sur baſes egales. s'ils n'ont vne meſme baſe.

Car ſi on croit l'vn plus haut que l'autre: ſi on coupe du plus haut vn parallelip. de meſme hauteur que l'autre: par la 31. p. 11. le couppé ſera egal a l'autre, auquel eſt auſsi poſé egal le tout: parquoy le couppé ſera auſsi egal au tout: ce qui eſt abſurde. Que ſi les parallelipip. eſtans de meſme hauteur, on croit que la baſe de l'vn ſoit plus grande que la baſe de l'autre: ſi d'icelle baſe on en coupe vne egale à l'autre, & ſur icelle couppee on entend eſtre vn parallelipipede de meſme hauteur, lon demonſtrera en la meſme maniere, la partie eſtre egale au tout: Ce qui eſt abſurde.

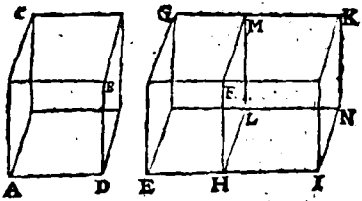
THEOR. 27. PROP. XXXII.

Les solides parallelipipedes de meſme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs baſes.

Soient deux parallelipipedes de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquels les baſes soient AB, EF. Ie dis que le solide eſt au solide comme la baſe à la baſe.

Car ſi ſur la ligne HF, (apres auoir prolongé le plan EF vers I) & à l'angle FHI on conſtruit le

parallelogramme FI egal au parallelog. AB; puis on acheue le solide IFLK; iceluy estant de mesme hauteur que le solide ABCD, & sur base egale, il luy sera egal par la 31. pr. 11. Parquoy par la 7. prop. 5. comme le solide IFKL est au solide EFGH, ainsi le solide ABCD est au mesme solide EFGH. Mais par la 25. prop. 11. le solide IFKL est au solide EFGH, comme la base IF, c'est à dire AB à la base EF: Donc aussi le solide ABCD, sera au solide EFGH, comme la base AB à la base EF. Parquoy les solides parallelipipedes de mesme hauteur, &c. Ce qu'il falloit prouuer.



SCHOLIE.

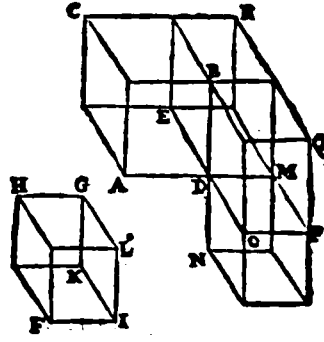
La conuerse: Si les solides parallelipipedes sont entr'eux comme leurs bases; ils seront en mesme hauteur. *Car si l'vne des hauteurs est plus grande que l'autre, de la plus grande en soit couppee vne egale à la moindre, & puis soit tiré vn plan parallel à la base; & par la 32. p. 11. comme la base sera à la base, ainsi le parallelipipede sera au parallelipipede couppé: mais ainsi il estoit aussi au parallelipipede total. Donc le couppé est egal au tout par la 9. p. 5. Ce qui est absurde.*

THEOR. 28. PROP. XXXIII.

Les semblables solides parallelipipedes, sont l'vn à l'autre en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient deux ſemblables parallelipipedes ABCE, FHGI conſtituez ſur baſes ſemblables AE, FK, eſquelles les coſtez homologues ſont AD, FI. Ie dis que le parallelipipede ABCE eſt au parallelipipede FHGI en raiſon triplee des coſtez homologues AD, FI.

Car ſoit prolongé AD vers M, tellement que DM ſoit egale à FI, ou HG. Item BD vers N, en ſorte que DN ſoit egale à LI ou GK: Item ED vers O, tellement que DO ſoit egale à KI ou GL: puis apres eſtans accomplis les parallelogrammes DP, MN, NO, ſoit acheué le parallelipipede NMP. Il eſt donc euident que les deux parallelipipedes FG, NP ſont ſéblables & egaux, puis qu'ils ſont cõpoſez de plans qui ont les angles egaux, & les coſtez au long d'iceux angles egaux, auſſi egaux. Item ſoient conſtruits les parallelipipedes BMOQ, & EBRM. D'autant que les parallelipipedes ABCD, FGHI, ſont ſemblables, comme AD eſt à FI, c'eſt à dire à DM, ainſi DE à KI, c'eſt à dire à DO: & BD à LI, c'eſt à dire à DN. Mais par la 1. prop. 6. comme AD à DM, ainſi le parallelog. AE, au parallelog. EM: & comme ED à DO, ainſi le parallelog. EM à DP: & comme BD à DN, ainſi le parallelogramme BM à MN. Donc comme AE ſera à EM, ainſi EM à DP & BM à MN. Mais par la 32. prop. 11. comme



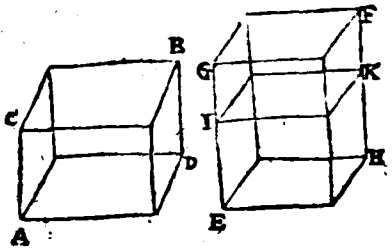
la baſe AE à la baſe EM, ainſi eſt le parallelipipede AECB au parallelip. EMRB: & comme la baſe EM eſt à la baſe DP, ainſi le parallelip. EMRB eſt au parallelipipede DPBQ: & comme la baſe BM eſt à la baſe MN, ainſi le parallelip. DPBQ eſt au parallelipipede NP. Parquoy comme le parallelipipede AECB ſera au parallelip. EMRB, ainſi le parallelipipede EMRB ſera au parallelip. DPBQ: & le parallelipipede DPBQ au parallelip. NP. Partant les quatre quantitez AECB, EMRB, DPBQ, NP ſont continuellement proportioneles: & par la 10.d.5. la premiere AECB ſera à la quatrieſme NP, c'eſt à dire à FG, en raiſon triplee de la premiere AECB à la ſeconde FMRB. Mais par la 32.pr. 11. comme AECB eſt à EMRB, ainſi la baſe AE eſt à la baſe EM: & par la 1.prop.6. comme AE eſt à EM, ainſi AD eſt à DM, c'eſt à dire à FI. Donc par la 11.pr.5. AECD ſera à EMRB comme AD à FI: partant la raiſon triplee de AECD à EMRB, ſera la meſme que de AD à FI: & par conſequent AECD eſtant à FG en raiſon triplee de AECD à EMRB: il ſera auſſi en raiſon triplee de AD à FI. Parquoy les ſolides parallipipedes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

COROLLAIRE.

Par cecy eſt evident que s'il y a quatre lignes droictes continuellement proportioneles, comme la premiere eſt à la quatrieſme, ainſi le parallelipipede deſcrit ſur la premiere, eſt au parallelipipede ſemblable, & ſemblablement deſcrit ſur la ſeconde: Puis que tant le parallelipipede eſt au parallelipipede, que la premiere ligne à la quarte en raiſon triplee de la raiſon de la premiere ligne à la ſeconde, ſçavoir des coſtez homologues.

THEOR. 29. PROP. XXXIV.

Les solides parallelipipedes egaux, ont les baſes & les hauteurs reciproques: Et ceux qui ont les baſes & les hauteurs reciproques, ſont egaux.



Soient les parallelipipedes egaux ABCD, EFGH ſur les baſes AD, EH, deſquels les hauteurs ſont AC, EG. Ie dis que leurs baſes & leurs hauteurs ſont reciproques. c'eſt à dire, que comme la baſe AD eſt à la baſe EH, ainſi la hauteur EG eſt à la hauteur AC.

Car ſi les baſes AD & EH ſont egales, (eſtans les ſolides poſez egaux) les hauteurs AC, EG ſeront auſſi egales par le ſchol. de la 31. pr. 11. & partant comme la baſe AD à la baſe EH, ainſi la hauteur EG à la hauteur AC.

Mais ſi les baſes ſont inegales, ſçauoir AD, plus grande que EH, la hauteur EG ſera plus grande que la hauteur CA: car elle ne peut eſtre plus petite, non pas ſeulement egale, d'autant que par la 31. *prop.* 11. iceux ſolides ſeroient l'vn à l'autre comme leurs baſes; partant AB plus grand que EF, & nous les auons poſez egaux: La hauteur EG ſera donc plus grande que CA; & d'iceluy ſoit retranchee EI egale

à CA, & d'iceluy poinct I soit imaginé que le plan IK parallel à EH, couppe le parallelipipede EF: Or les deux solides AB & EF estans egaux, ils auront mesme raison l'vn comme l'autre au solide EK, par la 7. prop. 5. Mais AB & EK estans de mesme hauteur, ils seront l'vn à l'autre comme la base AD à la base EH, par la 32. prop. 11. Partant EF sera aussi à EK comme la base AD à la base EH. Or comme le parallelipipede EF est au parallelip. EK, ainsi la base GL à la base IL, par la 25. prop. 11. & icelle base GL est à la base IL, comme la ligne EG est à la ligne EI, par la 1. prop. 6. & partant par la 11. prop. 5. le solide EF est au solide EK, comme EG à EI. Mais le solide EF est aussi au solide EK, comme la base AD à la base EH: Donc par la 11. prop. 5. comme la base AD est à la base EH, ainsi la hauteur EG est à la hauteur EI, ou à son egale AC.

Pour la seconde partie, si la base AD est à la base EH, comme la hauteur EG est à la hauteur AC. Ie dis que les deux solides AB & EF sont egaux.

Car si les hauteurs sont egales, il est euident que les bases sont aussi egales, puis qu'elles sont posees en mesme raison: & partant par la 31. prop. 11. les parallelipipedes AB, EF seront pareillement egaux.

Que si la heuteur EG est plus grande qne la hauteur AC d'icelle, soit retranchee EI egale à AC, & par I soit tiré le plan IK parallele à la base EH. Donc par la 32. p. 11. comme la base AD est à la base EH, ainsi le solide AB est au solide EK, puis que leurs hauteurs sont egales: Et par la 1. p. 6. comme EG est à EI, ainsi le plan GL est au plan IL. Mais comme la base GL est à la base IL, ainsi le solide EF, est au solide EK: (car ils sont de mesme hateur,) donc comme le solide AB est au solide EK, ainsi le solide

EF est au mesme solide EK, puis que par l'hypothese AD est à EH comme EG à AC ou EI : partant par la 9. prop. 5. les solides AB, EF seront egaux. Donc les solides parallelipipedes egaux, ont les bases, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il faut noter qu'à ceste demonstration & presque à toutes les autres de ce liure, les hauteurs des solides doiuent estre perpendiculaires. Parquoy si elles n'estoient telles, il les y faudroit reduire, comme nous auons fait à la fin de la 31. prop. de ce liure.

Or toutes les choses que nous auons demonstrees és 6 precedentes propositions, sçauoir és 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conuiennent aussi aux prismes qui ont deux plans opposez triangulaires, obseruant les susdites hypotheses. Car si à deux tels prismes de mesme hauteur, & constituez sur vne mesme base, ou sur bases egales, on apposé deux autres prismes egaux & semblables à iceux, seront faits deux parallelipipedes de mesme hauteur, & constituez sur mesmes, ou egales bases. Parquoy par la 29. 30. ou 31. pr. 11. seront egaux iceux parallelipipedes ; & partant aussi les prismes donnez, c'est à sçauoir les moitiez d'iceux parallelipipedes.

Derechef, si aux deux prismes susdits de mesme hauteur, & constituez sur diuerses bases, on adioinct deux autres prismes egaux, & semblables à iceux, seront faits derechef deux parallelipipedes de mesme hauteur : Parquoy par la 32. pr. 11. le parallelip. sera au parallelip. comme la base à la base ; & partant par la 15. p. 5. le prisme sera au prisme, c'est à sçauoir la moitié de l'vn des parallelip. à la moitié de l'autre, comme la mesme base à la base, si les bases des prismes sont parallelogrammes, ou comme le triangle au triangle, sçauoir est la moitié d'vne base à la moitié de l'autre, si les bases sont triangulaires.

Dauantage, si à iceux deux prismes semblables, on adiou-

ste deux autres prismes egaux & semblables à eux, seront constituez deux parallelip. semblables, lesquels par la 33. p. 11. seront entr'eux en raison triplee des costez homologues. Donc aussi par la 15. pr. 5. les prismes, sçauoir est les moitiez d'iceux, auront la raison triplee de mesmes costez homologues, lesquels sont pareillement costez homologues des prismes.

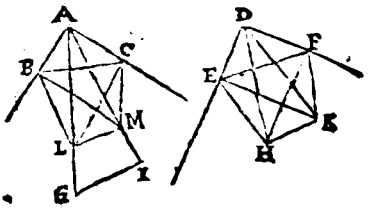
Finalement, si aux deux susdits prismes egaux, on adiouste deux autres prismes egaux & semblables à iceux, seront constituez deux parallelip. egaux de mesme hauteur que les prismes: Parquoy par la 34. pr. 11. puis que les bases, & les hauteurs des parallelip. sont reciproques, & les bases des prismes sont les mesmes, ou les triangles moitiez d'icelles, ayant mesme raison par la 15. p. 5. aussi les bases & les hauteurs des prismes seront reciproques.

THEOR. 30. PROP. XXXV.

S'il y a deux angles plans egaux, aux sommets desquels soient leuees en l'air deux lignes droictes faisant angles egaux auec les lignes des angles premierement posez, chacun au sien; & d'vn poinct pris au haut de chacune d'icelles deux lignes esleuees sont menees des lignes perpendiculaires aux plans esquels sont les angles premierement posez, & des poincts où tombent icelles perpendiculaires sont tirees des lignes droictes vers les sommets des angles premierement posez:

Les angles que font icelles lignes, auec les leuees en l'air ſont egaux entr'eux.

Soient deux angles plans egaux BAC, EDF, des ſommets deſquels A & D, ſoient leuees en l'air les lignes droictes AG, DH, tellemẽt que l'angle BAG ſoit egal à l'angle EDH: & l'angle CAG egal à l'angle FDH: & des poincts G & H pris és lignes AG, DH, ſoient tirees aux plans eſquels ſont les angles BAC, EDF, les perpendiculaires GI, HK, tombantes és poincts I, K, deſquels ſoient menees les lignes IA, DK. Ie dis que les angles GAI, HDK, ſont egaux entr'eux.



Car ſi les deux lignes AG, DH ſont inegales, de la plus grande AG, ſoit retranchee AL egale à DH: & de L au plan du triangle AGI, ſoit tiree LM parallele à GI: laquelle LM ſera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. 11. puis que GI eſt perpendiculaire à iceluy plan. Soient auſſi tirez des poincts M, K, les lignes MB, MC, KE, KF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF: & ſoient menees les lignes BC, BL, LC, EF, EH, HF. Or d'autant que LM eſt perpendiculaire au plan de l'angle BAC, elle le ſera auſſi à la ligne AM tiree au meſme plan par la 3. def. 11. partant par la 47. prop. 1. le quarré de AL ſera egal aux quarrez de AM, ML: mais par la meſme prop. le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AC, CM, puis que

Les angles que font icelles lignes droictes les leuees en l'air sont egaux e

Soient deux angles plans egaux BAC, EDH, ſommets deſquels A & D, ſoient leuees en l'air les lignes droictes AG, DH, reſpectivement: que l'angle BAG ſoit egal à l'angle EDH: & l'angle CAG egal à l'angle FDH:



& des poincts G & H pris és lignes AG, DH, ſoient tirees GI, HK, rombantes és poincts I & K, ſoient menees les lignes IA, DK le diſquelles GAI, HDK, ſont egaux entr'eux.

Car ſi les deux lignes AG, DH ſont egales, ou la plus grande AG, ſoit retranchee AI egale à DH: & de I au plan du triangle AGI, ſoit eſleuee IL, ralliee à GI: laquelle LM ſera perpendiculaire au plan de l'angle BAC par la 8. pr. 11. puis que elle ſera perpendiculaire à icelluy plan. Soient auſſi tirees les lignes MB, MC, KE, KF, des poincts M, K, les lignes AB, AC, DE, DF, perpendiculaires aux lignes AB, AC, DE, DF: & ſoient menees les lignes BC, BL, LC, EF, EL, FL. Et d'autant que LM eſt perpendiculaire à AM, elle le ſera auſſi à la ligne AL, qui eſt en l'angle BAC, elle le ſera auſſi à la ligne BL, qui eſt en meſme plan par la 3. def. 11. partant le quarré de AL ſera egal aux quarrez de AM, ML: & le meſme prop. le quarré de AL ſera egal aux quarrez de AB, BL: & partant AB, BL ſera droict. Pareillement on demonſtrera que les angles DFH, DEH ſont auſſi droicts. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL ſont egaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les coſtez AL, DH auſſi egaux, par la 26. prop. 1. les autres coſtez AB, BL ſeront pareillement egaux aux autres coſtez DE, EH. Par meſme raiſon ſeront egaux les coſtez AC, CL, aux coſtez DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC, du triangle ABC, eſtans egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF auſſi egaux, par la 4. pr. 1. les baſes BC, EF, ſeront pareillement egales entr'elles, & les angles ABC, ACB egaux aux angles DEF, DFE. Mais tous les angles ABM, ACM, ſont egaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils ſont tous droicts: Donc auſſi les autres angles BMC, MCB ſeront egaux aux autres angles KEF, KFE; & partant puis que les coſtez BC, EF, ont eſté demonſtrez egaux; les coſtez BM, MC, ſeront egaux

l'angle ACM eſt droict par conſtruction. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AC, CM, ML: Et par la 47. prop. 1. le quarré de CL eſt egal aux quarrez de CM, ML, puis que par la 3. d. de ce liure, l'angle CML eſt droict. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AC, CL: & partant par la 48. p. 1. l'angle ACL eſt droict. Derechef, puis que par la 47. p. 1. le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AM, ML: & le quarré de AM eſt egal aux quarrez de AB, BM, l'angle ABM eſtant droict par la conſtruction: le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BM, ML: mais le quarré de BL eſt egal à iceux quarrez de BM, ML, pource que l'angle BML eſt droict par la 3. def. 11. Donc le quarré de AL eſt egal aux quarrez de AB, BL: & partant par la 48. pr. 1. l'angle ABL ſera droict. On demonſtrera en la meſme maniere que les angles DFH, DEH ſont auſſi droicts. Maintenant puis que les angles ABL, LAB, du triangle ABL ſont egaux aux angles DEH, HDE, du triangle DEH, & les coſtez AL, DH auſſi egaux, par la 26. prop. 1. les autres coſtez AB, BL ſeront pareillement egaux aux autres coſtez DE, EH. Par meſme raiſon ſeront egaux les coſtez AC, CL, aux coſtez DF, FH. Parquoy les coſtez AB, AC, du triangle ABC, eſtans egaux aux coſtez DE, DF du triangle DEF, & les angles BAC, EDF auſſi egaux, par la 4. pr. 1. les baſes BC, EF, ſeront pareillement egales entr'elles, & les angles ABC, ACB egaux aux angles DEF, DFE. Mais tous les angles ABM, ACM, ſont egaux à tous les angles DEK, DFK, puis qu'ils ſont tous droicts: Donc auſſi les autres angles BMC, MCB ſeront egaux aux autres angles KEF, KFE; & partant puis que les coſtez BC, EF, ont eſté demonſtrez egaux; les coſtez BM, MC, ſeront egaux

aux costez EK, FK, par la 26. prop. 1. veu donc que les costez AC, CM, du triangle ACM sont egaux aux costez DF, FK, du triangle DFK, & les angles ACM, DFK sont droicts, par la 24. prop. 1. les bases AM, DK seront egales. Et puis que BL, EH ont esté demonstrées egales, leurs quarrez seront aussi egaux. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de BL est egal au quarré de BM, ML, & le quarré de EH aux quarrez de EK, KH, pource que les angles BML, EKH sont droicts, par la 3. def. 11. Donc les quarrez de BM, ML seront egaux aux quarrez de EK, KH: & partant estans ostez les quarrez de BM, EK, qui sont egaux, les lignes BM, EK, ayant esté demonstrees egales, resteront egaux les quarrez de LM, HK, & partant les lignes LM, HK seront egales. Parquoy veu que les costez AL, AM du triangle ALM, sont egaux aux costez DH, DK du triangle DHK, & la base LM egale à la base HK; les angles LAM, HDK seront egaux par la 8. prop. 1. S'il y a donc deux angles plans egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

COROLLAIRE.

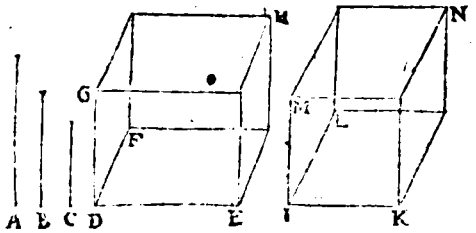
Parquoy s'il y a deux angles plans egaux, és sommets desquels soient esleuees en l'air des lignes droictes egales, lesquelles auec les lignes d'iceux angles premierement posez, contiennent angles egaux, chacun au sien: les perpendiculaires tirees des poincts extremes d'icelles lignes esleuees en l'air, sur les plans des angles premierement posez, seront egales entr'elles. Car d'autant que les angles plans BAC, EDF, sont posez egaux, & les lignes egales AL, DH esleuees en haut constituent les angles egaux LAB, HDE; Item LAC, HDF, il a esté demonstré que les perpendiculaires LM, HK, sont egales entr'elles.

THEOR.

THEOR. 31. PROP. XXXVI.

Si trois lignes droictes sont proportioneles; le solide parallelipipede constitué d'icelles trois lignes, est egal au solide parallelipipede fait de la moyenne, pourueu qu'iceux deux solides soient equiangles.

Soient trois lignes continuellement proportioneles A, B, C: & soit constitué vn angle solide D, de



trois quelconques angles plans EDF, EDG, FDG, tellement que la ligne DE soit egale à A, & DG à B, & DF egale à C: & soit accomply le parallelipipede DH: en apres, par la 26. prop. 11. sur la ligne IK egale à B, & au poinct I soit fait l'angle solide I des trois angles plans KIL, KIM, & MIL, egaux aux trois EDF, EDG, FDG: tellement que chacune des lignes IK, IL, IM soit egale à la moyenne B; & soit parfait le parallelipipede IN. Ie dis que les solides DH, IN sont egaux.

Car puis que comme DE est à IK, ainsi IL à DF (car DE est egale à A; IK, IL à B; & DF à C,) & les

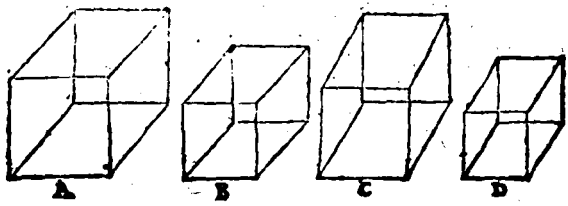
angles EDF, KIL egaux, les parallelog. EF, KL ſeront egaux par la 14. prop. 6. pource qu'ils ont les coſtez au long des angles egaux reciproques. Et d'autant qu'aux ſommets des angles plans egaux EDF, KIL ſont eſleuez en l'air les lignes egales DG, IM, leſquelles auec les lignes des angles premierement poſez comprennent angles egaux, vn chacun au ſien: les perpendiculaires tirees de G, M, ſur les plans des baſes EF, KL; (ſçauoir eſt les hauteurs des parallelip. DH, IN) ſeront egales entr'elles par le corollaire de la preced. prop. Parquoy par la 31. prop. 11. les parallelip. DH, IN, ſeront egaux entr'eux, puis qu'ils ont les baſes EF, KL egales, & pareillement les hauteurs egales. Parquoy ſi trois lignes droictes ſont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 32. PROP. XXXVII.

Si quatre lignes droictes ſont proportioneles; les ſolides parallelipipedes ſemblables, & ſemblablement deſcrits ſur icelles, ſeront auſſi proportionaux: Et ſi quatre ſolides parallelipipedes ſemblables & ſemblablement poſez ſont proportionaux; les quatre lignes droictes, ſur leſquelles ils ſeront deſcrits, ſeront auſſi proportioneles.

Soient quatre lignes droictes proportioneles A, B, C, D: & ſoient deſcrits ſur icelles quatre ſolides ſemblables & ſemblablement poſez A, B, C, D. Ie

dis qu'iceux ſolides ſont proportionaux.



Car puis que le ſolide A eſt ſemblable au ſolide B: par la 33. prop. 11. ils ſeront l'vn à l'autre en raiſon triplee de la ligne A à la ligne B: pareillement les ſolides C & D ſeront auſſi en raiſon triplee de C à D: mais la raiſon de A à B, eſt comme de C à D par l'hypotheſe. Donc la raiſon triplee de A à B, ſera ſemblable à la raiſon triplee de C à D, & partant par la 11. prop. 5. le ſolide A ſera au ſolide B, comme le ſolide C au ſolide D.

Maintenant, ſi les quatre ſolides A, B, C, D, ſemblables & ſemblablement deſcrits ſur les quatre lignes droictes A, B, C, D, ſont proportionaux. Ie dis que la ligne A ſera à la ligne B, comme la ligne C à la ligne D. Car le ſolide A ſera au ſolide B, en raiſon triplee de la ligne A à la ligne B par la 33. pr. 11. Item le ſolide C au ſolide D, en raiſon triplee de C à D: mais le ſolide A eſt au ſolide B comme le ſolide C au ſolide D: partant leur raiſon triplee ſera ſemblable; & par conſequent les quatre lignes droictes A, B, C, D, ſeront proportioneles. Parquoy ſi quatre lignes droictes ſont proportioneles, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

Semblablement, ſi trois lignes droictes ſont proportio-

nelles, les parallelipip. semblables & semblablement descrits sur icelles seront proportionaux ; & si trois solides semblables, &c. Car la moyenne ligne estant posee deux fois auec son solide, les quatre solides seront proportionaux, comme il a esté demonstré. Car puis que le solide de la deuxiesme ligne est egal au solide de la troisiesme ligne, & la deuxiéme ligne egale à la troisiéme, la proposition est manifeste.

Et est à notter qu'il n'importe pas que tous les quatre solides soient semblables entr'eux : Car les deux solides descrits sur les deux premieres lignes A & B estans semblables & semblablement posez, il n'est pas neceßaire que les deux autres solides descrits sur les deux dernieres lignes C & D soient semblables & semblablement posez aux deux premiers, ains suffit qu'ils le soient entr'eux deux, ainsi qu'il est euident par la demonstration cy-dessus.

Nous adiousterons icy cét autre theoreme.

Si quatre lignes droictes sont continuellement proportioneles: le parallelipipede ayant pour baſe le quarré de l'vne des extrémes, & pour hauteur l'autre extréme, est egal au cube de la moyenne proport. plus prochaine de la premiere extréme priſe.

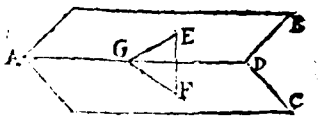
Soient quatre lignes continuellement proportioneles A, B, C, D. Ie dis que le parallelipipede ayant le quarré de l'extréme A pour baſe, & l'autre extréme D pour hauteur, est egal au cube de la moyenne B plus prochaine de l'extréme A.

Car puis que par le corol. de la 20. prop. 6. le quarré de A est au quarré de B, comme A à C, c'est à dire comme B à D : les baſes auec les hauteurs seront reciproques, puis que le quarré de A est la baſe du parallelipipede, & la ligne D, la hauteur d'icelui ; & la baſe du cube est le quarre de B, & sa hauteur la meſme ligne B. Donc par la 34. prop. 11. le parallelipipede & le cube seront egaux. Car

meſme raiſon le parallelip. ayant pour baſe le quarré de l'extreme D, & pour hauteur l'autre extreme A, ſera demonſtré egal au cube de la moyenne prop. C plus prochaine de l'extreme D.

THEOR. 33. PROP. XXXVIII.

Si vn plan eſt perpendiculaire à vn autre plan; & d'vn poinct de l'vn d'iceux on meine vne ligne perpendiculaire à l'autre, elle tombera ſur leur commune ſection.



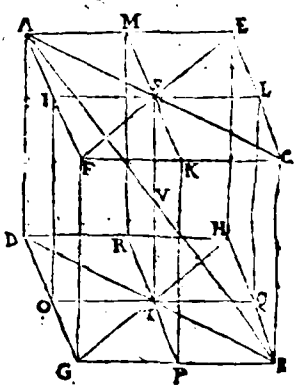
Soit le plan AB, perpendiculaire au plan AC, leur ligne de commune ſection AD: & du poinct E pris en AB, ſoit menee vne perpendiculaire au plan AC: ie dis qu'elle tombera ſur la commune ſection AD.

Car qu'elle tombe ailleurs, s'il eſt poſſible, comme au poinct F du plan AC: & par la 12. prop. 1. de F ſoit menee FG perpendiculaire à AD; & la ligne GE faiſant le triangle GFE. Or ſi la ligne EF eſt perpendiculaire au plan AC, par la 3. def. 11. elle le ſera auſſi à la ligne FG: & icelle FG eſtant perpendiculaire à la commune ſection AD, par la 4. def. elle le ſera pareillement au plan AB: & par conſequent à la ligne GE: partant au triangle GFE, les deux angles ſur la ligne GF ſeroient tous deux droicts contre la 17. prop. 1. Donc la perpendiculaire tombant de E au plan AC ne tombera pas hors la commune

section AD, ains sur icelle. Parquoy si vn plan est perpendiculaire à vn autre plan, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 34. PROP. XXXIX.

Si les costez des plans opposez d'vn solide parallelipipede, sont couppez en deux egalement, & on meine des plans par les sections: la ligne de commune section d'iceux plans, & le diametre du solide parallelipipede, se coupperont en deux egalement.



Soit le parallelipipede AB; les plans opposez AC, BD, desquels tous les costez soient couppez en deux egalement és poincts I, K, L, M O, P, Q, R, par lesquels soient imaginez passer les plans IQ, KR, se couppans l'vn l'autre en la ligne ST: & soit menee la diagonale AB: Ie dis que la ligne ST, & la diagonale AB s'entrecouppent en deux egalement.

Car estans tirees les lignes SA, SC, TD, TB: soient considerez les deux triangles BQT, DOT,

desquels les deux costez BQ, QT sont egaux aux deux costez DO, OT, (car BQ, DO, sont moitiez des lignes droictes egales BH, DG: & par la 34. p. 1. QT, OT, sont egales aux deux egales BP, GP, puis que PQ, PO sont parallelogrammes) & l'angle EQT par la 29. prop. 1. est egal à l'interne DOT: partant par la 4. prop. 1. les bases BT, DT seront aussi egales: & les angles BTQ, DTO pareillement egaux: & par la 13. prop. 1. les angles BTQ, BTO sont egaux à deux droicts. Donc aussi DTO, BTO sont egaux à deux droicts: & partant par la 14. pr. 1. BT, DT constituent vne seule ligne droicte. En la mesme maniere sera demonstré que AS, CS sont egales, & composent vne seule ligne droicte. Maintenant puis que l'vne & l'autre AD, BC est parallele & egale à FG, à cause des parallelogrammes DF, FB: icelles seront aussi egales & paralleles entr'elles par la 9. prop. 11. Parquoy AC, BD qui conioignent les extrémitez d'icelles AD, BC, sont aussi egales & paralleles par la 33. prop. 1. & par consequent AS, BT moitiez d'icelles sont egales. Mais pource que AC, BD sont paralleles, les lignes AB, ST seront auec icelles en vn mesme plan, par la 7. prop. 11. & partant s'entrecoupperont en vn poinct, sçauoir en V. Et d'autant que par les 29. & 15. pr. 1. les deux angles ASV, AVS du triangle ASV, sont egaux aux deux angles BTV, BVT, du triangle BTV, & le costé AS egal au costé BT: les autres costez AV, SV, seront aussi egaux aux autres costez BV, TV, chacun au sien; par la 26. prop. 1. Parquoy les deux lignes AB, ST s'entrecouppent en deux egalement au poinct V. Parquoy si les costez des plans opposez d'vn solide parallelipipede, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

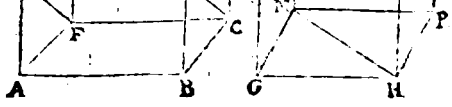
COROLLAIRE.

Par cecy eſt euident qu'en tout parallelipipede, tous les diametres s'entrecouppent en deux egalement en vn ſeul poinct, ſçauoir eſt au poinct V, auquel ils diuiſent en deux egalement la ligne ST. Eſt auſsi manifeſte que tout plan qui couppe le parallelipipede en deux egalement paſſe par le centre d'iceluy, ſçauoir par V.

THEOR. 55. PROP. XL.

S'il y a deux priſmes d'egale hauteur, l'vn deſquels ait pour baſe vn triangle, & l'autre vn parallelogramme double d'iceluy triangle: iceux priſmes ſeront egaux entr'eux.

Soient deux priſmes d'egale hauteur ABCDEF, GHIKLM: & que celuy-là ait pour baſe le paralle-



logramme ABCF, double du triangle GHM baſe du priſme GHIKLM. Ie dis qu'iceux priſmes ſont egaux entr eux.

Car ſi on les accomplit pour eſtre ſolides parallelipipedes AN, GQ, la baſe GP ſera egale à la baſe

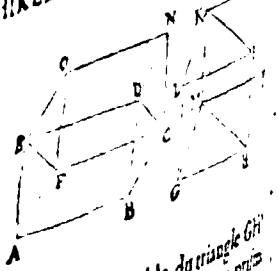
COROLLAIRE.

Par ceci il est clair que tout parallelipipede...
mettes contrepointé en deux parties egales par...
si auec les poincts P, auons mis...
menez la ligne ST. Et aussi manifeste que tout...
triangle est parallelipipede en deux triangulaires...
centre d'icelui, comme sont P.

THEOR. 35. PROP. XI

S'il y a deux prismes d'egale hauteur...
desquels ait pour base vn triangle...
l'autre vn parallelogramme de...
dit celuy triangle: iceux prismes...
egaux entr'eux.

Soient deux prismes d'egale hauteur...
GHIKLM: & que celuy là ait pour base...



logramme ABCF, double du triangle GH
du prisme GHIKLM. Ie dis qu'iceux pris...
eux.
...mplit pour estre solides...
...n sera egale...

BF: & estans posez de mesme hauteur, ils seront egaux par la 31. prop. 11. & par la 28. prop. les plans diagonaux CDEF, HIKM les diuiseront en deux egalement; & partant les prismes proposez estans les moitiez de choses egales, seront egaux entr'eux. Parquoy s'il y a deux prismes d'egale hauteur, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

Fin de l'vnziesme Element.

ELEMENT DOVZIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

LES polygones semblables inscrits aux cercles, sont l'vn à l'autre comme les quarrez descrits des diametres des cercles.

Soient deux polygones semblables ABCDE & FGHIK, inscrits aux cercles, desquels les diametres sont AL, FM. Ie dis qu'iceux polygones sont l'vn à l'autre comme les quarrez des diametres AL, FM.

Car soient menees les lignes droictes AC, FH: item BL & GM. D'autant que les pentagones estans semblables, AB est à BC, comme FG à GH, & l'angle ABC egal à l'angle FGH: par la 6. prop. 6. les triangles ABC, FGH sont equiangles: partant l'angle BCA sera egal à l'angle FHG. Mais celuy-là est egal à l'angle L, cestuy-cy à l'angle M, par la 21. pr. 3. (car ils sont sur mesmes segmens BA, & EG.) Donc l'angle L sera egal à l'angle M: & par la 31. pr. 3. les

ELEMEN-

DOVZIESME.

THEOR. 1. PROP. I.

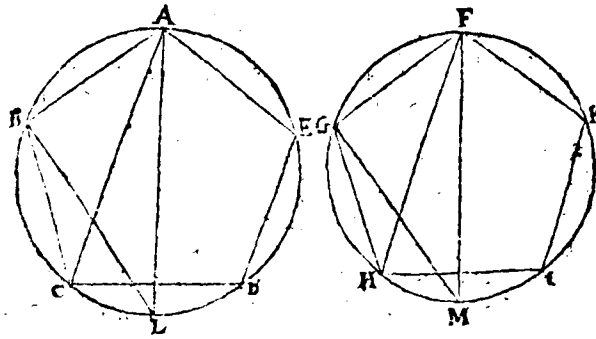
ES polygones ſem-
inſcrits aux cercles, ſ
à l'autre comme les q
deſcrits des diamet

cercles.

Soient deux polygones ſemblables AB
FGHIK, inſcrits aux cercles, deſquelles
tres ſont AL, FM. Ie dis qu'iceux polyg
l'vn à l'autre comme les quarrez des diam
FM.

Car ſoient menees les lignes droites
item BL & GM. D'autant que les poly
rans ſemblables, AB eſt à BC, comme FG
l'angle ABC egal à l'angle FGH: par la 2
triangles ABC, FGH ſont equiangles: par
BCA ſera egal à l'angle FHG. Mais
ceſtuy cy à l'angle M, par
ſegmens BA, & EG

angles ABL, FGM eſtans dans les demy cercles, ſont droicts & egaux : partant les triangles ABL, FGM ſeront equiangles: (car le troiſieſme angle BAL ſera egal au troiſieſme GFM par la 32. prop. 1.)



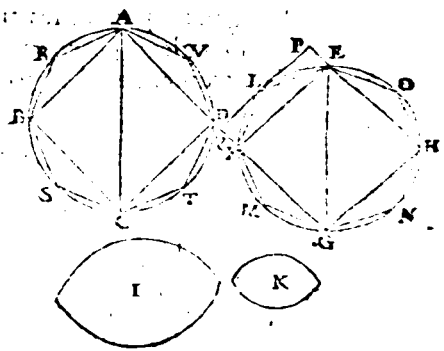
& par la 4. prop. 6. comme AL ſera à AB, ainſi FM à FG: & en permutant, comme AL ſera à FM, ainſi AB à FG. Parquoy par la 22. prop. 6. comme le pentagone deſcrit ſur AB ſera à l'autre pentagone ſemblable, & ſemblablement poſé ſur FG: ainſi le quarré de AL ſera au quarré de FM. Parquoy les polygones ſemblables inſcrits aux cercles, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

THEOR. 2. PROP. II.

Les cercles ſont l'vn à l'autre, comme les quarrez de leurs diametres.

Soient les deux cercles ABCD, EFGH, dont les diametres ſont AC & EG: Ie dis qu'ils ſont l'vn à l'autre comme le quarré de AC eſt au quarré de EG: c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD ſoit

à quelque figure quatriéme proport. comme I, qu'icelle figure I eſt egale au cercle EFGH.



Autrement elle ſera plus petite ou plus grande. Qu'elle ſoit premierement plus petite, s'il eſt poſſible: & ſoit le cercle EFGH plus grand qu'icelle de la figure K. Or par la 1. prop. 10. on peut retrancher plus de la moitié du cercle EFGH, & du reſidu plus de la moitié tant de fois qu'il demeurera en fin vne quantité plus petite que K: Soit donc dans iceluy cercle EFGH deſcrit le quarré EFGH, qui eſt plus grand que la moitié du cercle: (d'autant que le quarré de EG, qui eſt ſon double, eſt plus grand que le cercle.) Si les quatre ſegmens du cercle ſont moindres que K, nous auons ce que nous demandons: Sinon ſoit couppé l'arc EF en deux egalement au poinct L, & ſemblablement les trois autres arcs FG, GH, HE, és poincts M, N, O; & ſoient tirees les lignes droictes EL, LF, FM, MG, GN, NH, HO, OE, afin d'auoir l'octogone ELFMGNHO, inſcrit au cercle: Il eſt euident que dans les quatre ſegmens égaux, il y aura quatre triangles egaux, & que chacun comme ELF, eſt plus de la moitié de ſon ſegment: (car par la 41. prop. 1. le triangle Iſoſcele FLE eſt la moitié du rectangle

FP de meſme hauteur, & ſur meſme baſe FE, lequel rectangle eſt plus grand que le ſegment FLE.) Soient maintenant les huict petites figures reſtantes plus petites que la figure K: que ſi cela n'eſtoit, il faudroit touſiours coupper les arcs derniers, & touſiours inſcrire des polygones, deſquels le dernier auroit deux fois autant de coſtez que ſon precedent, & ſouſtraire touſiours plus de la moitié de chaque ſegment, ſçauoir ſon triangle Iſoſcele: Il eſt certain que les dernieres portions ſeront en fin plus petites que la figure K. Mais pour abreger ſoient les deuant dites huict portions reſtantes plus petites que la figure K: Il eſt euident que l'octogone ELFMGNHO ſera plus grand que la figure I, puis que les deux I & K ſont egales au cercle EFGH. Soit pareillement inſcrit vn octogone ſemblable au cercle ABCD: ce qui eſt facile; car il n'y a qu'à coupper chaque demy circonference ABC, ADC en deux egalement és poincts B & D; puis les circonferences AB, BC, CD, AD auſſi en deux egalement en R, S, T, V; & ayant tiré les lignes droictes AR, RB, BS, SC, CT, TD, DV, & VA; il eſt euident que la figure inſcripte ſera ſemblable à la figure octogone deſcrite au cercle EFGH. Maintenant par la prec. prop. l'octogone ARBSCTDV ſera à l'octogone ELFMGNHO, comme le quarré de AC eſt au quarré de EG: mais comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD eſt à la figure I: & par la 11. prop. 5. comme le poligone ARBSCTDV ſera au poligone ELFMGNHO, ainſi le cercle ABCD ſera à la figure I: mais le poligone ARBSCTDV eſt moindre que le cercle ABCD: Donc par la 14. propoſ. 5. le poligone ELFMGNHO ſera auſſi moindre que la figure I:

mais il a auſſi eſté demonſtré plus grand. Ce qui eſt abſurde. Donc la figure I n'eſt pas plus petite que le cercle EFGH.

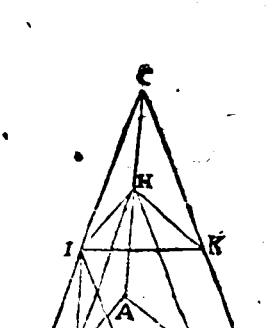
Elle ne peut auſſi eſtre plus grande : Car puis que comme le quarré de AC eſt au quarré de EG, ainſi le cercle ABCD eſt à la figure I ; en changeant, la figure I ſera au cercle ABCD, comme le quarré de EG au quarté de AC : mais ſoit imaginé que comme I eſt au cercle ABCD, ainſi le cercle EFGH ſoit à quelque autre figure, comme K : & par la 14. pr. 5. comme la figure I eſt plus grande que le cercle EFGH, ainſi le cercle ABCD ſera plus grand que la figure K : & par la 11. prop. 5. le cercle ABCD ſera à la figure K, comme le quarté de AC eſt au quarré de EG : ce qui eſt contre la premiere partie de la demonſtration, en laquelle nous auons demonſtré que l'vn des cercles eſtant à vne figure, en la raiſon des quarrez des diametres, qu'icelle figure ne pouuoit eſtre plus petite que l'autre cercle : Partant la figure I ne pouuoit eſtre plus grande que le cercle EFGH : ny plus petite, comme en la premiere partie : elle eſtoit donc egale à iceluy. Parquoy les cercles ſont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres : Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Par ces choſes eſt euident que le cercle eſt au cercle comme le polygone deſcrit en celuy-là eſt au polygone ſemblable deſcrit en ceſtuy-cy. Puis que le cercle eſt au cercle, & le polygone au polygone, comme le quarré du diametre eſt au quarré du diametre, ainſi qu'il a eſté demonſtré és 1 & 2 prop. cy-deſſus.

THEOR. 3. PROP. III.

Toute pyramide ayant baſe triangulaire, peut eſtre diuiſee en deux pyramides egales, ſemblables entr'elles, & à la totale, & en deux priſmes egaux, & plus grands que la moitié de la pyramide totale.



Soit la pyramide ABCD ayant la baſe triangulaire ABD, & le ſommet au poinct C : Ie dis qu'elle peut eſtre diuiſee en deux pyramides egales, ſemblables entr'elles, & à la totale ABCD : & en deux priſmes egaux, plus grands que la moitié d'icelle pyramide propoſee.

Car ſoient couppez en deux egalement, tous les coſtez des plans d'icelle pyramide, ſçauoir les trois de la baſe ABD aux poincts E, F, G, & les trois hypothenuſes AC, BC, DC aux trois poincts H, I, K, & ſoient menees les lignes EF, FG, GE, HI, IK, KH, HG, HE, EI, IF. Premierement il eſt euident que toute la pyramide ABDC eſt diuiſee en quatre ſolides, ſçauoir en deux pyramides AEGH, HIKC, dont les baſes ſont les triangles AEG, HIK, & les ſommets H, C : & en deux priſmes BFIHEG, FGDKHI, dont la baſe de celuy-là eſt le quadrangle BEGF, & de celuy-cy le

ttiangle FGD. Or d'autant que les costez AB, AC, ont esté couppez en deux egalement en E & H, par la 2. prop. 6. BC, EH seront paralleles: & par mesme raison HI est parallele à BA: donc le quadrilatere BIHE est parallelogramme: & par la 34. pr. 1. HI est egale à EB, ou EA son egale, & HE à BI, ou IC son egale: & par le corol. de la 4. prop. 6. les deux triangles ABC, AEH sont semblables entr'eux. Par mesmes raisons les deux triangles ABC, HIC seront semblables entr'eux, & consequemment aussi les deux AEH, HIC, par la 21. prop. 6. lesquels seront aussi egaux entr'eux, puis qu'ils ont tous leurs costez egaux, chacun au sien. Par mesmes raisons le triangle AHG sera egal & semblable au triangle HCK: mais les lignes HE, HG estans paralleles aux lignes CI, CK, & se touchans en diuers plans, par la 10. p. 11. les angles EGH, ICK seront egaux: & les costez qui sont iceux angles estans proportionaux, les trois triangles EHG, ICK, BCD seront equiangles, & consequemment semblables: comme aussi les trois AEG, HIK, ABD: Donc par la 9. def. 11. les trois pyramides ABDC, AEGH, HIKC seront semblables entr'elles: & par la 10. d. les deux dernieres seront aussi egales entr'elles, puis que tous les quatre triangles de l'vne ont esté monstrez semblables & egaux aux quatre triangles de l'autre.

Or que les deux solides BFIHGE, FGDKHI. soient deux prismes egaux, & faisans ensemble plus de la moitié de la pyramide proposée ABDC, on le prouuera ainsi, puis que les costez des plans d'icelle pyramide ont esté couppez en deux egalement, & partant proportionnellement, par la 2. prop. 6. les lignes AB, FG sont paralleles, comme aussi BD, EG:

par

par ainſi le quadrilatere BEGF eſt vn parallelogr. & par la 9. prop. 11. HG & IF eſtans parallelles à CD, elles le ſont auſſi entr'elles: Donc FIHG eſt vn parallelogramme; comme eſt auſſi BIHE: partant les trois coſtez du triangle BIF ſeront egaux aux trois coſtez du triangle EHG, chacun au ſien: conſequemment iceux triangles ſont equiangles & egaux entr'eux, & partant ſemblables: Mais par la 15. prop. 11. ils ſont auſſi parallels, les lignes BI, FI, eſtans paralleles aux lignes EH, GH. Parquoy le ſolide BFIHGE contenu des deux triangles BIF, EHG egaux ſemblables & parallels oppoſez, & des trois parallelogrammes BEGF, BIHE, FIHG eſt vn priſme par la 13. def. 11. Derechef FD, FG, GD, coſtez de parallelogr. ſont egaux aux coſtez oppoſez IK, IH, HK, chacun au ſien par la 34. pr. 1. & partant les triangles FGD, IHK ſeront egaux & equiangles entr'eux, & conſequemment ſemblables: Mais ils ſont auſſi parallels par la 15. p. 11. donc le ſolide FGDKHI contenu des deux triangles oppoſez FGD, IHK egaux, ſemblables & parallels, & des trois parallelogr. FIKD, FIHG, GHKD eſt vn priſme; lequel eſtant de meſme hauteur que le priſme BFIHGE (car ils ſont tous deux entre les plans parallels BEGD, IHK) luy ſera egal par la 40. p. 11. puis que la baſe quadrangulaire BEGF de celuy-cy eſt double de la baſe triangulaire de celuy-là, par le ſcholie de la 41. p. 1. Mais il eſt euident qu'iceluy priſme BFIHGE eſt plus grand que la pyramide de meſme hauteur BEFI, qui n'en eſt que partie, la baſe d'icelle BEF n'eſtant que la moitié du parallelogr. BEGF: laquelle pyramide BEFI eſt egale & ſemblable à la pyramide EAGH, comme il eſt manifeſte par l'egalité & ſimilitude de

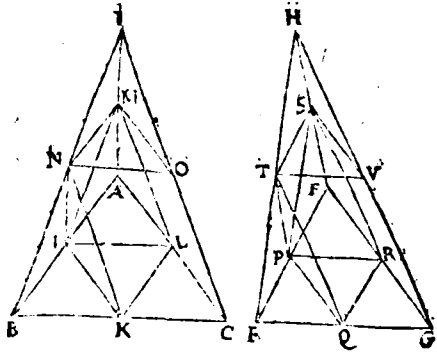
leurs triangles. Parquoy ledit prisme BFIHEG sera aussi plus grand qu'icelle pyramide EAGH : Et par consequent les deux prismes BFIHEG, FGDKHI, ensemble, seront plus grands que les deux pyramides AEHG, HICK ensemble. Mais iceux prismes & pyramides font ensemble la pyramide totale ABCD: donc iceux prismes estans plus grands qu'icelles deux pyramides, seront aussi plus grands que la moitié d'icelle pyramide totale ABCD. Parquoy toute pyramide ayant base triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

THEOR. 4. PROP. IV.

S'il y a deux pyramides de mesme hauteur ayans bases triangulaires, chacune desquelles soit diuisee en deux autres pyramides egales entr'elles, & semblables à la toute, & en deux prismes egaux; & que les pyramides prouenues de cette diuision soient touſiours diuisees de mesme façon : comme la base de l'vne des pyramides sera à la base de l'autre, ainsi aussi tous les prismes qui sont en l'vne des pyramides, seront à tous les prismes de l'autre, egaux en multitude.

Soient sur les bases triangulaires ABC, EFG, les pyramides ABCD, EFGH de mesme hauteur, cha-

cune desquelles soit diuisee comme en la precedente proposition en deux pyramides egales entr'elles & semblables à la toute, sçauoir est en AILM, MNOD; EPRS, STVH; & en deux prismes egaux IBKLMN, CKLMNO; PFQRST, GQRSTV: Et de mesme façon soient entendues les pyramides AILM, MNOD, EPRS, STVH estre diuisees; & en continuant touſiours de mesme façon. Ie dis que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi tous les prismes faits en la pyramide ABCD sont à tous les prismes faits en la pyramide EFGH, egaux en multitude.



Car puis que comme BC à CK, ainsi FG à GQ; pource que l'vne & l'autre ligne est diuisee en deux egalement. & les triangles ABC, LKC sont semblables & semblablement posez: Item les triangles EFG, RQG par le coroll. de la 4. prop. 6. aussi comme le triangle ABC sera au triangle LKC, ainsi le triangle EFG sera au triangle RQG par la 22. pr. 6. & en permutant, comme ABC à EFG, ainsi LKC

à RQG. Mais comme LKC à RQG, ainsi est le prisme CKLMNO au prisme GQRSTV, comme nous demonstrerons incontinent: & partant ainsi aussi le prisme IBKLMN est au prisme PFQRST, puis que ceux-cy sont egaux à ceux-là: Et comme vn seul prisme, sçauoir IBKLMN est à vn seul prisme PFQRST, ainsi sont les deux prismes ensemble IBKLMN, CKLMNO, aux deux prismes ensemble PFQRST, GQRSTV par la 12. prop. 5. Donc aussi comme la base ABC à la base EFG, ainsi les deux prismes en la pyramide A B C D seront aux deux prismes en la pyramide EFGH. Nous demonstrerons en la mesme maniere, deux prismes és pyramides AILM, MNOD, faites en la pyramide ABCD, estre aux deux prismes és pyramides EPRS, STVH, faites en la pyramide EFGH, comme sont les bases AIL, MNO de ces pyramides là aux bases EPR, STV de ces pyramides-cy: & ainsi continuellement, tant que la mesme diuision sera faite. Mais comme ces bases là sont à celles-cy, ainsi la base LKC, qui est egale & semblable à celles-là, est à la base RQG, qui est egale & semblable à celle-cy, c'est à dire ainsi la base ABC est à la base EFG. Donc aussi comme la base ABC est à la base EFG, ainsi les prismes de quelconque pyramide faite en la pyramide ABCD, seront aux prismes de quelconque pyramide faite en la pyramide EFGH: & partant aussi comme les prismes de la pyramide ABCD seront aux prismes de la pyramide EFGH, ainsi seront les prismes tant de la pyramide AILM, aux prismes de la pyramide EPRS, que les prismes de la pyramide MNOD, aux prismes de la pyramide STVH; & ainsi continuellement. Parquoy puis que par la 12. propos. 5. comme les deux prismes de

la pyramide ABCD ſont aux deux priſmes de la pyramide EFGH, ainſi tous les priſmes eſtans és pyramides ABCD, AILM, MNOD, &c. enſemble, ſont à tous les priſmes eſtans és pyramides EFGH, EPRS, STVH, &c. enſemble, ſi ceux cy ſont egaux en multitude à ceux là : pareillement comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi ſeront tous les priſmes de la pyramide ABCD, à tous les priſmes de la pyramide EFGH. Parquoy s'il y a deux pyramides de meſme hauteur, ayans baſes triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

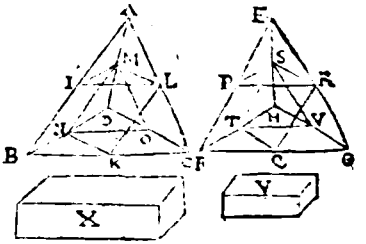
LEMME.

Or que comme LKC eſt à RQG, ainſi le priſme CKLMNO ſoit au priſme GQRSTV, nous le demonſtrerons ainſi. Soient imaginees tomber des ſommets D, H, des lignes perpendiculaires ſur les baſes ABC, EFG, leſquelles ſeront les hauteurs egales des pyramides ABCDEFGH. Donc puis que les plans parallels ABC, MNO couppent proportionnellement par la 17. prop. 11. deux lignes droictes, ſçauoir DC, & la perpendiculaire tombant de D, & DC eſt couppee en deux egalement en O : pareillement la perpendiculaire tombant de D, ſera couppee en deux egalement au poinct auquel elle rencontre le plan MNO. Par la meſme raiſon la perpendiculaire tombant de H, ſera couppee en deux egalement par le plan STV. Parquoy puis qu'icelles perpendiculaires ſont poſees egales, leurs moitiez, ſçauoir eſt les hauteurs des priſmes, ſeront auſſi egales : & partant les priſmes CKLMNO, GQRSTV eſtans d'egales hauteurs, ſeront entr'eux, comme les baſes LKC, RQG, par les choſes que nous auons demonſtrees ſur la 34. prop. 11.

THEOR. 5. PROP. V.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes triangulaires, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

Soient les pyramides de meſme hauteur ABCD, EFGH, deſquelles les baſes ſont les triangles ABC, EFG. Ie dis que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe.



Autrement ſoit imaginé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD ſoit à quelque ſolide, cõme X, lequel ſera plus petit ou plus grãd que la pyramide EFGH: Et ſoit en premier lieu plus petit, comme de la quantité du ſolide Y. Ainſi nous imaginons que les deux ſolides X & Y, ſont egaux à la pyramide EFGH. Maintenant par la 3. p. 12. on peut diuiſer vne pyramide en deux pyramides egales, & en deux priſmes egaux, leſquels ſeront plus grands que la moitié de la pyramide totale: Que ſi de la pyramide EFGH, on retranche plus de la moitié, ſçauoir les deux priſmes PFQRST, GQRSTV, & de chacune pyramide reſtante EFRS, STVH, encores plus de la moitié, ſçauoir deux priſmes, en continuant touſiours iuſques à ce que toutes les pyramides reſtantes apres le dernier tettranchement, ſoient toutes enſemble manifeſtement plus petites que le ſolide Y: ce qui peut arriuer par la

1. prop. 10. Ainſi tous les priſmes enſemble retranchez de la pyramide EFGH, ſeront plus grands que le ſolide X, puis que le reſte eſt plus petit que le ſolide Y. Pareillement ſoient retranchez autant de fois deux priſmes de la pyramide ABCD, comme on en a retranché de la pyramide EFGH : il eſt euident par ce qui a eſté demonſtré en la precedente propoſition, que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH : Mais nous auons poſé que comme la baſe ABC eſt à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Et partant par la 11. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſeront à tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, comme la pyramide ABCD eſt au ſolide X. Or tous les priſmes retranchez de la pyramide ABCD ſont plus petits qu'icelle pyramide : donc par la 14. prop. 5. tous les priſmes retranchez de la pyramide EFGH, ſeront auſſi plus petits que le ſolide X : Mais nous les auons tantoſt prouuez plus grands : Ce qui eſt abſurde. Partant le ſolide X n'eſtoit pas plus petit que la pyramide EFGH.

Soit donc plus grand, s'il eſt poſſible ; & puis que comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la pyramide ABCD au ſolide X ; en permutant, la baſe EFG ſera à la baſe ABC, comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD. Mais comme le ſolide X eſt à la pyramide ABCD, ſoit poſé la pyramide EFGH eſtre à quelque autre ſolide, comme Y : Et par la 14. prop. 5. d'autant que le ſolide X eſt poſé plus grand que la pyramide EFGH, auſſi la pyramide ABCD ſera plus grande que le ſolide Y : & par la 11. p. 5. comme la baſe EFG eſt à la baſe ABC, ainſi

la pyramide EFGH à vn solide plus petit que l'autre pyramide : mais nous auons demonstré que cela estant, il s'ensuit vne absurdité, sçauoir que les prismes retranchez d'vne pyramide, estoient plus grãds que la pyramide de laquelle ils sont retranchez: Partant le solide X ne peut estre plus grand que la pyramide EFGH, ny aussi plus petit : il sera donc egal. Parquoy puis qu'il a esté posé que comme la base ABC est à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD est au solide X ; & que par la 7. prop. 5. la pyramide ABCD est au solide X, cõme à la pyramide EFGH egale à iceluy solide X ; pareillement comme la base ABC sera à la base EFG, ainsi la pyramide ABCD sera à la pyramide EFGH. Donc les pyramides de mesme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCOLIE.

Par la conuerse : si les pyramides triangulaires sont entr'elles comme leurs bases ; elles seront de mesme hauteur. Car si on croit que la hauteur de l'vne soit plus grande que l'autre, en soit couppee d'icelle vne egale à la moindre, & du poinct de la section à tous les angles de la base, soient tirees des lignes droictes ; & comme la base sera à la base, ainsi la pyramide sera à la pyramide n'agueres constituee: mais elle estoit pareillement ainsi à toute la pyramide. Donc par la 9 prop. 5. la pyramide constituee sera egale à toute la pyramide, la partie au tout : ce qui est absurde.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que les pyramides de mesme hauteur constituees sur mesme, ou egales bases triangulaires, sont egales entr'elles : puis qu'elles sont en mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posees egales, ou vne seule & mesme.

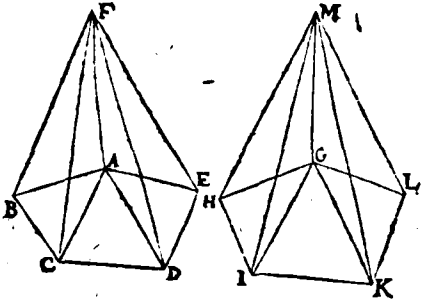
Item il s'ensuit au contraire que les pyramides triangulaires constituees sur vne mesme, ou egales bases, sont de mesme hauteur. Et que les pyramides egales, & ayant

meſme hauteur, ont les baſes egales, ſi elles ne ſont vne meſme : leſquelles deux choſes nous demonſtrerons par la premiere partie du corol. par le meſme argument dont nous auons vſé en demonſtrant la converſe des 30. & 31. p. 11. ſi tant ſur la hauteur, que ſur la baſe coupee eſt conſtituee vne autre pyramide, &c.

THEOR. 6. PROP. VI.

Les pyramides de meſme hauteur ayans baſes polygones, ſont l'vne à l'autre comme leurs baſes.

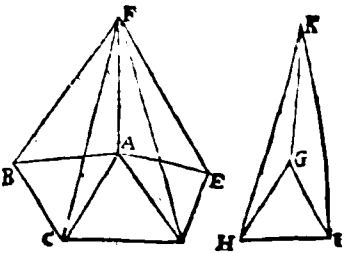
Soit la pyramide ABCDEF de meſme hauteur que la pyramide GHIKLM, deſquelles les baſes ABCDE & GHIKL ſont polygones: Ie dis que comme la baſe eſt à la baſe, ainſi la pyramide eſt à la pyramide.



Car les baſes eſtans reduites en triangles ABC, ACD, ADE, GHI, GIK, GKL: ſoit imaginé ſur chacun d'iceux vne pyramide de meſme hauteur que la totale. Donc puis que par la 5. prop. 12. comme la baſe ABC eſt à la baſe ACD, ainſi la pyramide ABCF eſt à la pyramide ACDF; en compoſant, comme la baſe ABCD ſera à la baſe ACD, ainſi la pyramide ABCDF ſera à la pyramide ACDF: Mais derechef, par la 5. prop. 12. comme la baſe ACD eſt à la baſe

ADE, ainsi la pyramide ACDF est à la pyramide ADEF : Donc en raison egale, comme la base ABCD est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide ADEF : & partant en composant, comme la base ABCDE est à la base ADE, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide ADEF. Par semblable argument sera demonstré que comme la base GHIKL est à la base GKL, ainsi la pyramide GHIKLM est à la pyramide GKLM : & en changeant, comme la base GKL est à la base GHIKL, ainsi la pyramide GKLM est à la pyramide GHIKLM. Derechef, puis que par la 5. prop. 12. comme la base ADE est à la base GKL, ainsi la pyramide ADEF est à la pyramide GKLM : les 4. bases ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, seront és mesmes raisons que les quatre pyramides ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM: Parquoy en raison egale, comme la base ABCDE est à la base GHIKL, ainsi la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIKLM. Donc les pyramides de mesme hauteur ayans bases polygones, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

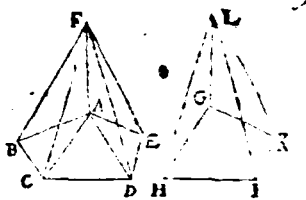
SCHOLIE.



Encore que selon plusieurs interpretes, il soit parlé en la demonstration de ceste prop. seulement des pyramides de mesme hauteur, desquelles les bases polygones ont les costez egaux en nombre: toutesfois nous demonstrerons aussi le mesme des pyramides de mesme hauteur, la base de l'une des

quelles contient plus de costez que la base de l'autre. Car soient premierement deux pyramides de mesme hauteur ABCDEF, GHIK, la base de l'vne desquelles soit polygone, sçauoir est pentagone, & de l'autre triangulaire. Ie dis que la pyramide est à la pyramide, comme la base est à la base: Car le pentagone estant resoud en triangles, aussi la pyramide sera diuisee en pyramides egales en nombre. Et pource que par la 5. prop. 12. comme la base ABC premiere quantité est à la base GHI, seconde quantité, ainsi la pyramide ABCF troisiesme quantité est à la pyramide GHIK quatriesme quantité. Et en la mesme maniere, comme la base ACD cinquiéme quantité est à la base GHI deuxiesme quantité, ainsi la pyramide ACDF sixiéme quantité, est à la pyramide GHIK quatriéme quantité: par la 24. p. 5. comme la base ABCD premiere & cinquiéme quantité ensemble sera à la base GHI secõde quantité, ainsi la pyramide ABCDF troisiéme quantité auec la sixiéme sera à la pyramide GHIK quatriéme quantité. Derechef, puis que comme la base ABCD est à la base GHI, ainsi la pyramide ABCDF est à la pyramide GHIK, comme nous venons de demonstrer: & que par la 5. prop. 12. comme la base ADE cinquiéme quantité est à la base GHI deuxiéme quantité, ainsi la pyramide ADEF sixiéme quantité est à la pyramide GHIK quatriéme quantité: par la mesme 24. pr. 5. la base ABCDE sera à la base GHI, comme la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK: ce qui estoit proposé. En la mesme maniere faudroit tousiours proceder s'il y auoit d'auantage de triangles en la base du polygone. Or puis que comme il a esté demonstré, la base du polygone ABCDE est à la base triangulaire GHI, ainsi que la pyramide ABCDEF est à la pyramide GHIK: pareillement en changeant, comme la base GHI sera à la base ABCDE, ainsi la pyramide GHIK sera à la pyramide ABCDEF

Parquoy deux pyramides, desquelles l'vne a la base polygone, & l'autre triangulaire, sont touſiours comme leurs baſes, de quelque façon que l'on commence: Car encore que la demonſtration commence au polygone & à ſa pyramide, comme appert par la demonſtration, toutesfois en changeant il eſt permis de commencer au triangle & à ſa pyramide, comme il a eſté dict.



Maintenant ſoient deux pyramides de meſme hauteur ABCDEF, GHIKL, deſquelles les baſes ſont polygones, & ſont plus de coſtez en vne baſe qu'en l'autre: Ie dis derechef que la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe eſt à la baſe. Car eſtant reſoud le polygone ABCDE és triangles ABC, ACD, ADE: la pyramide ſera diuiſee en autant de pyramides. Et d'autant que comme la baſe triangulaire ABC, premiere quantité, eſt à la baſe polygone GHIK, ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCF troiſiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité; & comme la baſe ACD cinquiéme quantité eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ACDF ſixiéme quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: auſſi par la 24. prop. 5. comme la baſe ABCD premiere quantité auec la cinquiéme ſera à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF troiſiéme quantité auec la ſixiéme ſera à la pyramide GHIKL quatriéme quantité. Derechef, puis que comme la baſe ABCD premiere quantité eſt à la baſe GHIK ſeconde quantité, ainſi la pyramide ABCDF tierce quantité, eſt à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: & auſſi que comme la baſe ADE quinte quantité, eſt à la

base GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ADEF sixiéme quantité, est à la pyramide GHIKL quarte quantité: pareillement par la 24. propost. 5. comme la base ABCDE premiere quantité auec la quinte, sera à la base GHIK seconde quantité, ainsi la pyramide ABCDEF tierce quantité auec la sixiéme, sera à la pyramide GHIKL quatriéme quantité: ce qui estoit proposé. Il faudroit tousiours proceder en la mesme maniere s'il y auoit d'auantage de triangles en la base.

Or nous conuertirons tant ceste 6. prop. que celle demonstree en ce Scholie en ceste maniere.

Les pyramides de quelconques bases, lesquelles sont entr'elles comme leurs bases, sont de mesme hauteur.

Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere, que les choses dittes au Scholie de la 5. pr. de ce liure, ont esté demonstrées.

COROLLAIRE.

Il appert aussi que les pyramides de mesme hauteur, constituées sur bases egales multilateres, ou sur vne mesme, estre egales entr'elles: puis qu'elles sont mesme raison que leurs bases, lesquelles sont posées egales, ou vne mesme.

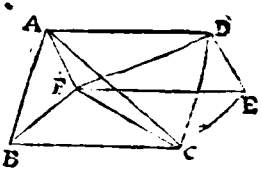
Derechef, est euident que les pyramides multilateres egales, & construites sur bases egales, ou sur vne mesme, ont mesme hauteur. Et que les pyramides multangulaires egales, & ayans mesme hauteur, ont aussi les bases egales, si elles ne sont vne mesme. Ce qui se peut demonstrer comme nous auons dict au coroll. de la 5. p. de ce liure.

THEOR. 7. PROP. VII.

Tout prisme ayant la base triangulaire peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires

Soit le prisme ABCDEF duquelles deux triangles opposites ABF, DCE sont egaux & semblables. Ie

dis qu'iceluy prisme peut estre diuisé en trois pyramides egales, ayans bases triangulaires.



Car aux trois parallelogrãmes d'iceluy prisme, soient menés les trois diametres AC, CF, FD: d'autant que par la 34. prop. 1. les triangles ABC, ADC sont egaux, & que par la 5. prop. 12. comme la base ABC est à la base ADC, ainsi est la pyramide ABCF à la pyramide ADCF (car elles ont vne mesme hauteur, sçauoir est la perpendiculaire menee du sommet F au plan BCD) icelles pyramides seront egales entr'elles. Parmesme raison seront egales les pyramides ADFC, EFDC, cõstituees sur les bases egales ADF, EFD, & sous mesme hauteur, sçauoir de la perpendiculaire menee du sommet C sur le plan ADEF. Mais la pyramide ADCF est la mesme que la pyramide ADFC: puis que l'vne & l'autre est contenue des quatre plans ADC, ADF, ACF, DCF. Donc les trois pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ou CDEF, composans tout le prisme, sont egales entr'elles. Parquoy tout prisme ayant base triangulaire, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

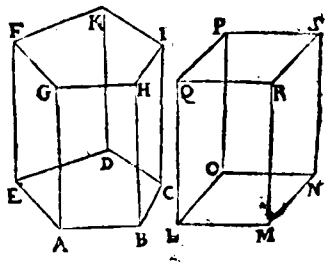
De cecy resulte que tout prisme est triple d'vne pyramide de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales, ou bien qu'vne pyramide est la tierce partie d'vn prisme de mesme hauteur, estant sur mesme base, ou sur bases egales.

SCHOLIE.

Nous adiousterons icy la demonstration d'vne autre proposition, touchant les prismes qui ont au sommet les plus

parallels à la baſe, egaux & ſemblables : ceſte propoſition eſt telle.

Les priſmes eſtans ſous meſme hauteur, & ayans quelconques baſes, ſont entr'eux comme leurs baſes.



Soient deux priſmes de meſme hauteur ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, deſquels les baſes ſont figures multilateres. Ie dis que comme la baſe ABCDE eſt à la baſe LMNO, ainſi eſt le priſme au priſme. Car ſi de tous les angles de chaque baſe on tire des lignes droictes à vn poinct du plan ſuperieur, qui eſt oppoſé à la baſe, ſe feront deux pyramides ſous meſme hauteur, ayans meſmes baſes que le priſme: Et partant par le corollaire cy-deſſus, chaque pyramide ſera la troiſiéme partie de ſon priſme. Parquoy par la 15. prop. 5. comme la pyramide ſera à la pyramide, ainſi le priſme ſera au priſme: Mais la pyramide eſt à la pyramide, comme la baſe à la baſe, ainſi qu'il a eſté demonſtré à la 6. prop. Donc auſſi comme la baſe ſera à la baſe, ainſi le priſme ſera au priſme. Ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

Il eſt manifeſte par ces choſes, que les priſmes de meſme hauteur, & conſtituez ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales quelles qu'elles ſoient, ſont egaux entr'eux, puis qu'ils ont meſme raiſon entr'eux que leurs baſes, leſquelles ſont vne meſme, ou bien ſont egales.

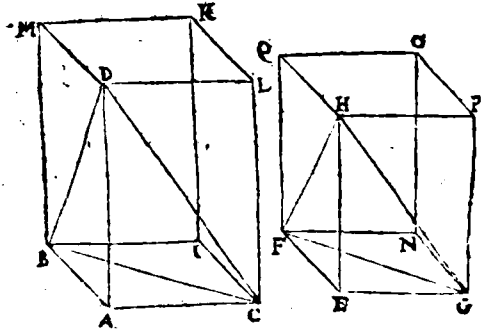
Appert auſſi par le contraire, que les priſmes egaux, conſtituez ſur vne meſme baſe, ou ſur egales ſont en meſ-

me hauteur: Et que les prismes egaux de mesme hauteur, ont aussi mesme base, ou egales. Ce qu'on demonstrera en la mesme maniere qu'a esté demonstré la converse de la 31. prop. 11.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Pyramides semblables ayans bases triangulaires, sont en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient deux pyramides semblables A B C D & EFGH, ayans bases triangulaires ABC & EFG: Ie dis qu'elles sont en raison triplee des costez de mesme raison AC & EG. Car soient acheuez les paral-



lelipipedes AK & EO. D'autant que les pyramides sont semblables, les trois angles plans de l'angle solide A, (sçauoir DAC, DAB, BAC) seront egaux aux trois angles plans de l'angle solide E (sçauoir HEG, HEF, FEG) & les costez au long d'iceux angles egaux, proportionaux; tellement que comme DA est à AC, ainsi HE est à EG; & comme DA est à DB, ainsi HE est à EF, & comme BA est à AC. ainsi

FE est

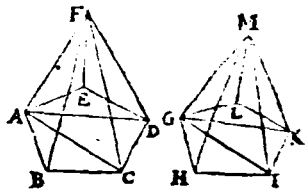
FE est à EG: Parquoy les trois parallelogrammes AL, AM, AI seront semblables aux trois parallelog. EP, EQ, EN. Mais par la 24. prop. 11. tant les trois AL, AM, AI du parallelipipede AK sont egaux & semblables aux trois opposez BK, CK, ML; que les trois EP, EQ, EN du parallelipipede EO, le sont aux trois opposez QN, PN, HO: & partant les six plans du parallelelipipede AK sont semblables aux six plans du parallelip. EO. Et par la 9. def. 11. iceux parallelipipedes sont semblables. Donc par la 33. prop. 11. ils seront en raison triplee de leurs costez homologues AC & EG. Mais par la 15. prop. 5. comme le parallelipipede AK est au parallelip. EO, ainsi la pyramide ABCD est à la pyramide EFGH: (car chacune d'icelle pyramide est la sixiesme partie de son parallelipipede, puis que chaque parallelipipede peut estre diuisé en deux prismes egaux par la 38. prop. 11. & chacun prisme en trois pyramides egales par la prec. prop.) donc par la 11. prop. 5. lesdites pyramides ABCD, EFGH, sont aussi en la raison triplee des mesmes costez AC & EG. Parquoy les pyramides semblables ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

De ceey est manifeste, qu'aussi les pyramides semblables, desquelles les bases ont plus de trois costez, sont en raison triplee de leurs costez homologues.

Soient les pyramides semblables ABCDEF, GHIKLM, ayans bases rectilignes semblables de plusieurs costez. Ie dis qu'icelles pyramides sont en raison triplee des costez homologues AB, GH. Car si des angles A & G, on tire aux angles opposez les lignes droictes AC, AD: GI, GK: par la 20. prop. 6. les bases semblables seront diuisees en nombre egal de triangles semblables, sçauoir est que les

triangles ABC, ACD, ADE, ſeront ſemblables aux triangles GHI, GIK, GKL. Donc puis que les pyramides ſont ſemblables, les triangles AFB, GMH, ſont ſemblables, & l'angle FAB, egal à l'angle MGH; & comme FA ſera à AB, ainſi MG ſera à GH: mais comme AB à AC, ainſi GH à GI, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, GHI: donc en raiſon egale, comme FA ſera à AC, ainſi MG ſera à GI. Derechef, puis que comme AC eſt à CB, ainſi GI eſt à IH, à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, GHI: & comme

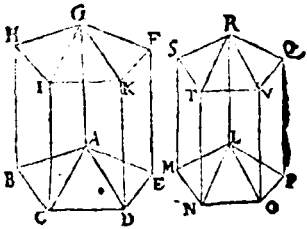


CB à CF, ainſi IH à IM, car à cauſe de la ſimilitude des pyramides, les triangles BCF, HIM, ſont ſemblables: auſſi en raiſon egale, comme AC ſera à CF, ainſi GI ſera à IM: & partant puis que comme FA à AC, ainſi MG à GI; & comme AC à CF, ainſi GI à IM: pareillement en raiſon egale, comme FA ſera à FC, ainſi MG à MI. Parquoy par la 5. prop. 6. les triangles AFC, GMI, ſeront equiangles, & partant ſemblables. Mais les triangles AFB, BFC, ABC ſont auſſi ſemblables aux triangles GMH, HMI, GHI. Donc par la 8. def. 11. les pyramides ABCF, GHIM, ſont ſemblables. Par meſme raiſon ſeront ſemblables les pyramides ACDF, GIKM: Item ADEF, GKLM. Parquoy par la 8. prop. 12. les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, ſeront aux pyramides GHIM, GIKM, GKLM, chacune à la ſienne, en raiſon triplee des coſtez homologues AB, CD, DE, à GH, IK, KL, chacun au ſien. Veu donc qu'à cauſe de la ſimilitude des baſes ABCDE, GHIKL, il y a une ſeule & meſme raiſon de AB, CD, DE à GH, IK, KL: auſſi les pyramides ABCF, ACDF, ADEF, auront aux pyramides GHIM, GIKM,

GKLM, vne seule & mesme raison, c'est à sçauoir triplee. Et par la 12. prop. 5. comme vne seule pyramide ABCF est à vne seule pyramide GHIM, ainsi toutes les pyramides, sçauoir est la pyramide ABCDEF, est à toutes les pyramides, sçauoir à la totale GHIKLM. Parquoy puis que par la 8. prop. 12. la pyramide ABEF est à la pyramide GHIM en raison triplee des costez homologues AB, GH; aussi la pyramide ABCDEF sera à la pyramide GHIKLM en la raison triplee des mesmes costez homologues AB, GH, Ce qui estoit proposé.

SCHOLIE.

Par mesme raison les prismes semblables sont en raison triplee de leurs costez homologues: Car soient deux prismes semblables ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV: Ie dis qu'ils sont en raison triplee des costez homologues. Car si des angles A & L on tire les lignes AC, AD, LN, LO; par la 20. prop. 6. les triangles ABC, CAD, DEA, seront semblables aux triangles LMN, LNO, OPL. semblablement si des angles G & R, on tire les lignes GI, GK, RT, RV; les triangles GHI, GIK, GKF, seront aussi semblables aux triangles RST, RTV, RVQ, & aux susdits, puis que par la def. du prisme, tous les plans opposites des prismes sont semblables. Et d'autant qu'à cause de la similitude des prismes, les parallelogrammes CH, NS sont semblables, comme CI sera à CB, ainsi TN sera à NM: mais comme BC est à CA, ainsi NM est à NL, à cause de la similitude des triangles. Donc en raison egale, comme CI sera à CA, ainsi TN à NL. Derechef, pource que l'angle solide N, est egal



à l'angle solide C, à cause de la similitude des prismes, si celuy-cy est superposé à l'autre, l'angle MNO conuiendra à l'angle BCD, & l'angle TNM à l'angle ICB, & l'angle TNO à l'angle ICD. Mais aussi la ligne droicte NL conuient à la ligne CA, pource que les angles MNL, BCA sont egaux. Donc les angles ICA, TNL sont egaux; & partant puis que les costez d'alentour iceux, ont esté demonstrés proportionaux, les parallelogrammes CG, NR, seront semblables. Mais aussi les parallelogrammes CH, HA, sont semblables aux parallelogrammes NS, SL, & les triangles ABC, GHI, aux triangles LMN, RST. Donc les prismes ABCIGH, LMNTRS, sont semblables, par la 8. def. 11. On demonstrera en la mesme maniere que les prismes CDAGIK, NOLTRV, sont semblables, comme aussi les prismes AEDKGF, LPOVRQ. Parquoy les prismes ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF par les choses demonstrees à la 34. prop. 11. sont aux prismes LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, chacun au sien, en raison triplee des costez homologues BC, CD, DE, à MN, NO, OP; chacun au sien. Et partant en la mesme maniere que nous auons demonstré cy-dessus des pyramides multangles, on demonstrera que les prismes ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, sont en raison triplee des costez homologues BC, MN.

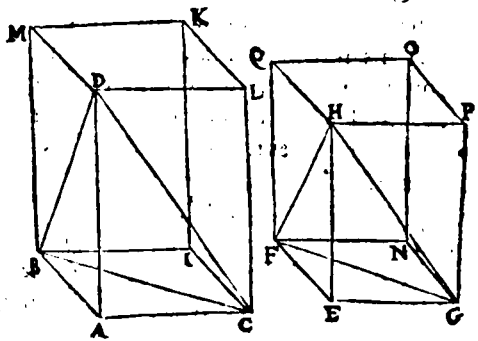
De toutes ces choses se collige, que les pyramides multangles semblables, se diuisent en pyramides triangulaires semblables, & en nombre egal, & homologues aux toutes. Ce qui est manifeste par la demonstration du precedent corollaire.

Il se collige aussi que les prismes multangulaires semblables, se diuisent en prismes semblables, ayans bases triangulaires, & en nombre egaux, & homologues aux tous, comme appert par la demonstration de ce scholie.

THEOR. 9. PROP. IX.

Des pyramides egales, ayans baſes triangulaires, les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les pyramides ayans baſes triangulaires reciproques à leurs hauteurs, ſont egales.

Soient les pyramides egales ABCD, & EFGH, ayans baſes triangulaires: ie dis que les baſes d'icelles ſont reciproques à leurs hauteurs, c'eſt à dire que



comme la baſe ABC à la baſe EFG, ainſi la hauteur du poinct H à la hauteur du poinct D.

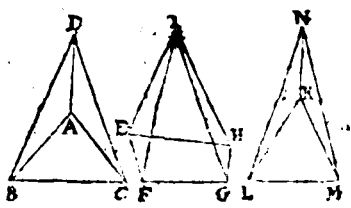
Car ſoient acheuez les parallelipipedes AK, EO; & comme il a eſté dit en la prop. precedente, chacun d'iceux parallelipipedes ſera ſextuple de ſa pyramide. Et les deux pyramides eſtans egales, iceux ſolides AK, EO, ſeront egaux: & par la 34. prop. 11. ils auront les hauteurs reciproques aux baſes. (C'eſt à dire que comme la hauteur du poinct D à la hau-

teur du poinct H, ainsi la base EN à la base AI. Mais comme EN est à AI, ainsi le triangle EFG (moitié de EN) est au triangle ABC; (moitié de AI) & partant par la 11. p. 5. comme la hauteur du poinct D est à la hauteur du poinct H, ainsi le triangle EFG est au triangle ABC.

Pour la seconde partie: Si la hauteur du poinct D est à la hauteur du poinct H, comme le triangle EFG est au triangle ABC: ie dis que les pyramides ABCD, EFGH seront egales. Car il est euident comme cy dessus que la hauteur du poinct D, sera à la hauteur du poinct H, comme la base EN à la base AI: (d'autant qu'elles sont doubles des triangles EFG & ABC) ainsi les parallelipipedes AK, EO, auront les hauteurs reciproques aux bases: & par la 34. prop. 11. ils seront egaux; & par consequent leurs sixiesmes parties seront aussi egales, sçauoir les pyramides ABCD, & EFGH: Parquoy des pyramides egales ayans bases triangulaires, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Les pyramides egales, desquelles les bases ne sont triangulaires, ont aussi les bases & hauteurs reciproques: & les pyramides desquelles les bases ne sont triangulaires, & ont leurs bases reciproques à leurs hauteurs, sont egales. Car soient premierement deux pyramides egales, l'vne desquelles ABCD ait la base triangulaire, mais l'autre

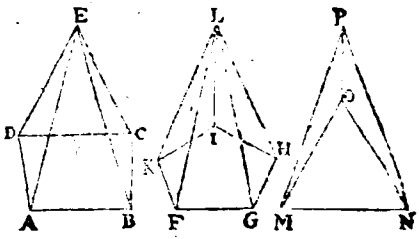


EFGHI ne l'ait pas. Soit fait le triangle kLM egal à la base non triangulaire EFGH; puis sur iceluy triangle soit construite la pyramide kLMN, de mesme hauteur que la pyramide EFGHI. Or d'autant que les pyramides EFGHI, KLMN, ont les bases egales, & mesme hauteur; elles seront egales, par les choses demonstrees au scholie de la 6. prop. 12. Mais la pyramide EFGHI a esté posee egale à la pyramide ABCD; donc aussi les pyramides ABCD, kLMN seront egales: Parquoy puis qu'elles ont les bases triangulaires, par la 9. prop. 12. comme la base ABC sera à la base KLM, ou à son egale EFGH, ainsi la hauteur de la pyramide kLMN, c'est à dire la hauteur de la pyramide EFGHI, sera à la hauteur de la pyramide ABCD: & partant des pyramides egales ABCD, EFGHI, les bases & hauteurs sont reciproques.

Mais maintenant d'icelles pyramides, les bases & hauteurs soient reciproques: ie dis qu'icelles pyramides sont egales. Car demeurant la mesme construction faite cy-dessus; puis que la base ABC est posee estre à la base EFGH, comme la hauteur de la pyramide EFGHI à la hauteur de la pyramide ABCD; aussi la base ABC sera à la base KLM, comme la hauteur de la pyramide kLMN sera à la hauteur de la pyramide ABCD. Parquoy par la 9. p. 12. les pyramides ABCD, kLMN, sont egales. Mais comme nous auons demonstré au scholie de la 6. prop. 12. la pyramide KLMN est egale à la pyramide EFGHI: donc aussi la pyramide ABCD sera egale à la pyramide EFGHI. Ce qui estoit proposé.

Soient maintenant les pyramides egales ABCDE, FGHIkL, ayans bases multangulaires. Soit fait derechef le triangle MNO egal à la base ABCD; & la pyramide MNOP de mesme hauteur que la pyramide ABCDE. Donc par les choses demonstrees au scholie de la 6. prop. 12. la pyramide MNOP sera egale à la pyramide ABCDE,

laquelle a esté posee egale à la pyramide FGHIKL: donc aussi la pyram. MNOP sera egale à la pyram. FGHIKL. Parquoy cõme nous auons demonstré cy-dessus, ainsi que la base MNO. c'est à dire la base ABCD, sera à la base FGHIK, ainsi la hauteur de la pyramide FGHIKL sera à la hauteur de la pyramide MNOP, c'est à dire à la hauteur de la pyramide ABCDE: Et partant des pyramides egales ABCDE, FGHIKL, les bases & hauteurs sont reciproques.



Mais soient maintenant reciproques les bases & hauteurs d'icelles pyramides: on demonstrera comme dessus qu'elles sont egales.

Or tout ce que nous auons demonstré cy dessus peut aussi conuenir à quelconques prismes. Car si les prismes estoient egaux, aussi les pyramides de mesme hauteur qu'iceux, ayans les mesmes bases, seroient egales, puis que d'iceux prismes par le corol. de la 7. prop. 12. elles sont les tierces parties, ou les deux tierces parties par le scholie de la mesme prop. Parquoy, comme nous auons demonstré n'agueres, les bases & hauteurs d'icelles pyramides seront reciproques. Veu donc que ces bases & hauteurs sont les mesmes que des prismes, les bases & hauteurs des prismes seront pareillement reciproques.

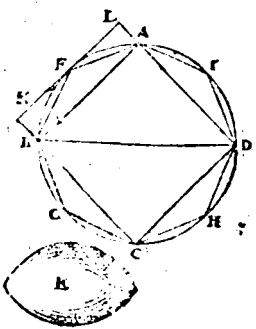
Derechef, si les bases & hauteurs des prismes sont reciproques, les bases & hauteurs des pyramides ayans mesmes bases & hauteurs que les prismes, seront aussi reciproques. Parquoy, comme il a esté demonstré, les pyramides sont egales: & partant aussi les prismes, puis que d'icelles pyram. ils sont triples, ou sesquialteres. Ce qui estoit propos.

THEOR. 10. PROP. X.

Tout cone eſt la troiſieſme partie du cylindre qui a meſme baſe, & egale hauteur.

Soit vn cone, & vn cylindre ayans vne meſme baſe, ſçauoir le cercle ABCD, & vne meſme hauteur. Ie dis que le cylindre eſt triple du cone.

Autrement, il ſera plus grand, ou plus petit que le triple d'iceluy cone: Soit premierement plus grand, s'il eſt poſſible, ſçauoir de la quantité du ſolide E, c'eſt à dire, que ſi du cylindre ayant pour baſe le cercle ABCD eſt retranché le ſolide E, le reſte ſera triple du cone ayant pour baſe le meſme cercle ABCD: dans iceluy cercle ſoit inſcrit le quarré ABCD, diuiſé en deux triangles par la diagonale BD, & ſur iceux triangles ſoient imaginez eſtre eſleuez deux priſmes de meſme hauteur



que le cylindre: Et parce que le quarré eſt plus de la moitié du cercle, il eſt euident qu'iceux deux priſmes ſeront plus de la moitié du cylindre. Que ſi les ſegmens reſtans du cylindre, (les deux priſmes eſtans oſtez) ſont encores plus grands que le ſolide E, ſur les baſes d'iceux ſegmens ſoient faits les quatre triangles Iſoſceles AFB, BGC, CHD, DIA, & ſur iceux ſoient imaginez eſtre eſleuez quatre priſmes de meſme hauteur que le cone ou cylindre

dont la base est le cercle ABCD. Il est euident *que* ces triangles Isosceles sont plus de la moitié des bases des segmens restans du cylindre; & par consequent qu'iceux quatre prismes seront plus de la moitié d'iceux quatre segmens: Que si les huict petits segmens restans du cylindre ne sont plus *petits* que le solide E, soit tousiours en ceste façon soustrait plus de la moitié de ce qui restera, iusqu'à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E: Ce qui doit aduenir par la 1. prop. 10. Et pour abreger soient iceux huict petits segmens plus petits qu'iceluy solide E: Il est donc manifeste que la colomne composee de ces six prismes, ayant pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, & de mesme hauteur que le cylindre donné, sera plus que triple d'iceluy cone, par ce qui a esté dit cy-dessus. Or d'autant que chacun prisme est triple de sa pyramide de mesme hauteur, & ayant base egale, (car il peut estre diuisé en trois telles pyramides egales par la 7. prop. 12.) il s'ensuit que tous iceux prismes faisans la colomne qui a pour base le polygone inscrit au cercle ABCD, (c'est à dire icelle colomne de mesme hauteur que le cylindre) est triple de toutes les six pyramides, qui font la seule pyramide, ayant le mesme polygone pour base, & de mesme hauteur qu'icelle colomne. Partant icelle pyramide sera plus grande que le cone de mesme hauteur, ayant le cercle A B C D pour base: ce qui est impossible, n'estant la pyramide que partie du cone. Donc le cylindre n'estoit pas plus grand que *le* triple du cone.

Soit donc plus petit, s'il est possible; sçauoir de la quantité du solide E, c'est à dire que si on retranche le solide E du cone, que le residu soit la troisie-

me partie du cylindre. Maintenant du cone, qui a pour base le cercle ABCD, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de mesme hauteur, ayant pour base le quarré ABCD, & du residu, sçauoir des quatre segmens F, G, H, I, soit retranché plus de la moitié, sçauoir la pyramide de chacun segment, de mesme hauteur qu'iceluy segment, & ayant pour base le triangle Isoscelle en iceluy segment : soit continué ce retranchement iusques à ce que les segmens restans soient plus petits que le solide E : ce qui doit arriuer par la 1. prop. 10. Soient donc pour abreger iceux huict petits segmens plus petits que le solide E : il est donc euident que la pyramide de mesme hauteur que le cone, ayant iceluy octogone pour base, est plus grande que le tiers du cylindre donné, d'autant qu'elle est plus grande que le cone, apres que d'iceluy on a retranché le solido E. Or iceluy cone ainsi rescinde est le tiers du cylindre donné, & la pyramide est aussi, (comme il a esté dit cy-dessus) le tiers de la colomne de mesme hauteur, ayant le mesme octogone pour base : Partant icelle colomne seroit plus grande que le cylindre donné, duquel elle est partie : Ce qui est impossible. Donc le cylindre donné n'estoit ne plus petit, ne plus grand que le triple du cone : il faut donc qu'il soit egal. Parquoy tout cone est la troisiesme partie du cylindre, &c. Ce qui estoit à demonstrer.

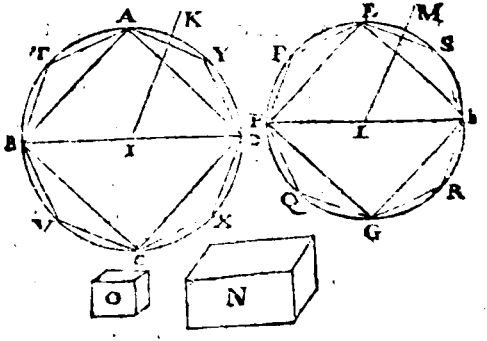
THEOR. 11. PROP. XI.

Les cones, & les cylindres de mesme hauteur, sont l'vn à l'autre comme leurs bases.

Soient deux cones de mesme hauteur, desquels

les baſes ſont les cercles ABCD & EFGH, les diametres BD & FH, leurs axes ou hauteurs IK & LM. Ie dis que comme le cercle ABCD eſt au cercle EFGH, ainſi le cone BK eſt au cone FM; c'eſt à dire que ſi on imagine que comme le cercle eſt au cercle, ainſi le cone BK ſoit à quelque autre ſolide, comme N; iceluy ſolide N ſera egal au cone FM.

Autrement, il ſera plus petit ou plus grand: Soit premierement plus petit, s'il eſt poſſible, de la quantité du ſolide O: donc les deux ſolides N & O ſeront egaux au cone FM. Maintenant du cone FM comme en la precedente, ſoit retranché plus de la moitié, ſçauoir vne pyramide de meſme hauteur



que le cone, ayant pour baſe le quarré FGHE: & du reſidu encores plus de la moitié, ſçauoir quatre pyramides de meſme hauteur que le cone, ayans pour baſes les quatre triangles Iſoſceles EPF, FQG, GRH, HSE, en continuant touſiours iuſques à ce que le reſidu ſoit plus petit que le ſolide O: & ſoit iceluy reſidu pour abreger les huict petits ſegmens: il s'enſuit que la pyramide FM de meſme hauteur

les bases sont les cercles ABCD & EFGH, & les hauteurs KL, MN, centres BD & FH, le moyen ou hauteur KL. Ie dis que comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au cone FM: car si que si on imagine que comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK soit à quelque autre solide ainsi le cone BK soit à quelque autre solide N, & le cone FM. N, icelluy solide N sera egal au cone FM.

Autrement, il sera plus petit, ou il est possible, premierement plus petit, s'il est possible, soit ainsi du solide O: donc les deux solides N & O sont egaux au cone FM. Maintenant de mesme comme en la precedente, soit retranché par la moitié, sçavoir vne pyramide de mesme

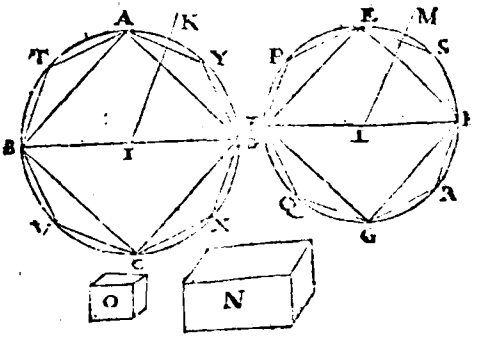


que le cone, ayant pour base le quart de la base retidu encores plus de la moitié, sçavoir par ramides de mesme hauteur que le cone, bases les quatre triangles isoceles EFP, GRH, HSE, en continuant quelconque soit plus petit que le solide O: & soit

que le cone FM, & ayant pour base l'octogone EPFQGRHS, sera plus grande que le solide N. Dans le cercle ABCD, soit inscrit vn polygone semblable au polygone inscrit dans la base circulaire EFGH, & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyramide de mesme hauteur que le cone BK. Or par le corol. de la 2. prop. 12. comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le polygone TVXY est au poligone PQRS: mais comme le cercle ABCD est au cercle EFGH, ainsi le cone BK est au solide N, & par la 6. prop. 12. comme le poligone au poligone, ainsi la pyramide à la pyramide de mesme hauteur que les cones: & partant par la 11. prop. 5. la pyramide ATBVCXDYK sera à la pyramide EPFQGRHSM, comme le cone BK au solide N. Mais la pyramide ATBVCXDYG est plus petite que le cone BK; la partie que le tout: Donc aussi par la 14. prop. 5. la pyramide EPFQGRHSM sera moindre que le solide N. Mais elle a esté demonstree aussi plus grande: ce qui est absurde. Donc le solide N n'estoit pas plus petit que le cone FM.

Soit donc plus grand, s'il est possible: Or puis que l'on a posé le cercle ABCD estre au cercle EFGH, comme le cone BK au solide N; en permutant comme le solide N sera au cone BK, ainsi le cercle EFGH au cercle ABCD: Mais comme iceluy solide N est au cone BK, soit aussi le cone FM à quelque autre solide, comme O: Et par la 14. prop. 5. puis que le solide N est plus grand que le cone FM. aussi le cone BK sera plus grand que le solide O. Parquoy puis que comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le solide N est au cone BK: par la 11. prop. 5. comme le cercle EFGH est au cercle ABCD, ainsi le cone FM au solide O, plus petit que

le cone BK : ce que tantoſt nous auons monſtré eſtre impoſſible. Donc le ſolide N n'eſt pas plus grand ne plus petit que le cone FM, ains egal. Parquoy puis qu'on a poſé la baſe ABCD eſtre à la baſe EFGH, ainſi que le cone ABCDK au ſolide *N*:



& que par la 7. prop. 5. comme le cone ABCDK eſt au ſolide N, ainſi eſt le meſme cone ABCDK au cone EFGHM : pareillement comme la baſe ABCD ſera à la baſe EFGH, ainſi le cone ABCDK ſera au cone EFGHM.

Or ce que nous auons prouué des cones de meſme hauteur, ſe doit auſſi entendre des cylindres de meſme hauteur : d'autant que par la 10. prop. 12. le cylindre eſt triple de ſon cone de meſme hauteur, & ayant baſe egale. Que ſi le cone eſt au cone, *comme* la baſe à la baſe, auſſi le triple du cone ſera au *triple* du cone, comme la baſe à la baſe par la 15. *prop.* 5. c'eſt à dire le cylindre au cylindre, comme la baſe à la baſe. Donc les cones & cylindres de meſme hauteur, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

On peut conuertir ceſte prop. ainſi: Les cones & les cylindres qui ſont entr'eux comme leurs baſes, ſont de meſme hauteur.

Ce qu'on peut demonſtrer en la meſme façon que nous auons demonſtré la conuerſe de la 31. prop. 11.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que les cones, & les cylindres de meſme hauteur, conſtituez ſur meſme baſe ou ſur baſes egales, ſont auſſi egaux. Il s'enſuit encore que les cones & les cylindres egaux conſtituez ſur meſme baſe, ou ſur baſes egales ſont de meſme hauteur; & que les egaux de meſme hauteur ſont ſur baſes egales, s'ils n'ont vne meſme baſe. Ce que l'on pourroit auſſi demonſtrer, comme en la conuerſe de la 31. prop. 11.

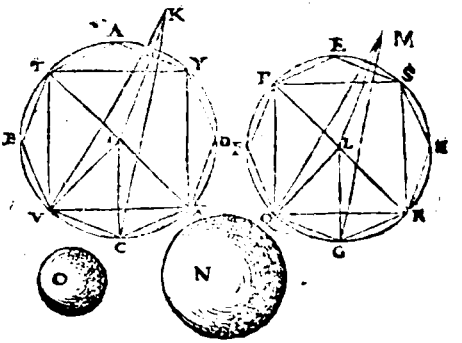
THEOR. 12. PROP. XII.

Les cones, & les cylindres ſemblables, ſont l'vn à l'autre en raiſon triplee des diametres de leurs baſes.

Soient ſemblables cones & cylindres, ayans pour baſes les cercles ABCD, EFGH, mais les axes d'iceux ſoient IK, LM; & les diametres des baſes TX, PR. Ie dis que le cone eſt au cone, & le cylindre au cylindre, en raiſon triplee du diametre TX au diametre PR, c'eſt à dire que ſi on imagine comme aux precedentes, que le cone ABCDK ſoit à quelque ſolide, comme N, en raiſon triplee du diametre TX au diametre PR, iceluy ſolide N ſera egal au cone EFGHM.

Autrement, il ſera plus grand ou plus petit: Soit premierement plus petit, ſçauoir de la quantité du ſolide O: Donc les deux ſolides O & N ſeront egaux au cone EFGHM: & comme en la preceden-

te soit faite distraction de plus de la moitié du cone EFGHM, & du residu encore plus de la moitié, iusques à ce que les restes soient plus petits que le solide O : & pour abreger, iceux restes soient les huict petits segmés qui sont à l'entour de la pyramide *FM* qui a pour base l'octogone EPFQGRHS; tellement qu'icelle pyramide sera plus grãde que le solide N. Maintenant au cercle ABCD soit inscrit vn tel polygone que le plus grand inscrit au cercle EFGH, sçauoir ATBVCXDY : & sur iceluy soit imaginé estre esleuee vne pyram. de mesme hauteur que le cone

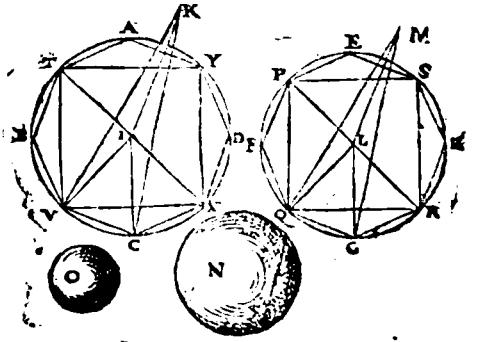


BK, & ayant tiré les lignes VI, CI; QL, GL; soient menees les lignes QM, GM; VK, CK, afin d'auoir les deux pyramides VCIK, QLGM. Il est manifeste que la pyramide ATBVCXDYK est composee d'autant de pyramides egales, qu'il y a de costez au poligone inscrit dans le cercle, (c'est à sçauoir qu'icelle pyramide totale BK est composee de huict pyramides egales & semblables à la pyramide VICK de mesme hauteur que la totale.) On peut dire semblablement que l'autre pyramide totale EPFQGRHSM est composee de huict pyramides egales

&

& semblables à la pyramide QLGM, de mesme hauteur que sa totale. Mais d'autant que les cones BK & FM sont semblables par la definition des cones semblables, comme le diametre TX est au diametre PR; & partant par la 15. prop. 5. comme le demy diametre VI est au demy diametre QL, ainsi l'axe IK est à l'axe LM: & en permutant, comme le demy diametre VI sera à l'axe IK, ainsi le demy diametre QL à l'axe LM: & les angles VIK & QLM estans droicts, (car les cones sont posez droicts, & par consequent les axes d'iceux, sont aussi à droicts angles sur leurs bases) par la 6. prop. 6. le triangle VIK sera equiangle au triangle QLM. Item CIK sera aussi equiangle à GLM, & par la 4. prop. 6. ils auront les costez proportionaux, & seront semblables. Item VI est à CI comme QL à GL (estans chacun egaux) & l'angle I egal à l'angle L; (ayans chacun la huictiesme partie de la circonference pour base) & partant par la 6. propositi. 6. les triangles VIC, QLG, seront equiangles; partant semblables: Item VC est à VI, comme QG à QI, (d'autant que les triangles VIC, & QLG sont semblables) & pour la mesme raison VI est à VK, comme QL à QM: & en raison egale VC sera à VK, comme QG à GM: Et par mesme discours VC est à CK, comme QG à GM: Et les egales VK & CK, seront l'vne à l'autre, comme les egales QM à GM: Et partant par la 5. prop. 6. les triangles VKC, QMG, seront equiangles, & semblables: & par la def. des pyramides semblables, les deux pyramides VICK, & QIGM, seront semblables: Et par la 8. prop. 12. elles seront en raison triplee de leurs costez homologues, sçauoir des demy diametres VI & QL. Par mesme discours on prouuera les sept autres pyramides de

la totale ATBVCXDYK, proportioneles à vne chacune des sept autres pyramides de la totale EPFQG RHSM : Et partant par la 12. prop. 5. les toutes seront aux toutes, comme l'vne d'icelles est à l'vne d'icelles : C'est à dire que toute la pyramide BK est à toute la pyramide FM, en raison triplee du demy diametre VI au demy diametre QL, ou bien du diametre TX au diametre PR ; puis que comme VI est à QL, ainsi TX est à PR par la 15. prop. 5. Mais par nostre hypothese le cone BK est au solide N, aussi en raison triplee des deux diametres TX, PR: Et partant par la 11. prop. 5. le cone BK sera au solide



N, comme la pyramide TBVCXDYK à la pyrami, de EPFQGRHSM. Parquoy puis que le cone BK est plus grand que la pyramide BK, le tout que la partie, aussi par la 14. prop. 5. le solide N sera plus grand que la pyramide FM : & il a esté demonstré estre aussi moindre. Ce qui est absurde. Donc le solide N n'est pas plus petit que le cone FM. qu'il soit donc plus grand, s'il est possible. D'autant qu'on a posé que le cone ABCDK est au solide N en rai-

ſon triplee du diametre TX au diametre PR, & la pyramide BK eſt à la pyramide FM en raiſon triplee des meſmes diametres, comme nous auons demonſtré par la 11. prop. 5. comme le cone BK ſera au ſolide N, ainſi la pyramide BK à la pyramide FM: & en permutant, comme N eſt au cone BK, ainſi la pyramide FM eſt à la pyramide BK. Parquoy puis que par le corol. de la 8. p. 12. la pyramide FM eſt à la pyramide BK en raiſon triplee des coſtez homologues QG à VG: c'eſt à dire du diametre PR au diametre TX: pareillement le ſolide N ſera au cone BK en raiſon triplee des meſmes diametres PR à TX. Soit poſé que comme N eſt au cone BK, ainſi le cone FM ſoit au ſolide O. Donc auſſi le cone FM ſera au ſolide O en raiſon triplee du diametre PR au diametre TX. Et puis que le ſolide N a eſté poſé plus grand que le cone FM: par la 14. prop. 5. le cone BK ſera auſſi plus grand que O. Parquoy le cone FM ſera au ſolide O, moindre que le cone BK, en raiſon triplee du diametre TR au diametre TX: ce qui eſt abſurde. Car il a eſté demonſtré cy-deſſus qu'vn cone ne peut eſtre à vn ſolide moindre qu'vn autre cone, en raiſon triplee des diametres des baſes d'iceux cones. Donc le ſolide N n'eſt pas plus grand ny plus petit que le cone EFGHM: il eſt donc egal. Parquoy par la 7. prop. 5. le cone ABCDK à meſme raiſon au cone EFGHM qu'au ſolide N. Et partant puis qu'on a poſé le cone ABCDK eſtre à N en raiſon triplee des diametres TX & PR: le cone ABCDK ſera auſſi au cone EFGHM en la raiſon triplee des meſmes diametres.

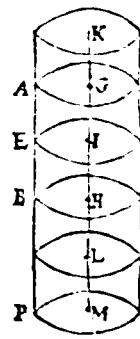
Ceſte demonſtration ſe doit auſſi entendre des cylindres ſemblables: car leurs cones eſtans en raiſon triplee des diametres, par la 15. propoſit. 5. les

cylindres qui ſont triples d'iceux cones, ſeront auſſi l'vn à l'autre en raiſon triplee de leurs diametres. Donc les cones, & les cylindres ſemblables, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 13. PROP. XIII.

Si vn cylindre eſt couppé par vn plan parallel aux plans oppoſez, les ſegmens du cylindre ſeront l'vn à l'autre comme les ſegmens de l'axe.

Soit le cylindre ABCD, couppé par le plan EF parallel aux plans oppoſez AD & BC, lequel coupe l'axe GH en I. Ie dis que le ſegment du cylindre AF eſt au ſegment du cylindre EC, comme l'axe GI eſt à l'axe IH.



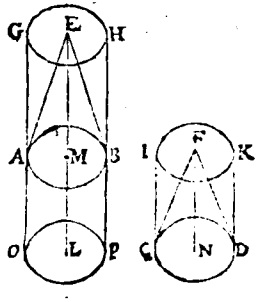
Car ayant continué l'axe GH de part & d'autre, ſoit faite GK egale à GI: & de l'autre coſté HL, LM, chacune egale à IH: Et ſoit imaginé le cylindre ABCD eſtre continué de part & d'autre iuſques aux poincts K & M: Cela eſtant, il eſt euident que tous les cylindres AN, ED, BF, BO, PO, ſont tous ſur baſes egales: & par le corollaire de la 11. prop. 12. les deux AF, AN, qui ſont de meſme hauteur, (c'eſt à dire qui ont leurs axes IG, GK egaux) ſont egaux entr'eux: *Item* les trois BF, BO, PO, eſtans de meſme hauteur, ſont auſſi egaux entr'eux. Parquoy l'axe IK eſt autant multiple de l'axe IG, que le cylindre EN eſt multiple du cylindre ED; & l'axe IM autant multiple de

l'axe IH, que le cylindre PF eſt multiple du cylindre BF : Et partant ſi l'axe IK (multiple de IG premiere grandeur) eſt egal, plus grand, ou plus petit que l'axe IM, (multiple de IH ſeconde grandeur) auſſi le cylindre EN (multiple du cylindre ED troiſieſme grandeur) ſera egal, plus grand, ou plus petit que le cylindre PF, (multiple du cylindre BF quatrieſme grandeur) en quelque multiplication que ce ſoit : & partant par la 6. def. 5. l'axe GI ſera à l'axe IH, comme le cylindre ED au cylindre BF. Parquoy ſi vn cylindre eſt couppé par vn plan, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

THEOR. 14. PROP. XIV.

Les cones, & les cylindres ayans baſes égales, ſont entr'eux comme leurs hauteurs.

Soient ſur baſes egales AB, CD, les deux cones ABE, CDE ; & les deux cylindres ABGH, CDKI, deſquels les axes ou hauteurs, (car aux cones, & aux cylindres droicts, deſquels ſeulement parle Euclide, les axes & les hauteurs ſont les meſmes) ſoient ME, NF. Ie dis que le cone ABE eſt au cone CDF ; & le cylindre ABGH au cylindre CDIK, comme la hauteur ME eſt à la hauteur NF.



Car ayant continué l'axe EM, iuſques au poinct L, ſoit faite ML egale à FN ; & ſoit imaginé le cy-

lindre AH continué iuſques au plan OP parallel à AB, & paſſant par le point L, afin que le cylindre AP ſoit fait de meſme hauteur que le cylindre CK. Et d'autant que le plan AB couppe le total cylindre OPGH, eſtant parallel aux deux plans oppoſez OP, GH par la precedente prop. les cylindres AH, *AP*, ſeront entr'eux comme les axes EM & ML : Mais ML eſt egal à FN, & la baſe AB egale à la baſe CD: Donc par le corollaire de la 11. prop. 12. le cylindre AP ſera egal au cylindre CK : Partant comme EM ſera à NF, ainſi le cylindre AH au cylindre CK. Et d'autant que par la 10. prop. 12. les cones ABE, CDE, ſont les tierces parties des cylindres AH, CK : ils auront meſme raiſon qu'iceux cylindres, par la 15. prop. 5. Et partant le cone ABE ſera pareillement au cone CDF, comme la hauteur ME à la hauteur NF. Donc les cones, & les cylindres conſtituez ſur baſes egales, &c. Ce qui eſtoit à demonſtrer.

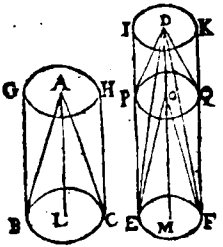
THEOR. 15. PROP. XV.

Aux cones, & aux cylindres egaux, les hauteurs ſont reciproques aux baſes: Et les cones, & les cylindres, deſquels les hauteurs ſont reciproques aux baſes, ſont egaux.

Soient les cones ABC, DEF egaux ; & les cylindres BGHC, EIKF auſſi egaux, deſquels les baſes ſoient BC, EF, & leurs axes ou hauteurs AL, DM. Ie dis que les baſes ſont reciproques aux hauteurs; c'eſt à dire que comme la baſe BC eſt à la baſe EF, ainſi la hauteur DM eſt à la hauteur AL.

Car premierement ſi la hauteur DM eſt egale à

la hauteur AL ; les cylindres estans egaux par le corollaire de la 11. prop. 12. la base sera egale à la base; & partant comme la base BC sera à la base EF, ainsi la hauteur DM à la hauteur AL. Que si l'vne, comme MD est plus grande que AL, soit retranchee MO egale à AL ; Et soit couppé le cylindre EK par le plan PQ, parallel à EF, & passant par le poinct O. Donc par la precedente prop. le cylindre EK sera au cylindre EQ, comme la hauteur MD à la hauteur MO : & partant par la 7. prop. 5. le cylindre BH, egal à iceluy BK, sera au cylindre EQ, comme MD est à MO : & par la 11. prop. 12. comme le cylindre BH est au cylindre de mesme hauteur EQ, ainsi la base BC à la base EF : Et partant par la 11. prop. 5. comme la base BC à la base EF, ainsi la hauteur MD à la hauteur MO, ou LA son egale. Donc les cylindres egaux BH, EK ont les bases & les hauteurs reciproques.



Par mesme discours on prouuera que les bases & hauteurs des cones egaux ABC, DEF, sont reciproques ; si on construit deux cones sous les hauteurs MO, OD, comme appert en la figure.

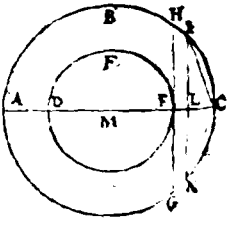
Maintenant, soient les bases reciproques aux hauteurs : Ie dis que les cylindres BH & EK sont egaux. Car ayant construict comme dessus, puis que la base BC est à la base EF, comme la hauteur MD à la hauteur LA, ou MO son egale : Et par la 11. pr. 12. comme la base BC à la base EF, ainsi le cylindre BH au cylindre de mesme hauteur EQ : Item par la

precedente prop. comme la hauteur MD à la hauteur MO, ainsi le cylindre EK au cylindre EQ: donc par la 11. prop. 5. les deux cylindres BH & EK, auront mesme raison au troisiesme EQ, l'vn comme l'autre: Et par la 9. prop. 5. ils seront egaux.

Quant aux cones qui ont aussi leurs bases & hauteurs reciproques, ils seront par le mesme discours demonstrez egaux. Ce qui est toutesfois assez euident, puis qu'ils sont par la 10. prop. 12. tierces parties des cylindres. Parquoy aux cones, & aux cylindres egaux, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

PROBL. 1. PROP. XVI.

Deux cercles inegaux estans à l'entour d'vn mesme centre; inscrire au plus grand cercle vn polygone equilateral, ayant le nombre des costez pair, & lequel ne touche point le plus petit cercle.



Soient deux cercles inegaux ABC & DEF, à l'entour d'vn mesme centre M: Il faut dans le plus grand ABC, inscrire vn polygone equilateral, duquel les costez soient nombre pair, & ne touchent point la circonference du plus petit cercle DEF.

Soit mené par le centre M le diametre AC, coupant le petit cercle au poinct F; duquel soit mence

HG perpendiculaire au diametre DF, rencontrant la circonference du grand cercle aux poincts H & G: & laquelle touchera le cercle DEF en F par le corollaire de la 16. prop. 3. Item soit couppee la demy circonference ABC en deux egalement en B: & la moitié BC encores en deux egalement, en continuant touſiours ainſi iuſques à ce qu'on vienne à vn arc plus petit que l'arc HG: ce qui eſt poſſible par la 1. prop. 10. Soit donc iceluy plus petit arc IC, & ſoit tiree la ligne droicte ſubtendante IC. Ie dis qu'icelle ligne droicte IC eſt vn coſté du polygone requis. Car puis que le demy cercle & autres arcs d'iceluy ont touſiours eſté diuiſez par moitiez iuſques à l'arc IC: il eſt euident qu'iceluy arc eſt contenu preciſement certain nombre de fois en la circonference du cercle, & en nombre pair; & par conſequent que la ligne droicte IC ſera certain nombre de fois egalement dans iceluy cercle ABC, & en nombre pair. Partant ſera deſcrit dans le cercle ABC vn polygone equilateral & de coſtez pair, lequel ne touchera le moindre cercle DEF. Car de I ſoit menee IK perpendiculaire à AC, couppant icelle AC en L. D'autant que les angles HFC, ILF ſont droicts, les lignes GH, IK ſeront paralleles par la 28. prop. 1. Parquoy puis que la ligne droicte GH touche le cercle DEF au ſeul poinct F; la ligne droicte IK ſera totalement hors iceluy cercle, & ne le peut iamais toucher, puis que iamais elle ne conuiendra auec la ligne droicte GH: Donc à plus forte raiſon la ligne droicte IC, qui eſt moindre & plus eſloignee d'iceluy cercle que IK, ne le touchera pas; ny partant auſſi les autres coſtez du polygone inſcrit, puis qu'ils ſont egaux à IC, & par conſequent egalement diſtans du centre d'iceluy cercle par la

14. prop. 3. Parquoy deux cercles inegaux eſtans à l'entour d'vn meſme centre, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De cecy eſt manifeſte, que ſi à l'extremité du coſté du polygone inſcrit, lequel conuient auec le diametre, on tire vne ligne perpendiculaire à iceluy diametre, qu'elle ne peut toucher le moindre cercle, mais qu'elle tombera toute dehors. Car telle eſt la ligne IK, laquelle du poinct I extreme du coſté IC conuenant auec le diametre AC, eſt tiree perpendiculairement ſur iceluy diametre AC, & a eſté demonſtré qu'elle ne touche pas le cercle DEF.

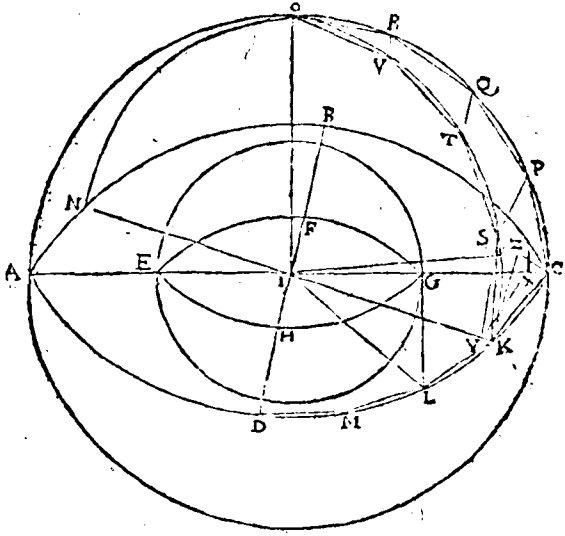
PROBL. 2. PROP. XVII.

Deux ſpheres inegales eſtans ſur vn meſme centre, inſcrire en la plus grande vn polyedre, duquel les plans ne touchent point la ſuperficie de la petite ſphere.

Soient deux ſpheres inegales ABCD, EFGH à l'entour d'vn meſme centre I: & il faut dans la plus grande ABCD inſcrire vn ſolide polyedre, ou de pluſieurs coſtez, lequel ne touche la ſuperficie de la moindre ſphere EFGH.

Les deux ſpheres ſoient couppees par quelque plan paſſant par le centre I: il eſt euident par la def. de la ſphere, que les communes ſections ſeront cercles, & les plus grands de toute la ſphere: d'autant qu'ils ont pour diametre le diametre de la ſphere, puis que le plan couppant paſſe par le centre de ladite ſphere: ſoient donc icelles communes ſections, ſçauoir en la plus grande ſphere, le cercle ABCD,

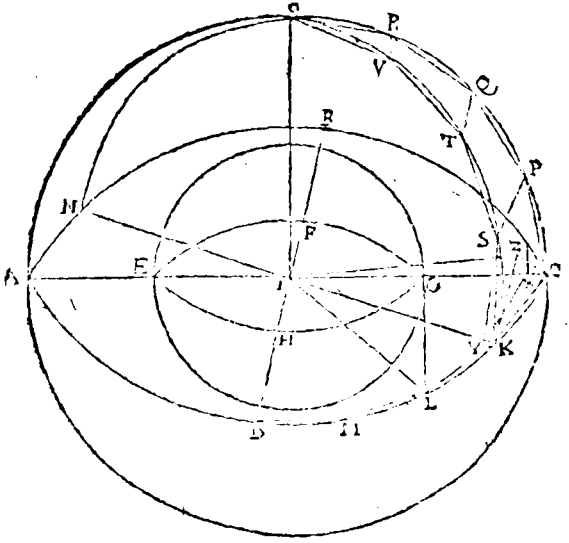
& en la plus petite, le cercle EFGH : & soient leurs diametres AC & BD se couppans en angles droicts au centre I : Et dans le cercle de la plus grande sphere ABCD, soit inscrit vn polygone, ne touchant point le moindre cercle EFGH, par la precedente prop. duquel les costez de la quarte CD, soient CK, KL, LM, MD : Et ayant menee par le centre I le



diametre KN, par la 12. prop. 11. dudit centre soit menee IO perpendiculaire sur le plan des cercles ABCD, EFGH, rencontrant la superficie de la plus grande sphere en O : puis par icelle IO, & chacun des diametres AC, NK, soient tirez les plans AOC, NOK, lesquels (par ce qui a esté dit cy-dessus) feront en la superficie de la sphere des grands cercles: & d'iceux soient les demy cercles AOC, NOK:

Et d'autant que la ligne IO eſt eſleuee perpendiculairement ſur le plan du cercle ABCD, les deux demy cercles AOC, NOK, ſeront par la 18. prop. 11. eſleuez perpendiculairement ſur le plan d'iceluy cercle. Et puis que les trois demy cercles ADC, AOC, NOK ſont egaux, (ayans les diametres egaux,) auſſi leurs moitiez ſeront egales, ſçauoir les quartes DC, OC, OK: Parquoy autant qu'il y aura de coſtez du polygone en la quarte CD, on en pourra inſcrire autant en chacune des quartes OC, OK. Soient iceux CP, PQ, QR, RO; & KS, ST, TV, VO: & ſoient menees les lignes SP, TQ, VR: Item des poincts P & S ſoient menees par la 11. p. 11. PX, SY perpendiculaires au plan du cercle ABCD, leſquelles par la 38. prop. 11. tomberont ſur les lignes IC, IK, communes ſections d'iceluy plan, & des quarts de cercles IOC, IOK eſleuez perpendiculairement ſur ledit plan ou quart IDC. Soit auſſi menee la ligne XY. Maintenant puis que les arcs & les cordes PC & SK ſont egales; les angles PXC, SYK droicts, & les angles PCX, SKY egaux; (car ils inſiſtent ſur les peripheres egales AOP, NOS) les deux angles PCX, PXC du triangle PCX, & le coſté PC, ſont egaux aux deux angles SKY, SXK, & au coſté SK du triangle SKY: partant par la 26. prop. 1. les autres coſtez PX, XC ſeront egaux aux autres coſtez SY, YK. Parquoy puis que les deux diametres AC, NK ſont egaux: & les ſegmens XC, YK. auſſi egaux; les ſegmens AX, NY ſeront pareillement egaux: partant comme IX eſt à XC, ainſi IY eſt à YK: & par la 2. prop. 6. YX ſera parallele à KC. Item les deux perpendiculaires PX, SY eſtans egales, ſont auſſi paralleles par la 6. pr. 11. & par la 33. prop. 1. SP, YX, ſeront egales & paral-

leles : & par la 9. prop. 11. SP & KC seront paralleles, & par la 7. prop. 11. SK & PC seront au mesme plan d'icelles. Partant tout le quadrilatere CK,SP, est en vn mesme plan. Par mesme discours on monstrera aussi que les quadrilateres TP, VQ, & le triangle VOR ont chacun toutes leurs parties en vn mesme plan. Que si des poincts P, Q, R, S, T, V, on imagine des lignes droictes estre menees au cen-



tre I, on se representera vne figure solide, compriſe entre OC & OK, composee de quatre pyramides, desquelles le sommet est au centre I, & leurs bases sont les quadrilateres SC, TP, VQ, & le triangle VOR : Et si on construit pareillement sur les costez KL, LM, & MD, comme on a fait sur CK : Et semblablement sur toutes les autres quartes, on aura

inscrit vn poliedre en la sphere donnee.

Ie dis d'auantage qu'iceluy poliedre ne touche la petite sphere EFGH. Car si du centre I on meine la ligne IZ perpendiculaire sur le plan SC, elle sera plus grande que IG demy diametre de la *petite* sphere. Car ayant pour l'inscription du *polygone* tiré du poinct G la ligne GL perpendiculaire à AC, laquelle est manifestement plus grande que CK costé d'iceluy poligone inscrit, soit tiree IL ; & aussi CZ, KZ. D'autant que par la 3. def. 11. les angles IZC, IZK sont droicts, le quarré de IC sera egal aux quarrez de IZ, CZ, & le quarré de IK egal aux quarrez de IZ, ZK : Parquoy les quarrez des demy diametres egaux IC, IK, estans egaux, les quarrez de IZ, CZ, seront egaux aux quarrez de IZ, ZK : ostant donc le quarré de IZ commun, resteront egaux les quarrez de CZ, KZ ; & par consequent les lignes CZ, KZ sont egales. On demonstrera en la mesme maniere, estant tirees des lignes de Z à P & S, qu'elles seront egales, tant entr'elles qu'à icelles CZ, KZ : Parquoy si du centre Z, & de l'interuale de l'vne d'icelles, on descrit vn cercle, il circonscira le quadrilatere CKSP : duquel les trois costez CK, CP, KS, qui soustiennent arcs egaux de cercles egaux, sont egaux, & l'autre costé SP plus petit : (car les triangles ICK, IXY estans semblables, & le costé IC plus grand que le costé IX, aussi le costé GK sera plus grand que le costé XY, qui a *esté* demonstré egal à SP) & partant soustiendra vn plus petit arc que chacun de ces trois là, qui consequemment sera moindre que le quart de l'entiere circonference, & chacun de ceux-cy plus grand : Parquoy l'angle CZK sera plus grand qu'vn droict : & par consequent le plus grand du triangle CZK : & par

la 19. prop. 1. CK sera plus grand costé que CZ. Parquoy GL estant plus grande que CK, elle sera aussi plus grande que CZ: & par consequent le quarré de GL plus grand que celuy de CZ. Et d'autant que par la 47. prop. 1. les quarrez de IG & GL, sont egaux aux quarrez de IZ, CZ: (car tant ces deux-cy, que ces deux-là sont egaux au quarré du demy diametre de la grande sphere, les triangles IGL, ICZ estans rectangles) & le quarré de GL, est plus grand que le quarré de CZ: le quarré de IZ, sera plus grand que le quarré de IG: & par consequent la ligne IZ, plus grande que la ligne IG. Le plan CKSP ne touche donc pas la petite sphere EFGH. On prouuera par mesme raison que tous les autres plans du poliedre inscrit en la grande sphere ne touchent pas la petite sphere EFGH. Donc deux spheres inegales, &c. Ce qu'il falloit faire.

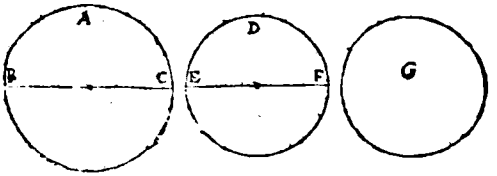
COROLLAIRE.

Des choses cy-dessus demonstrees resulte que si en vn autre sphere on inscrit vn polyedre semblable au polyedre cy-dessus descrit, qu'iceux polyedres seront en raison triplee des diametres des spheres, ausquelles ils seront inscrits. Car iceux polyedres estans semblables par la def. des solides semblables, ils auront en leur conuexité autant de plans semblables l'vn comme l'autre: partant ils se pourront diuiser en autant de pyramides semblables l'vn comme l'autre, ayant toutes le demy diametre de leur sphere pour vn de leurs costez: Partant prises vne à vn, elles seront en raison triplee des costez homologues, sçauoir est des demy diametres des spheres, par le corol. de la 8. prop. 12. Et les toutes aux toutes, pareillement en raison triplee des mesmes demy diametres, par la 12. prop. 5. Et par la 15. prop. 5. en raison triplee des diametres entiers.

THEOR. 16. PROP. XVIII.

Les spheres sont l'vne à l'autre, en raison triplee de leurs diametres.

Soient deux spheres ABC, DEF, desquelles les diametres sont BC, EF. Ie dis qu'elles sont l'vne à l'autre en raison triplee du diametre BC au diametre EF : C'est à dire que si on imagine que comme la raison triplee de BC à EF, ainsi la sphere ABC soit à quelque autre sphere, comme G : icelle sera egale à la sphere DEF.



Autrement, elle sera plus grande ou plus petite. Soit premierement la sphere G, plus petite que la sphere DEF, s'il est possible : Elle pourra donc estre enfermee dans icelle, si on les met toutes deux sur vn mesme centre : Et partant dans la sphere DEF, peut estre inscrit vn polyedre qui ne touchera point la plus petite sphere G par la 17. prop. 12. Et dedans l'autre sphere pourra estre pareillement inscrit vn semblable polyedre par la mesme prop. Et par le corol. d'icelle, ce polyedre cy sera à celuy-là, en raison triplee du diametre BC au diametre EF : mais en telle raison, la sphere ABC est posee estre à la sphere G, & par la 11. prop. 5. comme la sphere ABC à la sphere G, ainsi le polyedre de la sphere ABC, sera au polyedre de la sphere DEF. Or la sphere ABC, est plus grande que son polyedre, n'estant que

partie

partie d'icelle : donc par la 14. prop. 5. la sphere G est aussi plus grande que le polyedre de la sphere DEF : ce qui est impossible, n'estant que partie d'icelluy. Donc la sphere ABC, ne peut estre en raison triplee des diametres BC & EF, à vne autre sphere plus petite que DEF.

Soit donc la sphere G plus grande que DEF, s'il est possible: Et puis qu'on a posé que la sphere ABC est à la sphere G, en la raison triplee du diametre BC au diametre EF ; en changeant, la sphere G sera à la sphere ABC, en raison triplee du diametre EF au diametre BC. Item on peut imaginer que comme la sphere G est à la sphere ABC, ainsi la sphere DEF soit à vne quatriesme proportionele: laquelle sera plus petite que ABC par la 14. prop. 5. d'autant que G est posee plus grande que DEF: Et partant icelle quatriesme proport. pourra estre inscrite en la sphere ABC: Et si par la 11. pr. 5. la sphere DEF sera à icelle quatriesme inscrite dans ABC, en raison triplee du diametre EF au diametre BC : ce que nous auõs demonstré estre impossible. Donc la sphere G n'a peu estre plus grande, ne plus petite que la sphere DEF, mais egale : & par consequent les spheres sont l'vne à l'autre en raison triplee de leurs diametres. Ce qu'il fallott demonstrer.

COROLLAIRE.

De cecy est manifeste, qu'vne sphere est à vne sphere, comme le polyedre descrit dans celle là, est au polyedre semblable descrit en ceste-cy : pource que tant les spheres que les polyedres sont en raison triplee des diametres d'icelles spheres, comme il a esté demonstré.

Fin du douziesme Element.

ELEMENT TREZIESME.

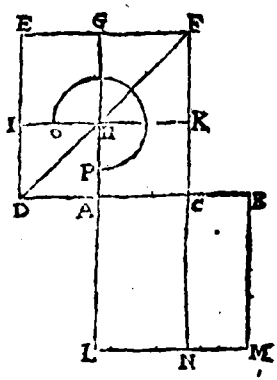
THEOR. 1. PROP. I.

SI vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon: le quarré de la moitié de la toute, & du grand ſegment comme d'vne ſeule ligne, eſt quintuple du quarré de la moitié d'icelle ligne totale.

Soit la ligne droicte AB couppee au poinct C en la moyenne, & extreme raiſon, dont le grand ſegment eſt AC, auquel ſoit adiouſtee AD egale à la moitié de la totale AB: ie dis que le quarré de DC eſt quintuple du quarré de DA.

Car ſoit deſcrit ſur CD le quarré CE, & tiré le diametre DF; puis ſoit menee AG parallele à DE, couppant le diametre DF en H, par lequel poinct ſoit tiree IK parallele à CD. En apres, ayant prolongé GA, & accomply le quarré AM, ſoit produicte

FC iuſques en N. Premierement par le corollaire de la 4. prop. 2. les quadrilateres AI, GK ſeront quarrez des lignes DA, AC. Et puis que AB eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon en C, comme AB ſera à AC, ainſi AC eſt à CB; & par la 17. prop. 6. le rectangle CM compris ſous AB, CB, eſt egal au quarré de AC, ſçauoir GK. Et puis que AB eſt poſee double de DA; & AL eſt egale à icelle AB; & AH à AD, auſſi AL ſera double de AH. Mais comme AL eſt à AH, ainſi le rectangle AN eſt au rectãgle AK,

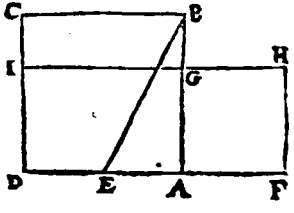


par la 1. prop. 6. Donc AN eſt double de AK. Et puis que par la 43. prop. 1. AK eſt egal à IG; AN ſera egal aux deux IG, AK; adiouſtant donc ces egaux aux egaux CM, KG, le quarré AM ſera egal au gnomon OP. Parquoy puis que par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré AM eſt quadruple du quarré AI, auſſi le gnomon OP ſera quadruple du meſme quarré AI: & partant ſi au gnomon OP eſt adiouſté le quarré AI; CE quarré de DC ſera quintuple de AI quarré de DA. Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Commandin demonſtre encore cette prop. ainſi. Soit la ligne droicte AB couppee en G, ſelon la moyenne & extreme raiſon, de laquelle AB ſoit fait le quarré ABCD,

& ayant couppé AD en deux egalement en E soit menee BE, & prolongee EA en F, de sorte que EF soit egale à icelle EB; & par ce qui est demonstré en la 11. prop. 2. AF sera egale à AG; parquoy appert EF estre composee du grand segment AG & de AE, moitié de la toute AB. Ie dis que le quarré de EF est quintuple du quarré de EA. Car puis que AB est double de AE, le quarré de AB sera quadruple du quarré de AE par les choses demonstrees au scholie de la 4. prop. 2. Mais le quarré de EB est egal aux quarrez d'icelles AB, AE par la 47. prop. 1. donc le quarré de BE, c'est à dire de EF, sera quintuple du quarré de AE: Ce qu'il falloit prouuer.



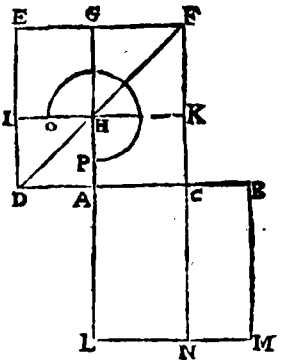
Or tout ainsi qu'en la plus part des prop. du 10. liure nous auons ioinct & appliqué les nombres aux lignes, afin d'en rendre les demonstrations plus claires & euidentes, aussi le ferons nous en celluy-cy pour le contentement de ceux qui se delectent aux opperations numeralles. Donc en la precedente figure la ligne droicte AB soit 10, sa moitié AE 5; & leurs quarrez seront 100 & 25: partant le quarré de BE, ou de EF son egale sera 125, qui est quintuple de 25 quarré de la moitié AE, comme veut la proposition.

De cecy appert qu'estant cogneue vne ligne droicte couppee en la moyenne & extreme raison, on peut facilement cognoistre les segmens d'icelle. Car ladite ligne AB estant 10, & couppee en la moyenne & extreme raison en G, par ce que dessus EF est trouuee de $\sqrt{125}$, & AE de 5, partant le reste AF, ou AG, qui est de

grand segment, sera $\sqrt{125}-5$, *qui ostez de la toute AB* 20, *resteront* $15-\sqrt{125}$ *pour le moindre segment BG. Les mesmes segmens AG, BG seront aussi cogneus par ce qui est cy-deuant enseigné à la fin du 21. chap. de nostre sommaire d'Algebre.*

THEOR. 2. PROP. II.

Si le quarré d'vne ligne droicte est quintuple du quarré d'vne partie d'icelle: le double d'icelle partie estant coupé en la moyenne & extreme raison, le grand segment sera l'autre partie de la donnee.



Soit la ligne droicte DC diuisee au poinct A, en sorte que le quarré d'icelle, soit quintuple du quarré de la plus petite partie DA: & soit prise AB double d'icelle AD, laquelle (comme nous demonstrerons cy-apres) sera plus grande que l'autre partie AC. Ie dis que si on diuise AB en la moyenne & extreme raison, que le grand segment sera AC, autre partie de la donnee DC.

Car ayant fait sur DC le quarré CE, & acheué la construction comme en la precedente; les quadrilateres AI, GK seront quarrez par le corol. de la

4. prop. 2. Et puis que AB, c'est à dire AL, est double de DA, ou AH sont egale, le rectangle AN sera double du rectangle AK par la 1. prop. 6. ou egal aux deux AK, IG qui sont egaux par la 43. prop. 1. Or par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré AM est quadruple du quarré AI, & le quarré EC est *quintuple du mesme* par l'hypothese: il est donc evident que le quarré AM est egal au gnomon OP, duquel les deux rectangles AK, IG, sont egaux au rectangle AN. Il faut donc que le rectangle CM, soit egal au quarré GK, fait sur vne ligne egale à AC: & partant par la 17. prop. 6. comme BM, c'est à dire AB est à AC, ainsi AC à CB. Parquoy par la 3. def. 6. la ligne AB sera couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C: & AC autre partie de la totale DC, est le grand segment d'icelle. Parquoy *si le* quarré d'vne ligne droicte est quintuple, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

LEMME.

Que AB double de AD soit plus grand que AC, nous le demonstrerons ainsi. D'autant que par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de AB est quadruple du quarré de AD, iceux deux quarrez seront ensemble quintuple du seul quarré de AD. Mais le quarré de DB est plus grand que les quarrez de DA, AB, puis que par la 4. prop. 2. il est egal à iceux deux quarrez auec deux fois le rectangle sous DA, AB. Donc le quarré de DB sera aussi plus grand que le quintuple du quarré de AD: & partant plus grand que le quarré de DC, qui est posé quintuple du mesme quarré de AD: parquoy la ligne droicte DB sera plus grande que la ligne droicte DC: & ostant DA qui est commun, le reste AB sera plus grand que le reste AC.

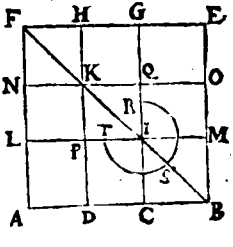
SCHOLIE.

La ligne donnee DC soit 5, & DA √5, afin que le quarré de celle-là, qui est 25, soit quintuple du quarré de celle-cy, qui est 5 : Donc le reste AC sera 5—√5, & AB double de AD sera √20 : laquelle estant diuisee en la moyenne & extreme raison, ainsi qu'il a esté dit au prec. scholie, le plus grand segment sera 5—√5, qui est egal à AC, comme veut la proposition.

THEOR. 5. PROP. III.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison; le quarré du petit segment & de la moitié du grand segment, comme d'vne seule ligne, est quintuple du quarré de la moitié du grand segment.

Soit la ligne droicte AB, couppee en la moyenne & extreme raison au poinct C, de laquelle le grand segment AC est couppé en deux egalement en D: ie dis que le quarré du petit segment & de la moitié du grand, sçauoir de BD, est quintuple du quarré de DC, moitié du grand segment AC.



Car sur AB soit descrit le quarré AE, & ayant mené son diametre BF, des poincts C & D soient menees CG, DH paralleles à AF, couppans le diametre BF és poincts I & K, par lesquels soient menees LM, NO

paralleles à AB, leſquels couppent CG, DH en P & Q: Et par le corol. de la 4. prop. 2. les quadrilateres LG, PQ, DO ſeront quarrez des lignes AC, CD, DB. Donc puis que comme AB à AC, ainſi AC à CB, par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB & CB (ſçauoir AM) eſt egal au quarré de la moyenne AC, ſçauoir LG, lequel eſtant par le ſcholie de la 4. prop. 2. quadruple du quarré PQ, le rectangle AM ſera auſſi quadruple de PQ: mais AP & DI eſtans ſur baſes egales, ſont egaux par la 1. prop. 6. Et DI eſtant egal à IO par la 43. prop. 1. le gnomon KST ſera egal au rectangle AM quadruple du quarré PQ: Parquoy adiouſtant à iceluy gnomon le meſme quarré PQ; le quarré DO, deſcrit de DB ſera quintuple d'iceluy quarré PQ, deſcrit de DC: Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne droicte AB eſtant 12, le grand ſegment AC ſera √180—6, & le moindre CB 18—√180. Parquoy DC moitié de AC ſera √45—3, & ſon quarré 54—√1620. Mais DB compoſee de DC & CB ſera 15—√45, & ſon quarré 270—√40500, qui eſt quintuple du quarré de DC 54—√1620, comme veut la propoſition: La conuerſe de laquelle eſt auſſi veritable, c'eſt à ſçauoir que

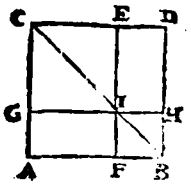
Si vne ligne droicte eſt couppee en deux ſegmens inegaux, & que le quarré du moindre ſegment & de la moitié du grand, comme d'vne ſeule ligne ſoit quintuple du quarré d'icelle moitié: cette ligne là ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon.

Soit la ligne droicte AB (en la prec. fig.) couppee inegalement en C, de laquelle le grand ſegment AC eſt coupé

en deux egallement en D, & le quarré de DB soit quintuple du quarré de CD : Ie dis que la ligne AB est diuisee en C, selon la moyenne & extreme raison. Car demeurant la mesme construction que dessus, le quarré LG est quadruple du quarré PQ par le scholie de la 4. prop. 2. Mais du mesme quarré PQ est aussi quadruple le gnomon RST, puis que le quarré DO est posé quintuple dudit quarré PQ : donc le gnomõ RST sera egal au quarré LG. Mais il est aussi egal au rectangle AM : donc le quarré LG sera egal au rectangle AM contenu sous AB, BC : & partant par la 17. p. 6. comme AB sera à AC, ainsi AC à CB : Parquoy AB sera couppee en C, selon la moyenne & extreme raison : Ce qui estoit proposé

THEOR. 4. PROP. IIII.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & le quarré du petit segment ensemble, sont triples du quarré du grand segment.



Soit la ligne droicte AB, couppee en F, selon la moyenne & extreme raison, dont AF soit le plus grand segment : ie dis que les quarrez de AB, & FB, sõt ensẽble triples du quarré de AF.

Car soit descrit sur AB le quarré AD, auquel estant tiré le diametre BC, soit menee de F la ligne EF parallele à AC, couppant BC en I, par lequel soit menee GH parallele à AB. Par le corol. de la 4. prop. 2. les

parallelogrammes GE, FH seront quarrez des lignes AF, FB : Et puis que comme AB est à AF, ainsi AF est à FB, par la 17. prop. 6. le rectangle des extremes AB, FB, sçauoir AH, est egal au quarré de la moyenne AF, sçauoir GE. Veu donc que AH & FD sont egaux, le gnomon EBG auec le quarré FH, sera egal au double du quarré GE: & partant adioustant le quarré GE ; AD quarré de AB, auec FH quarré de FB, sera triple de GE quarré de AC. Si donc vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

La ligne AB soit 4 ; donc le grand segment AF sera √10—2, & le moindre FB 6—√10 : & partant leurs quarrez seront 16, 24—√320, & 56—√2880 : mais celuy cy adiousté au premier 16, fait 72—√2880, qui est le triple de 24—√320, quarré de l'autre segment AF, ainsi que veut la prop. La conuerse de laquelle est aussi veritable, sçauoir est que

Si vne ligne droicte est couppee en deux inegallement, & que le quarré de la toute auec le quarré du moindre segment soit triple du quarré du grand segment : cette ligne là sera couppee en la moyenne & extreme raison.

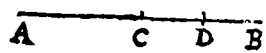
Soit la ligne droicte AB couppee en deux inegallement en F, de sorte que le quarré de la toute AB auec le quarré du moindre segment FB est triple du quarré de l'autre segment AF. Ie dis que la ligne droicte AB est couppee en F, selon la moyenne & extreme raison. Car ayant construit comme dessus, d'autant que les quarrez AD, FH sont triples du quarré GE, estant le quarré GE, le gnomon EBG auec le quarré FH sera double du mesme quarré GE. Mais iceluy gnomon EBG auec ledit quarré FH est egal

aux deux rectangles AH, FD: donc iceux deux rectangles sont aussi double du quarré GE: & partant puis que lesdits rectangles AH, FD sont egaux, le seul AH compris sous AB, BF sera egal à iceluy quarré GE: & par la 17. prop. 6. comme AB sera à GI ou AF, ainsi AF sera à FB: & partant AB est diuisee en F, selon la moyenne & extreme raison. Ce qui a esté proposé.

Nous adiousterons encore icy la demonstration que fait Maurolic de cet autre theoreme.

Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, le quarré de la toute, & du moindre segment comme d'vne seule ligne est quintuple du quarré du grand segment: & vne ligne droicte estant couppee inegallement, si le quarré de la toute & du moindre segment, comme d'vne seule ligne est quintuple du quarré du grand segment; icelle ligne sera couppee en la moyenne & extreme raison.

Soit premierement la ligne droicte AD *couppee en C, selon la moyenne & extreme raison, à laquelle soit adiousstee DB egale au moindre segment CD: Ie dis que le quarré de* AB *est quintuple du quarré de AC. Car d'autant que par la 17. pr. 6. le rectangle de AD, DC est egal au quarré de AC (pour ce que les trois lignes* AD, AC, CD *sont proport.) quatre fois le rectangle de* AD, DC



sera quadruple du quarré de AC, *& consequemment le quarré de* AC *auec quatre fois le rectangle de* AD, DC *sera quintuple d'iceluy quarré de* AC. *Mais par la 8. p. 2. le quarré de* AD *est egal audit quarré de* AC, *auec quatre fois le rectangle d'icelles* AD, DC: *Donc aussi le quarré de* AD *sera quintuple du quarré de* AC: *Ce qui estoit proposé.*

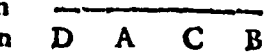
Secondement ſoit la ligne droicte AD *diuiſee inegalement en* C, *à laquelle ſoit adiouſtee* DB *egale au moindre ſegment* CD, *& ſoit le quarré de* AB *quintuple du grand ſegment* AC: *ie dis que* AD *eſt coupppee ſelon la moyenne & extreme raiſon en* C. *Car d'autant que par la 8. pr. 2. le quarré de* AB *eſt egal au quarrè de* AC *auec quatre fois le rectangle de* AD, DC, *auſſi iceux quarré de* AC *& quatre rectangles de* AD, DC, *ſeront enſemble quintuple dudit quarré de* AC: *& partant le rectangle de* AD, DC *quatre fois ſera quadruple d'iceluy quarré de* AC, *c'eſt à dire qu'vn ſeul rectangle de* AD, DC, *ſera egal à iceluy quarré de* AC, *& par la 17. prop. 6. comme* AD *ſera à* AC, *ainſi* AC *ſera à* CD: *& partant* AD *eſt couppee en* C, *ſelon la moyenne & extreme raiſon. Ce qui eſt propoſé.*

Cette prop. eſt auſſi euidente par nombres: Car ſi AD *eſt* 4, *le grand ſegment* AC *ſera* $\sqrt{20}-2$, *& ſon quarré* $24-\sqrt{320}$. *mais le moindre ſegment* CD *ſera* $6-\sqrt{20}$, *qui adiouſté à* AD, *fait* $10-\sqrt{20}$ *pour la toute* AB, *dont le quarré eſt* $120-\sqrt{8000}$, *qui eſt quintuple de* $24-\sqrt{320}$ *quarrez du grand ſegment* AC.

THEOR. 5. PROP. V.

Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & à icelle on adiouſte vne ligne droicte egale au grand ſegment; la toute ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment ſera la ligne premierement poſée.

Soit la ligne droicte AB, couppee en la moyéne & extreme raison au poinct C, dont le grand segmét est AC; & à icelle AB soit adiouſtee directement AD egale à AC: ie dis que la toute DB est auſſi couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct A, & que le grand ſegment eſt AB.



Car puis que comme AB eſt à AC, c'eſt à dire AD, ainſi AC eſt à CB; en changeant, comme DA ſera à AB, ainſi BC à AC: & en compoſant, comme DB ſera à AB, ainſi AB à AC, c'eſt à dire AD. Donc par la 3. def. 6. la ligne DB eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct A, & le grand ſegment eſt la ligne AB propoſee au commencement. Si donc vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

La ligne droicte AB ſoit 4, le moindre ſegment CB 6—√20, & le grand AC √20—2: Adiouſtant donc à AB le grand ſegment AC, viendront √20+2, pour la toute DB. Or comme √20+2 eſt à 4, ainſi 4 eſt à √20—2; car multipliant √20+2 par √20—2, le produit eſt 16, qui eſt le quarré de 4: Parquoy eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.

Clauius apres Campanus demonſtre en cet endroit les deux theoremes ſuiuans.

1. Si vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & que du grand ſegment on retranche le moindre: iceluy grand ſegment ſera auſſi couppé en la moyenne & extreme raiſon, & le grand ſegment ſera certe ligne là, qui eſtoit le moindre ſegment de la premiere ligne.

Car la ligne droicte DB soit couppee en A, selon la moyenne & extreme raison, & du grand segment AB soit retranchee AC egale au moindre segment AD : Ie dis que le grand segment AB est diuisé en C, selon la moyenne & extreme raison, & le grand segment estre AC, qui est egal au moindre segment AD.

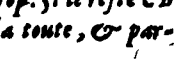
Car d'autant que comme la toute DB est à la toute AB, ainsi AB retranchee de BD est à AD, c'est à dire AC retranchee de AB, aussi par la 19. prop. 5. AD reste d'icelle BD, c'est à dire AC sera à CB reste d'icelle AB, comme la toute DB à la toute AB, c'est à dire comme AB à AC : & partant AB sera diuisee en C, selon la moyenne & extreme raison : Ce qui estoit proposé.

Le mesme est aussi manifeste en nombres : Car si DB est 4, le grand segment AB sera √20—2, & le moindre AD 6—√20, qui retranché de AB restera CB de √80—8. Or comme √20—2 est à 6—√20, ainsi 6—√20 est à √80—8, car le produit des extremes est egal à celuy des moyens, sçauoir est 56—√2880 : & partant appert ce qui estoit proposé.

2. Si vne ligne droicte est couppee en la moyenne & extreme raison, & de la moitié d'icelle on retranche la moitié du grand segment; la moitié de la toute sera aussi diuisee en la moyenne & extreme raison, & le grand segment sera la moitié du grand segment de la toute.

Car soit AB diuisee en C, selon la moyenne & extreme raison, & DE soit la moitié de la toute, & DF moitié du grand segment AC : Ie dis que DE est couppee en F. selon la moyenne & extreme raison, & que le grand segment est DF. Car puis que comme la toute AB est à la toute DE, ainsi la retranchee AC est à la retranchee DF, (car l'vne

& l'autre eſt raiſon double) par la 19. prop. 5. le reſte CB ſera auſſi au reſte FE, comme la toute à la toute, & partant CB ſera auſſi double de FE. Mais par la 15. prop. 5. comme AB eſt à AC, ainſi DE moitié de celle-là eſt à FE moitié de celle-cy, & par la def. de la ligne couppee en la moyenne & extreme raiſon AB eſt à AC, comme AC à CB: donc auſſi DE ſera à DF, comme DF à FE: & partant par la meſme def. DE ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon en F. Ce qui eſt propoſé.



Ce theoreme eſt auſſi manifeſte en nombres: car ſi AB eſt 4, la moitié DE ſera 2, le grand ſegment AC √10—2, & ſa moitié DF √5—1, & partant le reſte FE ſera 3—√5. Or il eſt euident que ces trois nombres 2, √5—1, & 3—√5 ſont continuellement proport. car le produit des deux extremes eſt egal au quarre du milieu, ſçauoir eſt à 6—√20.

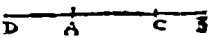
THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte rationele eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon: l'vn & l'autre ſegment eſt ligne irrationele, appellee reſidu.

Soit la ligne droicte rationele AB, couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct C: ie dis que chaque ſegment AC, BC eſt ligne irrationele appellee reſidu.

Car au grand ſegment AC ſoit adiouſtee directement DA, egale à la moitié de AB. D'autant que par la 1. prop. 13. le quarré de DC eſt quintuple du

quarré de DA, il eſt à iceluy comme nombre à nombre : Et par la 6. prop. 10. iceux quarrez de DC, DA ſeront commenſurables : & par conſequent les lignes DC, DA, ſont auſſi commenſurables, au moins en puiſſance. Or AD eſt rationele, puis qu'elle eſt moitié d'vne rationele AB : Donc auſſi DC ſera rationele. Et d'autant que les quarrez de DC, DA ne ſont comme nombre quarré à nombre quarré : (comme il appert par le corol. de la 24. prop. 8. car ils ſont comme 5 à 1, ou 25 à 5) les lignes DC, DA, ſeront incommenſ. en longitude, par la 9. prop. 10. &



partant rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement. Parquoy ſi de DC rationele on oſte DA commenſurable en puiſſance ſeulement, par la 74. prop. 10. le reſte AC ſera irrationele, appellee reſidu.

Derechef AB eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon en C, le quarré de AC ſera egal au rectangle de AB, CB par la 17. prop. 6. Mais le quarré du reſidu AC applicqué à la rationele AB, doit faire l'autre coſté CB reſidu premier, par la 98. prop. 10. Parquoy chacun des ſegmens AC, CB, eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Si donc vne ligne droicte rationele, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

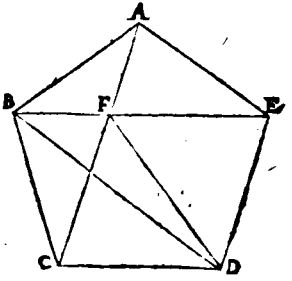
SCHOLIE.

La ligne AB ſoit 4 : donc le grand ſegment AC ſera $\sqrt{10}-2$, *& le moindre ſegment CB* $6-\sqrt{10}$, *l'vn & l'autre deſquels ſegmens eſt reſidu, puis que leurs deux nombres ſont commenſurables en puiſſance ſeulement, &c.*

THEOR. 7. PROP. VII.

Si en vn pentagone equilateral, trois angles pris comme on voudra ſont egaux : il ſera equiangle.

Au pentagone equilateral ABCDE, ſoient trois angles egaux, premierement d'ordre comme A, B, C : ie dis qu'iceluy pentagone eſt equiangle.



Car eſtans tirees à iceux angles egaux A, B, C, les lignes ſubtendantes AC, BE, BD: de F ou s'entrecouppent AC, BE ſoit tiree FD. Or puis que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux à BC, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux, auſſi egaux, par la 4. prop. 1. les baſes BE, BD ſeront egales, & les angles AEB, BDC egaux. Mais par la 5. prop. 1. les angles BED, BDE ſont auſſi egaux, les deux coſtez BE, BD ayans eſté prouuez egaux : Donc l'angle total AED ſera egal au total CDE. Derechef, puis que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux à BA, BC du triangle ABC, & les angles A & B contenus d'iceux egaux, par la 4. prop. 1. la baſe BE ſera egale à la baſe AC, & les angles ABE, AEB egaux aux angles BAC, BCA, chacun an ſien : & partant les angles FAB, FBA du triangle ABF ſont egaux : donc les coſtez AF, BF ſeront auſſi egaux : & partant iceux

eſtans oſtez des ſubtendantes egales AC, BE les reſtes FC, FE ſeront egales. Parquoy les deux coſtez FC, CD du triangle CFD ſeront egaux aux coſtez FE, ED du triangle DFE, & la baſe FD commune: donc par la 8. prop. 1. les angles FCD FED ſeront egaux. Mais ACB, AEB ont eſté prouuez egaux: donc les touts BCD, AED ſont egaux: Parquoy AED, ayant eſté monſtré egal à CDE, tous les angles du pentagone ſeront egaux entr'eux par la 1. com. ſent. & conſequemment iceluy pentagone ABCDE ſera equiangle.

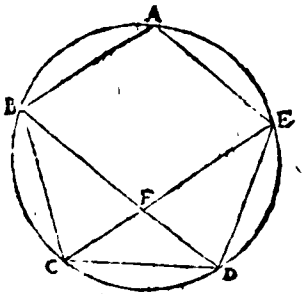
Secondement, ſoient les trois angles A, C, D, non d'ordre egaux. D'autant que les coſtez AB, AE du triangle ABE ſont egaux aux coſtez CB, CD du triangle BCD, & les angles contenus d'iceux auſſi egaux, par la 4. prop. 1. les baſes BE, BD, & les angles AEB, BDC ſeront egaux: Mais par la 5. pr. 1. les coſtez BE, BD eſtans egaux, les angles BED, BDE ſeront pareillement egaux: donc l'angle total AED ſera egal au total CDE. Et puis que les angles BAE, CDE ont eſté poſez egaux: les trois angles A, E, D, qui ſont d'ordre, ſeront egaux: & partant comme il a eſté deſia monſtré, le pentagone ſera equiangle. Donc ſi en vn pentagone equilateral, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

THEOR. 8. PROP. VIII.

Si deux lignes droictes ſubtendent deux angles d'vn pentagone equiangle & equilateral, leſquels ſoient d'ordre: elles ſe coupperont l'vne l'autre en la moyenne & extreme raiſon, & leurs

grands segmens seront egaux au costé du pentagone.

Au pentagone ABCDE equiangle & equilateral soient deux lignes droictes BD, CE, subtendantes les angles C, D, qui sont d'ordre, lesquelles s'entrecouppent en F.



Ie dis qu'elles se couppent en la moyenne & extreme raison, & que chacun de leurs grãds segmens BF, EF sera egal à quelconque costé du pentagone.

Car ayant descrit par la 14. prop. 4. vn cercle à l'entour du pentagone, les arcs AB, BC, CD, DE, & EA seront egaux par la 28. prop. 3. Et d'autant que les triangles CBD, CED, ont deux costez egaux, & l'angle compris d'iceux aussi egal par l'hypothese; les bases BD, CE, & les angles CDB, DCE seront pareillement egaux par la 4. prop. 1. Et partant veu qu'au triangle CFD, les deux angles DCF, CDF sont egaux, & par la 32. prop. 1. l'angle externe BFC est egal à iceux: iceluy BFC sera double de DCE. Mais par la 33. prop. 6. l'angle BCE est aussi double du mesme DCE, pource que l'arc BAE est double de l'arc DE: Donc les angles BFC, BCF sont egaux: & partant par la 6. prop. 1. BF est egale au costé du pentagone BC. Et d'autant que par la 17. prop. 3. les angles DBC, ECD, insistans sur arcs egaux, sont egaux; les deux

angles DBC, CDB du triangle BCD sont egaux aux deux angles DCF, FDC du triangle CFD : & partant les deux triangles BCD, CFD seront equiangles par la 32. prop. 1. Parquoy par la 4. p. 6. comme BD sera à DC, c'est à dire à BF, ainsi CD ou BF sera à FD : & partant la subtendante BD est couppee en F, en la moyenne & extreme raison, & le plus grand segment BF est egal à BC costé du pentagone. Par mesme raison on demonstrera CE estre couppee en la moyenne & extreme raison en F, & que le grand segment EF est egal à DE costé du pentagone. Parquoy si deux lignes droictes subtendent deux angles d'vn pentagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

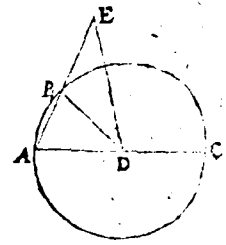
On peut facilement demonstrer que la ligne droicte qui soustient l'angle du pentagone equilateral & equiangle est parallele au costé opposé, c'est à dire que CE est parallele au costé AB, & BD au costé AE : car ayant descrit vn cercle à l'entour du pentagone, d'autant que par la 22. p. 3. tant les deux angles A & BCE que les deux ABC, AEC sont egaux à deux droicts, & que A, ABC sont egaux entr'eux, le pentagone estant equiangle, les deux autres BCE, ACE seront aussi egaux. Veu donc que A & BCE sont egaux à deux droicts ; A & AEC sont aussi egaux à deux droicts, & par la 28. prop. 1. AB, CE seront parelleles, &c.

THEOR. 9. PROP. IX.

La ligne droicte composee du costé de l'hexagone, & du costé du decagone, tous deux inscrits en vn mes-

me cercle, eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, de laquelle le grand ſegment eſt le coſté de l'hexagone.

Au cercle ABC ſoit inſcrite la ligne droicte AB, coſté du decagone, à laquelle ſoit adiouſtee directement BE egale au demy diametre du cercle, c'eſt à dire au coſté de l'hexagone inſcrit au meſme cercle, car il luy eſt egal par le coroll. de la 15. prop. 4. Ie dis que AE eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & que BE coſté de l'hexagone eſt le grand ſegment.



Car ayant mené de A par le centre D le diametre AC, & tiré les lignes DB, DE: l'arc AB eſtant la dixieſme partie de toute la periphere du cercle, ſera la cinquieſme de l'arc ABC, moitié d'icelle periphere: & partant l'arc BC ſera quadruple d'iceluy AB: Parquoy par la 33. prop. 6. auſſi l'angle BDC ſera quadruple de l'angle ADB: & par la 32. prop. 1. l'angle BDC eſtant exterieur, il vaudra les deux de DAB, DBA: leſquels eſtans egaux par la 5. prop. 1. parce que le triangle ABD eſt Iſoſcele, l'vn ou l'autre ſera double de ADB: mais l'vn d'iceux DBA eſtant exterieur, eſt egal aux deux oppoſez interieurement DEB & BDE: (leſquels ſont egaux, eſtant le triangle DBE Iſoſcele, pource que DB demy diametre, & BE ſont egaux par la conſtruction) donc l'angle

DBA sera double de l'angle E; qui par consequent sera egal à l'angle ADB: Parquoy les deux triangles AED, ADB seront equiangles, ayans l'angle A commun, l'angle E egal à l'angle ADB, & par la 32. prop. 1. le tiers sera egal au tiers: donc par la 4. prop. 6. comme AE est à AD ou BE son egale, ainsi AD, ou BE est à AB: partant AE est couppee en la moyenne & extreme raison en B: & BE costé de l'hexagone est le grand segment. Donc la ligne droicte composee du costé de l'hexagone & du costé du decagone, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

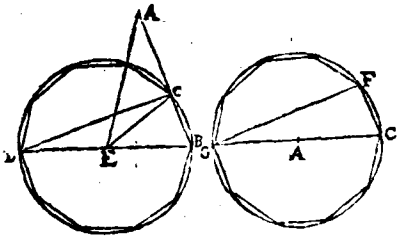
De cecy est euident que le costé de l'hexagone estant couppé en la moyenne & extreme raison, le grand segment est costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car si de BE costé de l'hexagone on coupe vne partie egale à AB: comme la toute AE sera à la toute BE, ainsi la retranchee BE sera à la retranchee de BE, c'est à dire à AB: & partant par la 19. prop. 5. le reste sera au reste, comme la toute à la toute, ou la retranchee à la retranchee. Parquoy BE sera semblablement couppee que AE en la moyenne & extreme raison par la 3. def. 6. dont le grand segment sera AB costé du decagone.

SCHOLIE.

Clauius demonstre apres Campanus la conuerse de cette proposition ainsi qu'il ensuit.

Si le grand segment d'vne ligne diuisee en la moyenne & extreme raison est le costé de l'hexagone de quelque cercle; le moindre segment sera le costé du decagone du mesme cercle. Que si le petit segment est le costé du decagone de quelque cercle, le grand segment sera le costé de l'hexagone du mesme cercle.

Car soit AB diuisee en C selon la moyenne & extreme raison, & soit premierement le grand segment AC costé de l'hexagone du cercle BCD : ie dis que le petit segment BC est le costé du decagone inscrit au mesme cercle. Car BC estant accommodee au cercle, en sorte que CA tombe hors le cercle,



soit tiree de B par le centre E le diametre BED, & les lignes EA, EC. Donc puis que comme AB est à AC, ainsi AC est à CB, & que AC est egale au semidiametre EB par le corol. de la 15. prop. 4. Aussi comme AB sera à BE, ainsi EB à BC : & par la 6. prop. 6. les triangles ABE, EBC seront equiangles, puis qu'ils ont les costez de l'angle commun B proportionnaux ; & l'angle A sera egal à l'angle BEC. Derechef, pource que les costez CA, CE sont egaux, par la 5. prop. 1 les angles CAE, CEA seront egaux, & puis que par la 32. prop. 1. à iceux est egal l'angle externe BCE ; iceluy BCE sera double de l'angle A : Mais par la 5. prop. 1. l'angle CBE est egal à l'angle BCE, à cause de l'egalité des costez EB, EC : donc aussi CBE sera double de l'angle A : & partant les deux angles BCE, CBE ensemble seront quadruple du mesme angle A. Et puis que l'angle externe CED est egal aux internes BCE, CBE, aussi CED sera quadruple du mesme angle A, & partant de l'angle BEC son egal : & par la 33. prop. 6. l'arc DC sera pareillement quadruple de l'arc CB : & partant l'arc du demy cercle BCD sera quintuple du mesme arc BC, & consequemment toute la periphere du cercle sera decuple d'ice-

luy arc BC: Parquoy la ligne droicte BC est le costé du decagone.

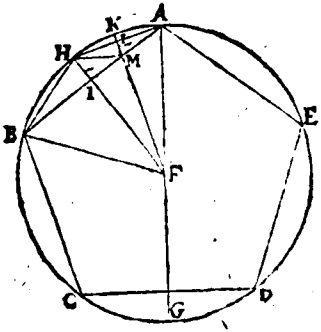
Maintenant, le moindre segment CB soit le costé du decagone du cercle BCD. Ie dis que le grand segment AC est le costé de l'hexagone: Car derechef soit accommodé au cercle BCD, le segment BC, & soit tiré le diametre BED: puis de l'interualle AC soit descrit le cercle CFG, duquel le diametre est CAG, & par le corol. de la 15. prop. 4. AC sera costé de l'hexagone du cercle CFG. Donc puis que AB est couppee en C, selon la moyenne & extreme raison, & que le grand segm. AC est costé de l'hexagone du cercle CFG, le petit segment CB, comme il a ia esté demonstré, sera costé du decagone du mesme cercle CFG. Soit donc descrit en iceluy cercle CFG, le decagone equilateral & equiangle CFG: Item au cercle BCD, le decagone equilateral & equiangle BCD, & les costez BC, CF seront egaux entr'eux: Mais d'autant que les lignes droictes CD, FG estans tirees, les angles CDB, FGC insistans sur arcs semblables BC, CF sont egaux, comme nous auons demonstré au scholie de la 22. prop. 3. & que les angles BCD, CFG estans au demy cercle sont aussi egaux, sçauoir droicts par la 31. prop. 3. les costez BD, CG seront pareillement egaux entr'eux par la 26. prop. 1. Parquoy les diametres BD, CG estans egaux, les cercles BCD, CFG seront aussi egaux: & partant puis que la ligne droicte AC est costé de l'hexagone du cercle CFG, aussi la mesme AC sera le costé de l'hexagone du cercle BCD. Ce qui est proposé.

THEOR. 10. PROP. X.

Le quarré du costé du pentagone equilateral inscrit en vn cercle, est egal aux deux quarrez des costez du decago-

ne, & del'hexagone, inscrits au mesme cercle.

Au cercle ABCDE, duquel le centre est F, soit inscrit vn pentagone equilateral, vn costé duquel est AB. Ie dis que le quarré d'iceluy costé AB est egal aux deux quarrez des costez de l'hexagone, & du decagone inscrits au mesme cercle.



Car ayant tiré le diametre AFG, & ioinct FB, soit couppé l'arc AB en deux egalement par la ligne FH, laquelle couppe aussi la ligne dr. AB en I, & soiét tirees les lignes droictes AH, BH; & AH sera costé du decagone, & FB costé de l'hexagone: En apres, soit couppé l'arc AH en deux egalement en K, par la ligne FK, laquelle couppe aussi la ligne droicte AH en L, & la ligne droicte AB au poinct M, auquel soit menee la ligne HM. Veu donc que les arcs AH, BH sont egaux, aussi seront egaux les angles AFH, BFH appuiees sur iceux, par la 27. pr. 3. Parquoy les costez AF, FB estans egaux, & FI commun aux deux triangles AFI, BFI, la base AI sera egale à la base BI, par la 4. prop. 1. & les angles AIF, BIF aussi egaux, & partant droicts. Par mesme raison seront egales les lignes droictes AL, HL, & les angles ALF, HLF droicts. Or si des demy cercles egaux ABCG, AEDG, on oste arcs egaux ABC,

AED, resteront egaux les arcs CG, GD, & partant l'arc CG sera moitié de l'arc CGD. Mais aussi l'arc AH est moitié de l'arc AHB: donc puis que les arcs AB, CD sont egaux, les arcs AH, CG moitiez d'iceux, seront aussi egaux: & partant l'arc AH estant double de l'arc HK, aussi le sera CG. Et puis que les arcs AB, BC sont egaux, & l'arc AB est double de l'arc BH, l'arc BC sera pareillement double du mesme arc BH. Parquoy les arcs CG, BC sont equemultiplices, sçauoir est doubles, des arcs HK, BH, & partant par la 1. prop. 5. tout l'arc BG sera double de l'arc BK: & par consequent l'angle BFG aussi double de l'angle BFK, par la 33. prop. 6. Mais par la 20. prop. 3. le mesme angle BFG au centre, est double de l'angle FAB: donc les angles BFM, FAB seront egaux, & partant l'angle ABF estant commun aux deux triangles ABF, FBM, & le tiers au tiers par la 32. prop. 1. iceux triangles seront equiangles; & par la 4. prop. 6. comme AB sera à BF, ainsi BF à BM: & partant par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, BM sera egal au quarré de BF. Derechef, puis que les costez AL, LM du triangle ALM sont egaux aux costez HL, LM du triangle HLM, & les angles contenus d'iceux aussi egaux, sçauoir droicts, par la 4. prop. 1. les bases AM, HM, & les angles LAM, LHM seront egaux. Mais par la 5. prop. 1. l'angle LAM est egal à l'angle HBA, pource que les costez HA, HB sont egaux: Donc aussi l'angle LHM sera egal au mesme HBA: & partant par la 32. prop. 1. les triangles ABH, AHM seront equiangles, puis qu'ils ont les angles ABH, AHM egaux, & l'angle HAM commun. Parquoy par la 4. prop. 6. comme AB sera à AH, ainsi AH à AM: & par la 17. prop. 6. le rectangle de AB, AM

sera egal au quarré de AH. Mais il a esté demonstré que le rectangle de AB, BM, est egal au quarré de BF : donc les rectangles de AB, AM, & de AB, BM ensemble, sont egaux aux deux quarrez de AH, BF. Mais par la 2. prop. 2, iceux rectangles sont egaux au quarré de AB: donc le quarré de AB costé du pentagone est egal aux deux quarrez des lignes BF, AH, costez de l'hexagone, & du decagone. Ce qui estoit à prouuer.

COROLLAIRE.

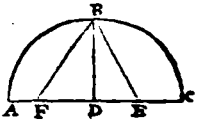
Par cecy est manifeste qu'vne ligne droicte tiree du centre, & laquelle diuise en deux egalement vn arc, diuise aussi la ligne subtendante d'iceluy arc en deux egalement, & à angles droicts.

Est aussi euident que le diametre du cercle tiré de l'angle du pentagone, diuise en deux egalement l'arc que le costé opposé à iceluy angle subtend, comme aussi iceluy costé opposé, & à angles droicts. Car il a esté demonstré que le diametre AG tiré du poinct A, diuise en deux egalement l'arc CD, lequel le costé opposé CD subtend : Parquoy par ce que dessus, il couppera aussi en deux egalement & à angles droicts iceluy costé CD. La mesme demonstration sera en tout polygone equilateral inscrit au cercle, le nombre des costez estant impair, tellement que si d'vn angle de quelconque polygone regulier dont le nombre des costez est impair, on meine vne ligne droicte par le centre d'iceluy qui couppe le costé opposé ; elle couppera les angles en deux egalement, comme aussi ledit costé, & à angles droicts. Mais au contraire, si elle couppe l'angle, ou le costé en deux egalement, ou à angles droicts : icelle ligne passera par le centre.

SCHOLIE.

Au quatriesme liure, Euclide a enseigné à describre au cercle vn pentagone equilateral: Mais Ptolomee au premier

liure de sa grande construction a enseigné vn autre moyen beaucoup plus bref & facile pour descrire tant ledit pentagone que le decagone, lequel moyen nous auons desia rapporté en nostre construction de la table des sinus: & neanmoins nous le rapporterons encore icy. Soit donc vn cercle ABC, duquel le centre est D, & ayant tiré le diametre AC, du centre D soit esleuee DB perpendic. à AC; & apres auoir couppé en deux egalement le semidiametre DC en E, & menee BE soit prise EF egale à EB, & tire BF. Ie dis que BF est le costé du pentagone, & DF le costé du decagone. Car puis que CD est couppee en deux egalement en E, & qu'à icelle est adioustee DF, par la 6. pr. 2. le rectangle de CF, DF auec le quarré de DE est egal au quarré de FE, ou EB son egale. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de EB est egal aux quarrez de BD, DE: donc le rectangle de CF, DF, auec le quarré de DE sera aussi egal aux quarrez de BD, DE: & ostant le quarré de DE commun, restera le rectangle de CF, FD egal au quarré de BD, c'est à dire au quarré de CD: & par la 17. prop. 6. comme CF sera à CD, ainsi CD à DF: & partant la ligne droicte CF sera diuisee en D selon la moyenne & extreme raison. Veu donc que le grand segment CD est le costé de l'hexagone du cercle ABC par le corol. de la 15. prop. 4. le moindre segment DF sera le costé du decagone du mesme cercle par le schol. prec. Et pour ce que par cette 10. prop. le quarré de BD, costé de l'hexagone, auec le quarré de DF, costé du decagone, est egal au quarré du costé du pentagone inscrit au mesme cercle, & que par la 47. pr. 1. le quarré de BF est egal aux susdits quarrez de BD, DF; le quarré du costé du pentagone sera egal au quarré de BF; & partant la ligne droicte BF est egale au costé du



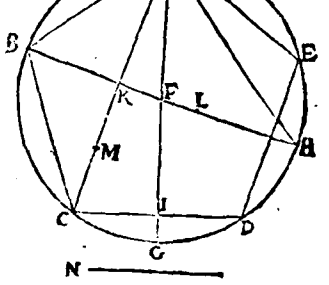
pentagone. Ce qui a esté proposé.

De cecy appert qu'estant cogneu le diametre d'vn cercle, on cognoistra aisement le costé tant du pentagone que du decagone inscriptibles en iceluy cercle. Car le diametre AC estant 8, BD sera 4, & DE 2 : partant BE ou EF sera √20, & ostant DE d'icelle EF, restera DF √20—2, qui est le costé du decagone : Et pource que le quarré d'iceluy costé FD est 24—√320, & celuy de BD 16 ; le quarré de BF sera 40—√320, & partant icelle BF, qui est egale au costé du pentagone sera √(40—√320.)

THEOR. 11. PROP. XI.

Si dans vn cercle ayant le diametre rationel, on inscrit vn pentagone equilateral; le costé du pentagone est irrationel, appellé ligne mineure.

Soit le pentagone equilateral ABCDE, inscrit dans le cercle ABCDE, duquel le diamatre est rationel : ie dis que AB, costé du pentagone, est irrationel, appellé ligne mineure.



Car soient menez par le centre F les diametres AG, BH, desquels AG coupera le costé CD en deux egalement en I, & à angles droicts par le corol. de la preced. soient aussi

tirees les lignes droictes AC, AH, desquelles AC sera couppee par le diametre BH en deux egalemẽt en K par le corol. de la preced. Parrant est manifeste que les deux triangles ACI & AKF sont equãgles : car l'angle du poinct A estant commun à tous les deux, & le droict AKF egal au droict AIC; le tiers sera egal au tiers par la 32. prop. 1. Et par la 4. prop. 6. comme IC à CA, ainsi KF à FA. Item du demy diametre FH (lequel est rationel & egalà FA) soit retranchee FL egale au quart de FA, laquelle FL sera rationele, estant le quart d'vne ligne rationele, & par la 16. prop. 10. BL composee des deux BF, FL, & commensurable à chacune d'icelles, sera aussi rationele. Item de AC soit retranché CM quart d'icelle ligne : Et par la 15. prop. 5. CI sera à CM quart de CA, comme KF à FL quart de FA : Que si on double les deux CI & CM par la 15. prop. 5. CD sera à CK (car elle est la moitié de CA & double de CM) comme KF à FL : & en composant, comme les deux CD & CK ensemble à CK, ainsi KL à FL : Et par la 22. prop. 6. le quarré de la composee de CD & CK sera au quarré de CK, cõme le quarré de KL au quarré de FL. Mais d'autant que la ligne AC estant couppee en la moyenne & extreme raison (sçauoir est estant tiree la ligne droicte BD) par la 8. prop. 13. son plus grand segment est egal au costé du pentagone, sçauoir à iceluy CD; par la 1. prop. 13. le quarré de la composee de CD plus grand segment, & de CK moitié de la toute CA, sera quintuple du quarré de CK, moitié de la toute : partant aussi le quarré de KL, sera quintuple du quarré de FL. Mais la ligne BL est aussi quintuple de FL, estant FL quart de FB : donc comme BL à FL, ainsi le quarré de KL au quarré de FL.

c'eſt à dire en raiſon doublee de KL à FL: car iceux quarrez ſont en cette raiſon par la 20. prop. 6. dont s'enſuit que KL ſera moyenne proportionelle entre BL & FL. Mais par le corol. de la meſme propoſition le quarré de BL ſera au quarré de KL, cõme BL à FL, c'eſt à dire que le quarré de BL ſera quintuple du quarré de KL: donc iceux quarrez ſeront entr'eux comme nombre à nombre, & partant commenſurables par la 6. prop. 10. & conſequemment les lignes BL, KL ſeront commenſurables entr'elles, au moins en puiſſance: Mais leurs quarrez eſtans entr'eux comme 5 à 1, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré par la 9. prop. 10. icelles lignes BL & KL, ſeront incommenſurables en longitude: & partant BL ayant eſté monſtree rationelle, icelles BL & KL ſeront rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement, & par la 74. prop. 10. BK ſera reſidu.

Maintenant, que la ligne BL puiſſe plus que la ligne KL, du quarré de la ligne N. Donc puis que le quarré de BL, qui eſt quintuple du quarré de KL eſt egal aux deux quarrez de KL & N, iceux quarrez de BL & N ſeront entr'eux comme 5 à 4, & partant commenſ. par la 6. prop. 10. & conſequemment les lignes BL & N, commenſurables entr'elles, au moins en puiſſance: Mais BL a eſté monſtree rationelle: donc N le ſera auſſi. Et pource que les quarrez d'icelles BL & N ſont entr'eux comme 5 à 4, qui par le corol. de la 24. prop. 8. n'eſt pas comme nombre quarré à nombre quarré, icelles lignes BL & N ſeront incommenſurables en longit. par la 9. prop. 10. & partant rationelles commenſurables en puiſſance ſeulement. Donc la toute BL eſtant

rationelle commenſ. en longitude à la rationelle propoſee BE (car BL eſt de 5 parties telle que BH en a 8) peut plus que ſa conuenable KL du quarré de N, qui luy eſt incommenſ. en longit. partant BK ſera reſidu quatrieſme par la 4. des tierces def. du 10.

Finalement, pource que par le corol. de la 8. p. 6. AB eſt moyenne proportionele entre BH, BK; (car par la 31. prop. 3. le triangle ABH à l'angle BAH droict, duquel eſt tiree AK perpend. à la baſe BH) le quarré de AB ſera egal au rectangle de BH, BK. Parquoy puis que la ligne droicte AB peut la ſuperficie contenue de la rationele BH & du reſidu quatrieſme BK: par la 95. prop. 10. icelle AB ſera ligne mineure. Parquoy ſi dans vn cercle ayant le diametre rationel, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

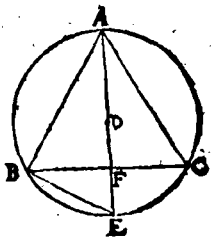
SCHOLIE.

Le diametre BH ſoit 8: donc BF ſera 4, BL 5, & AB $\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *& par conſequent ſon quarré ſera* $40-\sqrt{320}$, *qui diuiſé par BH 8, viendront* $5-\sqrt{5}$ *pour BK; & conſequemment KL ſera* $\sqrt{5}$, *qui eſt commenſurable en puiſſance ſeulement à BL, leurs quarrez 5 & 25 eſtans en raiſon quintuple; partant BK eſt reſidu. Et pource que BL peut plus qu'icelle KL du quarré de N, iceluy quarré ſera 20, & N* $\sqrt{20}$, *qui eſt incommenſurable en longitude à la toute BL 5; & partant BK ſera reſidu quatrieſme. Mais le quarré de AB* $40-\sqrt{320}$ *eſtant egal au produit d'iceluy reſidu* $5-\sqrt{5}$ *multiplié par la rationele BH 8; icelle ABV* $(40-\sqrt{320})$, *qui eſt le coſté du pentagone, ſera ligne mineure, comme veut la propoſition. Les nombres appliquez aux autres lignes de la fig. ſeront tels qu'ils enſuiuent: KL ſera* $\sqrt{5}-1$, *CK* $\sqrt{(10+\sqrt{20})}$, *AC* $\sqrt{(40+\sqrt{320})}$, *CM* $\sqrt{(2\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}})}$, *& CI* $\sqrt{(10-\sqrt{20})}$.

THEOR.

THEOR. 12. PROP. XII.

Le quarré du costé du triangle equilateral inscrit au cercle, est triple du quarré du demy diametre d'iceluy cercle.



Soit le triangle equilateral ABC inscrit en vn cercle ABC, duquel le centre est D. Ie dis que le quarré de AB costé d'iceluy triangle, est triple du quarré du semidiametre.

Car estant tiré le diametre AE, lequel couppera par le corol. de la 10. propos. de ce liure, l'arc BC en deux egalement en E; & aussi la ligne droicte BC en deux egalement & à angles droicts: veu que l'arc BEC est le tiers de toute la circonference, BE sera la sixiéme partie: partant estant tiree la ligne droicte BE, elle sera le costé de l'hexagone, & egale au demy diametre DE par le corol. de la 15. p. 4. Or le quarré du diametre AE sera quadruple du quarré de BE egale au demy diametre par le scholie de la 4. pr. 2. & par la 47. prop. 1. il est aussi egal aux deux de BA & BE, l'angle ABE estant droict par la 31. prop. 3. il est donc manifeste qu'il sera triple du quarré de BE, ou ED son egal. Parquoy le quarré du costé du triangle equilateral, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de ce que dessus, que le quarré du diametre d'vn cercle est au quarté du costé du triangle equilateral inscrit en iceluy cercle, en raison sesquitierce, c'est à dire

comme 4 à 3. Car puis qu'il a esté demonstré que le quarré du costé AB est triple du quarré du demy diametre AD, posant le quarré de AB 3, le quarré de AD sera 1; & le quarré de AF quadruple d'iceluy sera 4. Parquoy le quarré de AE sera au quarré de AB comme 4 à 3.

Et pour ce que par le corol. de la 8. prop. 6. comme AE est à AB, ainsi AB est à AF, perpendiculaire tombant d'vn angle sur vn costé; pareillement le quarré de AB sera au quarré de AF, comme 4 à 3.

On peut aussi facilement colliger que le semidiametre DE, lequel tõbe perpendiculairem. sur BC costé du triangle equilateral, est couppé en deux egalement en F par ledit costé BC. Car puis que le quarré de AB est triple du quarré de BE, costé de l'hexagone; si on pose iceluy quarré de AB estre 12, le quarré de BE sera 4, & le quarré de BF 3; & par consequent le quarré de EF sera 1 par la 47. prop. 1. Partant le quarré de BE, c'est à dire de DE son egale, sera quadruple du quarré de FE. Parquoy par le scholie de la 4. prop. 2. la ligne DE sera double de FE; & par consequent DE est couppee en deux egalement en F par le costé BC: tellement que la ligne perpendic. tombant du centre du cercle au costé du triangle equilateral inscrit en iceluy est moitié du costé de l'hexagone inscrit au mesme cercle.

SCHOLIE.

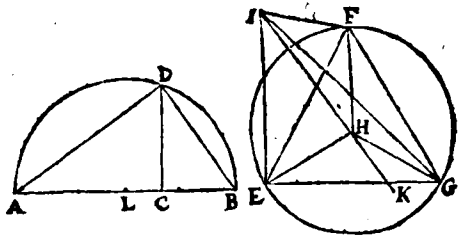
Le diametre AE estant 8, BE sera 4, EF 2. AF 6, AB √48 & BF √12: Parquoy le quarré du costé du triangle sera 48, & celuy du semidiametre 16, &c.

PROB. 1. PROP. XIII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vne pyramide equilaterale: & monstrer que le quarré du diametre d'icelle sphere,

est en raison sesquialtere au quarré du costé d'icelle pyramide.

Soit AB diamerre de la sphere donnee, & soit diuisé en C, de sorte que AC soit double de BC. Et apres auoir descrit sur AB le demy cercle ADB, leué la moyenne proportionele CD, & mené les lignes droictes DA & DB: Soit descrit le cercle EFG, duquel le demy diametre HE soit egal à CD: & apres auoir inscrit en iceluy le triangle equilateral



EFG, & tiré HF, HG, chacune desquelles sera egale à CD, estant egale à HE; du centre H soit leuee perpendiculaire HI au plan du cercle EFG par la 12. p. 11. egale à AC: puis soient menees les lignes IE, IF, & IG. Ie dis premierement que la pyramide EFGI est equilaterale.

Car par la constructiõ le triangle EFG est equilateral, & il est euident que les trois lignes IE, IF, IG, sont aussi egales entr'elles: (puis que par la 47. prop. 1. le quarré d'vne chacune d'icelle est egal au quarré de la perpendiculaire IH, & au quarré de l'vne des trois lignes HE, HF, HG, lesquelles sont egales.) Et d'autant que les costez AC, DC du triangle ADC sont egaux aux costez HI, HE du

triangle IHE ; & les angles qu'ils compremẽt egaux, eſtans droicts : la baſe AD ſera egale à la baſe EI par la 4. prop. 1. En la meſme maniere ſera demonſtré AD eſtre egale à FI, GI. Et veu que le quarré de AC eſt double du quarré de CD, (car ils ſont l'vn à l'autre comme AC à CB par le corol. de la 20. prop. 6. eſtans les trois lignes AC, CD, CB continuellement proportionales) le quarré de AD, qui eſt egal à tous les deux, ſera triple du quarré de CD, ou de ſon egale HE : Mais par la prec. prop. le quarré de EF eſt auſſi triple du quarré de HE : donc EF & AD ſont egales : & par la 1. com. ſent. EF & EI ſeront egales. Parquoy puis que AD eſt auſſi egale à FI, GI, les quatre triangles EFG, EFI, FGI, GEI ſeront equilateraux, & egaux entr'eux : Et par conſequent la pyramide EFGI, dõt la baſe eſt le triangle EFG, & le ſommet I, eſt equilaterale.

Ie dis en ſecond lieu qu'icelle pyramide peut eſtre inſcrite en la ſphere, dont le diametre eſt AB. Soit continuee la ligne perpendiculaire IH par deſſous la baſe de la pyramide iuſques en K : tellement que HK ſoit egale à CB, & la toute IK à la toute AB, & ſoit imaginé eſtre poſé le demy cercle ADB à l'entour de la pyramide, ſçauoir le poinct A au poinct I, le poinct B au poinct K : & puis que AC & CB ſont egales à IH & HK : & HG egale à DC, faiſant angle droict auec IH, auſſi bien que leurs egales AC & CD, il eſt euident que le poinct D du demy cercle tombera ſur le poinct G : Partant le diametre AB demeurant immobile, ſi le demy cercle fait vne reuolution, il touchera les deux autres angles de la pyramide E & F, (eſtans les lignes HE, HF, HG egales) & par ainſi la pyramide EFGI eſt inſcrite en la ſphere donnee, puis que tous les an-

gles d'icelle E, F, G, I, touchent ladite sphere.

Finalement, ie dis que le quarré du diametre AB est sesquialtere au quarré du costé AD, qui est egal à chacun costé de la pyramide: Car puis que AB est triple de BC; & AC double de la mesme BC, AB sera en raison sesquialtere à AC. Mais par le corol. de la 8. prop. 6. les trois lignes AB, AD, AC sont proportionales: Et partãt par le corol. de la 20 p. 6. comme AB sera à AC, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AD. Donc aussi le quarré de AB sera au quarré de AD en raison sesquialtere. Nous auons donc inscrit vne pyramide equilaterale dans vne sphere donnee, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

De ces choses on peut facilement colliger, que la puissance du diametre de la sphere est quadruple sesquialtere de la puissance du semidiametre du cercle descrit à l'entour de la base de la pyramide. Car puis que AB diametre de la sphere, a esté demonstré sesquialtere en puissance à EF costé de la pyramide, le quarré de EF sera de 6 parties, telles que le quarré du diametre AB en contiendra 9, & le quarré de la ligne HE 2, pource que le quarré de EF est triple du quarré de HE, par la 12. prop. 13. Donc de 9 telles parties que contiendra le quarré de AB; le quarré de HE en contiendra 2. Et partant le diametre AB est quadruple sesquialtere en puissance au semidiametre HE, puis que la raison des quarrez est comme 9 à 2.

Aussi la perpendiculaire tirée du centre de la sphere au plan de la base de la pyramide est la sixiéme partie du diametre de la sphere, & la tierce partie du semidiam. Car L soit le centre du demy cercle ADB: L sera pareillement le centre de la sphere. Ie dis que la ligne LC, (qui est la perpend. tirée du centre de la sphere à la base EFG, puis que AC est egale à HI, & partant le poinct C, le mesme que

H, ainſi auſſi L eſt le meſme que le centre de la ſphere.) eſt la ſixieſme partie du diametre de la ſphere, ſçauoir eſt de AB, & la tierce partie du ſemid. AL. Car puis que AC eſt double de CB, de telles 4 parties qu'eſt AC, de 2 telles ſera CB: & partant de 6 telles ſera la toute AB, & de 3 le ſemid. AL. Parquoy ſi AC eſt 4, & AL 3; LC ſera 1: & partant LC ſera la ſixieſme partie de AB, & la tierce de AL.

Semblablement la hauteur de la pyramide HI ſera deux tierces parties du diametre de la ſphere. Car HI eſt la meſme que AC, laquelle par la conſtruction eſt deux tierces parties d'iceluy diametre.

Auſſi de 9 telles parties que ſera le quarré d'iceluy diametre, le quarré de la hauteur de la pyramide en ſera 4. Car la raiſon de 9 à 4, eſt la raiſon doublee de 3 à 2.

SCHOLIE.

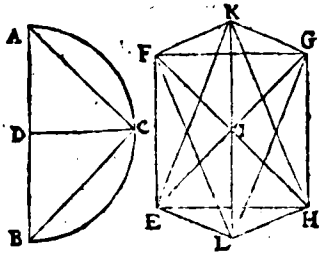
Le diametre AB eſtant 12, AC ou HI ſera 8, CB 4, CD ou HE √32, AD ou EF, EI √96, & BD √48. Parquoy le quarré du diametre AB eſt 144, & celuy de EF coſté de la pyramide eſt 96: tellement que ces deux quarrez ſont entr'eux comme 3 à 2, ainſi que veut la prop. & e

PROBL. 2. PROP. XIIII.

Dans vne ſphere donnee, inſcrire vn octaedre: Et monſtrer que le quarré du diametre de la ſphere, eſt double du quarré du coſté de l'octaedre.

Soit AB le diametre de la ſphere donnee, & iceluy ſoit couppé en deux egalement au poinct D: & apres auoir conſtruict le demy cercle ACB, leué la perpendiculaire DC, & mené les lignes droictes

CA, CB, lesquelles seront egales entr'elles par la 4. pr. 1. sur la ligne EF egale à l'vne d'icelles AC, CB, soit construit le quarré EFGH, dans lequel soient menees les deux diagonales FH, GE se couppans au poinct I: duquel poinct par la 12. p. 11. soit esleuee la ligne IK, perpendiculairement sur le quarré GE, & continuee par dessous iceluy plan iusques en L, tellement que IK, IL soient chacune egale à AD: puis des poincts L & K, soiēt menees aux angles du quarré les lignes KE, KF, KG, KH, LE, LF, LG, & LH.



Ie dis maintenant que la figure solide KL est enuironnee de huict triangles equilateraux; & que c'est vn octaedre. Car le quarré EFGH, ayant les costez egaux à AC: Il est euident que les diagonales EG, FH seront egales à AB: partant leurs moitiez à AD. Mais les deux lignes IL & IK sont aussi egales à AD: & par consequent elles seront egales à vne chacune d'icelles demy diagonales: & par la 4. prop. 1. les huict lignes LE, LF, LG, LH, KE, KF, KG, KH, seront toutes egales entr'elles; & au quatre du quarré EFGH par la mesme 4. prop 1. (estans les demy diagonales egales aux perpendiculaires IL & IK, en constituāt des angles droicts au poinct I, milieu du quarré.) Et puis que tous les costez sont egaux, tous les triangles, seront equilateraux, sçauoir les quatre d'au dessus du quarré EFGH,

ayãs leurs baſes ſur les quatre coſtez d'iceluy quarré, & ſe terminans au poinct K : & quatre autres au deſſous du meſme quarré, ayans auſſi leurs baſes ſur les coſtez du quarré, & ſe terminens au poinct L : & partant le ſolide KL compris de huict triangles equilateraux, ſera octaedre.

Ie dis d'auantage qu'iceluy octaedre eſt *inſcriptible* en la ſphere donnee. Car il eſt euident que la ligne KL, eſt egale au diametre AB, & que l'angle KEL eſt droict: (d'autant que les deux lignes KI, IE eſtans egales, les angles ſur la baſe KE ſeront egaux, & demy droicts, pource que l'angle KIE eſt droict: Et par meſme raiſon l'angle IEL eſt demy droict: & partant le total KEL ſera droict.) Partant le demy cercle ayant pour diametre KL, & faiſant vne reuolution à l'entour de l'octaedre, il touchera le poinct E: & par meſme diſcours il touchera auſſi les trois autres F, G, H, deſquels les angles ſont egaux à l'angle E, & par conſequent l'octaedre KL ſera inſcriptible en la ſphere dont le diametre eſt AB, puis que tous les angles d'iceluy touchent ladite ſphere.

Finalement, il eſt euident par la 47. prop. 1. que le quarré du diametre de la ſphere AB ou KL, eſt egal aux deux quarrez de KE, EL, leſquels ſont egaux: & partant iceluy quarré de KL diametre de la ſphere, ſera double du quarré de l'vn d'iceux coſtez de l'octaedre. Nous auons donc inſcrit vn octaedre dans vne ſphere, &c. Ce qu'il falloit faire.

COROLLAIRE.

Il eſt euident par les choſes cy-deſſus, qu'en l'octaedre trois diametres s'entrecouppent à angles droicts au centre de la ſphere, car le diametre KL eſt perpend. aux deux dia-

metres EG, FH, qui s'entrecouppent au centre L à angles droicts.

Il est encore euident que l'octaedre peut estre diuisé en deux pyramides semblables & egales, ayans pour base commune le quarré EFGH, & pour sommets K & L, telles que sont les deux pyramides EFGHK, EFGHL.

Il appert aussi que si le tetraedre & l'octaedre sont descrits en vne mesme sphere: le costé du tetraedre sera sesquitierce en puissance au costé de l'octaedre. Car le quarré du diametre de la sphere estant 6 parties, par la prec. prop. le quarré du costé du tetraedre sera 4 parties: & par cette 14. prop. le quarré de l'octaedre sera 3 parties. Donc le quarré du costé du tetraedre sera au quarré du costé de l'octaedre, comme 4 à 3, qui est raison sesquitierce.

SCHOLIE.

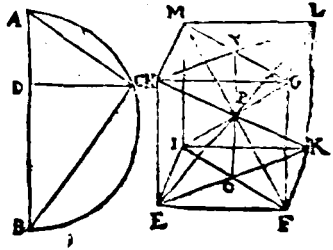
Le diametre AB estant 12, AD, ou DC, IK sera 6, AE ou EF V 72, EG 12, & EI 6. Parquoy le quarré AB diam. de la sphere est 144, & celuy de EF costé de l'octaedre est 72: tellement qu'iceux quarrez sont entr'eux comme 2 à 1, ainsi que veut la prop. &c.

PROBL. 3. PROP. XV.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn cube: & monstrer que le quarré du diametre de la sphere, est triple au quarré du costé d'iceluy cube.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit couppé au poinct D, en sorte que BD soit double de AD, c'est à dire que AB soit triple d'icelle AD; Puis, apres auoir construict le demy cercle ABC, leué la perpendiculaire DC, & mené les deux lignes AC & BC; sur EF egale à AC, soit fait

le qnarré EFGH, ſur lequel ſoient eſleuees par la 12. prop. 11. les quatre lignes perpendiculaires EI, FK, GL, HM, chacune egale à EF: puis ſoient menees les quatre lignes IK, KL, LM, MI. D'autant que les lignes EI, FK ſont perpendiculaires au plan EFGH, elles ſeront paralleles par la 6. prop. 11. Mais elles ſont auſſi egales: donc par la 33. prop. 1. EF, IK ſeront pareillement egales & parallales: & partant EFKI eſt vn parallelogramme ayant les quatre coſtez egaux. Mais il a auſſi par la 34. prop. 1. les 4. angles droicts, puis que les angles EIK, FKI ſont oppoſez aux droicts KFE, IEF: donc EFKI eſt quarré. Par meſme raiſon FKLG, GLMH, HMIE ſeront quarrez: & partant IKLM ſera auſſi quarré, puis que par la 24. prop. 11. il eſt egal & ſemblable au quarré oppoſé EFGH; Car EL eſt vn ſolide parallelipipede: pource que par la 15. pr. 11. les plans oppoſez d'iceluy ſont parallels, eſtans tirez par les lignes paralleles qui s'entretouchent. Parquoy EL ſera vn cube: lequel ie dis eſtre inſcriptible en la ſphere donnee. Car ayant mené les diametres EK, FI, HL, & GM, des plans oppoſez EFKI, HGLM, ſoient imaginez eſtre tirez par iceux diametres, les plans EKLH, FIMG, leſquels par la 28 pr. 11. coupperont le cube en deux egalement, & paſſeront par le centre d'iceluy, ſçauoir par le poinct P, auquel par le corol. de la 39. prop. 11. tous les diametres



dudit cube s'entrecoupperont aussi en deux egalement: & partant la commune section d'iceux plans, sçauoir NO, passera par le mesme centre P. Mais il est euident qu'iceux plans EKLH, FIMG sont rectangles egaux: & que par consequent leurs diametres & semidiametres seront aussi egaux. Parquoy estant descrit vn cercle du centre P, sur le diametre EL: il est euident qu'iceluy demy cercle faisant vne reuolution à l'entour du cube, décrira vne sphere passant par tous les angles du cube: laquelle ie dis estre egale à celle du diametre AB. Car puis que par la 47. prop. 1. le quarré de EK est egal aux quarrez des lignes egales EF, FK, & partant double du quarré de EF, ou de KL: les quarrez de EK, KL seront triples du quarré de KL. Mais par la 47. p. 1. le quarré de EL est egal aux quarrez de EK, KL: donc aussi le quarré de EL sera triple du quarré de KL, c'est à dire du quarré de AC: duquel est aussi triple le quarré de AB: (car par le corollaire de la 8. prop. 6. AB, AC, AD sont prop. & partant par le corol. de la 10. prop. 6. comme AB est à AD, ainsi le quarré de AB sera au quarré de AC. Veu donc que AB est triple de AD, aussi le quarré de AB sera triple du quarré de AC.) Parquoy les quarrez de EL, AB sont egaux: & par consequent les lignes EL, AB, diametres des spheres: comme aussi les spheres d'iceux diametres, sont pareillement egales.

Or il a esté demonstré que le quarré du diametre EL est triple du quarré du costé du cube KL. Parquoy nous auons fait tout ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

Il est manifeste que le quarré du diametre de la sphere,

ou du cube, est egal aux quarrez du costé du tetraedre & du cube pris ensemble. Car par la 47. prop. 1. le quarré de AB diametre de la sphere, est egal aux deux quarrez de AC, BC 6 costé du cube, & du tetraedre.

Est aussi euident que tous les diametres du cube sont egaux entr'eux, & qu'ils se diuisent en deux egalement au centre de la sphere: & pareillement que les lignes droites qui conioignent les centres des quarrez opposez, se couppent en deux egalement au mesme centre de la sphere.

SCHOLIE.

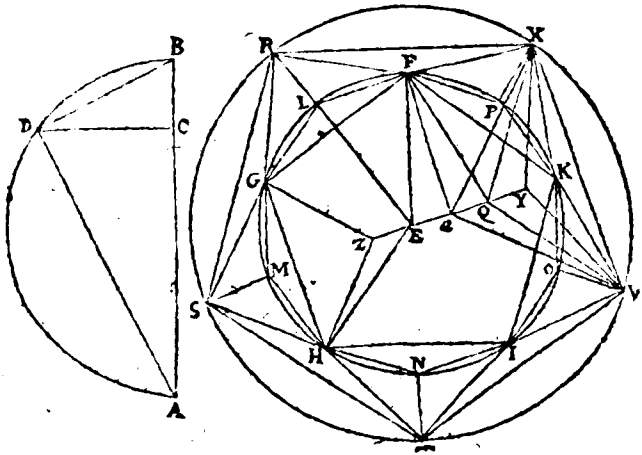
Le diametre AB estant 12, AD sera 4, BD 8, DC $\sqrt{32}$, BC $\sqrt{96}$, AC ou EF $\sqrt{48}$, EK $\sqrt{96}$, & EL 12. Parquoy appert que le quarré du diametre de la sphere AB, qui est 144, est triple du quarré de EF costé du cube, qui est 48, &c.

PROB. 4. PROP. XVI.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn icosaëdre: Et monstrer que son costé est ligne irrationele, appellee ligne mineure.

Soit le diametre de la sphere donnee AB, lequel soit diuisé au poinct C, en sorte que AC soit quadruple de BC, & apres auoir construict le demy cercle ADB, leué la perpendiculaire CD, & mené les lignes droictes AD, DB; du centre E, & de l'interuale EF, egale à BD: soit fait vn cercle, dans lequel soit inscrit le pentagone equilateral FGHIK, & puis dans le mesme cercle, soit aussi inscrit vn decagone equilateral, (ce qui se fera en couppant en deux egalement l'arc d'vn chacun costé du pentagone.) En apres par la 12. prop. 13. du centre E, &

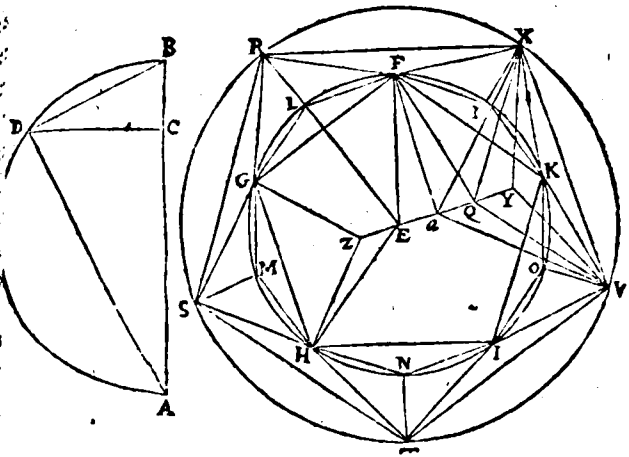
des poincts L, M, N, O, P, soient leuees les lignes EQ, LR, MS, NT, OV, PX perpendiculaires au plan du cercle FGHIK, chacune desquelles soit posee egale à EF ou BD, & par la 6. prop. 11. elles seront paralleles entr'elles: & partant les lignes droictes conjoignant icelles, sçauoir EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX: (toutes lesquelles tou-



tesfois nous n'auons tirees pour euiter confusion) seront egales & paralleles entr'elles, par la 33. p. 1. Donc puis que EL, EM, &c. sont egales au semidiametre EF; aussi QR, QS, QT, QV, QX seront egales tant entr'elles qu'à iceluy demy diametre EF, ou à la ligne BD. Et pource que par la 15. prop. 11. le plan mené par les lignes QR, QS est parallel au plan FGHIK tiré par les lignes EL, EM: Et que pour la mesme raison le plan tiré par les lignes QS, QT, est parallel au mesme plan FGHIK, tiré par les

lignes EM, EN: mais que le plan tiré par les lignes QR, QS conuient auec le plan mené par les lignes QS, QT, en la ligne droicte QS; il eſt euident par les choſes demonſtrees à la 16. prop. 11. que ces deux plans en font vn ſeul. On demonſtrera en la meſme maniere, que le plan tiré par QT, QV, auec celuy-cy en fait vn ſeul, & auſſi celuy tiré par QV, QX & par QX, QR: tellement donc que les 5. lignes QR, QS, QT, QV, QX ſont en vn meſme plan: & partant ſi de Q, & de l'interuale QX, on deſcrit vn cercle en iceluy plan, il paſſera par les autres poincts R, S, T, V, & ſera egal au cercle FGHIK. Soient tirees les lignes droictes RS, ST, TV, VX, XR. Et d'autant que LR, PX ſont egales & paralleles; ſi on imagine eſtre tiree vne ligne droicte LP, auſſi par la 33. prop. 1. LP, RX ſeront egales & paralleles: & partant par la 28. prop. 3. de cercles egaux, elles prennent arcs egaux: Mais LP prend la cinquieſme partie du cercle FGHIK, ſçauoir les deux dixieſmes parties LF, FP: Donc auſſi RX, prend la cinquieſme partie du cercle RSTVX. Par meſme maniere nous conclurons que chacune des autres lignes droictes RS, ST, TV, VX, prend la cinquiéme partie d'iceluy cercle. Parquoy RSTVX eſt vn pentagone equilateral, ayant tous les coſtez egaux à ceux du pentagone FGHIK. Soient tirees des angles du pentagone RSTVX, aux angles du pentagone FGHIK, les lignes droictes RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Donc puis que la perpẽdiculaire LR eſt egale au demy diametre EF, c'eſt à dire au coſté de l'hexagone du cercle FGHIK, & que LF eſt coſté du decagone, par la 10. p. 13. le quarré du coſté du pentagone du meſme cercle, eſt egal aux quarez de LR, LF. Mais le quarré de FR, pa-

la 47. prop. 1. eſt egal à iceux quarrez de LR, LF. Donc le quarré de FR eſt egal au quarré du coſté du pentagone; & par conſequent la ligne RF ſera egale à LP coſté du pentagone, ou à FG, c'eſt à dire à RX. Par la meſme raiſon, les autres lignes RG, SG, &c. ſeront egales aux autres coſtez de chaque pentagone: & partant les dix triangles RFX, RFG,



RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, ſeront equilateraux, & egaux entr'eux. Maintenant ſoit prolongée de part & d'autre la perpendiculaire EQ, tellement que chaque prolongement QY, E*z* ſoit egal au coſté du decagone, & ſoient tirees les lignes VQ, VY, XQ, XY, GE, G*z*, HE, H*z*. D'autant que QX eſt ſemidiametre du cercle RSTVX, c'eſt à dire coſté de l'hexagone, & QY eſt coſté du decagone de meſme cercle; par la 10. prop. 13. le quarré de XV coſté du pentagone, ſera

egal aux quarrez de QX, QY. Mais par la 47. p.1. à iceux quarrez de QX, QY, eſt auſſi egal le quarré de XY (car l'angle XQY eſt droict, eſtant EQ perpendiculaire à l'vn & l'autre plan des cercles parallels). Donc le quarré de XY eſt egal au quarré de XV; & partant la ligne XY egale à la ligne XV. Par meſme raiſon XV ſera demonſtree egale à VY: & partant le triangle VYX eſt equilateral. Par meſme maniere, (eſtans tirees les lignes RY, SY, TY, leſquelles ne ſont tirees pour euiter confuſion) les quatre triangles RYX, RYS, SYT, TYV, ſeront demonſtrez equilateraux, & egaux ux triangle VYX, c'eſt à dire aux dix premiers triangles, puis que tous leurs coſtez ſont egaux aux coſtez du pentagone. Par ſemblable argument ſera prouué que le triangle GZH eſt equilateral, comme auſſi les 4 autres triangles HZI, IZK, KXF, FZG, (deſquels toutesfois nous n'auons auſſi tiré les lignes, afin d'euiter la confuſion) tous leſquels ſeront egaux aux 15 precedans. Veu donc que tous ces 20 triangles ſont equilateraux, & egaux, & qu'ils ſe conioignent les vns aux autres par lignes droictes; ſera conſtitué d'iceux vn Icoſaedre: lequel ie dis eſtre inſcriptible en la ſphere donnee, de laquelle le diamerre eſt AB. Car ayant couppé en deux egalement EQ en a, & tiré les lignes aF, aX, aV; les coſtez aQ, QV du triangle aQV ſeront egaux aux coſtez aQ, QX du triangle aQX, (car QV, QX, ſont ſemy diametres du cercle RSTVX) & les angles aQV, aQX ſont droicts: & partant par la 4. prop. 1. les baſes aV, aX ſeront egales. Par la meſme raiſon, ſi on tire des lignes de a & Q, à R, S, T, les lignes aR, aS, aT ſeront demonſtrees egales entr'elles, & à icelles aV, aX. Et puis que les coſtez aQ, QX du triangle aQX

αQX ſont egaux aux coſtez αE, EF du triangle αEF, (pource que QX, EF ſont demy diametres de cercles egaux, & EQ eſt couppee en deux egalemẽt en α) & les angles αQX, αEF ſont auſſi egaux, ſçauoir droicts: par la 4. prop. 1. les baſes αX, αF, ſeront auſſi egales. Par meſme raiſon, ſi de α & E on tire des lignes droictes à G, H, I, K, on demonſtrera les lignes αG, αH, αI, αK, eſtre egales à icelle αX: & partant les dix lignes droictes tirees de α aux dix angles F, G, H, I, K, R, S, T, V, X, ſont egales. Et d'autant que QE eſt ſemidiametre, c'eſt à dire coſté de l'hexagone du cercle FGHIK, & EZ coſté du decagone du meſme cercle; par la 9. prop. 13. QZ ſera diuiſee en la moyenne & extreme raiſon en E, & le plus grand ſegment ſera QE. Parquoy par la 3. prop. 13. le quarré de AZ ſera quintuple du quarré de Eα. Mais le quarré de αF eſt auſſi quintuple du meſme quarré de Eα: (car le quarré de EF eſtant quadruple du quarré de Eα par le ſcholie de la 4. prop. 2. pource que EF eſt double de Eα: les quarrez de EF, Eα, ſont le quintuple du quarré de Eα. Mais par la 47. prop. 1. le quarré de αF eſt egal à iceux quarrez de EF, Eα: donc auſſi le quarré d'icelle αF ſera quintuple d'iceluy quarré de Eα.) Donc les quarrez de αZ, αF, ſont egaux: & par conſequent les lignes αZ, αF ſeront egales. Et puis que αE, αQ, & EZ, QY ſont egales, auſſi αZ, αY ſeront egales: & toutes les lignes droictes tirees de α, à tous les angles de l'Iſcoſaedre pareillement egales. Parquoy la ſphere deſcrite à l'entour du diametre ZY, paſſera par tous les angles de l'Iſcoſaedre. Car d'autant que par la 15. prop. 5. comme αZ eſt à αE, ainſi YZ à QE; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de αZ eſt au quarré de αE, ainſi le

quarré de YZ au quarré de QE; & que le quarré de AZ a esté demonstré quintuple du quarré de AE: pareillemẽt le quarré de YZ sera quintuple du quarré de QE, c'est à dire du quarré de DB son egale. Mais aussi le quarré de AB est quintuple du mesme quarré de BD: (car AB, BD, BC estans proportionaux par le corol. de la 8. prop. 6. le quarré de AB sera au quarré de BD, comme AB à BC par le corol. de la 20. prop. 6. & partant AB estant quintuple de BC, aussi le quarré de AB sera quintuple du quarré de BD.) Donc les quarrez de YZ, AB sont egaux: & partant les lignes YZ, AB, & les spheres descrites à l'entour d'icelles seront egales.

Ie dis finalement que le costé de l'Icosaedre est ligne irrationele, appellee ligne mineure: ce qui est euident par la 11. prop. 13. estant par la 6. prop. 10. le demy diametre EF, ou son egale BD, ligne rationele commensurable en puissance à la posee rationele AB, de laquelle nous auons monstré que le quarré estoit quintuple du quarré de BD. Nous auons donc fait ce qui estoit proposé.

COROLLAIRE.

De cecy resulte que le quarré du diametre de la sphere est quintuple du quarré du semidiametre du cercle comprenant 5 costez de l'Icosaedre.

Et aussi qu'iceluy diametre de la sphere est composé du costé de l'hexagone, & de deux costez du decagone descrits en vn mesme cercle.

Et encore que le costé de l'icosaedre est egal au costé du pentagone, par le moyen duquel est construit iceluy icosaedre.

SCHOLIE.

Le diametre AB estant 10, AC sera 8, CB 2, CD 4, AD √80, ED ou EF √20: & partant GF ou RX est

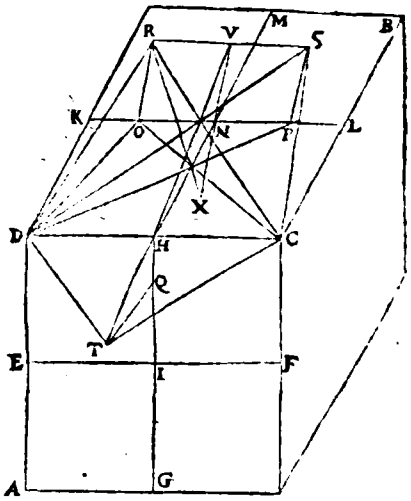
du pentagone sera √(50—√500), & LG ou FL 5—√5. Mais RL estant egale au semidiametre, ou costé de l'hexagone EF, est √20: donc RG ou RF costé de l'Icosaedre sera √(50—√500), qui partant est egal au costé du pentagone GF ou RX, & par consequent ligne mineure comme iceluy. Dauantage Ea ou aQ estant moitié de EQ ou EF egale à QX sera √5, EZ ou QT 5—√5: partant ZQ ou ZT composee du costé de l'hexagone EQ, & de celuy du decagone LF sera 5+√5, IZ 5, & la toute ZT 10: Parquoy appert que le quarré du diametre de la Sphere est quintuple, &c.

PROB. 5. PROP. XVII.

Dans vne sphere donnee, inscrire vn dodecaedre: Et monstrer que son costé est ligne irrationele, appellee residu.

Soit le cube AB inscriptible en la sphere donnee, duquel les deux plans exterieurs AC & DB, se rencontrent à angles droicts à la ligne de commune section DC: & d'iceux plans tous les costez soient couppez en deux egalement, sçauoir AC, par les deux lignes EF, GH se couppans au poinct I; & DB, par les lignes KL & HM se couppans au poinct N. Item les trois lignes KN, NL, HI soient couppees en la moyenne & extreme raison aux poincts O, P, Q, desquelles les plus grands segmens soient NO, NP, IQ: Et par la 12. prop. 11. soient leuees les deux lignes OR, PS perpendiculaires au plan DB: mais QT au plan AC, lesquelles soient posees egales aux trois segmens ON, NP, IQ: Puis soient menees les lignes DR, RS, DT, CS, CT. Ie dis que DRSCT est pentagone equilateral constitué sur vn mesme plan, & equiangle.

Car soient menees les lignes DO, DP, DS: & d'autant que KN est couppee en la moyenne & extreme raison au poinct O, & que ON est le plus grand segment, par la 4. prop. 13. les deux quarrez de KN, KO seront triples du quarré de ON: Et KN estant egale à KD, & ON à OR, les deux *quarrez* de KD & KO, ou le seul de DO, qui leur est egal par la 47. pr. 1. est triple du quarré de OR: & par-



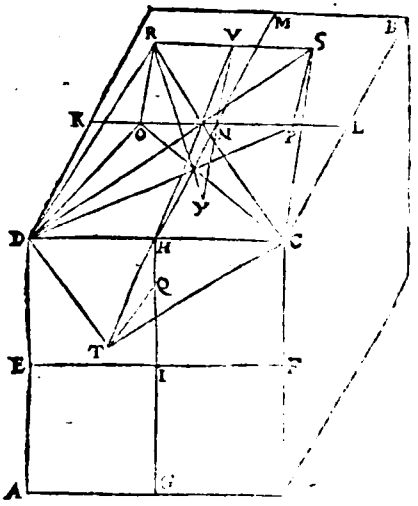
tant le quarré de DR, qui est egal à tous les deux par la 47. prop. 1. sera quadruple du seul de RO: Et d'autant que RS est double de RO, son quarré, par le scholie de la 4. prop. 2. sera aussi quadruple du quarré de OR, aussi bien que le quarré de DR: Partant les lignes DR, RS seront egales. Par meſme discours on monstrera l'egalité des trois autres costez SC, CT, TD, tant entr'eux qu'aux deux DR,

RS : donc le pentagone DRSCT eſt equilateral.

Ie dis qu'il eſt auſſi en vn meſme plan. Car ayant menee NV parallele à OR, ſoient tirees TH, & HV, icelles deux lignes ſe rencontreront directement : tellement que THV ſera vne ſeule ligne droicte. Car d'autant que HI eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct Q; IH ſera à IQ, comme IQ à QH. Mais HN eſt egale à HI, & NV à IQ, & QT à QI : donc comme HN eſt à NV, ainſi QT à QH. Parquoy les triangles NVH, QTH, ont deux coſtez proportionaux à deux coſtez, & ſont conioincts à l'angle H, tellement que les coſtez homologues HN, TQ; & NV, QH, ſont parallels par la 6. prop. 11. ces deux-là eſtans perpendiculaires au plan AC, & ces deux-cy au plan DB : Donc par la 32. prop. 6. THV ſera vne ſeule ligne droicte. Or par la 1. prop. 11. toute ligne droicte eſt en vn meſme plan : par conſequent le pentagone DRSCT eſt en vn meſme plan.

Ie dis encores qu'il eſt equiangle : Car puis que KN eſt couppee en moyenne & extreme raiſon, eſtant ON plus grand ſegment, par la 5. p. 13. en adiouſtant KN à NP, egale au plus grand ſegment ON; la toute KP ſera couppee en la moyenne & extreme raiſon au poinct N, & ſera KN le plus grãd ſegment : & partant par la 4. prop. 13. les quarrez de KP & NP (ou PS ſon egale) ſont triples du quarré de KN, (ou de ſon egale KD:) & en adiouſtant le quarré de KD auec les deux de KP & PS : iceux trois quarrez ſeront quadruples du ſeul de KD, (ou par la 47. prop. 1. au lieu des deux de KP & KD, le ſeul de DP auec celuy de PS, ou encore le ſeul de DS, ſera quadruple du quarré de KD) duquel le quarré de DC eſt auſſi quadruple par le ſcholie de

la 4. prop. 2. eſtant DC double de KD: partant les deux lignes DC & DS ſeront egales: Mais auſſi eſtans tous les coſtez du pentagone egaux, les deux triangles DCT, DSR auront les trois coſtez egaux aux trois coſtez chacun au ſien: Et par la 8. prop. 1. l'angle au poinct R ſera egal à l'angle au poinct T. Et ſemblablement nous monſtrerons que l'angle RSC eſt egal à l'angle DTC: partant trois angles



du pentagone ſeront egaux, & par la 7. prop. 1. il ſera equiangle. Il eſt auſſi equilateral, & ſur DC l'vn des coſtez du cube, auquel il y en a douze de pareils. Que ſi on veut conſtruire de meſme façon vn pentagone, ſur chacun des vnze coſtez reſtans, on trouuera vne figure ſolide enuironnee de douze pentagones equiangles & equilateraux, qui par les def. ſera dodecaedre.

Ie dis d'auantage qu'il eſt inſcriptible en la ſphere donnee. Car ſi on prolonge VN, qui eſt perpendiculairem. eſleuee ſur le centre du quarré DB, il appert par la 39. prop. 11. qu'elle couppera la diagonale du cube en deux egalement: qu'elle la coupe donc au poinct X, auquel poinct ſera le centre de la ſphere enuironnant le cube par le corol. de la 15. prop. 13. & NX eſt egale au demy coſté du cube: Soit menee la ligne RX. Or nous auons tantoſt monſtré par la 4. prop. 13. que les quarrez de KP & NP ſont triples du quarré de KN: Mais VX eſt egale à KP; & RV à NP: (car NX eſt egale à KN, & VN à NP). Partant les deux quarrez de RV, XV, ou le ſeul de RX, par la 47. prop. 1. eſt triple du quarré de KN: Mais par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcripte au cube, eſt triple du quarré du coſté d'iceluy cube: Et par la 15. prop. 5. le quarré du demy diametre eſt triple au quarré du demy coſté. Or KN eſt le demy coſté du cube: Partant RX ſera le demy diametre de la ſphere circonſcrite au cube AB, duquel le centre eſt X. Par meſme diſcours nous monſtrerons que du poinct X toutes les lignes menees vers les autres angles du dodecaedre, ſont egales au demy diametre de la ſphere circonſcripte au cube. Partant vne meſme ſphere pourra eſtre circonſcripte au cube & au dodecaedre.

Ie dis finalement que le coſté du dodecaedre eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Car d'autant que les deux demy coſtez du cube KN, NL ſont chacun couppez en la moyenne & extreme raiſon: par la 15. prop. 5. toute la ligne KL ſera aux deux plus grands ſegmens enſemble, ſçauoir à OP, comme ceux plus grands ſegmens ſont aux plus petits

enſemble, ſçauoir à la compoſee de KO & PL. Parquoy ſi KL coſté du cube eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment ſera OP. Mais la toute KL ainſi couppee eſt rationele: (car ſon quarré eſt commenſurable au quarré du diametre de la ſphere, lequel eſt poſé rationel: puis qu'il eſt le tiers d'iceluy par la 15. prop. 13.) Donc par la 6. prop. 15. le plus grand ſegment OP, c'eſt à dire RS coſté du dodecaedre qui luy eſt egal, eſt ligne irrationele, appellee reſidu. Nous auons donc fait tout ce qui eſtoit propoſé.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte que le coſté d'vn cube eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, le plus grand ſegment ſera le coſté du dodecaedre inſcrit en vne meſme ſphere.

Auſſi que le coſté du cube eſt egal à la ligne droicte ſubtendant vn angle du pentagone du dodecaedre. Et d'autant qu'icelle meſme ligne eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon, par la 8. prop. 13. le plus grand ſegment eſt coſté d'vn pentagone: & partant par la 5. prop. 13. la ligne droicte compoſee d'icelle, c'eſt à dire du coſté du cube, & du plus grand ſegment, c'eſt à dire du coſté du dodecaedre, eſt ſemblablement diuiſee, & le moindre ſegment eſt coſté du dodecaedre, mais le plus grand eſt coſté du cube: Il s'enſuit que ſi vne ligne droicte eſt couppee en la moyenne & extreme raiſon, & que le moindre ſegment ſoit coſté du dodecaedre: le plus grand ſegment ſera coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere.

SCHOLIE.

Nous auons trouué à la 15. prop. que le diametre de la ſphere eſtant 12, le coſté du cube inſcriptible en icelle eſt $\sqrt{48}$, & partant KN moitié d'iceluy coſté ſera $\sqrt{12}$, & eſtant couppee en la moyenne & extreme raiſon en O, le grand ſegment NO ſera $\sqrt{15}-\sqrt{3}$, & le moindre KO

√27—√15, tellement que leurs trois quarrez ſeront 12, 18—√180, & 42—√1620. Mais d'autant que le quarré de DO eſt egal aux deux quarrez de KO, DK, iceluy quarré de DO ſera 54—√1620: & adiouſtant à iceluy le quarré de OR, c'eſt à dire de ON, viendront 72—√2880 pour le quarré de DK coſté du dodecaedre: & partant iceluy coſté ſera √60—√12, qui eſt reſidu ſixieſme. Dauantage, adiouſtant à KN ſon grand ſegment ON, viendront √15+√3 pour la toute KP, dont le quarré eſt 18+√180, auquel quarré eſtant adiouſté celuy de DK, viendront 30+√180 pour le quarré de DP; & luy adiouſtant le quarré de PS, qui eſt 18—√180, viendront 48 pour le quarré de DS ſubtendante de l'angle du pentagone, qui partant eſt √48, egal au coſté du cube: lequel coſté eſtant couppé en la moyenne & extreme raiſon, le moindre ſegment ſera √108—√60, & le grand √60—√12, partant egal au coſté du dodecaedre, qui eſtant adiouſté à la ſubtendante DS, la compoſee ſera √60+√12, qui eſt le double de KP. Parquoy appert que le coſté d'vn cercle eſtant couppé, &c.

PROB. 6. PROP. XVIII.

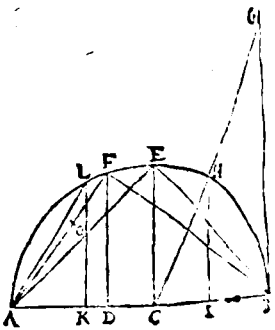
Le diametre d'vne ſphere eſtant donné; trouuer les coſtez des cinq figures regulieres inſcrites en icelle; & les comparer entr'eux.

Soit le diametre d'vne ſphere donnee AB: & il faut premierement trouuer les coſtez des cinq figures regulieres inſcriptibles en icelle ſphere.

Soit diuiſé le diametre AB en deux egalement au poinct C, mais au poinct D, tellement que AD ſoit la tierce partie de AB: puis ayant deſcrit ſur AB vn demy cercle, ſoient eſleuees les perpendiculaires

CE, DF, & tirées les lignes droictes AE, AF: BE, BF.

D'autant que par le corol. de la 8. prop. 6. BF est moyenne proportionele entre AB, BD, par le corol de la 20. prop. 6. comme AB sera à BD, ainsi le quarré de AB au quarré de BF. Mais AB est à BD en raison sesquialtere: (car par construction AB contient 3 telles parties que AD 1, & BD 2.) Dõc aussi le quarré de AB est au quarré de BD, en raison sesquialtere: & partant puis que par la 13. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere est en raison sesquialtere au quarré du costé du tetraedre: BF sera le coste du tetraedre inscrit en la sphere du diametre AB.



Derechef, puis que par le mesme corol. de la 8. prop. 6. AE est moyenne proportionele entre AB, AC: & partant comme AB est à AC, ainsi le quarré de AB au quarré de AE par le corol. de la 20. p. 6. & AB est double de AC: aussi le quarré de AB sera double du quarré de AE. Parquoy puis que par la 14. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere est double du costé de l'octaedre, AE sera costé de l'octaedre inscrit en la sphere du diametre AB.

Et pour autant que par les mesmes corol. des 8. & 20. prop. 6. le quarré de AB est au quarré de AF, comme AB à AD, & que par la construction

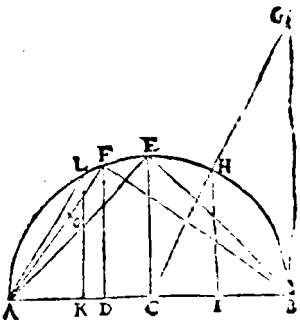
AB est triple de AD ; le quarré de AB sera triple du quarré de AF. Parquoy veu que par la 15. prop. 13. le quarré du diametre de la sphere est triple du quarré du costé du cube, AF sera le costé du cube inscrit en la sphere du diametre AB.

Et d'autant que AF est costé du cube, soit iceluy couppé en la moyenne & extreme raison au poinct O, duquel le plus grand segment soit AO : iceluy segment (par le corol. de la 17. prop. 13.) sera le costé du dodecaedre inscrit en la mesme sphere que le cube, qui est celle là-mesme qui a pour diametre AB.



Quant au costé de l'Icosaedre, soit leuee la perpendiculaire EG egale à AB : & apres auoir mené la ligne CG couppant la circonference du demy cercle en H, d'iceluy poinct soit menee HI perpendic. à AB par la 12. prop. 1. Or BG estant egale à AB, elle sera double de BC : & partant par la 4. prop. 6. HI sera double de IC : (car les triangles sont equiangles, pource qu'ayans l'angle C commun, & ceux des poincts B & I droicts : le tiers G sera egal au tiers H par la 32. prop. 1.) & par le scholie de la 4. prop. 2. le quarré de HI sera quadruple du quarré de IC : & partant le quarré de HC (ou de son egale AC) qui par la 47. prop. 1. est egal à tous les deux, sera quintuple du quarré de CI. Mais d'autant que AD est le tiers du diametre AB, & AC sa moitié, DC sera le demy tiers : & partant AC sera triple de DC, & son quarré vaudra neuf fois le quarré de DC, par la 20. prop. 6. Or iceluy quarré de AC n'est que quintuple du quarré de CI : & partant la ligne CI sera plus grande que DC. Soit donc prise CK egale à CI, & apres auoir leué la perpendiculaire KL, soit menee la ligne AL. Puis

donc que le quarré de AC eſt quintuple du quarré de CI, par la 15. prop. 5. le quarré de AB, (la double de AC) ſera quintuple du quarré de Ik (la double de IC.) Or par le corol. de la 16. prop. 13. le quarré du diametre de la ſphere circonſcrite à l'Icoſaedre eſt quintuple au quarré du demy diametre du cercle circonſcriuant 5 coſtez de l'Icoſaedre: donc Ik ſera ſemidia. c'eſt à dire coſté de l'hexagone d'iceluy cercle, lequel coſté de l'hexagone auec deux fois le coſté du decagone inſcrit dans le meſme cercle, eſt egal au diametre de la ſphere AB, par le corol. de la meſme 16. prop. 13. Il faut donc que AK & IB lignes egales, ſoient deux coſtez du decagone inſcrit dans le meſme cercle, dans lequel KI eſt le coſté de l'hexagone. Mais KI & KL ſont egales: (car kL eſt egale à IH, pour eſtre en meſme diſtance du centre C, laquelle eſtant double de CI ſera egale à KI.) Partant kL ſera coſté de l'hexagone, & AK du decagone: & par la 47. prop. 1. & 10. prop. 13. AL ſera le coſté du pentagone inſcrit au meſme cercle. Donc il ſera auſſi le coſté de l'Icoſaedre, par la 16. prop. 13. Nous auons donc trouué les coſtez des 5 figures regulieres inſcriptibles en vne meſme ſphere.



Maintenant, pour le regard de la comparaiſon d'iceux coſtez trouuez. D'autant qu'il a eſté de-

monſtré que le quarré du diametre de la ſphere eſt ſeſquialtere au quarré du coſté de la pyramide: mais double de celuy du coſté de l'octaedre, & triple du quarré du coſté du cube: il eſt euident que le quarré du diametre de la ſphere eſtant 6, celuy du coſté du tetraedre ſera 4; celuy du coſté de l'octaedre 3, & celuy du coſté du cube 2. Partant le quarré du coſté de la pyramide eſt ſeſquitierce au quarré de l'octaedre: mais double de celuy du coſté du cube. Item le quarré du coſté de l'octaedre eſt ſeſquialtere à celuy du coſté du cube. Parquoy les quarrez des coſtez d'icelles trois figures, & celuy du diametre de la ſphere, ſont entr'eux comme nombre à nombre: & partant par la 6. prop. 10. iceluy diametre de la ſphere, & les coſtez d'icelles trois figures ſont lignes commenſurables & rationeles, pource que le diametre eſt poſé rationel. Mais les ſuſdits quarrez ne ſont entr'eux comme nombre quarré à nombre quarré, ainſi qu'il appert par le corol. de la 24. prop. 8. Donc icelles lignes (ſçauoir le diametre de la ſphere, le coſté de la pyramide, le coſté de l'octaedre, & celuy du cube,) ſont incommenſurables en longitude par la 9. p. 10. & partant elles ſont rationeles commenſurables en puiſſance ſeulement.

Et quant aux coſtez de l'icoſaedre, & dodecaedre: pource qu'ils ſont lignes irrationeles, il eſt euident qu'ils ſont incommenſurables, tant entr'eux, qu'au diametre de la ſphere, & aux coſtez des autres figures.

Or leſquels d'iceux coſtez ſont les plus grands, nous le rendrons manifeſte ainſi: d'autant qu'il a eſté demonſtré cy-deſſus que le quarré de AB eſt triple du quarré de AF: mais quintuple du quarré

de kI, c'eſt à dire de KL ſon egale, trois quartez de AF ſeront egaux à 5 quarrez de kL. Et puis que AF eſt couppé en la moyenne & extreme raiſon en O, & AO eſt le plus grand ſegment, il eſt euident par la 1. prop. 6. que le rectangle compris de AF, AO ſera plus grand que le rectangle de AF, OF: & partant iceux deux rectangles enſemble, ſeront plus grands que le double du rectangle de AF, OF. Mais à iceux deux rectangles enſemble, eſt egal le quarré de AF, par la 2. p. 2. & au double du rectangle de AF, OF, eſt egal le double du quarré de AO: (car par la 17. p. 6. le ſimple rectangle de AF, OF eſt egal au ſimple quarré de AO.) Donc auſſi le quarré de AF ſera plus grand que deux fois le quarré de AO: & par conſequent trois quarrez de AF, ou cinq quarrez de kL leurs egaux, ſeront auſſi plus grands que 6 quarrez de AO. Parquoy vn ſeul quarré de kL ſera plus grand qu'vn ſeul quarré de AO: & par conſequent la ligne KL ſera plus grande que AO: Partant AL, qui eſt plus grande qu'icelle kL, ſera beaucoup plus grande que la meſme AO coſté du dodecaedre. Nous auons donc fait ce qui eſtoit propoſé.

SCHOLIE.

Or outre les cinq figures ſolides cy-deſſus declarees, n'en peut pas trouuer d'autres compriſes de ſuperficies planes, equiangles, & equilaterales. Car de deux triangles, ou de deux autres ſuperficies planes, on ne comprendra aucun ſolide, ne pouuant iceux conſtituer vn angle ſolide. De trois triangles equilateraux, eſt conſtitué l'angle de la pyramide: de quatre, l'angle de l'octaedre: de cinq, l'angle de l'icoſaedre: de ſix triangles equilateraux on ne conſtituera aucun angle ſolide: car iceux ſont egaux à quatre angles droicts, & tous les angles plans d'vn angle ſolide, doiuent

eſtre plus petits que quatre angles droicts par la 21. pr. 11. Par meſme raiſon on ne pourra conſtituer vn angle ſolide de plus de ſix angles plans. De trois angles droicts eſt compoſé l'angle ſolide du cube : de quatre angles droicts on ne fera aucun angle ſolide : car ce ſeroit touſiours contreuenir à la 21. prop. 11. L'angle ſolide du dodecaedre eſt compris de trois pentagones equiangles : De quatre pentagones il ſera impoßible, eſtans iceux plus grans que quatre droicts, puis que chacun vaut les ſix quints d'vn droict par le corol. de la 11. prop. 4. Et de pas vn autre polygone equiangle, on ne pourra conſtituer aucun angle ſolide, d'autant qu'il s'enſuiuroit touſiours la meſme abſurdité. Partant il eſt euident qu'outre les cinq figures regulieres cy-deſſus declarees, on n'en trouuera point d'autres equilateres & equiangles.

Quant à l'application des nombres aux lignes de la demonſtration cy-deſſus, le diametre AB eſtant 6, AC ſera 3, AD 2, & DC 1, DB 4: Mais DF ſera √8, BF coſté de la pyramide √24, AE coſté de l'octaedre √18, AF coſté du cube √12, AO coſté du dodecaedre √15—√3, CG √45, CI ou Ck $\sqrt{1\frac{4}{5}}$, HI ou Ik ou KL $\sqrt{7\frac{1}{5}}$, IB ou AK 3—$\sqrt{1\frac{4}{5}}$, & partant AL coſté de l'Icoſaedre ſera $\sqrt{(18-\sqrt{64\frac{4}{5}})}$.

Reſte à remarquer icy certaines reigles colligées des choſes demonſtrees en ce 13. liure, au moyen deſquelles il ſera fort aiſé de cognoiſtre les coſtez des cinq corps reguliers inſcriptibles en vne ſphere, dont le diametre ſera cogneu : Et au contraire eſtant cogneu le coſté de quelconque deſdits cinq corps, cognoiſtre le diamette de la ſphere, & conſequemment auſſi les coſtez des autres corps.

1. Le quarré du diametre de la ſphere eſt au quarré du coſté du tetraedre, comme 3 à 2 ; de l'octaedre comme 2 à 1 ; & du cube comme 3 à 1.

2. Le quarré du coſté du tetraedre eſt au quarré

du costé de l'octaedre comme 4 à 3, & du cube comme 2 à 1.

3. Le quarré du costé de l'octaedre est au quarré du costé du cube comme 3 à 2.

4. Mais le diametre de la sphere estant rationel, le quarré du costé de l'Icosaedre est residu *quatriesme*, duquel le grand nom est la moitié du quarré dudit diametre, *(ou le double du quarré du semidiam.)* & le moindre nom est $\sqrt{\frac{2}{10}}$ du quarré dudit diametre: *(ou $\sqrt{\frac{4}{5}}$ du quarré du semidiam.)*

5. Et le costé du tetraedre est residu sixiesme, duquel le grand nom est $\sqrt{\frac{5}{3}}$ du semidiam. *(ou $\sqrt{\frac{5}{12}}$ du diam.)* & le petit nom est $\sqrt{\frac{1}{3}}$ dudit semidiam. *(ou $\sqrt{\frac{1}{12}}$ du diam. c'est à dire $\sqrt{\frac{1}{3}}$ du grand nom).*

Lesquelles Reigles seront d'autant plus intelligibles par les exemples, ou propositions suiuantes.

1 Qu'il faille cognoistre les costez des cinq corps inscriptibles en vne sphere, dont le diametre est 8.

Premierement, ie quarre ledit diametre 8, & viennent 64, dont ie prends les $\frac{2}{3}$, & viennent $42\frac{2}{3}$ pour le quarré du costé du tetraedre ou pyramide equilaterale: & partant iceluy costé est $\sqrt{42\frac{2}{3}}$.

Secondement, du mesme quarré 64, ie prends la moitié, pour auoir le costé de l'octaedre: & partant iceluy costé est $\sqrt{32}$.

Tiercement, du mesme quarré 64, ie prends le tiers, pour le quarré du costé du cube, qui partant est $\sqrt{21\frac{1}{3}}$.

Quartement, du mesme quarré 64, ie prends la moitié 32 pour le grand nom du residu de l'Icosaedre; puis ie quarre ledit quarré 64, & viennent 4096, que ie diuise par 20, & preposant le signe $\sqrt{}$ au quotient, il sera $\sqrt{204\frac{4}{5}}$ qui est le petit nom dudit residu: Parquoy le quarré du costé de l'Icosaedre sera $32-\sqrt{204\frac{4}{5}}$, & partant iceluy costé est $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$.

Finalement,

Finalement, ie diuiſe le meſme quarré 64 par 12, & viennent $5\frac{1}{3}$, *dont le quintuple eſt* $26\frac{2}{3}$, *à chacun deſquels deux nombres ie prepoſe le ſigne* $\surd$ *pour auoir les deux noms du coſté du dodecaedre, qui partant ſera* $\surd 26\frac{2}{3} - \surd 5\frac{1}{3}$.

2. Le coſté du dodecaedre inſcriptible en vne ſphere eſtant $\surd 20 - 2$: cognoiſtre tant le diametre d'icelle ſphere, que les coſtez des autres corps reguliers.

Premierement, ie multiplie le moindre nom 2 par $\surd 3$, *& viennent* $\surd 12$, *pour le ſemidiametre de la ſphere: & partant tout le diametre ſera* $\surd 48$.

Secondement, ie prends les $\frac{2}{3}$ *du quarré dudit diametre trouué, & viennent 32 pour le quarré du coſté de la pyramide, qui partant eſt* $\surd 32$.

Tiercement, du meſme quarré 48, ie prends la moitié, qui eſt le quarré du coſté de l'octaedre, qui partant eſt $\surd 24$.

Quartement, du meſme quarré 48, ie prends le tiers pour auoir le quarré du coſté du cube, & partant iceluy coſté ſera 4.

Finallement, la moitié du meſme quarré 48, ſera le grand nom du quarré du coſté de l'Icoſaedre, & pour auoir le petit nom, ie quarre ledit quarré 48, & viennent 2304, que ie diuiſe par 20, & prepoſant le ſigne radical $\surd$ *au quotient, il ſera* $\surd 115\frac{1}{5}$. *Parquoy le quarré du coſté de l'Icoſaedre requis ſera* $24 - \surd 115\frac{1}{5}$: *& partant iceluy coſté ſera* $\surd(24 - \surd 115\frac{1}{5})$.

Or quant aux perpendiculaires, ou hauteurs d'iceux corps, enſemble leurs ſuperficies, & contenus ſolides, nous en auons traicté amplement aux annotations faites ſur la Geometrie d'Errard, où les curieux & amateurs de telles ſuputations pourront auoir recours, s'ils ne ſe contentent de ce que nous en dirons au liure ſuiuant.

Fin du trezieſme Element.

ELEMENT QVATORZIESME,

Qu'aucuns attribuent à Hypsicle Alexandrin.

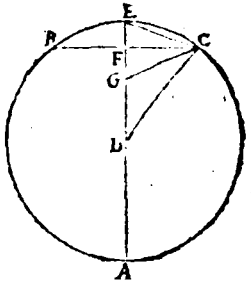
THEOR. 1. PROP. I.

LA ligne droicte perpendiculaire menee du centre au costé du pentagone inscrit au cercle, est la moitié des deux costez de l'hexagone, & decagone ensemble, inscrits au mesme cercle.

Soit le cercle ABC, dont le centre est D, & BC le costé du pentagone inscrit en iceluy cercle; mais du centre D soit menee la ligne DF, perpendicul. à iceluy costé BC, & icelle estant prolongee de part & d'autre iusques en A & E pour parfaire le diametre AE, elle couppera en deux egalement, tant la ligne droicte BC, que l'arc BEC, ainsi qu'il est euident par les 3 & 28. prop. 3. Parquoy estant tiree la

ligne droicte EC, elle sera le costé du decagone, & DE le costé de l'hexagone. Ie dis que la perpendiculaire DF est la moitié des deux costez ensemble EC & DE.

Car apres auoir pris FG egale à FE, soit menee la ligne GC. Puis que l'arc BEC est la cinquiesme partie de la circonference du cercle, EC sa moitié sera la cinquiesme partie de la demy circonference ACE: Et partant l'arc AC sera quadruple de CE, & par la 33. prop. 6. l'angle CDA sera quadruple de CDE au centre, & double de DEC à la circonference par la 20. prop. 3. lequel par ce moyen sera double de CDE: mais par la 4. p. 1. la base CE est egale à la base CG: & par la 5. prop. 1. les deux angles sur la base EG seront egaux: donc FGC sera aussi double de GDC: Mais iceluy FGC estant par la 32. prop. 1. egal à tous les deux GDC, GCD opposez interieurement, iceux deux angles sur la base DC seront egaux entr'eux: & par la 6. prop. 1. GC & GD seront egales; & EC à chacune d'icelles. Parquoy les deux GF & FE estans egales, la seule FD, sera egale aux deux FE, EC ensemble: & partant les trois ensemble DF, FE, EC, c'est à dire les deux ensemble DE, EC, seront egales au double de la seule DF: & par consequent icelle DF perpendiculairement tiree du centre sur le costé du pentagone, sera moitié des deux ensemble DE, EC, costez de l'hexagone, & du decagone. Parquoy la



ligne droicte perpendiculaire, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

COROLLAIRE.

Il eſt donc manifeſte que la perpendiculaire menee du centre au coſté du pentagone eſt egale à la perpendic. tiree dudit centre au coſté du triangle equilateral & à la moitié du coſté du decagone inſcrit au meſme cercle, puis que par le corol. de la 12. prop. 13. ladite perpendiculaire menee au coſté du triangle equilateral eſt moitié du coſté de l'hexagone.

SCHOLIE.

Le ſemidiametre DC eſtant 4, nous auons trouué au Scholie de la 10. pr. 13. que le coſté du pentagone BC ſera $\sqrt{(40-\sqrt{320})}$, *& le coſté du decagone EC* $\sqrt{20}-2$: *Parquoy le quarré de FC moitié dudit coſté BC ſera* $10-\sqrt{20}$, *qui eſt é du quarré de DC, c'eſt à dire de 16, reſteront* $6+\sqrt{20}$ *pour le quarré de DF; & partant icelle DF eſt* $\sqrt{(6+\sqrt{20})}$. *Mais le ſemidiam. DC, qui eſt 4, eſtant adiouſté auec le coſté du decagone EC* $\sqrt{20}-2$, *fait* $\sqrt{20}+2$, *dont la moitié* $\sqrt{5}+1$ *eſt egal à* $\sqrt{(6+\sqrt{20})}$: *car le quarré de l'vn & l'autre eſt* $6+\sqrt{20}$: *partant appert ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 2. PROP. II.

S'il y a deux lignes droictes couppees en la moyenne & extreme raiſon; elles ſeront ſemblablement couppees.

Soient deux lignes droictes AB & DE couppees en la moyenne & extreme raiſon aux poincts G & H: & leurs plus grands ſegmens ſoient AG & DH. Ie dis qu'icelles lignes ſont ſemblablement couppees: c'eſt à dire que comme AB eſt à DE, ainſi

AG à DH, & GB à HE: Item comme AG à GB, ainsi DH à HE, &c.

Car par la 17. proposition du 6. le rectangle de AB, & GB, est egal au quarré de AG: & le rectangle de DE & HE egal au quarré de DH: & partant comme le rectangle de AB, GB sera au quarré de AG, ainsi le rectangle de DE, HE sera au quarré de DH: (y ayant raison d'egalité de part & d'autre) & par le 3. theor. du Scholie de la 22. p. 5. quatre fois le rectangle de AB & GB sera au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE au quarré de DH: & en composant (apres auoir adiousté directement BC egale à BG; & EF egale à EH) quatre fois le rectangle de AB & GB auec le quarré de AG (ou par la 8. prop. 2. le seul quarré de AC) est au quarré de AG, comme quatre fois le rectangle de DE & HE, auec le quarré de DH, (ou le seul quarré de DF) est au quarré de DH. Parquoy par la 22. prop. 6. comme AC à AG, ainsi DF à DH: Et en composant, comme la composee de AC, AG, c'est à dire la double de AB, est à AG, ainsi la composee de DF, DH, c'est à dire la double de DE, est à DH: & en permutant, comme la double de AB est à la double de DE, ainsi AG à DH: Et par la 15. pr. 5. comme la double de AB est à la double de DE, ainsi AB à DE. Donc comme AB sera à DE, ainsi AG à DH: & partant par la 19. prop. 5. ainsi sera aussi le reste GB au reste HE. Parquoy comme AG à DH, ainsi sera GB à HE, puis que l'vne & l'autre raison est comme AB à DE: & en permutant, comme AG sera à GB, ainsi DH sera à HE: & ainsi selon



toutes les autres manieres d'argumenter és proportions, on demonſtrera toutes lignes & les parties d'icelles, eſtre proportioneles entr'elles. Parquoy s'il y a deux lignes droictes, &c. Ce qu'il falloit demonſtrer.

SCHOLIE.

La ligne droicte AB eſtant 4, le grand ſegment AG ſera √20—2, & le petit GB 6—√20. Mais DE eſtant 2, le grand ſegment DH ſera √5—1, & le petit HE 3—√5. Or le produit de AB 4, en DH √5—1 eſt √80—4, & le produit de DE 2 en AG √20—2 eſt auſſi √80—4: & partant comme AB à DE, ainſi AG à DH. Le produit de AB 4 en HE 3—√5 eſt 12—√80: & le produit de DE 2 en GB 6—√20 eſt auſſi 12—√80: partant comme AB à DE, ainſi GB à HE. Le produit de AG √20—2 en HE 3—√5 eſt √320—16, & le produit de GB 6—√20 en DH √5—1 eſt pareillement √320—16: Parquoy eſt manifeſte ce qui eſtoit propoſé.

Or de cecy appert qu'eſtant cogneue vne ligne droicte, il eſt fort aiſé de cognoiſtre combien ſeront les ſegmens d'icelle couppee en la moyenne & extreme raiſon, par le moyen de quelque autre ligne dont les ſegmens ſeront cogneus: Et pour tant plus enfaciliter la pratique nous auons expreſſement adapté de petits nombres à la ligne DE: tellement que ſi on veut, par exemple, cognoiſtre les ſegmens d'vne autre ligne de 10 pieds, il faut dire par regle de trois, Si 2 donnent √5—1, que donneront 10? & faiſant la regle on trouuera √125—5 pour le grand ſegment, qui oſté de la toute 10, reſteront 15—√125 pour le moindre ſegment.

Auſſi l'vn ou l'autre des ſegmens eſtant cogneu, on cognoiſtra par la meſme methode tant l'autre ſegment que la toute: Parquoy eſtant cogneu le coſté d'vn pentagone on peut cognoiſtre le diametre du cercle circonſcrivant iceluy: car puis que par la 8. p. 13. la ſubtendante de l'angle d'vn

pentagone estant couppee en la moyenne & extreme raison le grand segment est egal au costé du pentagone, on cognoistra le petit segment ou reste de ladite subtendante, ainsi qu'il est dit cy-dessus; & le quarré de la moitié d'icelle subtendante estant osté du quarré du costé du pentagone, restera le quarré d'vne ligne par laquelle estant diuisé le quarré de la moitié de la subtendante on aura le diametre du cercle, ainsi qu'il appert des choses demõstrees à la 11. p. 13. Lequel diametre on obtiendra encore par la regle de proportion; dautant que nous auons demonstré sur le 8. ch. du 2. liu. de la Geometrie d'Errard que la raison du semidiametre du cercle au costé du pentagone inscrit en iceluy est comme de 2 à √(10—√20): parquoy voulant cognoistre le diametre d'vn cercle dont le costé du pentagone est √(40—√320), ie diray, si √(10—√20) donnent 2, que donneront √(40—√320)? & ayant fait la regle ainsi qu'il appartient, le 4. nombre proport. sera 4, dont le double 8 est le diametre requis.

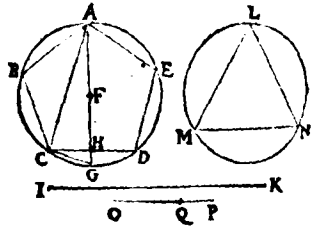
Le mesme se doit entendre de tout autre polygone dont la raison du semidiametre au costé sera cogneue: Et pour ce subiet nous remarquerons icy que le semidiametre du cercle estant 2, le costé du triangle inscrit en iceluy sera √12: celuy du quarré √8: celuy du pentagone √(10—√20): celuy de l'octogone √(8—√32): celuy du decagone √5—1: & celuy du dodecagone √6—√2.

THEOR. 3. PROP. III.

Vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icosaedre inscrits en vne mesme sphere.

Auparauant que d'expliquer ceſte prop. il conuient demonſtrer que le quarré du coſté du pentagone auec le quarré de la ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy, eſt quintuple du quarré du demy diametre du cercle dans lequel eſt inſcrit iceluy pentagone.

Soit vn cercle ABCDE, le coſté du pentagone inſcrit en iceluy cercle CD, la ligne qui ſouſtient vn angle d'iceluy pentagone CA, le demy diametre FG; lequel coupe en deux egalement, tant l'arc CGD que le coſté CD, par le corol. de la 10. prop. 13. Ie dis que les deux quarrez de CA & CD ſont enſemble quintuples du quarré de FG.



Car ſi on mene CG, ce ſera le coſté du decagone: & par le ſcholie de la 4. prop. 2. le quarré de AG, ſera quadruple du quarré du demy diametre FG; & par conſequent les deux de AC, CG, qui par la 47. prop. 1. ſont egaux au quarré de AG, ſeront auſſi quadruple d'iceluy quarré de FG. Parquoy les trois de AC, CG, & GF, ſeront enſemble quintuple du ſeul de GF: Mais les deux de CG & GF, coſtez de l'hexagone & decagone ſont enſemble egaux au quarré de CD coſté du pentagone, par la 10. pr. 13. partant les deux quarrez de AC & CD ſont quintuples du quarré de GF. Ce qui eſtoit propoſé.

Pour la propoſition. Soit IK le diametre de la ſphere comprenant le dodecaedre & l'Icoſaedre: & d'ice-

luy dodecaedre ſoit vn pentagone ABCDE, & de l'Icoſaedre ſoit le triangle equilateral LMN: ie dis qu'vn meſme cercle circonſcrit le pentagone ABCDE, & le triangle LMN: c'eſt à dire que les cercles ABCDE, LMN, qui les circonſcriuent ſont egaux.

Car eſtant tiree AC ſubtendante de l'angle du pentagone B, ce ſera le coſté du cube inſcrit en la meſme ſphere, par le corol. de la 17. prop. 13. & ſoit expoſee la ligne droicte OP, telle que le quarré de IK diametre de la ſphere, ſoit quintuple du quarré d'icelle OP: laquelle OP ſera egale au demy diametre du cercle, dans lequel on conſtruit l'Icoſaedre par le corol. de la 16. prop. 13. ſoit icelle OP couppee en la moyenne & extreme raiſon en Q; & le plus grand ſegment OQ ſera coſté du decagone inſcrit au meſme cercle, dont OP eſt le coſté de l'hexagone ou ſemidiametre, par le corol. de la 9. prop. 13. Mais par la 7. propoſit. 13. lors que CA eſt diuiſee en la moyenne & extreme raiſon, ſon plus grand ſegment eſt AB: Donc par la 2. propoſit. 14. comme la toute AC ſera à la toute OP, ainſi le plus grand ſegment AB ſera au plus grand ſegment OQ: partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AC ſera au quarré de OP, ainſi le quarré de AB ſera au quarré OQ; & par la 4. prop. 5. comme le triple du quarré de AC eſt au quintuple du quarré de OP, ainſi le triple du quarré de AB eſt au quintuple du quarré de OQ. Mais le triple du quarré de AC eſt egal au quintuple du quarré de OP: (pource que le quarré de IK diametre de la ſphere, eſt egal, tant au triple du quarré de AC coſté du cube par la 15. pr. 13. que au quintuple du quarré de OP par l'hypotheſe.) Donc auſſi le triple du quarré de AB ſera egal au

quintuple du quarré de OQ. Or par le coroll. de la 16. prop. 13. ML costé du triangle de l'Icosaedre, est egal au costé du pentagone inscrit dans le cercle, dont OP est demi-diametre: & partant puis que par la 10. propos. 13. le quatré d'iceluy costé est egal aux deux quarrez de OP, & OQ, costez de l'hexagone & du decagone; cinq quarrez de ML, seront egaux à cinq quarrez de OP, & à cinq de OQ: ou à trois de BA, & à trois de AC. Parquoy les deux quarrez de BA, & AC, estans quintuples du quarré du demi-diametre FA, (comme nous auons demonstré au commencement de ceste proposition) trois quarrez de AB, & AC seront egaux à quinze quarrez du demy diametre FA. Mais cinq quarrez de ML, costé du triangle equilateral, sont aussi egaux à quinze quarrez du demy diametre du cercle LMN: (car chacun quarré de ML est triple du quarré du demy diametre, par la 12. proposit. du 13.) Donc les trois de BA & AC, estans egaux aux cinq de ML, les quinze du demy diametre FA, seront egaux aux quinze du demy diametre du cercle LMN: Partant vn quarré d'iceux sera egal à vn quarré, & le demi-diametre au demi-diametre, & par consequent les cercles A B C D E, L M N seront egaux. Donc vn mesme cercle comprend le pentagone du dodecaedre, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

SCHOLIE.

Il appert par ce que nous auons dit à la fin du liure prec. que le diametre de la sphere IK estant 8, *AB costé du dodecaedre sera* $\sqrt{26\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$, *& LM costé de l'icosaedre* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$. *Mais par ce qui a esté enseigné au Scholie prec. le semidiam. du cercle circonscriuant vn pentagone dont le costé est* $\sqrt{26\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$ *sera trouué de* $\sqrt{(10\frac{1}{3}-\sqrt{22\frac{14}{47}})}$.

& celuy du cercle circonſcriuant vn triangle equilateral dont le coſté eſt $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$ *ſera auſsi trouué de* $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{14}{375}})}$, *ſoit qu'on procede par la meſme methode du Scholie prec. ou bien qu'on prenne le tiers du quarré dudit coſté: car par la 12. pr. 13. iceluy tiers ſera le quarré du ſemediam. requis: Parquoy appert ce qui eſtoit propoſé.*

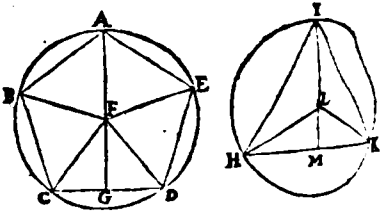
THEOR. 4. PROP. IIII.

Si du centre du cercle circonſcriuant le pentagone du dodecaedre, on meine vne ligne droicte perpendiculaire ſur vn coſté d'iceluy pentagone; trente fois le rectangle compris de la perpendiculaire, & du coſté du pentagone, eſt egal à la ſuperficie du dodecadre.

Soit le cercle ABCDE circonſcriuant vn pentagone du dodecaedre, & le centre d'iceluy cercle ſoit F, duquel ſoit tiree FG perpendiculairement ſur le coſté CD. Ie dis que trente fois le rectangle compris de FG & CD, eſt egal à la ſuperficie du dodecaedre.

Car ayant tiré les lignes FA, FB, FC, FD, FE: il eſt euident par la 41. prop. 1. que le rectangle compris de FG, CD, eſt double du triangle CFD. Or en la ſuperficie du dodecaedre, il y a douze pentagones egaux, & chaſque pentagone a cinq pareils triangles que CFD, qui ſont en tout ſoixante triangles, deſquels ſoixante rectangles, ſeroient le double: Donc trente rectangles de FG & CD, leur ſeront egaux.

Nous demonſtrerons ſemblablement, que ſi vn triangle equilateral, comme HIK, eſt inſcrit en vn cercle, du centre duquel L, on tire ſur le coſté HK la perpendiculaire LM: trente fois le rectangle de LM & HK, ſeront egaux à la ſuperficie de l'Icoſaedre.



Car icelle ſuperficie contient vingt triangles equilateraux ſemblables à HIK; & chacun d'iceux ſe diuiſe en trois autres triangles egaux entr'eux & ſemblables, & egaux à HLK, qui ſont en tout ſoixante triangles comme HLK: mais le rectangle de la perpendiculaire LM & du coſté HK, eſt double du triangle HLK, par la 41. p. 1. Et par conſequent ſoixante rectangles ſeroient doubles de ſoixante triangles: Donc trente rectangles de LM & HK ſeront egaux à la ſuperficie totale de l'icoſaedre.

COROLLAIRE.

De cecy reſulte, par la 15. pr. 5. que comme vn ſeul rectangle de FG & CD, eſt à vn ſeul rectangle de LM & HK, ainſi la ſuperficie du dodecaedre à la ſuperficie de l'icoſaedre.

SCHOLIE.

Nous auons trouué cy-deuant que le diametre de la ſphere eſtant 8, CD coſté du dodecaedre ſera $\sqrt{26\frac{2}{3}-\sqrt{\ldots}}$ coſté de l'Icoſaedre $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$ & le ſemidiam. CL ou LH $\sqrt{(10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}})}$: Parquoy le quarré de CG ſera $8-\sqrt{35\frac{5}{9}}$, qui oſté de $10\frac{2}{3}-\sqrt{22\frac{34}{45}}$ quarré du ſemidiam. CF, reſteront $2\frac{2}{3}+\sqrt{1\frac{10}{45}}$ pour le quarré de la perpendic. FG,

qui partant eſt $\sqrt{(2\frac{2}{5}+\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, & le produit d'icelle perpendiculaire par le coſté CD ſera $\sqrt{(56\frac{2}{9}-\sqrt{647\frac{109}{405}})}$, lequel produit multiplié par 30, donne $\sqrt{(51200-\sqrt{524288000})}$ pour la ſuperficie de tout le dodecaedre. Mais le quarré de HM ſera $8-\sqrt{12\frac{4}{5}}$, qui oſté du quarré de LH, reſteront $2\frac{2}{5}-\sqrt{1\frac{19}{45}}$ pour le quarré de la perpendic. LM, qui partant eſt $\sqrt{(2\frac{2}{5}-\sqrt{1\frac{19}{45}})}$, le produit de laquelle perpendicul. par le coſté HK ſera $\sqrt{(10\frac{2}{5}-\sqrt{5825\frac{19}{45}})}$, & trente fois ce produit donne $\sqrt{(92160-\sqrt{4718592000})}$ pour la ſuperficie de l'Icoſaedre.

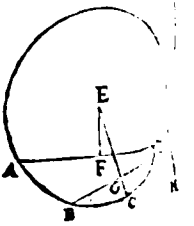
Or en la meſme maniere que deſſus on peut auſſi trouuer la ſuperficie des trois autres corps regulieres, c'eſt aſſauoir du tetraedre, de l'octaedre & du cube: Car ſi du centre du cercle qui circonſcrit le triangle du tetraedre ou de l'octaedre, ou le quarré du cube, eſt tiree vne perpendic. à vn coſté d'iceux; au tetraedre ſix fois le rectangle compris ſous icelle perpendic. & le coſté ſera egal à la ſuperficie dudit tetraedre: Mais à l'octaedre, & au cube, douze fois ledit rectangle compris ſous la perpendic. & le coſté ſera egal à la ſuperficie de l'octaedre, & auſſi egal à la ſuperficie du cube. Car ſi du centre du cercle circonſcriuant le triangle du tetraedre, ou de l'octaedre, on tire des lignes droictes à chaque angle dudit triangle ainſi que deſſus, on le diuiſera en trois triangles ſemblables & egaux entr'eux, & par conſequent il y aura 12 tels triangles en toute la ſuperficie dudit tetraedre, & 24 en celle de l'octaedre: Mais le rectangle compris ſous la baſe & la perpendic. eſt double de chacun deſdits triangles par la 41. p. 1. & partant ledit rectangle pris ſix fois ſera egal à la ſuperficie dudit tetraedre; & pris douze fois, il ſera egal à la ſuperficie dudit octaedre. Mais ayant mené du centre du cercle circonſcriuant le quarré du cube des lignes droictes à chaſque angle d'iceluy quarré il ſera diuiſé en quatre triangles egaux & ſemblables; & par conſequent il y en aura 24 en toute la ſuperficie du cube, leſquels ſont

egaux à 12 rectangles compris soubs le costé & la perpendic. ainsi que nous auons demonstré plus au long sur le 4. chap. du 3. liure de la Geometrie d'Errard.

THEOR. 5. PROP. V.

Comme la superficie du dodecaedre, *est* à la superficie de l'icosaedre ; ainsi le costé du cube est au costé de l'icosaedre, inscrits en vne mesme sphere.

Au cercle ABCD, duquel le centre est E, soit pris AD, costé du triangle equilateral de l'icosaedre, & BD costé du pentagone du dodecaedre inscrits en vne mesme sphere ; (ce qui est possible, puis que par la 3. p. 14. vn mesme cercle comprend le triangle de l'icosaedre, & le pentagone du dodecaedre.) Et du centre E soient tirees sur AD, BD les perpendiculaires EF, EG : & icelle EG estant prolongee iusques à la circonference, elle coupera l'arc BCD en deux egalement en C : & estant tiree la ligne droicte C D, ce sera le costé du decagone : & finalement soit exposée la ligne droicte H costé du cube inscrit en la mesme sphere. Ie dis que la superficie du dodecaedre, est à la superficie de l'icosaedre, comme H costé du cube est à AD costé de l'icosaedre.



Car d'autant que EC est costé de l'hexagone, & CD costé du decagone inscrit en vn mesme cercle,

la composée d'iceux costez, sera couppée en la moyenne & extreme raison, dont le plus grand segment sera EC par la 9. prop. 13. & par la 1. prop. 14. la moitié d'icelle composée est EG; & par le corol. de la 12. p. 13. la moitié d'iceluy plus grand segment EC est EF. Et partant, puis que par la 15. p. 5. les toutes sont aux toutes, comme les moitiez aux moitiez: il est euident que la moitié EG estant couppee en la moyenne & extreme raison, la moitié EF sera le plus grand segment: (car la moitié du plus grand segment, & la moitié du plus petit faict la moitié de la toute.) Mais par le corol. de la 17. prop. 13. H costé du cube estant aussi couppé en la moyenne & extreme raison, son plus grand segment sera BD costé du dodecaedre. Donc par la 2. prop. 14. comme la toute H, sera à BD son plus grand segment, ainsi la toute EG sera à EF son plus grand segment: Et partant par la 16. prop. 6. le rectangle compris des extremes H, EF, sera egal au rectangle des moyennes BD, EG. Et pource que par la 1. pr. 6. comme H est à AD, ainsi le rectangle de H, EF, est au rectangle de AD, EF: (car ces deux rectangles ont vne mesme hauteur EF.) Aussi comme H sera à AD, ainsi le rectangle de BD, EG (lequel est egal à celuy de H, EF) est au mesme rectangle compris soubs AD, EF. Parquoy, puis que par le Corol. de la preced. comme le rectangle compris sous BD, EG est au rectangle compris de AD, EF, ainsi la superficie du dodecaedre est à la superficie de l'icosaedre: pareillement comme H costé du cube sera à AD costé de l'icosaedre ainsi sera la superficie du dodecaedre à la superficie de l'icosaedre. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Nous auons trouué cy-deuant que AD est $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$,

$BD\ 26\frac{2}{3} - \sqrt{5}\frac{1}{3}$, $EC\ \sqrt{(10\frac{2}{3} - \sqrt{22}\frac{14}{45})}$, $EF\ \sqrt{(2\frac{2}{3} - \sqrt{1}\frac{19}{45})}$, $EG\ \sqrt{(2\frac{2}{3} + \sqrt{1}\frac{19}{45})}$, & $H\sqrt{21}\frac{1}{3}$: & que le rectangle ou produict du coſté BD en la perp. EG eſt $\sqrt{(56\frac{8}{9} - \sqrt{647}\frac{109}{405})}$, celuy du coſté AD en la perpend. $EF\ \sqrt{(102\frac{2}{5} - \sqrt{5825}\frac{19}{45})}$: Mais que la ſuperficie du dodecaedre eſt $\sqrt{(51100 - \sqrt{524288000})}$, & celle de l'icoſaedre $\sqrt{(92160 - \sqrt{4718592000})}$. Or le produict de ceſte ſuperficie-là multipliée par le coſté de l'icoſaedre $AD\sqrt{(32 - 204\frac{4}{5})}$ eſt egal au produict de ceſte ſuperficie-cy multipliée par le coſté du cube $H\sqrt{21}\frac{1}{3}$, car l'vn & l'autre produit eſt $\sqrt{(1966080 - \sqrt{2147483648000})}$: & partãt appert ce qui eſtoit propoſé; & en outre que le rectangle ou produict de H en EF eſt egal à celuy de BD en EG, l'vn & l'autre d'iceux produicts eſtant $\sqrt{(56\frac{8}{9} - \sqrt{647}\frac{109}{405})}$: partant que comme le coſté du cube H eſt au coſté du dodecaedre BD, ainſi la perpendic. EG eſt à la perpendic. EF.

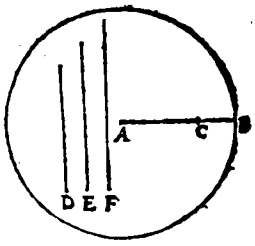
Appert encore que EF perpendic. de l'icoſaedre eſt moitié du ſemidiam. EC, le quarré de laquelle perpend. eſt vn reſidu, dont le binome correſpondant eſt le quarré de EG perpend. du dodecaedre; & partant ledit ſemidiam. EC eſtant cogneu on trouuera fort aiſément leſdites perpendiculaires; car prenant la moitié d'icelluy, on aura la perpend. EF, & changeant le ſigne $-$ en $+$ on aura l'autre perpend. EG.

THEOR. 6. PROP. VI.

Si vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon; comme les quarrez de la toute & du plus grand ſegment, ſont aux quarrez de la toute & du plus petit ſegment, ainſi le quarré du

ré du coſté du cube, eſt au quarré du coſté de l'icoſaedre inſcrit en vne meſme ſphere.

Soit le cercle comprenant le triangle de l'icoſaedre, & le pentagone du dodecaedre, duquel le demy diametre AB, ſoit couppé en la moyenne & extreme raiſon en C, dont le plus grand ſegment ſoit AC, qui ſera le coſté du decagone inſcrit dans le meſme cercle par le coroll. de la 9. prop. 13. Item ſoient priſes trois lignes, ſçauoir D coſté du dodecaedre, E coſté de l'icoſaedre, & F coſté du cube inſcriptibles en vne meſme ſphere: Ie dis que le quarré de F eſt au quarré de E, comme les quarrez de AB & AC ſont aux quarrez de AB & CB.



Car D eſtant le coſté du pentagone, & E le coſté du triangle tous deux inſcrits dans le cercle donné; lors que F coſté du cube eſt diuiſé en la moyenne & extreme raiſon, D eſt ſon plus grand ſegment, par le corol. de la 17. prop. 13. Donc E eſtant le coſté du triangle inſcrit au cercle donné, ſon quarré ſera triple du quarré du demy-diametre AB par la 12. prop. 13. & par la 4. prop. 13. les deux quarrez de AB & CB ſont triples du quarré de AC: partant le quarré de E eſt au quarré de AB, cõme les deux quarrez de AB, CB ſont au quarré de AC: Et en permutant, le quarré de E ſera aux deux quarrez de AB,

CB, comme le quarré de AB au quarré de AC. Mais comme le quarré de AB au quarré de AC, ainſi le quarré de F au quarré de D: (car par la 2. prop. 14. comme la toute AB eſt à ſon plus grand ſegment AC, ainſi la toute F à ſon plus grand ſegment D; & partant par la 22. prop. 6. comme le quarré de AB au quarré de AC, ainſi le quarré de F ſera au quarré de D) donc par la 11. prop. 5. comme le quarré de E aux quarrez de AB & CB, ainſi le quarré de F au quarré de D: & en permutant, comme le quarré de E au quarré de F, ainſi les quarrez de AB & CB ſont au quarré de D, coſté du pantagone: lequel quarré par la 10. pr. 13. eſt egal aux deux quarrez de AB & AC coſtez de l'hexagone & decagone inſcrits en vn meſme cercle; & par conſequent le quarré de F coſté du cube, eſt à E coſté de l'Icoſaedre, comme les quarrez de AB & AC, ſont aux quarrez de AB & CB. Si donc vne ligne droicte eſt couppée en la moyenne & extreme raiſon, &c. Ce qu'il falloit prouuer.

SCHOLIE.

Si quelconque ligne droicte AB eſt 2, icelle eſt ainſi couppée en C ſelon la moyenne & extreme raiſon, le grand ſegment AC ſera $\sqrt{5}-1$, *& le petit CB* $3-\sqrt{5}$: *mais puis que F eſt le coſté du cube inſcrit en vne Sphere, iceluy ſoit tel que nous l'auons cy-deuant trouué, ſçauoir eſt* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$, *& E coſté de l'icoſaedre inſcrit en la meſme Sphere ſera auſſi tel que nous l'auons trouué, ſçauoir eſt* $\sqrt{(32-\sqrt{204\frac{4}{5}})}$. *Or le quarré de la toute AB eſt 4, celuy de AC* $6-\sqrt{20}$, *& celuy de CB* $14-\sqrt{180}$: *donc les deux quarrez de AB, AC ſont enſemble* $10-\sqrt{20}$, *& les deux de AB, CB ſont* $18-\sqrt{180}$: *Mais le quarré de F eſt* $21\frac{1}{3}$, *& celuy de E eſt* $32-\sqrt{204\frac{4}{5}}$, *leſquels quatre nombres ſont proportionnaux; car le produict des deux extremes eſt egal au produict des deux moyens, l'vn*

& l'autre produict eſtant 384—√81920 ; *partant appert ce qui eſtoit propoſé.*

THEOR. 7. PROP. VII.

Comme le coſté du cube eſt au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre eſt à l'icoſaedre, inſcrits en vne meſme ſphere.

Ceſte demonſtration eſt facile, les predentes eſtans bien entendues: car puis que par la 3. prop. 14. le pentagone du dodecaedre, & le triangle de l'icoſaedre ſont inſcrits dans vn meſme cercle: il eſt euident qu'iceux triangle & pentagone ſeront equidiſtans du centre de la ſphere. Parquoy ſi on diuiſe le dodecaedre & l'icoſaedre en pyramides, toutes icelles pyramides tant de l'vn que de l'autre ſolide ſeront de meſme hauteur: Et par les 5. & 6. prop. 12. elles ſeront l'vne à l'autre, comme leurs baſes; c'eſt à ſçauoir douze pyramides du dodecaedre à vingt pyramides de l'icoſaedre, comme douze pentagones à vingt triangles: C'eſt à dire que comme la ſuperficie du dodecaedre ſera à la ſuperficie de l'icoſaedre, ainſi tout le dodecaedre ſera à tout l'icoſaedre. Mais par la 5. pr. 14. icelles ſuperficies ſont l'vne à l'autre, comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre: donc par la 11. prop. 5. comme le coſté du cube au coſté de l'icoſaedre, ainſi le dodecaedre à l'icoſaedre. Ce qui eſtoit à prouuer.

SCHOLIE.

Nous auons enſeigné tant en noſtre Geometrie pratique qu'aux annotations faites ſur la Geometrie d'Errard, diuers moyens pour trouuer les ſuperficies & ſoliditez non ſeule-

ment du dodecaedre & icosaedre, mais aussi de tout autre corps, c'est pourquoy nous n'en dirons rien icy, seulement y adiousterons nous (pour d'abondant seruir d'exemple de tout ce que nous auons cy deuant dit) les costez, superficies & soliditez des cinq corps reguliers inscrits en vne sphere, dont le diametre est 6, afin que par le moyen d'icelles on puisse plus promptement trouuer les costez, superficies & soliditez de tout autre corps semblable, dont le costé sera cogneu, suiuant les regles & proportions des figures semblables cy deuant demonstrees, c'est assauoir de la raison doublee des costez, quant aux superficies; & de la triplee pour les soliditez.

Le costé du tetraedre sera $\sqrt{24}$, sa superficie $\sqrt{1728}$, & sa solidité $\sqrt{192}$.

Le costé de l'octaedre sera $\sqrt{18}$, sa superficie $\sqrt{3888}$, & sa solidité 36.

Le costé du cube sera $\sqrt{12}$, sa superficie 72, & sa solidité $\sqrt{1728}$.

Le costé du dodecaedre sera $\sqrt{15}-\sqrt{3}$, sa superficie $\sqrt{(16200-\sqrt{52488000})}$ & sa solidité $\sqrt{(3240+\sqrt{5832000})}$.

Le costé de l'Icosaedre sera $\sqrt{(18-\sqrt{64\frac{4}{5}})}$, sa superficie $\sqrt{(29160-\sqrt{472392000})}$, & sa solidité $\sqrt{(3240+\sqrt{2099520})}$.

Parquoy appert d'abondant ce qui estoit proposé, sçauoir est que comme $\sqrt{12}$ costé du cube est à $\sqrt{(18-\sqrt{64\frac{4}{5}})}$ costé de l'Icosaedre, ainsi $\sqrt{(3240+\sqrt{5832000})}$ solidité du dodecaedre est à $\sqrt{(3240+\sqrt{2099520})}$ solidité de l'Icosaedre: car le produit des deux nombres extremes est egal à celuy des deux du milieu, l'vn & l'autre produit estant $\sqrt{(38880+\sqrt{3023830880})}$.

Appert aussi que la superficie de l'octaedre est sesquialtere à la superficie du tetraedre, c'est à dire comme 3 à 2: car le produit des deux nombres extremes est egal au produit

des deux nombres du milieu, l'vn & l'autre produit eſtant V15552.

Que l'octaedre eſt au triple du tetraedre, comme le coſté de l'octaedre au coſté du tetraedre: car le produit des deux nombres extremes eſt egal au produit des deux moyens, l'vn & l'autre produit eſtant 1104.

Que la ſuperficie du cube eſt egale au double du quarré du diametre de la ſphere, & la ſolidité d'iceluy cube triple de la ſolidité du tetraedre.

Et finalement, que le cube eſt à l'octaedre, comme la ſuperficie du cube eſt à la ſuperficie de l'octaedre: car le produit des deux nombres extremes eſt egal au produit des deux du milieu, l'vn & l'autre produit eſtant 2592: *& auſſi comme le coſté du cube au ſemi-diametre de la ſphere, car le produit des deux nombres extremes eſt* V15552 *auſſi bien que le produit des deux du milieu.*

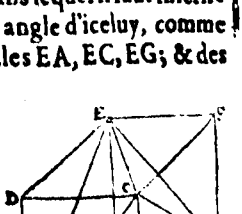
Fin du quatorzieſme Element.

ELEMENT QVINZIESME.

PROBL. 1. PROP. I.

DAns vn cube donné, inſcrire vne pyramide.

Soit le cube donné AF, dans lequel il faut inſcrire vne pyramide. De quelque angle d'iceluy, comme E ſoient menees les diagonales EA, EC, EG; & des extremitez d'icelles A, C, G, ſoient auſſi menees les diagonales AG, AC, GC : Toutes leſquelles diagonales ſont egales entr'elles, parce que les ſix quarrez dans leſquelles elles ſont menees ſont egaux par la definition du cube: Partant les quatre triangles compoſez d'icelles AGE, ACE, ACG, ECG, ſont equilateraux, & egaux entr'eux: & partant la pyramide AEGC conſtituee d'iceux triangles eſt inſcrite au cube donné AF, par la 31. d. 11. Car tous les angles d'icelle pyramide ſont colloquez

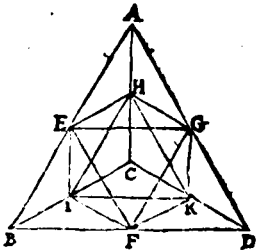


és angles d'iceluy cube AF. Nous auons donc inſcr[it] vne pyramide dans le cube donné. Ce qu'il fall[oit] faire.

PROBL. 2. PROP. II.

Dans vne pyramide donnee, inſcrire vn octaedre.

Soit la pyramide donnee ABCD, dans laquelle il faut inſcrire vn octaedre. Soient couppez tous les coſtez d'icelle pyramide en deux egalemẽt aux poincts E, F, G, H, I, K: Et ſoient menees les lignes EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE. Toutes leſquelles lignes ſont egales entr'elles par la 4. pr. 1. toutes les lignes couppees eſtans egales entr'elles, & les angles des triangles plãs de la pyramide egaux: Et partant le quadrilatere EGKI a les quatre coſtez egaux, & les quatre triangles EHI, IHK, KHG, GHE, cõmençans ſur iceluy quadrilatere, & finiſſans au poinct H, ſont tous equilateraux & egaux entr'eux. Item les quatre autres triangles IFE, EFG, GFK, KFI commençans au deſſous du quadrilatere, & finiſſans au poinct F, ſont auſſi equilateraux & egaux tant entr'eux qu'aux quatre precedans. Parquoy la figure EIKGHF compoſee d'iceux huict triangles eſt vn octaedre, par la 27. def. 11. & par la 31 def. 11. il eſt inſcrit dans la pyramide donnee ABCD, puis que tous les angles d'iceluy touchent tous les coſtez d'icelle pyramide.

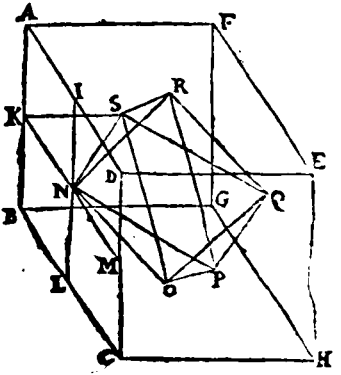


Nous auons donc fait ce qui estoit requis.

PROBL. 3. PROP. III.

Dans vn cube donné, inscrire vn octaedre.

Soit le cube donné AH, dans lequel il faut inscire vn octaedre. Soient couppez en deux egalement les costez du quarré AC, és poincts I, K, L, M, & soient menees les deux lignes IL, KM, s'entre-couppans en N, lequel poinct sera le centre du quarré AC, comme il appert par la demonstration de la 8. p. 4. Par la mesme maniere seront trouuez les centres des 5 autres quarrez du cube, lesquels centres soient O, P, Q, R, S: Donc toutes les lignes droictes tirees d'iceux centres à chaque poinct de la section des costez de leurs quarrez, telles que sont NI, NK, NL, NM, KS, &c. seront egales aux moitiez d'iceux costez, comme il appert par la susdite demonstration de la 8. prop. 4. & par consequent sont egales entr'elles. Item soient conioincts les centres S, N, P, Q par les quatre lignes droictes SN, NP, PQ, QS, lesquelles seront toutes egales par la 4. prop. 1. d'autant qu'elles sont bases de quatre triangles Isoscelles ayans deux costez egaux à deux costez, (chacun d'iceux



costez estant egal à la moitié du costé du cube ainsi que NK, SK du triangle NKS) & l'angle contenu d'iceux costez egal à l'angle, sçauoir droict comme NKS: Il est euident qu'icelles quatre lignes feront aussi vn quarré, qui est au milieu de l'octaedre, & parallel à la base d'iceluy. Or des quatre angles d'iceluy quarré soient menees au poinct R centre du quarré superieur AE, les quatre lignes NR, PR, QR, SR, lesquelles comme il a esté dit cy dessus seront toutes egales tant entr'elles qu'aux quatre precedentes, & feront les quatre triangles equilateraux NRP, PRQ, QRS, NRS: Item des mesmes quatre angles du quarré NPQS, soient menees au poinct O, centre de la base CG, les lignes NO, PO, QO, SO, qui seront egales comme dessus, & feront quatre autres triangles equilateraux NOP, POQ, QOS, NOS, lesquels seront aussi egaux aux quatre premiers, car tous leurs costez sont egaux, estans bases de huict triangles Isoscelles rectangles, tel qu'est NKS. Parquoy le solide NOPQRS composé d'iceux 8 triangles equilateraux & egaux entr'eux est octaedre inscrit au cube donné, par les 27. & 31. def. 11. puis que tous les six angles d'iceluy, touchent les six plans dudit cube à leurs centres, Nous auons donc inscrit vn octaedre dans vn cube donné. Ce qu'il falloit faire.

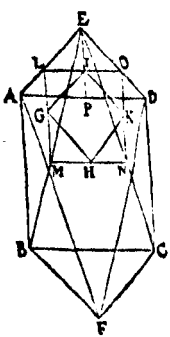


PROBL. 4. PROP. IV.

Dans vn octaedre donné, inscrire vn cube.

Soit donné l'octaedre ABCDEF, dans lequel il faut inscrire vn cube. Des quatre triangles AEB, BEC, CED, AED, qui se terminent au poinct E,

ſoient pris les centres G, H, I, K, & ſoient menees les lignes GH, HK, KI, GI: Il eſt euident que GHKI ſera quarré. Car ſi d'iceux quatre centres on meine les lignes droictes LM, MN, NO, OL, paralleles chacune à ſon coſté du quarré du milieu de l'octaedre ABCD: les triangles LEM, MEN, NEO, LEO ſeront equilateraux, puis qu'ils ſont ſemblables aux triangles equilateraux cy-deſſus par le corol. de la 4. prop. 6. & partant egaux entr'eux, pource qu'ils ont les coſtez communs; & par conſequent les quatre baſes LM, MN, NO, LO ſont egales.



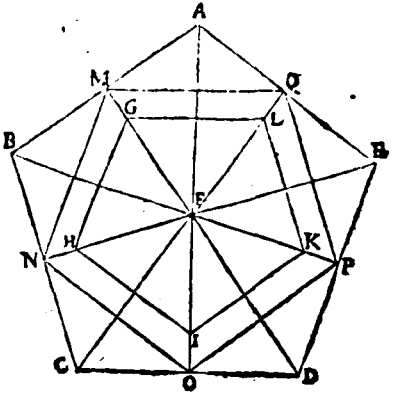
Item ſi de E par le centre I on meine EP: elle diuiſera en deux egalement tant l'angle E, que le coſté AD par le corol. de la 10. prop. 13. & par conſequent LO eſtant parallele à AD ſera auſſi couppee en deux egalement au centre I: Par meſme raiſon LM, MN, NO ſeront auſſi couppez en deux egalement aux centres G, H, K. Ainſi les quatre triangles GLI, IOK, GMH, HNK ſont iſoſceles rectangles. (Car par la 10. prop. 11. les angles des poincts L, M, N, O, ſont egaux aux droicts du quarré ABCD.) Parquoy les quatre baſes GI, IK, GH, HK ſeront egales, & les angles qu'elles comprennent droicts: partant GHKI eſt quarré. Que ſemblablement des autres triangles de l'octaedre on prend les centres: iceux centres eſtans tous conioincts par lignes droictes, ſeront deſcrits encore 5 quarrez, leſquels ayans les coſtez communs ſeront egaux entr'eux. Parquoy le cube compoſé d'ice

& quarrez sera inscrit dans l'octaedre donné, puisque les angles d'iceluy touchent les huict bases de l'octaedre à leurs centres; & par ainsi nous auons fait ce qui estoit requis.

PROBL. 5. PROP. V.

Dans vn icosaedre donné, descrire vn dodecaedre.

Soit ABCDE le pentagone par le moyen duquel on construit l'icosaedre, sur lequel soit vne des douze pyramides pentagonales de l'icosaedre, ayant pour sommet le poinct F, auquel s'assemblét les 5 triangles equilateraux ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, & soit trouué le centre de chacun d'iceux triangles aux poincts G, H, I, K, L, & d'iceux soient menees les lignes HG, GL, LK, KI, IH: Item de F par iceux centres, soient menees les lignes FM, FN, FO, FP, FQ, lesquelles coupperont en deux egalement les costez AB, BC, CD, DE, EA, comme il appert par le coroll. de la 10. propos. 13. & partant estant menees les lignes droictes MN, NO, OP, PQ, QM; il est euident par la 4. p. 1. qu'elles seront



egales; & que par la 8. pr. 1. les angles qu'elles ſouſtiennent au poinct F ſont egaux; & d'autant que les lignes FG, FH, FI, FK, FL ſont auſſi egales; (car ce ſont demi-diametres de cercles circonſcriuans triangles equilateraux egaux) les lignes GH, HI, IK, KL, LG ſeront pareillement egales, & les angles de deſſus icelles auſſi egaux, par la 4. propoſ. 11 Parquoy le pentagone GHIKL eſt equilateral & equiangle: & il ſe prouuera aiſément comme à la 17. prop. 13. qu'il eſt auſſi en vn meſme plan. Que ſi ſemblablement on conioinct par lignes droictes, les centres de tous les triangles des autres vnze pyramides de l'icoſaedre, ſeront auſſi deſcrits des pentagones equilateraux & equiangles, leſquels puis qu'ils ont des coſtez communs, ſeront auſſi egaux entr'eux. Parquoy 12 tels pentagones conſtitueront vn dodecaedre, lequel ſera inſcrit dans l'icoſaedre, puis que les 20 angles d'iceluy octaedre ſont conſtituez & touchent les vingt baſes de l'icoſaedre à leurs centres. Nous auons donc inſcrit vn dodecaedre, dans vn Icoſaedre donné. Ce qu'il falloit faire.

Fin du quinzieſme & dernier Element.

Le priuilege eſt au commencement en ſuitte de la Preface.