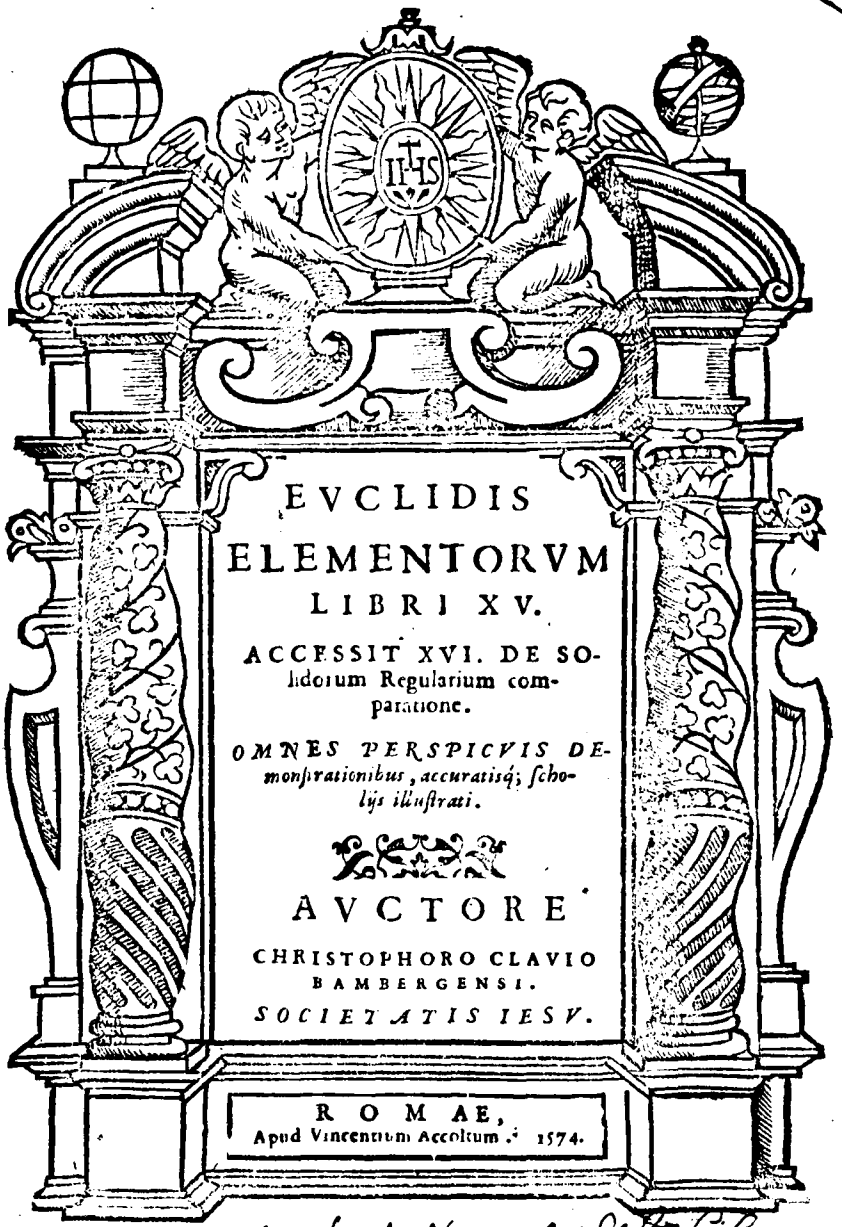
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEmonſtrationibus, accuratisq; ſcholijs illuſtrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

De La Comp.ª de Jhs de Alcala. 87 Dela Gb.

SERENISSIMO PRINCIPI, AC D. D. EMANVELI PHILIBERTO Sabaudiæ Duci.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS SOCIETATIS IESV S. P. D.



EST profecto (quod te non fugit) Princeps Sereniss. præclara quædã res, ac plane diuina, rerum cõgnitio, quæ merito in optimo quoq; incredibile sui desideriũ excitat, quo facilius hæc hominũ breuis, & calamitosa uita,

ignorantiæ quasi tenebris disiectis, & ad exitum ipsa suum perueniat, & omnia quæ accidere possunt, incommoda leuiora ducat. Ac si ea quæ sunt a summis philosophiæ principibus de liberalium artium dignitate vere ac sapienter scripta, falsa esse non credimus; neminí dubium esse potest, quin & rerum obscuritate, & incerta cognitione, mirum in modum minuatur illa siue uoluptas, siue animi iucunditas appellanda est, quæ ex ipsa alioqui rerum contemplatione percipi solet. Equidem fateor (quod summo uir ingenio dixit Aristoteles) eximiam quandam esse in naturæ perueſtigatione positam delectationem, rerumque naturalium scientiam, multis philosophiæ partibus nobilitate præcellere: Sed quis non uideat in tanta opinionum uarietate, quarum (cum sit unica veritas) aut non plus una uera, aut omnes falsas esse necesse est, multum uel inconstantiæ, uel errori relictum esse loci, quo quidem nihil esse potest a scientia magis alienum? Quod si (ut est apud eundem peripateticæ disciplinæ principem) doctrinarum nobilitas tum ex rerum dignitate, tum ex elaborata probandi ratione pendet; quid de mathematicis disciplinis existiman-

ſtimandũ eſt, quæ ut de rerũ præſtantia nihil dicam, tantam habent ſuis in rationibus firmitatem, ut non tam perſuadere, quam uim quodammodo afferre uideantur. Quotus enim quiſque eſt, qui Archimedis, & Apollonij, cæterorumque Mathematicorum libros legens acutiſſimorum hominum non admiretur ingenia, & menti ſuæ firmiſſimas quaſdam quaſi machinas admoueri non ſentiat, ut ijs quæ illi tradunt, uel inuitus aſſentiri cogatur? Qua quidem ex re dici uix poteſt, quantam animus noſter capiat voluptatem, dum ita in ſententia perſtat, remque omnem plane percipit, ac tenet, ut neutram in partem dubius inclinet, nuſquam fluctuet, nedum falſis opinionibus imbuatur. Cuius ſane tam certæ tamque accuratæ ſcientiæ, cum ſolum ac fundamentum Euclidis, quæ dicuntur, elementa communi omnium Mathematicorum conſenſu exiſtimentur; Tantam profecto ſummus ille vir apud poſteros laudem meretur, quanta optimo in primis diligentiſſimoque magiſtro, atque ipſi etiam primo artis inuentori iure debetur. Quo magis eorum probanda uidetur induſtria, qui in his ipſis elementis aut explicandis, aut illu-

ſtrandis ſtudium, atque operam collocant, ut quanto hæc mathematicarum diſciplinarum initia aut faciliora, aut firmiora fuerint, tanto quæ conſequuntur omnia planius cognoſcantur. Quæ cum ego multos annos partim publice docendo, partim priuatim commentando, & cum alijs viris doctis communicando diligentius pertractaſſem, collegiſſemque (ut fere fit) in meum priuatum uſum nonnulla, quæ ad eorum cognitionem facere uiderentur; faciendum mihi neceſſario exiſtimaui, præſertim auditorum, amicorumque meorum precibus fatigatus, præterea Laurentij Caſtellani ciuis Romani liberalitate inuitatus, qui oēs ad id neceſſarios ſumptꝰ benigne admodū ſuppeditauit, ad publicā ſtudioſorum utilitatē, in lucem manusque hominum exire permitterem. Tibi uero potiſſimū Princeps Sereniſſ. has meas lucubrationes dicaui, primum quod tibi Mathematicorum omnium eximio patrono hæc noſtra maxime ſtudia cordi eſſe intelligebam; deinde quod pro tua in noſtrū ordinem uniuerſum ſingulari beneuolentia, atque promeritis aliquod tibi grati animi indicium extare ſocietas noſtra uehementer optabat. Huc accedebat priuatum etiam

ſtudium

ſtudium in te meum, quod ab humanitate tua ſingulari, oratorisque tui Vincentij Parpaleæ viri ampliſſimi beneuolentia prouocatus, nihilo tibi minus ego ſum priuatim obſtrictus, quam publice Societas noſtra vniuerſa. Accipe igitur hoc tenuitatis noſtræ munuſculũ, ſi rem ſpectes, exiguum illud quidem, & meritis tuis longe impar; ſin animum intuearis, amoris & obſeruantiæ pleniſſimum. Quod ſi tibi gratum iucundumq; accidiſſe cognouero, cum ſatis amplam laboris mei mercedem ac præmium me tuliſſe exiſtimabo, tum vero ad alia eiuſdem generis commentanda, & elucubranda, ſi otium & occaſio ſe offeret, efficiar alacrior. Vale.

ROMAE, KALENDIS FEBR.

M. D. LXXIIII.

LECTORI S.



IOVIS *forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi cõmentationes conscripserimus, is facile sibi persuadebit, non temere id a nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa, diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse utilitatem, atque adeo necessitatẽ horum elementorum, ut frustra quisquam se speret ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolomæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; uehementer dolebamus, tam insignem, & illustrem auctorem a plerisque omnino negligi, a perpaucis uero pro dignitate tractari, ita ut uix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulá operá, ac studiú in perdiscendis his elementis ponant, ob eam potissimum, ut arbitror causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullúq; habeant hac in re ducẽ, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile con-*

^ sine

sequen-

ſequendam horum elementorum doctrinam : Sed alter ſecutus in omnibus eſt traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, uerbaque propoſitionum eiuſdem locis non paucis immutarunt, ut uerus, germanuſque auctoris ſenſus perdifficile poſſit intelligi; id quod maxime in decimo libro perſpicitur: Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis, uitijque incuria librariorum ita eſt deprauatus, & propter notas græcas, quæ in eius demonſtrationibus adhibentur, obſcuras illas, ac male expreſſas adeo impeditus, ut magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, ut Euclidem ſine maximo labore, ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad noſtram uſque memoriam maius aliquod ſtudium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi uel ſex priores tantum libros expoſuerunt, uel ſi qui in uniuerſum Euclidem commentarios ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demonſtrationibus certiſſimis, (Federicum tamen Commandinum Vrbinatem Geometram peritiſſimum excipio, cuius opera, atque diligentia Euclides latine redditus, & in priſtinum nitorem, iuxta ueterum interpretum ſenſum, ac traditionem, reſtitutus, nunc denuo prodijt in lucem,) proprias alias, ac nouas confixerunt, quæ plerunque non tam firmæ ſunt, neque rem ipſam ſimpliciter, & abſolute conficiunt; præſertim quod modo e propoſitionibus uoces quaſdam perperam detrahũt, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, ut merito de uero, proprioque Euclidis ſenſu dubitare quis poſſit. Quæ cum ita ſint, reſque

resque ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt post diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, ut lucubrationes nostras, ac uigilias studio sis harum rerum nonnihil (nisi fallimur,) subsidij allaturas, in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides, propter singularem utilitatem, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque unquam deponi ab his, qui fructum aliquem serium ex hoc suaui Matheseos studio capere uolunt, in eoque progredi; id uero in hunc diē, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdum factum uideamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sūt enim hi nostri commentarij in uniuersum Euclidē conscripti commodiore nunc forma, quam uulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) uolumineq; editi, ut facilè iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, uia, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti quidam asseuerant, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, uel certe planiores, quando illud non potuimus, delucidioresque reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem uerbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, ut illud accidat, quod ab elegan-

elegantissimo poeta dictum est. Breuis esse laboro, obscurus fio: Interdum etiam, cum breuius, atq; succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare utrunque uitantes, eas, uelut παραφραστικῶς, atq; ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obseruauimus: hac etiam re auditorum desiderio, & uoluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius a studiosis, ijs præsertim, qui cum tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore uoluptate, utilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis uaria problemata, ac theoremata, scitu non iniuncunda, neque a scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliisque auctoribus decerpsimus, partim proprio (ut aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligés opera, ut definitiones Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid uitiæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam, incidentes, a recto cursu deflexerunt, & in errores uarios, atque absurdos, prorsumque ab instituto disciplinæ abhorrentes, dilapsi sunt.) dilucide, atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile iudicabunt. Quæ res cum in amplioré magnitudiné excresceret, quam ut unius libri spatijs, hac præsertim forma, commode includi possent, in duas partes totam tractationem diuisimus. Altera nouem prioribus libris continetur: altera sex reliquos, una cum decimosexto ad comparationes

quinque

quinq; corporũ regulariũ pertinente, quem ex Franciſco Fluſſate Candalla adijcere uoluimus, cõplectitur. Nunc, quia hæc Euclidis elementa oſtium, atque aditum ad omnes alias ſcientias Mathematicas reſerant ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipſa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, unde nam Mathematicæ diſciplinæ hoc nomen acceperint; quæ ſit earum diuiſio; a quibus primum ortæ, & per quos deinde ſingulæ fuerint excultæ; quanta ſit illarum præſtantia, atque utilitas, & ſi qua ſunt alia rei noſtræ oppor tuna.

MATHE-

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE *Mathematicæ, quæ quidē circa quantitatem uersantur omnes, nomen acceperunt a dictione græca* μαθημα, *siue* μαθησις, *quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, uel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, qua anima nostra (ut eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Manon inscribitur, ubi Socratem introducit puſionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, ut puer, gradatim tamen ascendens eo deductus est, ut responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diuinissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi uendicare, quod solæ modum, rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod propriū est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, ut & Aristoteles* 1. poster.
testatur; neque unquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere uolunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud uero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasue nō semper obseruare uidemus, cum plerunq; in confirmationem eorum, quæ ostendere uolunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratane, adducant.

DISCI-

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM diuisio.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes prope modum Mathematici, atq; Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas uniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmethicam, Musicam, Geometriam, ac Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam uersantur, sit uel discreta, sub qua omnes numeri, uel cõtinua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & utraque tam secundum se, quam comparatione alterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum, quatuor praedictas facultates instituere, quæ utranque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eãdem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniã. Geometria de magnitudine siue quãtitate cõtinua, secundũ se quoq;, ut immobilis existit, disputat. Astronomia denicq; eandẽ magnitudinẽ, ut est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarũ Arithmetica, & Geometria puræ, Musica uero, atq; Astronomia mixtæ dicuntur, oẽs alia quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & cæteræ huiusmodi, uel facile, ut ad capita, a quibus dependent, reduci possint.

ALIA rõne a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, ut auctor est Proclus in cõmẽtarijs, quos in primũ Euclidis librũ edidit, Mathematicæ disciplinæ diuidunt. Quã quidẽ diuisionẽ, quoniã elegãter, copioseq; docet, ad quam se extẽdat Mathematicæ disciplina, ferme ad uerbũ ex Proclo iuxta interpretationẽ Francisci Barocij Patricij Veneti excerptã hic subijcere statui. Volũt itaq; praedicti auctores, scientiarũ Mathematicarũ quasdã in intellectilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam uero in sensilibus, ita ut attingant materiam sensibus obnoxiam, uersari. Prioris generis statuunt duas longe primas, præcipuasq; scientias, Arithmeticam, & Geometriam: In posteriori uero genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicã siue Musicam, Supputatricẽ, atq; Mecha-

Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporum cælestium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonū, exercetur: Metheoroscopica, quæ elevationum differentias, syderumq reperit distantias, nec non multa alia, & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque stellarum distantias huiscemodi dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt a Geometria gigni, atque uti radijs visorijs, tanquam lineis, et angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, se se nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub uisum cadunt, alios situs, & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, uel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularem, quæ circa uarias, multiplicesque versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesque videantur. Geodæsiam appellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materiarium rerum aceruos, tanquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt spartis, & perpendiculo. Diuiditur hæc, ut Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes concentuum considerat rationes, sensusque ubique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, ut menti aures ipsas præposuisse videatur. Suppetatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est: Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis idonea,

nea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra, marique obsidentibus resistentia; Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ dicitur, quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur; alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status vero æquilibrium esse causam censendum est, ut Timæus etiam determinauit; alia vero nerui, spartisque animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia uocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ σφαιροποιϊκὴ appellatur, ad cælestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atque ut vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidã alij voluere, sed vti eam volunt modo quidem arte suppeditandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, vt in dividendis, dimetiendisque castrametationi spatijs in campo. Quem admodum neque Historicam, neque medendi artem Mathematices partem ullam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam Medici Mathematicis vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, uel urbium magnitudines, & diametros, uel ambitus, circuitusve colligendo: Medici vero, quamplurimas res in arte sua huiusce modi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis tẽporibus, locisque dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quam vis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, pauciſſimam ostendere multitudinem, castra, suosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum uero ad figuram quadranguli, uel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam aparere cupit. Hæc igitur fere sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarũ partitione reliquerunt.

INVEN-

INVENTORES MATHEMATICARUM DISCIPLINARUM.

OMNES disciplinas Mathematicas a uarijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historiæ testantur: Immo uero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, ut auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq; successores, nec non Aegyptij, Græci denique ac Arabes amplificarunt, uarijsque problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus uero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra usque tempora manauit. Geometria uero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum emensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, uastaretque, ut nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Qua quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod, terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria capta est expoliri, & non contenta suis finibus, se se ad corpora etiam cælestia dimetienda conuertit, traditisq; principia uniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quam plurimis, quæ ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimi, acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus,

dorus, Theaetetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumãt: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse uolunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) syderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij deniq; gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, ut est præstantissima, ita quoque maxime illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Caterum, præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipsis, tanquam riuuli ex fonte, derivatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque ulla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, ut recte a Proclo probatur. Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si uero nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus utitur, sit iudicanda, haud dubie Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque

firmantque, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant; Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorũ sectæ, (ut alios interim philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnunquam a fonte ipso Aristotele dissidentes, vt prorsus ignores, quid nam sibi uelit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiã esse digniorem, præstantiuremque, quæ magis synceritatis, ueritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ ueritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, uerum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEmaticarum disciplinarum.

NON solum vtiles, verumetiam necessarie admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicã, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemq;

noſtri intellectus attollere abſque ullo medio tentemus, noſmet-ipſos excæcabimus, non ſecus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoſo, in quo diu latuit, in lucem Solis clariſſimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus phyſicis, quæ materiæ ſenſibus obnoxiæ ſunt coniunctæ, ad res metaphyſicas, quæ ſunt ab eadem maxime auulſæ, intellectus aſcendat, neceſſe eſt, ne harum claritate offundatur, prius eum aſſuefieri rebus minus abſtractis, quales a Mathematicis conſiderantur, vt facilius illas poſſit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas diſciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationẽ exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ diſciplinæ ad ſacras literas recte percipiendas, interpretandasque conferant, multis uerbis pulcherrime nobis exponit B. Auguſt. lib. 2. de Doctrina Chriſt. demonſtrans, numerorum inſcitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac myſtice poſita ſunt in ſcripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit; eandemque ſententiam longe poſt pluribus uerbis repetit eodem lib. Hoc idem docet D. Hieron. tomo 1. Epiſt. 1. aſſerens, magnam ineſſe numeris uim ad multa myſteria in ſcripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem, perhibet. Rurſum B. Auguſt. loco, quem paulo ante retuli, teſtatur, Muſicam perneceſſariam eſſe doctori Chriſtiano, ſubiungens paulo poſt, Theologos debere etiam Geographiæ diligenter eſſe inſtructos. Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus, ſummis laudibus D. Baſilium præceptorem ſuum extollit, quod in Aſtrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque ſcientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter verſatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectæ acquirendas, ut perſpicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philoſophorum, maxime Ariſtotelis, & Platonis, quos merito duces nobis ſequendos ad bene rectèque philoſophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, ut ea, quæ alioquin multis obſtructa difficultatibus uidebantur eſſe, per exemplа huiuſmodi clariora, magisque perſpicua fierent; qua proculdubio nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathematica-

Cap. 16.

Cap. 37.

Cap. 16.

Cap. 19.

maticarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (ut copiose scribis (non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, uerum etiam ad remp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo, ut etiam si nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidē experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contra uero, eos qui ad hasce facultates idonei minime reperiūtur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Tymæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes utilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusq; animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque versari solebant: Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus per-

cipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab alijs studijs excæcatur, defoditurque, a Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum philosophorum, quibus harum disciplinarum utilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque præstantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS, ATQVE GEOMETRIÆ commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq; Geometria universa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, ut testatur uulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit a se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq; (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de uitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad. lib. 2. ubi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, a quo idem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset unum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui AEgypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cæpit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidem uerius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius

Megarici

Megarici diligentiſſime enumerans, nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi uoluminis de Geometricis elemẽtis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum eſt, Diogenem in monimentis philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus uel ſcientem uoluiſſe praeterire, uel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum, ignoraſſe. Itaque Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo philoſopho longe alius eſt, qui, cum in doctrina Academicorum eſſet ſumma cũ laude uerſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo uendicarit. Scripſit autem uolumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admiranda doctrina facile elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam pertinentes, Phaenomena, atq; Datorum liber, opus de Diuiſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum illum acutiſſimum de ſuperficierum diuiſionibus, Machometo Bagdedino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item conica elementa, auctore Proclo, quae tamen ad nos nondum peruenerẽt, & alia id genus opuſcula. Maxime uero hoc uolumen elementorum Geometricorum nunquam omnium conſenſione ſatis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, ut nullus unquam eorum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa (conſcripſerunt autem, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipſum ſuperarit. In quo quidem, ut ſummum ingenij acumen demonſtrauit, ita non omnia, quae ad rem Geometricam pertinent, in uulgus edenda, ſed ea duntaxat, quae uiſa ſunt eſſe neceſſaria, atque utilia, ad communem omnium utilitatem, argumentis, & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe comprobanda. Caeterum, quanta ſit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde uniuerſae Geometriae, praeſtantia, ac utilitas, partim ex ijs, quae ante ſcripſimus, partim ex ijs, quae nunc dicemus, non obſcure perſpici poteſt. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob cauſam, quod ſine ipſis nullum opus Mathematicum poſſimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes ſiquidem Mathematicarum re-

rum ſcriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodoſius, &c. in ſuis demonſtrationibus uſurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perſpecta, atque demonſtrata. Quamobrem ſicut is, qui legere uult, elementa literarum diſcit prius, & illis aſſidue repetitis utitur in uocibus omnibus exprimendis, ſic qui alias diſciplinas Mathematicas de ſideras ſibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, neceſſe eſt. Ex his etenim elementis, ueluti fonte uberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, inſularum dimenſio, atque diuiſio, omnis in cælo per inſtrumenta ſyderum obſeruatio, omnis horologiorum ſciotericorum compoſitio, omnis machinarum uis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum uariarum, qualis cernitur in ſpeculis, in picturis, in aquis, & in aere uarie illuminato, diuerſitas manat. Ex his, inquam, elementis machina totius huius mundanæ eſt inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, acquantitas. Oſtenditur, atque demonſtratur unius huius ſcientiæ ui cæli uniuerſi, ſyderumque perennis conuerſio, ortus, occaſus, abitus, reditus, aſcenſus, deſcenſus, diei ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum ſitum, & mundi inclinationem, uarietas. Coniunctiones item planetarum, oppoſitiones, aſpectuſque uarij tam expedite cognoſcuntur, ut & loca illorum in cœlo, & eclipſes, ſeu Solis, ac Lunæ defectiones certiſſime, ante quem fiant, in omne poſterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis noſtræ oculis munere, ac beneficio Geometriæ ſubiectum conſpicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia eſſe uidentur, omniumq; fidē ſuperant, perſpicua facere, credibiliaq; eſſe oſtendere: Quale eſt illud, quod de Archimede Syracuſio teſtantur hiſtorie. Cum enim Hieron Syracuſarum rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum regi mittere ſtatuerat, tantæ eſſet molis fabricatus, ut eam omnes una Syracuſii a loco dimouere minime ualerent, Archimedes Geometra periti ſſimus unius Geometriæ uiribus fretus regi promiſit, ſe effecturum, ut ipſam ſolus rex abſque ullo labore ſubduceret: Quod cum præſtitiſſet, in conſpectu omnium rex ſtupefactus exclamaſſe perhibetur;

hibetur; Ab hac die, quicquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic uidetur mihi esse pulcherrimũ illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex summo studio fabricari insserat, non dissoluta, singula auri, & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime offendit. Neque silentio præterire debet, eundem Archimedem robori, ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumero, iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, e loco se commouere posse. Pari ratione, datis uiribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere: Et alia id genus non solum ab Archimede, uerum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse memoriæ proditũ est. Tantum denique nomen una hac Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam urbem defenderat Archimedes machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnatæ urbis direptione, ac cæde ciuium uniuersi Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem ubi contra imperium suum, & uoluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, uehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem uiuo habere non potuit. Cuius sepulchrũ Cicero ase, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam, utilitatemq; Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit uis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenue fatetur Galenus insignis philosophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cum scholas Peripateticorum, ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore, studioque arripuisset, nihil fere ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiã naturali rationi pugnantia reperisse: Ita ut ad Pyrrhoniorum

fere

fere (erant Pyrrhonij philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmetica, Geometria, Dialecticaq; (quibus artibus ab auis, & patre fuerat institutus) esset cognitione, scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & lineares demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit utilis, ut alie artes facilius, & rectius percipiantur. Postremo est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis, & inferioribus hisce machinis, a quibus originem traxit, sed euolauit in cœlum usque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cœlestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali uocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria uniuersi sibi hunc scopum proponit, ut plana, aut solida nel constituat, uel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque uero mirum alicui uideri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propriæ contemplationes, ut diximus, non autẽ de lineis, uel etiam punctis: Non, inquam, debet uideri mirũ, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras uersatur, quæ in planis duntaxat, uel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, uel lineæ figuram ullam constituũt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus uero, siue planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, ut proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus

ribus uero quinque de ſolidis acutiſſime diſputat, eorumque proprietates maxime illuſtres perueſtigat. Quoniam uero cum res omnes Geometricæ, tum præſertim ſolida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici ſolent, perfecte tractari non poterant, abſque linearum commenſurabilium, atque incommenſurabilium notitia; Immo uero quam plurima magnitudines ſub menſuram cadere nulla ratione abſque earundē linearum cognitione poſſunt, cum earum latera ſæpenumero ſint talia, ut ea communis, & nota menſura data metiri nequeat, ut liquido conſtat ijs, qui aliquando demonſtrationes Geometricas in opus contulerunt, atque uſum; idcirco ut hiſce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimenſionemque requiſita, Stereometriæ ſuæ præpoſuit decimum librum, in quo ſubtiliter & copioſe de huiuſmodi lineis diſſerit. Intelligens rurſum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium ſine numerorum cognitione poſſe conſiſtere, ante decimum librum agit de numerorum paſſionibus, eaſque copioſe, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, eſt perſecutus. Quamobrem totum hoc uolumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehenſum, (quorum quidē priores tredecim ſine ulla controuerſia Euclidi aſcribuntur ab omnibus, poſteriores uero duo a nonnullis Hypſiclis Alexandrini eſſe creduntur) ſecari recte poterit in quatuor partes, ita ut prima pars contenta ſex prioribus libris agat de planis; Secunda tres ſequentes complectens, paſſiones numerorum perſcrutetur; Tertia, quam ſolus decimus conſtituit liber, de lineis cōmenſurabilibus, incommenſurabilibuſque diſputet; Quarta denique reliquis quinque libris abſoluta ſcientiam ſolidorum, ſiue corporum complectatur. Prima pars rurſum triplex eſt; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis abſolute, in ueſtigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto uero libro de proportionibus magnitudinum in genere diſputatur: In ſexto denique proportiones figuraram planarū diſcutiuntur. Quid uero Euclides in ſingulis alijs libris pertractet, pro prijs in locis exponemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREma, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO *omnis Mathematicorũ diuidi tur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema uocant eam demonstrationem, quæ iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterum constitui, appellabitur huiusce modi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius utraque pars contradictionis (ut ipsi loquuntur,) est probabilis, qualis hæc est quæstio, An totum distinguatur realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, uel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non parum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico utrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantum probabiliter, ita ut intellectus cuiusque ambigat, utranam illius pars uera sit: In Mathematico uero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonstratione, ita ut nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineã perpendicularem educere, efficiet utique hoc ipsum ratione cõstanti, & euidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto uelit educere lineam non perpendicularem. Theorema autẽ appellãt eã demonstrationẽ, quæ solũ passionẽ aliquã, proprietatẽue unius, uel pluriũ simul quantitatũ perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales*

quales duobus rectis, uocabunt talē demōstrationē Theorema, quia nō iubet, aut docet triangulū, aut quippiā aliud construere, sed contemplatur tantūmodo triāguli cuius libet constituti passionē hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis utraque pars uera ut sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poteris modo fieri, ut inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaque ut uno uerbo dicā, quæstiū illud Mathematicum cōstruere aliquid docēs, cuius etiā oppositū potest effici, Problema: Illud uero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo uelle angulum rectū constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, ut demonstrabitur in lib. 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendū erit. Cæterū tā problema, quā theorema dici consueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quod utrumque aliquid nobis proponat, ut in exemplis adductis constat. Hæc ideo dixerim, ut studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut aliorum interim uoluminā taceam,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur, his fere uerbis: Quod faciendum erat: Theorematum uero hisce: Quod ostendendum uel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis utriusque. In quolibet autem problemate, ac theorema se plures demonstrationes continentur & non una tantum, quamuis ultimus syllogismus demonstrationis solum concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propositione, nec non in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM uero ad demonstrationes problematum, atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, uel problemata minus principalia, & quæ facile ex

le ex ijs, quæ prius demonſtrata ſunt; intelligi poſſunt; inſeruntur interdum a Geometris huiuſmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, ut breuius demonſtrari poſſint. Vocant autẽ illa Lemmata, propterea quod ſolum aſſumantur ad alias demonſtrationes, non autem de illis præcipua diſputatio inſtituatur, quemadmodum de aliis. Itaque Lemma dici poteſt demonſtratio, ſeu conſtructio illius, quod ad demonſtrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis aſſumitur, vt demonſtratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisque diſciplina ex præexiſtente cognitione, ut auctor eſt Ariſtoteles, atque ex aſſumptis, & conceſſis quibuſdã principijs ſuas demonſtret concluſiones; Nulla autẽ ſcientia ex eiuſdẽ Ariſtotelis, aliorumq; philoſophorum ſententia ſua principia demonſtret; habebunt utique & Mathematicæ diſciplinæ ſua principia, ex quibus poſitis, & conceſſis ſua problemata, ac theoremata confirment. Horum autẽ tria tantũmodo genera apud Mathematicos reperiũtur. In prima reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cũ Ariſtotele ſuppoſitiones, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipſa, nominũ ambiguitate, aut obſcuritate circumuenti in paralogiſmos incidamus. Secundum genus complectitur petitiones, ſiue Poſtulata, quæ quidẽ adeo clara ſunt, & perſpicua in illa ſcientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, ſed auditoris duntaxat aſſenſum expoſcant, ne vlla ſit in demonſtrando hæſitatio, aut difficultas. Ad tertiũ genus referuntur Axiomata, ſeu communes animi notiones, quæ non ſolũ in ſcie poſita, ſed etiam in omnibus alijs ita manifeſta ſunt, c tia, ut ab eis nulla ratione diſſentire queat is, qui ip recte perceperit. Atque his principijs recte mihi u modari poſſe id, quod in Metaphyſicis ſcribit de pr pijs Ariſtoteles. A ianua quis aberrabit? Vt pr rone, Pronunciata, ſiue Effata appellentur. Euc in volumine Geometricorum elementorum præ

monſtrationes ſuarum concluſionum omnia hæc principia, ut ex ipſis, quæ quidem facile a quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo unquam aſſenſum præberet niſi certa, ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine ſummis laudibus efferenda eſt Geometria, omnibusque ſeculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs, cuilibet quantumuis rudi & ignaro notiſſimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aſpectu ab omni ſenſu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonſtrationibusque certiſſimis ita confirmas, ut nihil omninò dubij in eis relinquatur. Porrò in huiuſce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide ſeruatur, ut in ipſo quidem introitu ſcientiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res poſtulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum ſubiectam videntur ſpectare. Neque uero oĩa principia Geometrica ab Euclide ĩ his elementis ſũt explicata, ſed multa reliquit lectori diſquirenda, quæ tamen ex ijs, quæ tradidit ſine magno labore ac ſtudio percipi poſſunt & intelligi. Verum ne in hac quoque parte deſuiſſe uideamur rerum Mathematicarum ſtudioſis, adiunximus uarijs in locis ad principia ab Euclide poſita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime curſum demonſtrationum arbitrati ſumus retardari poſſe.

ERRATA PRIMI TOMI
SIC CORRIGITO.

Folium.	Linea.	Errata.	Correcta.
39. a.	11.	PROPOS.18.18.	PROPOS.18.19.
40. a.	30.	*A E C.*	*A B C.*
52. a.	33.	*duo arcus duo arcus.*	*duo arcus*
62. b.	9.	*A C D F*	*B C D F*
67. a.	37.	*A D*	*B C*
72. a.	37.	4.*primi*	14. *primi*
74. a.	9.	*proniur*	*proponitur*
79. a.	23.	33.*primi*	30. *primi*
88. a.	24.	*F G E*	*E F G*
131. b.	8.	*A F*	*D F*
132. a.	15.	*eadem*	*eaſdem*
185. a.	22.	*figuras*	*figuras*
229. b.	5.	*eorum*	*earum*

INDEX PROBLEMATVM, AC THEOREMATVM, QVAE præter ea, quæ continentur in Euclidis propositionibus, in his elementorum libris demonstrantur.

IN PRIMO LIBRO.



IRCVLVS bifariam secatur a diametro. fol. 8. b — 1

Omnes anguli recti sunt inter se æquales. 17. a — 2

Duæ rectæ lineæ spatiũ non cõprehendunt. 18. a — 3

Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem segmentum commune. 18. b — 4

Super data recta linea terminata triangulum Isosceles, & Scalenum constituere. 22. b — 5

Omne triangulum æquilaterum est æquiangulum. 27. a — 6

Omne triangulum æquiangulum est æquilaterum. 27. b — 7

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt. 28. a — 8

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrunque utrique, æqualia, habuerint uero & basim basi æqualem; æquiangula inter se erunt, & æqualia. 30. b — 9

Duæ lineæ rectæ se mutuo secantes efficiunt ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales. 36. b — 10

Quotlibet anguli circa unum & idem punctum constituti, quatuor rectis sunt æquales. 56. b — 11

Si ad aliquam rectam lineam, ad eiusque punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt. 37. a — 12

13	Si quatuor recta lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint; erunt qualibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.	37.a
14	Ab vno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales.	38.a
15	Ab vno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ perpendiculares, quam una.	38.b
16	In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, uel obtusus, reliqui sunt acuti.	39.a
17	Omnes tres anguli scaleni sunt inæquales.	39.a
18	Si trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq; angulum recta linea ad basim ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento conuenit, minus vero, quod cum minori.	39.b
19	Si trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusque segmentum erit prope maius latus. folio.	40.b
20	Si trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet; erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia. Quod si latera æqualia fuerint, basim etiam bifariam secabis linea recta, quæ angulum bifariam diuidit. folio.	41.a
21	Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit. folio.	49.b
22	Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; duæ illa rectæ lineæ infinite productæ inter se conuenient ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.	49.b
23	Duæ rectæ lineæ, quæ eidem sunt parallelæ, inter se coeuntes, sunt in directum constitutæ.	51.b
24	Parallelogrammum constituere, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.	52.a
25	Si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur faciens externum angulum æqualem duobus internis & oppositis; illa linea erit in directum ipsi lateri constituta.	53.b

Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas. 53.b	26
Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipſa continet latera, ſeu angulos. 54.b	27
Si ſingula latera figuræ cuiuſuis rectilineæ producantur uerſus eandem partem, omnes anguli externi æquales ſunt quatuor rectis. 54.b	28
Si pentagoni ſingula latera producãtur in utranque partẽ, ita ut quælibet duo extra coeant; efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis. 55.a	29
Angulum rectum in tres angulos æquales diuidere. 55.b	30
Omne quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum. 57.a	31
Omne quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum. 57.a	32
Omne quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 57.b	33
In quadrato, & Rhombo anguli oppoſiti bifariam ſecantur a diametro. 58.a	34
In altera parte longiori, & Romboide anguli oppoſiti non bifariam ſecantur a diametro. 58.a	35
In quadrato, & altera parte longiori duæ diametri inter ſe ſunt æquales. 58.a	36
In Rhombo, & Rhomboide duæ diametri ſunt inter ſe æquales. 58.b	37
In omni parallelogrammo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt. 58.b	38
Recta linea ſecans diametrum pallelogrammi bifariam quo modocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque. Et recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam. 59.a	39
A quouis dato puncto lineam rectam ducere, quæ parallelogrammum datum ſecet bifariam. 59.b	40
Inter duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem eſſe duobus rectis. 59.b	41

42 *In omni figura rectilinea latera habere numero paria, si quidem fuerit æquilatera & æquiangula; erunt duo qualibet latera opposita, parallela inter se.* 60.a

43 *Parallelogramma æqualia super eandem basin, ad easdemq; partes constituta, erunt inter easdem parallelas.* 61.a

44 *Parallelogramma æqualia super bases æquales, & ad easdē partes constituta, inter easdē sunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non habuerint eandem basin, super æquales bases, sunt constituta.* 62.a

45 *Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, utrumque utrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, si quidem ambo simul duobus sint rectis æquales, æqualia sunt: Si uero duobus sint rectis maiores, minus illud est, quod maiorem habet angulum: Si denique sint minores duobus rectis, maius illud est, quod maiorem angulum habet.* 62.b

46 *Si a quouis angulo trianguli linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secatur.* 64.a

47 *A puncto quouis dato in uno latere trianguli propositi lineā rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.* 64.b

48 *Linea recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.* 65.a

49 *Omne quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.* 65.b

50 *Triangula æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.* 66.a

51 *Si triangulum duplam habuerit basim, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo; triangulum parallelogrammo æquale est.* 66.b

52 *Si parallelogrammum & triangulum æquales habuerint bases, in eisdemq; fuerint parallelis; duplum erit parallelogrāmum trianguli.* 66.b

53 *Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basim, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem.* 66.b

54 *Si triangulum & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint*

fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli: erit trapezium minus duplo trianguli: Si uero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli. 67. a	
Trapezium habens duo latera oppositа parallela, duplum est trianguli, quod basin habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem uero in medio puncto lateris oppositi. 67. b	55
Dato parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo. 68. a	56
Si parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita ut ex illis duo aduersa sint aqualia; consistent reliqua duo circa diametrum. 69. a	57
Ad datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo. 70. a	58
Datis duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere. 71. a	59
Linearum æqualium æqualia sunt quadrata: Et quadratorum æqualium æquales sunt linea. 71. b	60
Si in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati. 73. b	61
Quadratum diametri figuræ, alterа parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium. 73. b	62
Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppositа sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum unius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. 73. b	63
Duobus quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis. 74. a	64
Propositis duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. 74. a	65
Propositis quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 74. b	66
Propositis duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata. 75. a	67
Cognitis duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, incognitionem reliqui lateris peruenire. 75. a	68

69 *In omni triangulo, parallelogramma quacunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli dicti producantur.* 75.b

IN SECVNDO LIBRO.

1 IN omni parallelogrammo, cuius vnus duntaxat angulus datur rectus; erunt & reliqui tres necessario recti. 77.a

2 *Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque amba in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis.* 79.b

3 *Si sint duæ rectæ lineæ, secenturque amba vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, una cũ rectangulo sub una parte vnius, & vna parte alterius comprehensũ, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.* 80.a

4 *Si linea recta secetur in quotcunque segmenta, quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.* 81.a

5 *Parallelogrãma circa diametrũ quadrati sũt quadrata.* 83.a

6 *Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.* 83.b 208.a

7 *Si tres lineæ habeant proportionalitatem Arithmeticam; rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale est quadrato lineæ mediæ.* 85.b

8 *Si recta linea in partes inæquales secetur, earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, una cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.* 86.b

9 *In omni triangulo obtusangulo, linea perpendicularis ducta ex*

ex quouis acutorum angulorum ad latus oppositum cadit in ipsum latus ad partes anguli obtusi protractum. 91.a

Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur, mains sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, obtusus est. 91.b 10

Linea perpẽdicularis ducta a quouis angulo triãguli acutãguli, vel ab angulo recto triãguli rectanguli, vel ab obtuso triãguli obtusanguli ad latus oppositũ, cadit intra triangulũ. 92.b 11

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, minus sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, acutus est. 93.a 12

Areã cuiusque triãguli latera habentis nota inuenire. 93.b 13

Dato excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdẽ, inuenire latus ipsius quadrati. 95.a 14

IN TERTIO LIBRO.

SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet; in secante est centrũ circuli. 100.a 1

Linea recta, quæ circulum tangit, ita ut eum non secet, in uno tantum puncto ipsum tangit. 100.b 2

Si intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium una quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum alia sint inæquales, alia æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter distabunt. 103.a 3

Recta linea a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipsum circulum tangit. 109.b 4

Quotlibet anguli contactus æquales simul sumpti minores sunt quouis angulo acuto rectilineo. 114.b 5

Aliqua quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius. 115.b 6

Transitur a minori ad maius, vel contra, & per omnia 7

	media; & tamen non per æquale. Item reperitur maius hoc, & minus eodem; & tamen non æquale.	115.b. & 126.b
8	*A dato puncto in circunferentia circuli rectam lineam ducere, quæ circulum tangat.*	116.b
9	*Lineæ rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.*	116. b
10	*Propositis duobus circulis, quorum neuter alterũ includat, rectam lineam duoere, quæ vtrunque tangat circulum.*	116.b
11	*In circulo spatiũ ad centrũ duplex est anguli ad peripheriã, cum fuerit eadem peripheria basis spatij & anguli.*	118.b
12	*Si in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; æque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi poterit.*	120.a
13	*Segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, uel super eandem constituta, sunt similia.*	121.a
14	*In æqualibus circulis, inæquales anguli inæqualibus peripherijs insistunt, maior maiori, & minor minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.*	122. b
15	*Inæqualibus circulis anguli, qui inæqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se inæquales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, siue ad cẽtra, siue ad peripherias cõstituti insistãt.*	123.a
16	*Duæ rectæ lineæ, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, sunt parallelæ.*	123.b
17	*Linea recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriã illam subtendit.*	123.b
18	*In æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales peripherias auferunt, maior quidem maiorem, & minor minorem, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo; At vero si de segmentis circuli maioribus fermo habeatur, maior minorem, & minor maiorem.*	124.a
19	*In æqualibus circulis, inæquales peripherias inæquales rectæ lineæ subtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo; At vero si de segmentis semicirculo maioribus loquamur, minorem maior, & maiorem minor.*	124.b
20	*Angul⁹ triãguli, q reliqs duob⁹ æqualis existit, rect⁹ est.*	126.b

Segmen-

Segmentum circuli, in quo angulus constituus est rectus, semicirculus est. 126.b.	21
Si angulo recto recta subtensa bifariam secetur, & ex puncto divisionis circulus describatur ad internallum dimidiæ subtensæ; circulus transit per angulum rectum. 127.a.	22
Si linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget. 127.b.	23
Si duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum æquale sit ei, quod sub segmentis alterius cõprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus. 129.b.	24
Si a puncto quouis extra circulum assumpta plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se sunt æqualia. 130.b.	25
Duæ rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter se sunt æquales. 131.a.	26
Ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum possunt duæ lineæ, quæ circulum tangant. 131.a.	27

IN QVARTO LIBRO.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam. 133.b.	1
Si circulo circa triangulum descripto, centrum intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si uero in unum latus trianguli, rectangulum: si denique extra triangulum, obtusangulum. 135.b.	2
Centrum circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: circa rectangulum uero, in latus recto angulo oppositum: circa obtusangulum denique, extra triangulum. 135.b.	3
Per data tria puncta non in una recta linea existentia circulum describere. 135.b.	4
Si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo quadratum inscribatur; erit quadratum circumscriptum	5

scriptum quadrati inscripti duplum. 137.a.

6 Super data recta linea terminata pentagonum æquilaterũ, & æquiangulum constituere. 138.b.

7 Latus hexagoni æquale est semidiametro circuli, in quo describitur. 140.b.

8 Si in circulo ab eodẽ puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum; continebit arcus inter dicta latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur. 141.b.

9 Omnis figura æquilatera circulo inscripta, aut circunscripta, est quoque æquiangula. 142.a.

10 In circulo una eadem opera facilius, quam ab Euclide traditum est, pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 143.a.

11 Si bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ & æquiangulæ rectis coniungantur lineis; inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idẽ centrũ habẽs. 143.a.

IN QVINTO LIBRO.

1 Angvlvs curuilineus rectilineo æqualis esse potest. 154.a.

2 Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conuertendo proportionales erunt. 166.a.

3 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æquemultiplices primæ & tertiæ ad secundam, & quartam magnitudines eandem habebunt rationem: Nec non æquemultiplices secũdæ & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ; Nec non prima & tertia ad æquemultiplices secundæ & quartæ. 166.b.

4 Æquales magnitudines ad æquales eandem habent rationem. 169.a.

5 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam minorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam minorem

minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. 171.a.	
Si prima ad secundam maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habuerit, quam quinta ad sextam; Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. 172.a.	6
Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quàm secunda, maior fueris: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si aqualis, aequalis, & si minor, minor. 174.a.	7
Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & per conuersionem rationis proportionales erunt. 175.b.	8
Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quadam habeant ad easdem eandem proportionem; & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt. 178.b.	9
Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam dupla reliqua. 179.b	10
Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionẽ, quam tertia ad quartam; habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 179.b.	11
Si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit conuertendo secunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 180.a.	12
Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque uicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quã secunda ad quartam. 180.a.	13
Si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque uicissim prima ad tertiam minorem proportionẽ, quã secunda ad quartam. 180.b	14
Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam. 180.b.	15
Si prima ad secundã habuerit minorem proportionem, quã tertia ad quartam; habebit quoq; compesita prima cũ secunda ad se-	16

ad secundam minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam. 181.a.

17 Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam. 181.a.

18 Si composita prima cum secunda ad secundam minorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit quoque diuidendo prima ad secundam minorem proportionem, quam tertia ad quartam. 181.b.

19 Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cũ quarta ad quartam; habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam. 181.b.

20 Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam maiorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam. 182.a.

21 Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiã maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam. 182.a.

22 Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque minor proportio primæ priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam minor, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoq; ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quã primæ posteriorum ad tertiam. 182.b.

23 Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam. 183.a.

24 Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq;

sitque minor proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam minor, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam. 183.a.

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum; Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum. 183.b. 25

Si fuerit minor proportio totius ad totum, quã ablati ad ablatum; Erit & reliqui ad reliquum minor proportio, quam totius ad totum. 183.b. 26

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul æd omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum. 184.a. 27

IN SEXTO LIBRO.

PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus omnibus intermedijs, ut ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 188.a. 1

Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut baſes, eandem habent altitudinem, æqualesue. 190.b. 2

Triangula & parallelogramma, quorum æquales sunt baſes, uel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines. 191.a. 3

Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se ut altitudines, æquales habent bãſes. 191.a 4

Lineæ rectæ, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo aufert triangulum toti triangulo simile. 193.b. 5

Si ex duobus punctis cuiuſuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum uero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad eaſdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandẽ, quam recta inter ipſas, & alterum extremum incluſæ: Recta coniun- 6

coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ transibit per extremum alterius lineæ. 193.b.

7 Si in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulũ oppositum recta educatur linea; diuidentur linea parallela, & latus dictum in easdem rationes. 194.a.

8 Recta perpendicularis, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim demittitur, est media proportionalis inter duo basis segmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale est inter totam basim, & illud segmentum basis, quod dicto lateri adiacet. 197.a.

9 Datam rectam lineam in partes quotcunque æquales diuidere. 198.a.

10 Datam rectam lineam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. 199.a.

11 Si duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus. 199.b.

12 Datis duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis proportione reperire. 200.b.

13 Tribus datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam. 201.a.

14 Recta linea, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circunferentiam usque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. 201.a.

15 Data recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quã dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 201.b.

16 Recta linea media proportionalis est inter alias duas rectas lineas, quæ cõprehẽdũt rectãgulũ quadrato illius æquale. 204.a

17 Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita est triangulum super primam descriptum ad triangulum super secundam simile, similiterque descriptum; Item triangulum super secundam ad triangulum super tertiam simile similiterque descriptum. 206.a.

18 Polygona similia, æquilatera & æquiangula diuiduntur in similia triangula, & numero æqualia, ductis e centris circulorũ ipsa circunscribentiũ ad omnes angulos rectis lineis. 207.b.

Si sue-

Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales; ut est prima ad tertiam, ita est polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum. 203.a.	19
A Equalia rectilinea similia, similiterque descripta, constituta sunt super æquales rectas lineas. 209.b.	20
Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia. Et si a tribus rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea proportionalia fuerint; ipsæ etiã rectæ proportionales erũt. 210.a.	21
Triangula, quæ unum angulũ uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam. 211.a.	22
Proportionem ex duabus proportionibus, uel pluribus componere. 211.b.	23
Proportionem minorem ex maiori auferre. 211.b.	24
Triangula, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur. 212.a.	25
Parallelogramma inter se æquiangula eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa. 212.a.	26
Triangula & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. 212.b.	27
Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus; ex quouis illorum alteri simile resecare. Item quoduis ipsorum augere, ut fiat simile alteri. 214.b.	28
Dato parallelogrammo, describere aliud maius aut minus simile illi, similiterque descriptum. 215.a.	29
Si ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiẽs quadrato; ipsum applicatũ æquale est rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. 219.b.	30
Si figura, quæ ab uno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus, similiterque positis; Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est. 222.a.	31
Sector ad sectorem est, ut angulus ad angulum. 224.b.	32
Angulus ad centrum circuli ita est ad quatuor rectos, ut ar-	33

ut arcus illi subtensus ad totam circunferentiam. Et contra, Ita se habent quatuor recti ad angulum in centro, ut tota circunferentia ad arcum illi angulo subtensum. 224.b.

35 Similia segmenta circulorum eandem proportionem habent ad integras circunferentias circulorum, ac propterea qualis pars est una circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque est alia circunferentia similis totius suæ circunferentiæ. 225.a.

36 Anguli insistentes arcubus circulorum similibus, sive ad centra, sive ad circunferentias insistant, æquales sunt inter se. Et arcus, quibus insistunt sive ad centra, sive ad circunferentias, anguli æquales, similes sunt. 225.b.

37 A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum. 226.a.

38 Duobus datis rectilineis, tertium proportionale invenire. 227.a.

39 Tribus datis rectilineis, quartum proportionale invenire. 227.a.

40 Duobus datis rectilineis, medium proportionale invenire. 227.a.

41 Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem quamcunque. 227.b.

42 Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam. 228.a.

43 Duobus datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato. 228.b

44 Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint; Erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca. 229.a.

45 Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes; Erunt rectæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius. 229.a.

46 Si duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & a duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur, Erunt duæ

duæ lineæ, quarum vna inter terminum & sectionẽ, altera vero inter eundem terminum et suam perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciproce. 229.b

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. 230.a — 47

Omne quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia. 230.a — 48

A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam. 230.a — 49

Imperatam partem ex triangulo auferre per lineam rectam, quæ a quouis dato puncto lateris ducitur. 230.b — 50

Dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere maius, vel minus, secundum proportionem datam; Atque adeo quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicare, triplicare, quadruplicare, &c. Et aliud constituere, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine. 231.a — 51

In dato triangulo quocunque quadratum describere. 232.a — 52

IN SEPTIMO LIBRO.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione; nunquam reliquus metietur præcedentẽ, quoad assumpta sit vnitas. 246.a — 1

Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem usque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 246.b — 2

An duo numeri propositi sint inter se primi, nec ne, considerare. 246.b — 3

Numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorũ communem mensuram. 247.b — 4

An quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne, considerare. 247.b — 5

Numerus metiens tres numeros, vel etiam plures, metitur & maximam eorum communem mensuram. 248.b — 6

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius — 7

alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit quæ vnitas numeri. 249.b

8 Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; Et omnes omniũ simul eadem pars erunt, quæ unus unius. Idemque sequitur, si loco unius numerorum priorum sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates. 250.a

9 Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualiũ numero, singuli singulorum, æquemultiplices; quam multiplex est vnius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omniũ. Idemq; sequitur, si loco vni numerorũ posteriorũ assumatur vnitas, vel loco pluriũ, vel etiã omniũ, plures unitates. 250.b

10 Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes; Et omnes omnium simul eadem partes erunt, quæ unus unius. 251.a

11 Si numerus numeri æque fuerit multiplex, æq; ablatus ablatis; Etiã reliquus reliqui ita multiplex erit ut totus totius. 252.a

12 Si primus secundum æqualiter contineat, atque tertius quartum, eandemque insuper partem, vel partes; Erit e contrario secundus primi eadem partes, quæ quartus tertij. Et si fuerit primus secundi eadem partes, quæ tertius quarti; continebit e contrario secundus primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem, vel partes. 254.b

13 Quæ proportiones numerorum eidẽ proportioni eædem sunt, inter se quoque sunt eadem. 259.a

14 Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri easdẽ rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes. 261.b

15 Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis æquales inter se erunt. 262.a

16 Quotlibet numeri minimi in continuatione suarum proportionum, sive eadẽ sint, sive diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, &c. 263.b

17 Si quatuor numeri proportionales sint; Et conuertendo proportionales

portionales erunt. 254.b
Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque diuisi proportionales erunt. 265.a
Si diuisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt. 265.a
Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 265.a
Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quã tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum. 265.b
Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt. 256.a
Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositũ secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. 266.a
Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportionem, quas alij illis multitudine aquales ad quendam aliũ eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem proportionem, quam omnes hi simul ad eundem. Et si idem numerus ad quoscunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis aquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem numerus ad hos omnes simul. 266.b
Quotcunque numeri inter se primi, minimi sunt in cõtinuatione suarũ proportionũ. Et quotcunque numeri in cõtinuatione suarũ proportionũ minimi, sunt inter se primi. 268.a
Numerus, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque est primus. 270.b
Si duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus; Is ad unum eorum, qui in principio, compositus erit. 271.b
Maxima mẽsura quotlibet numerorũ metitur ipsos numeros, qui minimi sunt eandẽ proportionẽ cũ ipsis habentiũ. 273.a

29 *Duos minimos numeros inuenire, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales.* 273.a

30 *Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, producitur numerus minimus, quem illi metiantur.* 274.a

31 *Si tres numeri numerum quempiam metiantur; metietur & eundem minimus numerus, quem illi metiuntur.* 275.a

32 *Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas.* 276.b

33 *Numerum reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.* 277.b

IN OCTAVO LIBRO.

1 *SI tres numeri minimi sint continue proportionales, erunt extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, cubi. folio.* 280.a

2 *Extremi numeri proportionalium quotcunque secundum ordinem propos. 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter se primi sunt.* 280.a

3 *Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione.* 280.b

4 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex; neque alius quisquam vllius multiplex erit.* 285.a

5 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit. folio.* 285.a

6 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit.* 285.b

7 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem,*

autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit. 286.b	
Inter numeros dupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, non potest cadere numerus medius proportionalis. 287.a	8
Si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplices productum, & sic deinceps; erunt omnes producti continue proportionales ab vnitate. 289.a	9
Si quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, secundus ab vnitate in se multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc sit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic deinceps. 290.a	10
Si sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius. 290.a	11
Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius. folio. 290.b	12
Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrunque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent. 291.b	13
Inter duos quadratos numeros cadit numerus medius proportionalis in continua proportione lateris ad latus. 292.b	14.
Numerus medius proportionalis inter duos quadratos, & quilibet ipsorum quadratorum, compositi inter se sunt. 292.b	15.
Inter duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in continua proportione lateris ad latus. 293.b	16
Duo numeri medij proportionales inter duos cubos, & quilibet ipsorum cuborum, inter se compositi sunt. 293.b	17
Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi sit multi-	18

multiplex ; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati ; & cubi latus lateris alterius sit multiplex ; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit.

8 Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex ; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex ; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex. 296.b

19 Inter duos similes planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, quorum officio medius proportionalis inquiritur. 297.b

20 Numerus medius proportionalis inter duos planos similes, & quilibet ipsorum planorum, sunt inter se compositi. 297.b

21 Inter duos similes solidos cadunt duo medij proportionales in ratione laterũ homologorum, quorũ officio medij proportionales inueniuntur. 298.b

22 Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & quilibet ipsorum solidorum, inter se sunt compositi. folio. 298.b

23 Proportio cuiuscuis numeri quadrati ad quemlibet numerũ non quadratum exhiberi nullo modo potest in duobus numeris quadratis. 302.b

24 Numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. 302.b

25 Proportio cuiuscuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis. folio. 303.a

26 Numeri qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt. 303.b

27 Plani numeri non similes proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. 303.b

28 Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes. 304.a

29 Nulli numeri habentes duplam proportionem, vel sesquialteram, vel superbipartientem, sunt similes plani, vel solidi. folio. 304.a

30 Nulli numeri primi sunt plani similes, vel solidi. folio. 304.a

31 Duos numeros planos, uel solidos non similes inuenire. folio. 304.b

IN NONO LIBRO.

Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit. 305.b	1
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit. folio. 305.b	2
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit. 306.a	3
Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; productus non quadratus erit. folio. 306.a	4
Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus non cubus erit. 307.a	5
Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat nō cubum; & multiplicatus non cubus erit. 307.a	6
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; tantum distabit quilibet maior numerus acceptus ab assumpto quouis minore, quantum ab vnitate abest is numerus, per quem minor maiorem metitur. 311.b	7
Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quilibet illorum seipsum multiplicans producit numerum, qui tantum ab eo distat in numeris proportionalibus, quantum ipse ab vnitate. Minor uero quiuis maiorem quempiam multiplicans producit numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab vnitate. 311.b	8
Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque numerus primus vltimum metiens, metitur etiam omnes alios ante vltimum. 313.a	9
Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens compositus erit ad alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi. 314.b	10
Si fuerint duo numeri, secenturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris aequalis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continetur. 315.b	11 12
Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani	12

	sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.	316.a
13	*Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub*	
	patibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur,	316.a
14	*Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto sæ ius æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.*	316.b
15	*Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, una cũ numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.*	316.b
16	*Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi alii quis numerus adiiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio, & adiecto componitur.*	317.a
17	*Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.* folio.	317.b
18	*Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.* folio.	317.b
19	*Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui a partibus inæqualibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.*	318.a
20	*Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adiiciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus cõpositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio & adiecto.*	318.b
21	*Fieri non potest, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis.*	318.b
22	*Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi*	

minui omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi. folio.	320.a
Propositis quotcunque numeris cõtinue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi, considerare.	322.b 23
Si sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps, quorũ primus & tertius, primi inter se sint, fieri non potest, vt detur alius, ad quẽ ista se habeat quartus, sicut secundus ad tertium.	323.b 24
Primis numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.	324.a 25
Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit.	326.a 26
Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.	326.b 27
Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.	326.b 28
Omnes numeros pariter pares tantum inuenire.	327.b 29
Omnes numeros pariter impares tantum inuenire.	328.b 30
Omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares, inuenire.	329.a 31
Quotcunque numerorum continue proportionalium, quorum primus, secundus, & vltimus fuerint noti, summam inuenire.	329.b 32
Omne numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, inuenire. folio.	331.a 33

IN DECIMO LIBRO.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua precedentem metietur. folio.	8.b 1
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; Metietur quadam reliqua precedentem.	9.a 2
Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.	9.b 3
An quibuslibet magnitudinibus propositis sint commensurabiles, nec	4

nec, considerare. 10.a.

5 Magnitudo metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. 11.a

6 Si sint quotcunq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 11.a.

7 Commensurabiles magnitudines proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur. 12.b

8 Lineam rectam inuenire, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. 13.b

9 Lineam rectam inuenire, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum. 13.b.

10 Si sint quotuis quantitates continue proportionales, & aliæ totidem continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad ultimam, ita prima harum ad vltimam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. 14.b.

11 Rectæ lineæ, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: Quæ uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ uero potentia incommensurabiles, omnia & longitudine incommensurabiles sunt. 16.b.

12 Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 20.a.

13 Quotlibet numeros inuenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 20.a.

14 Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantùm commensurabiles, utrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia. 21.b.

15 Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera uero sit uni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis. 22.b.

16 Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se in-

se incommensurabiles erunt. 23.b.	
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo maior plus possit, quam minor. 24.a.	17
Duabus datis rectis lineis sive æqualibus, sive inæqualibus, invenire rectam, quæ illas potest. 24.b	18
Si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliqua commensurabilis est. 25.b.	19
Si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliqua incommensurabilis est. 26.a.	20
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata, Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur. 26.b	21
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata. 27.a.	22
Datam rectam lineam secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum. 27.b.	23
Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata, non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. 28.a.	24
Quotcunque lineæ Rationales longitudine inter se commensurabiles invenire. 31.a.	25
Rationales lineæ non solum ex posita Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles. 32.a.	26
Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur. Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima. 32.b.	27
Spatium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est. 32.b.	28
Recta linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est. 34.a	29
	30

30 *Quotcunque lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire.* 34.b.

31 *Propositis quotcunque Rationalibus lineis potentia solum commensurabilibus, inuenire adhuc aliam, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum.* 35.a.

32 *Linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles, Media est.* 36.a.

33 *Omne spatium Medium æquale est cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, si ipsum sub talibus iam non contineatur.* 37.b.

34 *Spatium Medio spatio commensurabile, Medium est.* 38.b.

35 ● *Duas rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.* 39.a.

36 *Rectangulum sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus contentum, neque Rationale est, neque Medium, sed æquale alteri cuipiam rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* 40.b.

37 *Rationale superat Rationale Rationali.* 42.a.

38 *Duos numeros planos similes inuenire.* 43.a

39 *Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.* 43.a.

40 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus sit etiã numerus quadratus.* 43.b.

41 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit numerus quadratus.* 44.a.

42 *Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.* 44.a.

43 *Duos numeros inuenire, ita ut ex illis compositus ad neutrũ ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* 46.a.

44 *Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorẽ, ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris. Et ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis ad quadratũ maioris.* 47.b

45 *Si sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectãgulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.* 48.b

46 *Si recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars*

ior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum. 50.a.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea & dimidia parte minoris continetur. Et si maior bifariam secetur; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub minori linea, & dimidia parte maioris continetur. 50.b. 47

Fieri potest, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale. 51.b. 48

Duo spatia Rationalia Rationale spatium componunt. 52.a. 49

Inuenire duas Medias longitudine & potentia incommensurabiles. 53.a. 50

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est. 54.b. 51

Si recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis cõprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat: Ac propterea quadrata partium inæqualium simpliciter sunt maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur. 56.a. 52

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul. 57.b. 53

Si recta linea secta sit utcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis. 67.a. 54

Ei, quæ est ex binis nominibus, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, sed non semper ordine eadem. 77.a. 55

Ei, quæ est ex binis Mediis, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem. 78.b. 56

Recta linea, quæ ex binis nominibus, & reliquæ Irrationales ipsam subsequentes, neque ipsi Mediæ, neque inter se eadem sunt. 81.b.

Recta linea media proportionalis secundum Analogiam Arithme- 57

Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, quæ per compoſitionem fit, eſt quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media exiſtit. 82.b.

59 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.* 83.b.

60 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.* 84.a.

61 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.* 85.a.

62 *Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.* 85.b.

63 *Si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.* 86.b

64 *Si a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.* 87.a.

65 *Si idem exceſſus ſit inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & uiciſſim idem exceſſus inter primam magnitudinem, & tertiã, qui inter ſecundam magnitudinem & quartam.* 87.b.

66 *Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque uiciſſim Arithmeticam Analogiam.* 87.b.

67 *Recta linea Apotomæ potentia tantum commenſurabilis, & ipſa Apotome eſt, ſed non ſemper ordine eadem.* 105.a

68 *Apotome, & cæteræ ipſam conſequens Irrationales lineæ, neque ipſi Mediæ, neque inter ſe ſunt eædem.* 110.a

69 *Fieri poteſt, ut ſpatium Rationale contineatur ſub duabus rectis Irrationalibus.* 114.a.

70 *Non ſolum lineas, ſed magnitudines etiam planas, atque ſolidas incommenſurabiles eſſe.* 116.a.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 APVNCTO *in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur.* 136.a.

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit. 136.b.	2
Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere. 137.b.	3
Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela. 138.a.	4
Duo plana alteri plano parallela, quæ inter se conueniunt, unum planum efficiunt. 138.b.	5
Si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo, erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 146.b	6
Si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis parallelo; sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 148.a.	7
Solida parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine. 151.b	8
Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim. 153.b.	9
Si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. 154.b	10
Si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam. 155.a.	11
Prismata, quorum bases sunt triangula super eandē basim, uel æquales, & in eadē altitudine, sunt inter se æqualia. 157.a	12
Prismata, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. 157.a.	13
Similia prismata, quorum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. 157.a.	14
Æqualium prismatum, quorū bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismatum triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia. 157.a	15
Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis	16

lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrunque vtri que 3 erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissa perpendiculares inter se æquales. 158.b

17 Si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum æquale fuerit paralleledipedo sibi æquiangulo a mediis linea descripto 3 erunt tres rectæ lineæ continue proportionales. folio. 159.a

18 Si fuerint tres rectæ proprtionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia. Et si tria solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia 3 & ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 160.b

19 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint 3 & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata triangulares bases habentia, quæ & similia similiterque describuntur, fuerint proportionalia 3 & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. 160.b

20 Si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia. Et si tria prismata triangulares bases habentia, quæ & similia & similiter describuntur, fuerint proportionalia 3 & ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 160.b

21 In omni parallelepipedo diametri se mutuo bifariam secant in vno puncto. 161.a

22 Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum. 161.a

IN DVODECIMO LIBRO.

1 CIRCVLVS ad circulum est, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descripto. 166.b

2 Si pyramides triangulares inter se sint ut bases 3 ipsæ erunt sub eadem altitudine. 170.a

3 Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases

baſes triangulares conſtituta, ſunt inter ſe æquales. 170.b	
Pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eandemque habentes altitudinem, baſes habent æquales, ſi non eandem. 170.b	4
Pyramides quæcunque libet baſium, quæ inter ſe ſunt, ut baſes, eandem habent altitudinem. 172.a	5
Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandem conſtitutæ, ſunt inter ſe æquales. 172.a	6
Pyramides multangulæ æquales, & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructæ, eandem habent altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habent baſes, ſi non habuerint eandem. 172.a	7
Pyramis quæcunque tertia pars eſt priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Sive priſma quodcunque triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim, & altitudinem. 172.b	8
Sub eadem altitudine exiſtentia priſmata, quæſcunque habeant baſes, inter ſe ſunt, ut baſes. 179.b	9
Si priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, ut baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. 174.a	10
Priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quæſcunque, inter ſe ſunt æqualia. 174.a	11
Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. 174.a	12
Similes pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, continent, habent proportionem homologorum laterum triplicatam. 175.a	13
Priſmata ſimilia habent triplicatam proportionem homologorum laterum. 175.b	14
Pyramides multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. folio. 176.a	15
Priſmata multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. 176.a	16
Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares; reciprocantur baſes, atque altitudines. Et quarum pyramidum	17

dum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes, & altitudines, illæ ſunt æquales. 177.a

18 Æqualium priſmatum quorumlibet reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum priſmatum baſes, atque altitudines reciprocantur, illa ſunt æqualia. 177.b

19 Omnis conus, ſive rectus, ſive ſcalenus, tertia pars eſt cuiuslibet cylindri, ſive recti, ſive ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni, & cylindri. 180.a

20 Sub eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſive ambo recti ſint, ſive ſcaleni, ſive vnus rectus, & alter ſcalenus, inter ſe proportionem habent, quam baſes. 181.a

21 Si coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſis, ipſis ſub eadem altitudine erunt. 181.b

22 Coni & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandē, vel æquales baſes conſtituti, ſive ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſive vnus rectus, & alter ſcalenus, ſunt inter ſe æquales. 181.b

23 Coni et cylindri æquales ſuper eandē, vel æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et coni & cylindri æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes ſunt, ſi non habuerint eandem. 181.b

24 Similes coni & cylindri ſcaleni, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. 183.a

25 Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri ſcaleni, vel etiam ſi vnus conorum, vel cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, inter ſe ſunt, vt altitudines. 185.a

26 Super æqualibus baſibus exiſtentia priſmata, parallelepipeda, & pyramides, inter ſe ſunt, vt altitudines. 185.b

27 Coni & cylindri tam recti, quam ſcaleni. Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habent æquales. 186.b

28 Æqualium conorum, & cylindrorum, ſive ambo tam coni, quam cylindri ſcaleni ſint, ſive vnus rectus, & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, ſive ambo tam coni, quam cylindri ſint ſcaleni, ſive vnus rectus, & alter ſcalenus, baſes & altitudines reciprocantur, illi ſunt æquales. 187.b

29 Si duobus circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate vnius lateris

latéris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum perpendicularis ducatur; hæc nullo modo circulum minorem tangit, ſed extra ipſum cadit. 188.b

Duo polyedra ſimilia in duabus ſphæris deſcripta proportionem habent triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. 191.a

Sphæra ad ſphæram eſt, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. 193.b

IN TERTIODECIMO LIBRO.

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſſit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 197.a

Si recta linea inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti; Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 198.a

Si recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum erit illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat ſolio. 199.a

Si linea recta ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris ſegmenti; Erit quoque dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiusque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ. 199.b

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitque maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum Apotome. 200.a

Si latus hexagoni in quopiam circulo deſcripti ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſt latus decagoni in eodem circulo deſcripti. 202.b

Si lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius

	segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.	202.b
8	Linea recta, quæ ex centro circuli ducta diuidit arcum quemcunque bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos.	204.b
9	Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni in eo descripti ducta diuidit & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum, bifariam, & ad angulos rectos.	204.b
10	In dato circulo pentagonum, & decagonum una eademque opera describere.	204.b
11	Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter eius ex uno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quæque uicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur a latere opposito.	207.a
12	Si ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.	208.b
13	Diameter sphæræ potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basim pyramidis descripti.	209.a
14	Linea perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri.	209.a
15	In octaedro tres diametri se mutuo ad angulos rectos secant in centro sphæræ; nec non & tria quadrata ex lateribus octaedri composita se mutuo ad angulos rectos secant.	210.b
16	Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum ex octaedri lateribus compositum.	210.b
17	Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri.	210.b
18	Bases octaedri oppositæ sunt parallelæ.	211.a
19	Omnes diametri cubi inter se sunt æquales, sesquemutuo bifariam in centro sphæræ secant; nec non & rectæ lineæ, quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt, bifariam diuiduntur in eodem communi.	212.a
20	Potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentijs laterum	

	rum tetraedri, & cubi simul sumpeis. 212.*b*	
21	*Sphæræ diameter potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri pentagonum cunctiuentia ambientis.* 215.*b*	
22	*Sphæræ diameter composita est ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli, qui circa quinque Icosaedri latera describitur.* 215.*b*	
23	*Latera Icosaedri opposita sunt parallela.* 214.*b*	
24	*Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.* 219.*a*	
25	*Latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi.* 219.*a*	
26	*Si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum est latus dodecaedri, maius segmentum est latus cubi eiusdem sphæræ.* 219.*a*	
27	*In Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus se se in centro dodecaedri bifariã quoque, & ad angulos rectos secantibus.* 219.*a*	
28	*Si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadẽ sphæra comprehensi.* 219.*a*	
29	*Præter quinque corpora regularia, quæ Euclides hoc lib. construxit, nullum aliud dari potest.* 212.*b*	

IN QVARTODECIMO LIBRO.

1.	LINEA *perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineã rectam in eodem circulo aptatam, secat arcum, quem dicta hæc linea subtendit, bifariam.* 216.*a*	
2	*Perpendicularis linea ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis est vtrique lineæ simul, & ei, quæ ex cẽtro ad latus triãguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendicularis, & dimidiæ lateris decagoni.* 226.*b*	
3	*Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eo-*	

dō cētro ad latus trianguli æquilateri ducta, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum. 227.a

4 Si in sphæra eadem cubus, et dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi, & quadratum lateris dodecaedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum dodecaedri circumscribentis. 228.a

5 Si latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli. 228.a

6 Superficies cuiuslibet dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, et perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. 231.a

7 Si ex centro circuli triangulum tetraedri circunscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum sexies sumptum, superficiei tetraedri æquale. 231.a

8 Si ex centro circuli triangulum octaedri circunscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies sumptum, superficiei Octaedri æquale. folio. 231.a

9 Si ex centro circuli quadratum cubi circunscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus quadrati; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies suptum, superficiei cubi æquale. 231.a

10 Rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad unum eius latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, æquale pentagono dodecaedri in eadem sphæra constituti. 232.b

11 Quam proportionem habent latera cubi, & Icosædri eiusdē sphæræ, eandem habent latera cubi, & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum. 234.b

12 Superficies dodecaedri ad superficiem Icosædri non solum habet eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri

dri in eadem sphæra cum ipsis, ut uuls propos. 9. huius lib. sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra. 235.a

Si sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit. 235.a 13

Si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si uero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficiatur circulus habens aliud centrum, quam sphæra; illud uidelicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. 235.b 14

Circuli in sphæra æquales, æqualiter distant a centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphæræ, æquales sunt. 236.a 15

Eadem proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri; & superficiei dodecaedri ad superficiem Icosaedri; & lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, et eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdē sphæræ. 237.b 16

Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum deductæ. 237.b 17

Linea perpendicularis ex uno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissa secat & angulum, & latus bifariam. 238.a 18

Si sphæræ diameter fuerit Rationalis; erit tam superficies tetraedri, quam octaedri in ea sphæra, Media. 238.a 19

Omne triangulum æquilaterum, cuius latus sit Rationale, est superficies Media. 239.a 20

Si tetraedrum, atque octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis tetraedri sesquitertia basis octaedri: Superficies autem octaedri sesquialtera superficiei tetraedri. 239.a 21

Recta linea ex angulo quouis tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, eiq; perpendicularis ad dictam basim. 239.b 22

Octaedrum in sphæra descriptū diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis uero utriusque est quadratum subduplū quadrati diametri sphæræ. 239.b 23

Tetraedrū sphæræ impositū ad octaedrū in eadē sphæra descri 24

ptum se habet, vt rectangulum sub linea potente vigintiseptem
sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri, & sub li-
nea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehen-
sum, ad quadratum diametri sphæræ.

Vel ut Campanus ait.

Tetraedrum sphæræ impositum ad octaedrum in eadem sphæ
ra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia
est subsesquitertia trium quartarum partiũ lateris tetraedri, &
sub linea superquintupartiente vigesimas septimas partes ea-
rundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentũ,
ad quadratum diametri sphæræ. 241. d

25 Linea perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquila-
teri ad basin oppositam demissa, tripla est eius perpendicularis,
quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur. 242. a

26 Linea perpendicularis ex qualibet angulo triãguli æquilate
ri ad basim oppositã ducta, sesquialtera est eius, quæ inter cen-
trũ triãguli, & dictũ angulũ interiacitur: Hac autẽ inter cẽ-
trũ triãguli, et dictũ angulũ interiecta, dupla est eius perpendi
cularis, quæ ex centro triãguli ad basin eiusdẽ ducitur. 242. b

27 Si octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphæ-
ra potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ
in basim quamcunque octaedri deducitur. 243. b

28 Duplum quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti,
æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: perpendicu
laris autem a centro sphæræ in aliquam basim cubi demissa,
æqualis est dimidio lateris cubi. 244. a

29 Solidũ, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias par-
tes quadrati diametri sphæræ dictũ cubũ cõprehendẽtis, æquale est
cubo. Vel solidũ, quod fit ex latere cubi in tertiam partem qua-
drati diametri sphæræ, æquale est cubo. 244. b

30 Solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuscunq; cor-
poris regularis ad aliquã eius basim ducta, in tertiã partẽ sup-
ficiei ipsius corporis, æquale est pposito corpori regulari. 244. b

31 Idem circulus comprehendit & cubi quadratum, et octaedri
triangulum eiusdem sphæræ. 245. a

Linea perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui
bases oppositas tam cubi, quam octaedri in eadem sphæra cir-
cunscribunt, æquales sunt. 245. b

32 Si octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur

tur; erit octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. 246.a.

Altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri eiusdem sphæræ est, ut latus octaedri ad latus tetraedri. 246.b. 34

Diameter sphæræ ad latus tetraedri est, ut latus octaedri ad latus cubi eiusdem sphæræ. 246.b. 35

Si recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam secta extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ, latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit. 247.a. 36

Si latus octaedri potuerit maius & minus segmentum recta lineæ extrema ac media ratione sectæ; poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti. 248.a. 37

Si recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus extitit dodecaedri. 248.b. 38

Si lineæ quotuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus octaedri, maius segmentum est latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua octaedrum describitur. 249.a. 39

Si latus tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extremæ ac media ratione sectæ; latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti sesquialterum est minoris segmenti. 249.a. 40

Cubus ad octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est ut superficies cubi ad octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ. 249.b. 41

Si sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut sit eadem antecedens omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata. 251.b. 42

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam rectu loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius 43

ipſius lateris. 252.bi

44 Si in triangulo æquilatero perpendiculariæ ducantur ex una angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. 253.a.

45 Si cubus & tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit quadratum cubi ad triangulum tetraedri, ut latus tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli tetraedri ad latus oppoſitum deducitur. 253.a.

46 Latus tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, ſeu altitudinis ipſius: Axis uero, ſiue altitudo tetraedri potentia ſeſquitertia eſt lateris cubi in eadem ſphæra deſcripti. 253.bi

47 Diameter ſphæræ potentia eſt dupla ſeſquiquarta axis tetraedri; atque adeo diameter longitudine eſt ſeſquialtera axis tetraedri. 254.a.

48 Axis, ſeu altitudo tetraedri ad latus cubi eidem ſphæræ inſcripti eſt, ut latus tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. 254.a.

49 Cubus triplus eſt tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. 254.a.

50 Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. 254.b.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 Si in Tetraedro octaedrum inſcribatur, diuidetur Tetraedrum bifariam tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 256.a.

2 Rectæ lineæ centra baſium cubi oppoſitarum connectentes ſe mutuo & bifariam, & ad angulos rectos ſecant. 256.b.

3 Idem eſt centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri. 258.b.

4 In dato octaedro pyramidem deſcribere. 258.b.

5 Si tetraedrum octaedro inſcribatur, erunt quatuor baſes tetraedri octo baſibus octaedri parallelæ, ſingula videlicet binis oppoſitis. 259.b.

6 Si in octaedro tetraedrum inſcribatur; rectæ, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialtera eſt axis tetraedri,

traedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basim oppositam deducta. 259.b.	
In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 259.b.	7
In dato Dodecaedro cubum describere. 260.b	8
Recta, qua subtendit unum angulum pentagoni aquilateri, & aquianguli, parallela est opposito lateri. 261.a.	9
In dato Dodecaedro octaedrum describere. 261.a	10
In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 261.b.	11
In dato Icosaedro cubum describere. 262.a.	12
In dato Icosaedro pyramidem describere. 262.a.	13
In dato cubo Dodecaedrum describere. 262.b.	14
Diameter Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum describitur. 265.b.	15
Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius uero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti. 265.b	16
Latus cubi aquale est duobus lateris, dodecaedri nidelicet in ipso descripti, & dodecardri circa eundem cubum descripti. 266.a.	17
Recta duos angulos pentagonorum dodecaedri communi lateri oppositos connectens est aqualis lateri cubi, cui dodecaedrum inscribitur. 266.a.	18
In dato cubo Icosaedrum describere. 266.a.	19
Diameter Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis. 267.a	20
Bifaria sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniungantur tribus rectis aqualibus, se se in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus. 267.a.	21
Si latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti. 267.b.	22
Icosaedri tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela. 267.b.	23
In dato Icosaedro octaedrum describere. 267.b.	24
Idem est centrũ Icosaedri, & octaedri in eo descripti. 268.a	25
In dato octaedro Icosaedrum describere. 268.a.	26
Si duo latera triãguli aquilateri secentur extrema & media ratione, ita ut unius maius segmentum, alterius uero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Recta connectens dictas sectiones duplum potest minoris segmenti. 270.a.	27

28 *Si in octoedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri, idemque erit centrum basis octaedri, & Icosaedri.* 270.a.

29 *Idem centrum est octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri.* 270.a.

30 *In dato octaedro dodecaedrum describere.* 270.b

31 *In data pyramide cubum describere.* 270.b.

32 *Idem est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti.* 272.a.

33 *Recta, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transit per centrum pyramidis, triplaque est lateris cubi in pyramide descripti.* 272.a.

34 *Idem est centrum pyramidis, & octaedri in ea descripti.* 272.b.

35 *In data pyramide Icosaedrum describere.* 273.a

36 *In data pyramide Dodecaedrum describere.* 273.b.

37 *In dato solido regulari sphæram describere.* 273.b.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 *Si in dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud dodecaedrũ; erit proportio Dodecaedri exterioris ad dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.* 275.a

2 *Linea perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.* 276.a.

3 *Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita ut prope quemuis angulum sit maius segmentum unius lateris, & minus alterius; Hæ sectionibus suis in medio producens basim Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.* 276.a.

4 *Latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione.* 277.a

Minus segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti. 277.b.	5
Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 278.a.	6
Latus cubi potentia dimidiũ est lateris pyramidis in eo descriptæ: Latus uero pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplumeſt potentia lateris sibi inscripti octaedri. 278.a.	7
Latus dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris pyramidis sibi inscriptæ. 278.b.	8
Si in cubo describatur & Icosaedrum, & dodecaedrum; Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & dodecaedri. 278.b	9
Latus pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. 279.a.	10
Latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est dodecaedri in pyramide descripti. 279.a.	11
Si in octaedro Icosaedrum describatur; erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi. 279.b	12
Latus octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti. 279.b.	13
Octaedri latus est potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est dodecaedri octaedro inscripti. 280.a.	14
Latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. 280.a.	15
Latus cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus uero dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentũ ad maius eiusdẽ rectæ lineæ. 280.b.	16
Latus octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ pyramidis. 281.a.	17
Si ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri. 281.b.	18

Diameter

19 *Diameter Icosaedri binas rectas potest, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis.* 282.a.

20 *Latus dodecaedri minus segmentum est rectæ linea extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti.* 282.b.

21 *Diameter Icosaedri potest & suipsius lateris sesquitertiũ, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.* 282.b.

22 *Latus dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, ut minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.* 283.a.

23 *Si dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; A reliquia quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquet latus dodecaedri in Icosaedro descripti.* 283.b.

24 *Cubus sibi inscriptæ pyramidis triplus est.* 285.a

25 *Pyramis sibi inscripti octaedri dupla est.* 285.b.

26 *Cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est.* 285.b.

27 *Octaedrum sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.* 286.a.

28 *Idem centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti.* 287.a.

29 *Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadrata habent.* 287.a.

30 *Octaedrum sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est.* 287.a.

31 *Pyramis sibi inscripti cubi noncupla est.* 287.b.

32 *Octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.* 288.a

33 *Icosaedrum ad sibi inscriptum dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.* 289.b.

34 *Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, siue latere cubi,*

cubi, minore segmento eius linea, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 290.a

Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius linea, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit; Altitudo uero & longitudo & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius linea, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. 291.a. 34

Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter dodecaedri ad rectam centra basium dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cubo descripti. 291.b. 36

Dodecaedrum Pyramidis, in qua inscribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertiæ partis minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius linea, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Altitudo autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales. 293.b. 37

Octaedrum excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ. 294.a 38

Pyramis excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta linea bifariam sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. 295.a. 39

Angulum inclinationis duarum basium pyramidis, unius ad alteram, inuenire. 295.a. 40

Omnes inclinationes basium pyramidis æquales inter se sunt. 295.a. 41

Angulum

42 *Angulum inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.* 296.a.

43 *Oēs inclinationes basiū octaedri aequales inter se sunt.* 296.b.

44 *Angulum inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.* 296.b.

45 *Omnes inclinationes basiū cubi aequales inter se sunt.* 297.a.

46 *Angulum inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.* 298.a.

47 *Omnes basium Icosaedri inclinationes inter se aequales sunt.* 298.a.

48 *Angulum inclinationis duarum basium dodecaedri, unius ad alteram, reperire.* 298.a.

49 *Omnes inclinationes basium dodecaedri aequales sunt inter se.* 299.b.

FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

ORTVS *hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus, proprietates{que} triangulorum tum iuxta angulos, tum iuxta latera, quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnumquod{que} per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera secundum æqualitatem, atq{ue} inæqualitatem, rimatur. Idemq{ue} varijs rationibus inquirit in duobus quãdoq{ue} triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq{ue} contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter eas-dem parallelas constitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq{ue}, vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Proclisententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atq{ue} parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorũ rem propositam exorditur a principijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac*

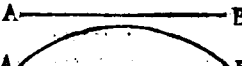
facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem, altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas n. oīs cōtinua aut longa solū est, aut longa simul & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt rēcte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, hactenus nondū est excusus. Itaq; quod in quātitate cōtinua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum esse cogitetur, id appellatur ab Euclide, & a Geometris punctum. Huius exēplū in rebus materialibus punctum reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem punctū exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT *hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati.*

obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & umbræ extensa; carens omni latitudine, cum sit limes utriusq;. Mathematici quoq;, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere internallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine. propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint. lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam internallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari, atq; diuidi.



III.

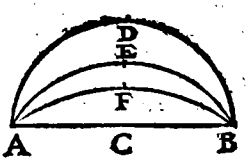
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminus assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea quælibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IIII.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue compositu ex vtraq;. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc declectando subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad visum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionẽ exponens ait, tunc demũ lineã aliquã ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spacium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tãtum occupat præcise spaciũ, quanta est distantia puncti A, a puncto B: Lineæ vero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spacia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quodvis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremũ B, ob interiectum punctum C. quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiacerent sua puncta, sed expotius linea, quæ minor di

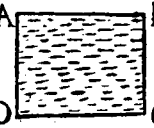


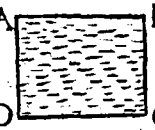
rior diceretur, quam A C B. Campanus describens rectam lineam, vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus egit copiosissime Apollonius in conicis elementis, linea Conchoides, de qua Nicomedes, linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & aliæ huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus: quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunq; sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum. lib. 1. tex. 5.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq; primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B,





B C, C D, D A, comprehensa consideratáq; secundum longitudinem A B, vel D C, & secundũ latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusq; corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum propter longitudinem lineæ, latum quoq; propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem intervallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

V I.

SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

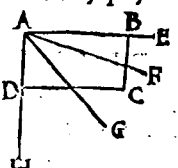
Non dissimilis est hæc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineæ A B, B C, C D, D A; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, qua extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, qua corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

PLA-

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HAEC quoq; definitio similitudinem quãdam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumue subsultando, non recedant, appellabitur plana. qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorue, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tunc demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circunducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadẽ, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendis depressum, aut sublatum, sed omnia



puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minimæ superficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circunduci, propter aliquem tumorem seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaq; vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta lineæ commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum A B, & A F, & deniq; secundum omnes partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur super-

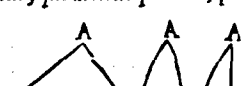
ficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones; Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non plana. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest: Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.



VIII.

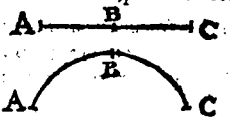
PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, *quid nam sit angulus planus, dicens; Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ*



non

non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactui, qui fit, quando duo circuli se continguht, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo se iungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: quia de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam, non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productæ se mutuo secent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod se se contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotæ cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea enim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neq; anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt; Posterius vero sphærales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorum maximorum circunferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum a nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

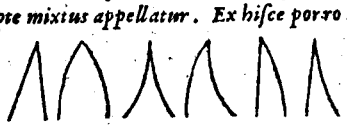


CVM

IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum conuexum, & concauũ, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisue linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & alijs commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.

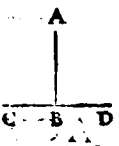


X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpẽdicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, pro-

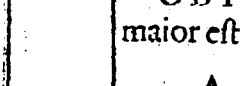
ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & qua nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, praeter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, rectae C D insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadē linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se aequales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed aequabiliter rectae C D, insistet; vocabitur uterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectae C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectae A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, unum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus aequalis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos aequales, docebit Euclides propositione 11, & 12. huius primi libri. Itaq; vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quae ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, aequalem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quae ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps aequalem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se aequales, nuncupatur uterque illorum rectus, & lineae ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint aequales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos constituens perpendicularis appellatur. Haec dixerim, vt videas, quid nam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quem nam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore, haec quae diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.



QVANDO recta AB, rectæ CD, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniã vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

TERMI-

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam Figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatas, & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, vt solida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Superficies quoq; infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figuræ vnico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & aliæ huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circunscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinq; propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

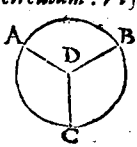
XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub

vna

vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectißimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circunscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spacium concludatur vnica linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote a D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebis Euclidis propositione 1. tertij lib. Adiungit quoq; Euclides, lineam extremam circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Potest circulus etiã hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremũ quiescens circunducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cæperat. Qua quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. xi. Vt si intelligatur recta A D, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, a quo dimoueri cæpit, describet ipsa recta totum spacium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoq; punctum quiescens D, illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta A D, circunducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circunscripta, tamen quia in ea non datur punctum a quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.



HOC

XVI.

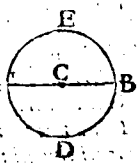
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, a quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.

XVII.

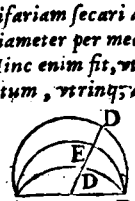
DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraq; parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur oĩs in circulo rectæ lineæ ductæ diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsq; ad peripheriam vtrinq; extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum



bifariam

bifariam ſecari a diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinq; æquales circunferentiæ abſcindantur. Quod



tamen Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis ſit vtriq; portioni: Si igitur circunferentia A D B, congruæ penitus circunferentiæ A E B, manifeſtum eſt, duas illas portiones a diametro factas, eſſe inter ſe æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circunferentia A D B, non omni ex parte cadere dicatur ſuper circunferentiam A E B, ſed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro C, ſecans circunferentiam A D B, in D, & circunferentiam A E B. in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ducta ex centro ad circunferentiam eiuſdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna ſit pars alterius, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, ſed ambæ inter ſe aptabuntur, ideoq; æquales erunt, quod demonſtrandum proponebatur.

XVIII.

SEMICIRCVLVS vero eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in ſuperiori circulo figura A D B, contenta ſub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur ſemicirculus, quia, vt in præcedenti definitione oſtendimus, ea eſt dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, ſemicirculus. Idem autem punctum C, diametrum ſecans bifariam, centrum eſt in circulo, & in ſemicirculo.

HABENT nonnulla exemplaria hoc in loco definitionem egmenti circuli: Verum, quia ea repetitur in 3. lib. vbi prius

prius est locus, & Proclus illâ non inuenit in antiquis exemplaribus, maluimus hic illam subticere, eiusq; explicationem in 3. librum, ante quem nulla sit mentio segmentorum circuli, differre.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quæ nam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis compreh[illegible], dici curuilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circunscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circunscribuntur, aperte nobis innuit, quo nam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectilineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM *species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciē, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atq; ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; consentius denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, forte eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes a quolibet definiri possint. Quis enim exiguitatis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atq; reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.*

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterū est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT *iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum,*

rum, vel angulorum, declarat prius ſpecies prioris diuiſionis, quæ tres ſunt dumtaxat, quod tria latera tribus tantum modis ſe ſe poſſint habere. Aut enim omnia æqualia ſunt; aut duo tantum, tertio exiſtente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter ſe æqualia ſunt, dicitur triangulum Æqui laterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; eſſe, ceu ad quintã propoſitionem huius libri demonſtrabimus.



XXIIII.

ISOSCELES autem eſt, quod duo tantum æqualia habet latera.

EX hac rurſum æqualitate duorum laterum trianguli Iſoſcelis effi citur, duos angulos ſuper reliquum latus etiam eſſe æquales, vt demonſtrabit Euclides propos. 5. huius libri. Appoſuimus autem duo triangula Iſoſcelia, quorum prius habet tertium latus vtronis æqualium maius, poſterius autem idem minus obtinet.



XXV.

SCALENVM vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

HIC deniq; ex inæqualitate omnium laterũ trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt oſtendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his conſtat, eodem modo potuiſſe diuidi triangulum in tres ſpecies, ſi æqualitatis anguloru̇ ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli ſint inter ſe æquales; aut duo tantum, tertio maiore,



vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triãgulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem AEquilatero, secundum vero Isoscheli, tertium deniq; Scaleno respondet triãgulo. Cæterum quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus.) fit vt tres quoq; species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut deniq; nullus rectus, nullusq; obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel Scalenum, vt hæ figuræ indicant; AEquilaterum autem nulla ratione. Propter equalitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq;, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod

obtusum

obtusum angulum habet.



TRIANGVLVM amblygonium, siue obtusangulum esse quoq; potest vel Isosceles, vel scalenum vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemus, æquales, ideo q; cum vnus ponatur obtusus, omnes tres obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, esse necessario Oxygonium; At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel rectangulum, vel amblygonium, vel Oxygonium; Vt varia sit species trianguli æquilateri tres vero tam Isosceles, quam Scaleni? atq; in vniuersum septem triangulorum genera, æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles amblygonium, Isosceles oxygonium, scalenum rectangulum, scalenum amblygonium, & scalenum oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum &c. Hoc te breuiter

monere volui, ne putares aliqd latere mysterij in base triāguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

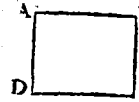
XXIX.

QVADRILATERARVM autē figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

Post figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo constituendum sit quadratum super recta linea proposita finita.

XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

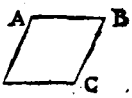


Secvnda figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, & A D, B C, inter se quoq; æqualia sunt, cū A B C D, propter angulorū rectitudinē, parallelogrammū sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

RHOM

XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



Hanc figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant: Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoq; inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterũ, parallelogrammũ sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neq; rectangula.



Est hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neq; eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

RELIQVAS *Omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita, neq; angulos binos oppositos habeant inter se æquales,*



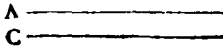
generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidē cum infinitis modis variari queant recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus. sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt; vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraq; parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunq; partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, alteri quoq; accommodari potest secundum omnia eius puncta; quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana rectæ A B, applicetur,

cetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illam circun-
ducta tangat quoq; omnia
puncta alterius rectæ CD;
dicentur huiusmodi rectæ

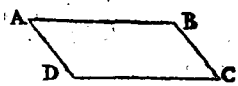


duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eodem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, rectæ ab Euclide vtrumq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum cõuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac distinguantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunq; ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodem existere plano & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conatur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ eadem lineas in eodem requirit existere plano.

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem in libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.



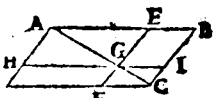
Vt figura quadrilatera A B C D, siquidem latus A B, æquidistet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ nõ sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus

parallela

parallelæ secantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



Sit parallelogrammũ A B C D, in quo diameter A C, & linea E F, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus A D, B C; Item linea H I, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidẽ duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non transit, vocantur a Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat; vt videre est in præsenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

Primvm hoc postulatum planum admodum est, si recte considerẽtur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus: Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens; fit vt si

strictim

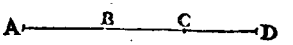
punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione expostulat Euclides, quemadmodum hic vides a puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeræ aliæ ab eodem puncto educi possunt ad alia atq; alia puncta.



II.

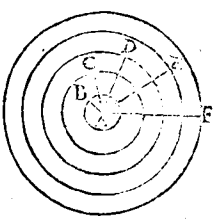
ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam eris finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam dilatantiam. Sic linea recta A B producta est primo in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.



III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM vero, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatis mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremis ad quodvis punctum, ipsamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq; quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinq; lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ singulæ circa centrum A, circum-

circumuolutæ singulos circulos describserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER *hæc tria postulata quibus Euclides cõtentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.*

IIII.

ITEM quacunq; magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS *enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquã dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Namquilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.*

COMMVNES NOTIONES, siue Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

FIERI *nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior æqualis fuerit propositæ quantitati, su-*

ti, superabitur minor ab eadem. Quare recta colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoq; esse.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

Si enim quantitates conflatæ, sive compositæ, inæquales forent, procul dubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoq; æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

Nam si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia.

Quin & si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adiecta fuerint, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

SIC etiam, *Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest. Possunt enim compositæ quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5 detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1, ex 7. & 5. remanebunt 4, & 4. quæ æqualia quoq; existunt.*

PORRO *in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.*

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

SIMILITER, *quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c. alicuius quantitatis, deficeret vtiq; minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si cõtra, minus esset duplex, vel triplex &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari*

bari poteſt, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtriq; tertia illa addatur erunt compoſitæ duplices illius tertiæ; ſed & inter ſe æquales, ob idem additamentum. Quod ſi rurſum compoſitis eadem tertia adijciatur, erunt conſtitutæ triplices eiuſdem tertiæ; Cum igitur & æquales inter ſe, propter idem additamentum, exiſtant; eademq; ſit ratio in cæteris multiplicibus, perſpicuum erit Axioma propoſitum.

2. pron.

2. pron.

VII.

ET quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt.

PARI ratione, quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia, &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt.

VIII.

ET quæ ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

HOC eſt, duæ quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, ſed lineæ illius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.

ECON-

ECONTRARIO, *Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum &c.*

IX.

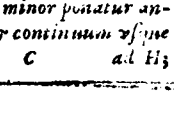
ET totum sua parte maius est.

CVM pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

X.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuive nequeat, sed prorsus sit immutabilis: Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, qua quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet v. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdū. Conatur tamē Proclus ex 10. definitione id demōstrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F, quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitq; A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectā D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis est B G, propterea quod angulus D E F, minor ponatur angulo A B C. Producatur C B, in rectum & continuum vsque 2. petit.



C ad H;

ad H; Cũ igitur angulus A B C sit rectus, erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoq; , quare maior etiam angulo A B G. Producta autem G B, in rectum & continuũ vsq; ad I, cum angulus A B G, ponatur rectus, fiet angulus A B I, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo A B I, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademq; est ratio in cæteris.

10. def. 1. petit. 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud nõ posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis, rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. discemus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XI.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



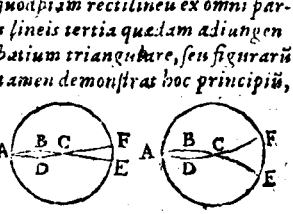
VT si in duas lineas rectas A B, C D, incidens alia recta E F, faciat duos angulos internos, & ex eadẽ parte B E F, D F E, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandẽ coeuenturas esse ad aliquod punctũ vnũ, versus eam partem, in qua duo anguli minores existũt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniã quãdo duo anguli interni, & ex eadẽ parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partẽ coire possunt, sed æquali semper spatio protenduntur, vt propos. 28 huius lib. demõstrabitur: Quare si duo anguli interni, & ex eadẽ parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte di-

te dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem eſſe aliquãdo in vnũ punctum. Verum quia hoc axioma a numero principiorũ omnino reȳcitur ſecundũ Geminũ Geometrã, Proclum, & alios, diciq; debet potius Theorema, quam principiũ, cũ nõ facile quiuis ei aſſenſum præbeat, propterea quod reperiantur & alia linea, quarũ ſpatiũ licet ſemper magis, ac magis coangusteturr, nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamſi infinite producantur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonij. Idcirco illud poſt 28. propoſ. & ante 29. huius libri, vbi primum eius vſus incipit apparere, Geometrice demonſtrabimus ex ſententia Procli, vt ſine vlla dubitatione ad theorema tum, atq; problematum demonſtrationes poſſit aſſumi.

XII.

DVAE rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

NVLLAM prorſus habet difficultatem hoc principium, Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulũ, neceſſario ex altera parte ſemper magis ac magis diſiungẽtur ſi producãtur, vt in exemplo propoſito perſpicuũ eſt. Quare vt ſuperficies, ſpatiumue quodpiam rectilineũ ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda eſt. Ita enim conficietur ſpatium trianguare, ſeu figurarũ rectilinearũ prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri põt vt duæ lineæ rectæ claudãt ſuperficiẽ, cõprehendãt duæ rectæ A B C, A D C, ſuperficiem A B C D, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis A, & C. Facto deinde centro C, deſcribatur circulus interuallo C A, & producantur rectæ A B C, A D ſ, in rectũ & cõtinuũ vſq; ad circunferẽtiã, nempe adpũcta E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, trãſeunt per centrũ C, erũt ſemicirculi A E, A E F, inter ſe æquales, & idcirco circunferentia quoq; A E, circunferẽtiæ A E F, æqua-



3. pet.
2. pet.
17. def.

lis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spacium comprehendunt. Quod est propositum.

HVIC duodenario numero Axiomatum ab Euclide positorum adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometriæ decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cum Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

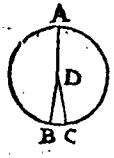
XIII.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

NON est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur. fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & interuallo D A, describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C;

3. pet.

17. def.



Erunt igitur duæ circunferentiæ A B, A B C, inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in subsequenti figura, rectæ A G, E B, commune habent segmentum B G; quia ambæ vnam rectam constituunt lineam A E. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere A B, A C, in superiori exemplo, nõ possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte a Proclo fuit demonstratum.

XIIII.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.

HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. AEqualibus itaq; quantitatibus A B, C D, addantur inæquales B E, D F, sitq; B E, maior quam D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt sit G E, excessus, quo quantitas addita B E, superat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita sunt æqualia B G, D F, erunt tota A G, C F, æqualia. Quare constat, totam quantitatem A E, superare totam C F, eodem excessu G E, quo magnitudo D F, adiuncta a magnitudine adiuncta B E, superatur. Quod est propositũ.



2. pron.

XV.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F. vt G E, sit excessus, quo quantitas B E, quantitatem D F, superat. Quoniam igitur æqualibus B G, D F, addita sunt æqualia A B, C D, erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A F, superabit totam C F, eodem excessu G E, quo maior quantitas proposita B E, minorem D F, superat. Quod est propositum.

2. pron.

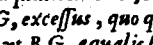
XVI.

SI ab æqualibus inæqualia demantur,

erit reſiduorum exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis.

A B æqualibus A B, C D, auferantur inæqualia B E, D F. Sitq; E G, exceſſus, quo quantitas B E, ſuperat quantitatem D F. ita vt B G, æqualis ſit ipſi D F. Quia igitur ab æqualibus A B, C D, ablata ſunt æqualia B G, D F, remanebunt A G, C F, æqualia. Perſpicuum ergo eſt, reſiduum A E, ſuperari a reſiduo C F, eodem exceſſu E G, quo magnitudo ablata B E, ablatæ magnitudinē D F, ſuperat. Quod eſt propoſitū.

3. pron.



XVII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui totorum æqualis.



A B inæqualibus A B, C D, auferantur æqualia A E, C F. Sitq; B G, exceſſus, quo tota quantitas A B, ſuperat totam quantitatem C D, ita vt A G, æqualis ſit ipſi C D. Quoniam igitur ab æqualibus A G, C D, ablata ſunt æqualia A E, C F, remanebunt E G, F D, æqualia. Quare reſiduum E B, ſuperabit reſiduum F D, eodem exceſſu B G, quo tota quantitas A B, ſuperat totam quantitatem C D. Quod eſt propoſitum.

3. pron.

In his quoq; quatuor proxime poſitis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda eſt vna etiam ſola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adiiciantur, erit totorum exceſſus, adiunctorum exceſſui æqualis. Et ſi inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum exceſſus, exceſſui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et ſi ab eodem communi inæqualia demantur, erit reſiduorū exceſſus, exceſſui ablatorum æqualis. Et ſi ab inæqualibus idem commune dematur, erit reſiduorum exceſſus, exceſſui totorum æqualis. Nam in numeris, ſi ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum exceſſus

exceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorũ exceſſus 2, idem eſt, qui ipſorũ 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt qui ipſorum 5. & 2. Deniq; ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

XVIII.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM omnes partes ſimul ſumptæ conſtituũt totũ, cuius ſunt partes, manifeſta eſt veritas huius axiomatis.

XIX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiã eſt reliqui huius 7. In vniuerſum aũt hoc demõſtratur propoſ. 5. lib. 5. nimirũ. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atq; ablata ablatæ, vt decupla, vel cẽtupla, &c, & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atq; tota totius.

COLLIGI poteſt ex dictis cũ Proclo, & Gemino hoc diſcrimẽ inter poſtulata, & Axiomata, quod cũ vtraq; ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturã ſapiũt Problematũ, propterea quod aliquid fieri expoſcant; hæc vero, Theoremata imitãtur, cũ nihil fieri petãt, ſed ſolũ ſententiã aliquã notiſſimã proponãt. Differt aũt Poſtulatũ a problemate, qđ cõſtructio poſtulati non indigeat vlla demõſtratione, problematis aũt conſtructionẽ cõcedat nemo ſine demonſtratione, eo qđ difficile aliquid nobis exhibeat cõſtruendũ. Idẽ diſcrimẽ inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud. n. demonſtrari nõ debet, hoc vero concedendũ nulla eſt ratione, niſi demõſtretur. Nam nemo huius propoſitionis demonſtrationẽ, vel etiã probationẽ requiret.

Quæ eidem æqualia, inter se quoq; æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;.

CONSTAT *quoq; Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, & tertiumdecimũ, soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquũt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; Ita quoq; numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.*

HAEC *dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.*

ANTEQVAM *porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, quoad ordinem propositionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. libris perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq;*

vtrimſq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt ſi aliquando numerus propoſitionum a Geometra quopiam citatus non reſpondet alteri interpreti, alteri ſaltem conueniat. Deinde ne curſus demonſtrationum interrumperetur, citauimus principia, & propoſitiones Euclidis in margine, quæ quidem citationes intelligendæ ſunt modo infraſcripto.

1. *def.*	*Prima definitio. & ſic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. *per.*	*Prima petitio.*
1. *pron.*	*Primum pronunciatum, ſeu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. *primi.*	*Prima propoſitio primi libri.*
23. *Vndec.*	*Vigeſimatertia propoſitio vndecimi libri.*
6. *tertijd.*	*Sexta tertijdecimi libri.*
9. *ſextid.*	*Nona ſextidecimi libri. &c.*
13. *duod.*	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. *quind.*	*Septima libri quindecimi.*
5. *quartid.*	*Quinta libri quartidecimi.*

Ex his aliæ citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus eſt ratio.

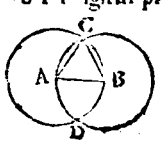
PROBLEMA I.

1. PROPOSITIO. I.

SVPER data recta linea terminata triangulum AEquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunq; , ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematis perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, ac efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant demonstrationem.

SIT igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, describatur circulus C B D: Itē centro B, & interuallo eiusdē rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; Eritq; super rectam A B, constitutū triangulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse



3. *post.*

1. *post.* 20. *def.*

rio esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunfereiitiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quàm B C, æqualis est rectæ A B. Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atq; idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat. 15. def. 1. pron.

SCHOLION.

VT autẽ videas, plures demõstrationes in vna propositione contineri, placuit primã hanc propositionẽ resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demõstrationis. Si quis igitur probare velit triangulũ A B C, constructũ methodo pradicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, est æquilaterum. 23. def.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, inter se quoq; sunt æqualia. 1. pron.

Duo latera A C, B C, æqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia existunt.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, inter se sunt æquales. 15. def.

Lineæ A B, A C, sunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.

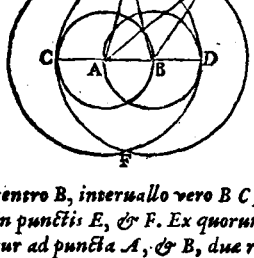
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales; cum ducantur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones non solum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SIQVIS autem super data recta desideret constituere triangulum quoq; Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. Deinde producatur A B, in vtramq; partem ad circunferentias vsq; ad puncta C, & D. Atq; centro A, interuallo vero A D, describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit super recta A B, triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & maiora latere A B. Cum enim recta A E, A D, ducantur e centro A, ad circunferentiam E D F, erit A E, æqualis recta A D. Item cum recta B E, B C, ducantur e centro B, ad circunferentiam E C F, erit B E, æqualis recta B C: Sunt autem recta A D, B C, æquales inter se, (vtraq; enim A C, & B D, æqualis est recta A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circunferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circunferentiam quoq; egrediantur: Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur cõi recta A B, erit tota A D, toti B C, æqualis.) Igitur A E, B E, æquales quoq; inter se erũt. Quod vero vtraq; A E, B E, maior sit quã A B perspicuũ est, cũ A D, æqualis ostẽsa ipsi A E, maior sit, quã A B; Itẽ B C, æqualis demõstrata ipsi B F, maior quoq; sit, quã A B. Constituũ igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiora latere A B qđ faciendum erat. Atq; hæc est demonstratio Procli, aliorumq; interpretum Euclidis.



2. pet.

3. pet.

1. pet.

20. def.

15. def.

15. def.

BREVIVS tamẽ videtur mihi posse demonstrari, trianguluũ A B E, esse Isosceles, hac ratione. Quoniã A E, æqualis est

15. def.

recta

rectæ A D, & recta A D, est dupla rectæ A B propterea quod B A, B D æquales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. 6. pron.

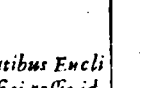
Rursus quia B E, æqualis est rectæ B C, & BC, dupla est ipsius A B, propterea quod A b, A C, æquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsi A B. Cum igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdē A B, erunt A E, B E, inter se æquales, maioresq; propterea recta A B. Isosceles ergo est triangulum A B E. 15. def. 15. def. 6. pron.

IAM vero, si ex punctō A, ducatur linea recta A G, ad circunferentiā E G F, quæ nō sit eadē quæ A E, vel A D, secans circunferentiā E H D, in punctō H, & ex G, ad B ducatur alia rectā G B; constituū erit triangulū A B G. *super rectā A B, quod dico esse scalenū. Quoniam A G, maior est quam A H: Sunt autem A H, A E, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & A G, maior quam A E, hoc est, quam B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, cū B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior quam A B, propterea quod tota B C, æqualis ipsi B G, maior sit quā A B, pars. Omnia ergo tria latera triāguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.* 1. pet. 1. pet. 20. def. 9. pron. 15. def. 15. def. 9. pron.

PRAXIS.

CONABIMVR *in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quādā facilē, & breuē, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis cōtendit construere; Idq; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorē vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium ali quod secum videtur afferre.*

ITA QVE *triangulū æquilaterū ita facile construetur sup data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero datæ rectæ A B, describantur duo arcus circulorū se intersecantes in punctō C, siue hoc infra lineā cōtingat siue supra. Post hæc ducātur duæ rectæ A C, B C, ex punctō C, ad puncta A, & B; facti itaq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadē est demonstratio cū superiori. si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario per puncta A, & B.*

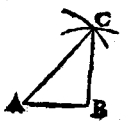


ISOSCELES *ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius elegamus,*



mus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C; constituumq; erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale internallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta A B.

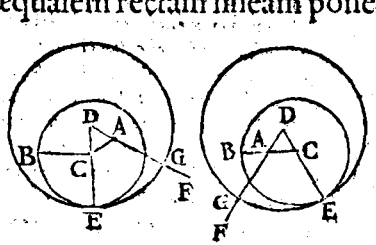
SCALENVM deniq; hoc modo fabricabitur. Super data recta A B. Ex centro B. internallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, internallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constituumq; erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate internallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.



CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunq;, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctū datum A, & data recta linea B C; cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto ad terminum extremo lineæ B C, nempe C, centro, describatur circulus B E, internallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim producta sumetur A C, vt secūda figura indicat.) Super recta vero A C, cōstituatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum

3. *pet.*
1. *pet.*
1. *primi.*

deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, extendantur; D C, quidem oppositæ puncto dato A, vsque ad circunferentiã in E; D A, vero oppositæ centro C, quantumlibet in F. Deinde e centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrũ trãseuntis, alter circulus describatur E G, secãs rectã D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctũ datũ A, æqualẽ esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circunferentiã E G, ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidẽ C E, æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadãt e centro C, ad circun ferentiã B E.) Igitur rectæ A G, & B C, quãdoquidẽ vtraq; æqualis est ostẽsa rectæ C E, inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctũ, &c. quod erat faciendũ. 2. pet. 3. pet. 15. def. 3. pron. 15. def. 1. pron.

QVOD, si punctũ datũ fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, describatur circulus, ad cuius circunferentiã recta ducatur vtcumq; C E, erit hæc posita ad punctũ datũ C, æqualis datæ rectæ B C, cum vtraq; & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circunferentiam B E. 3. pet. 1. pet. 15. def.

SCHOLION.

Hvivs problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datũ punctũ in ipsa data recta est positũ, aut extra ipsã: Si in ipsa, erit vel alterũ extremorũ eius, vel inter vtrũq; iacebit extremũ. Si vero extra ipsam, erit vel e directo datæ lineæ, ita vt ꝑducta in rectũ & cõtinuũ p ipsum ꝑctũ trãseat; vel nõ e directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorũ quoduis recta linea ducta cũ data recta angulũ efficiat; Quo modo vel supra datã lineã erit cõstitutũ, vel infra, vt manifestũ est. In omnibus aũt illis casibus semper eadẽ est cõstructio, & demõstratio. Quod si in constructione fiat triãgulũ A C D, sup recta A C. Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

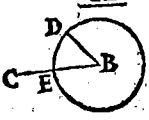
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqua-

libus,

libus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineã æqualem minori A. Ad alterutrum extremorũ lineæ maioris B C, nempe ad punctũ B, ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualẽ ipsi A. Quoniã B E, æqualis est rectæ B D, & eidẽ B D, æqualis est recta A, per constructionem; erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.



2. primi.
3. per.
15. def.
1. prom.

QVOD si duæ rectæ datæ cõiungãtur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, cõiunctæ in extremo vtriusq; B; describẽdus erit circul⁹ ex B, ad interuallũ minoris B D. Hic. n. auferet B E, æqualẽ ipsi B D, vt cõstat ex definitione circuli.

SCHOLION.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alterã cõtingat; vel nõ, sed vel coniungãtur ad vnũ extremũ, vel se mutuo secent, vel certe altera alterã suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4. THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habeãt, vtrũq; vtriq;, habeãt vero & angulũ angulo æqualẽ sub æqualib⁹ rectis lineis cõtentũ: Et basim basi æqualẽ habebũt; eritq; triangulũ triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterq; vtriq;, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT



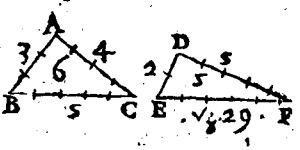
SINT duo triangula ABC, DEF, & unius utrumque latus AB, AC, æquale sit alterius utrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & utrunque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam angulus A, æqualis ponitur angulo D, fit, ut si alter alteri intelligatur superponi, neuter alterum excedat, sed linea AB, congruat lineæ DE, & linea AC, lineæ DF. Cum igitur AB, & DE, ponantur esse æquales, neutra etiam alteram excedet, sed punctum B, cadet in punctum E; Eademque ratione punctum C, in punctum F, propter æqualitatem linearum AC, & DF, ex hypothesi. Itaque cum punctum B, congruat puncto E, & punctum C, puncto F, necessario & basis BC, congruet basi EF, (ut mox demonstrabitur) ac propterea illa huic æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF, & angulus B, angulo E, & angulus C, angulo F, æqualis ob eandem causam existet. 8. pron. 8. pron. 8. pron.

Quod autē basis BC, cōgruat basi EF, si punctū B, puncto E, & punctū C, pūcto F, cōgruit; facile demōstrabitur. Si nō cōgruere dicat basis BC, basi EF, cadet uel supra, ut efficiat rectam EGF, uel infra, ut cōstituat rectā EHF. Vtrū uis horum concedatur, claudent duæ lineæ rectæ EF, EGF, uel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quam EHF, rectam esse, cum utraque ponatur eadem esse, quæ recta BC) Quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiē claudere non possunt. Non ergo basis BC, cadit supra, uel infra basem EF, sed illi congruet Quare ipsæ inter se æquales sunt, &c. Quocirca: si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. quod demonstrandum erat. 12. pron.

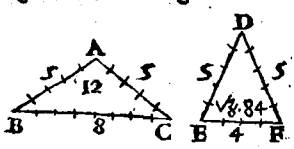
D SCHO-

SCHOLION.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, ut duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumque utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia; Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt unquam esse quales, triangula uero admodum rara æqualia existent, ut probabitur loco a Proclo demonstrando. Sint enim triangulorum A F C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem utrunque utrique sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque A B, 3. A C, 4. ut ambo simul efficiant 7. At uero D E, sit 2. & D F, 5. ut ambo quoque simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis B C, 5; & basis E F, radix quadrata huius numeri 29, quæ maior quidem est quam 5, minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area uero trianguli D E F, 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non utrumque latus utrique lateri æquale existat in dictis triangulis A B C, D E F.



RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumq; utrique, sitq; unumquodq; 5; anguli uero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitque A, maior, quã D. Quibus concessis, erit basis B C maior basi E F ut propos. 24. huius libri ostẽdetur. Quod si basim B C ponamus esse 8. basim autẽ E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area uero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est quam 9. minor uero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur

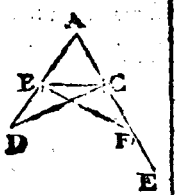


Vt probe hoc loco a Proclo demonstratum est triangula uero ipsa recte possint esse æqualia, deficiente posteriore duarum conditione, ut ex scholio prop. 37. huius libri constabit, haud raro admodum illud continget.

igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triã gula ipſa æqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, ut utrumque latus unius æquale ſit utriq; lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales exiſtant, ut optime dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.



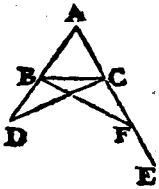
SIT triangulum Iſoſceles A B C, in quo duo latera A B, A C, inter ſe ſint æqua lia: Dico angulos A B C, A C B, ſuper ba ſim B C, æquales inter ſe eſſe: Item, ſi la tera æqualia A B, A C, producantur quã tum libuerit, uſque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra ba ſim eandem B C, eſſe æquales. Ex linea enim A E, producta infinite abſcindatur A F, æqualis ipſi A D, & ducantur rectæ B F, C D. Conſiderentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B A F, trianguli A B F, æqualia ſunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, utrumque utrique, nempe A B ipſi A C, ex hypotheſi, & A F, ipſi A D, ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A communis eſt utrique triangulo: Erit baſis B F æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & poſteriores, opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, ut patet. Rurſus cõ ſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam uero re ctæ A D, A F, æquales ſunt per conſtructionem, fit ut, ſi auferantur ex ipſis æquales A B A C, & reliquæ B D, & C F, ſint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia ſunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, utrumque utrique, uidelicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi F B, ut probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, cõ-

3. primi.

2. pet.

4. primi.

3. pron.

tenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut oſtenſum etiam
4. primi fuit. Igitur erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D angulo C B F. Tam enim priores duo, quã poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntq; ſupra communem baſim B C, utriuſque trianguli B D C, C F B. Quod ſi ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales eſſe iam demõſtrauimus in prioribus triangulis) detrahãtur anguli æquales C B F, B C D (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe


3. prom. æquales) remanebũt anguli A B C, A C B, ſupra baſim B C, æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem ſunt infra eandem baſim B C, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe, & infra eandem inter ſe quoque ſunt æquales; Ac propterea Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

anguli

SCHOLION.

HAEC propoſitio uera etiam eſt in triangulis aquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis uideatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus, ſiue reliquum latus B C, ipſis quoque ſit æquale, ut contingit in triangulo æquilatero, ſiue inæquale, ut in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, ut conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculum uideri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Veruntamen, ſi diligenter theorematis præcedentis uis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, ſi modo memor ſis, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponũtur. Quod quidem quoniam Campanus non appoſuit, cauſa fuit, ut confuſa eſſe uideatur, & ſubobſcura eius demonſtratio.

CORO-

COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres anguli trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.



5. prim.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.



In triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur esse quam A B,) ducaturq; recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, triāguli D B C, utrumq; utrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: Erunt triāgula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri nō potest. Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. quod demonstrandum erat.

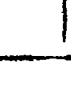
5. primi

4. primi

SCHOLION.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic uero, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet uideri, ſi Mathematici aliquando conuertunt propoſitiones, ita ut nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod, nunc uero rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, uideri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & conſequens; Cuius ego rei unum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. huius lib. Si trianguli cuiuſuis unum latus producatur, angulum externum maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figuræ cuiuſuis rectilineæ uno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cũ poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, ut ad propoſ. 16. huius lib. oſtendemus. Eodemque modo multæ aliæ propoſitiones conuerti nequeunt. Quam ob rem neceſſe eſt, ut prius demonſtret Geometra, propoſitionem aliquam conuerti, hoc eſt, antecedens & conſequens illius reciprocari, antequam ex conſequẽte conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones, quæ conuerti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum conuerſione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, ut fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam uidebuntur afferre utilitatem.

COROLLARIVM.



SEQVITVR ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarij quintæ propoſitionis, ut liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. cum enim duo anguli B, & C, ſint æquales, erunt latera

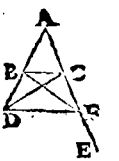
A B

A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat. 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo:

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



Triãguli enim A B C, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C B, quantumlibet producta abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. *In quibus cum latera* D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, utrumque utrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit unum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: erunt & bases C D, B F, æquales. & anguli B C D, C B F, *super has bases, cum opponantur* æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus, remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia sunt lateribus F C, C D, *utrumque utrique*, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B F, ipsi C D, ut modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus, D B F, F C D, æquales, ut etiam fuit nuper demonstratum: Erit angulus B D F, super basim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, super eandem basim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo *anguli* A D F, A F D, sint æquales, ut nunc ostendimus, erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus si rectæ B D, C F, æquales, per cõstructionem, demantur, remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat ostendendum.

3. primi. 4. primi. 3. prom. 4. primi 6. primi 3 prom.

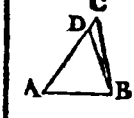
THEOR. 4. PROPOS. 7.

7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad

aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, conſtituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico ſuper eandem rectam A B, uerſus partem eandem C, nō poſſe ad aliud punctum, ut ad D, conſtitui duas alias rectas lineas, quæ ſint æquales lineis A C, B C, utraque utrique, nempe A C, ipſi A D, quę eundem habent finem A; & B C, ipſi B D, quæ eundem etiã terminum poſſidẽt B. Sint enim, ſi fieri poteſt, rectæ A C, A D, inter ſe, & rectæ B C, B D, inter ſe etiã æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita ut recta A D, in ipſam rectam A C, uel B D in ipſam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctũ D, in altera rectarũ A C, B C, nempe in A C, ut A D, ſit pars ipſius A C. Quoniã igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales; Erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non poteſt. Sit ſecundo punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, uſque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia, erunt anguli A C D, A D C, ſuper baſim C D, æquales; Eſt autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodẽ angulo D C E: Quare angulus C D F, pars ipſius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rurſus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, erunt anguli C D F, D C E, ſub baſi C D, æquales. Oſtenſum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo ſit minor angulo D C E. Idẽ ergo angulus C D F, & minor eſt angulo D C E, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Sit poſtremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea ſuper alteram cadat, ut in priori figura, dum modo loco D, intelligas C, & loco C, ipſum D; ex quo rurſus





5. primi
9. prop.

5. primi

sus colligeretur pars æqualis toti, quod est absurdum: Aut in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C; Quo posito, in idem absurdū incidemus, nempe angulū D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, ut perspicuum est: Aut denique punctum D, ita erit extra triangulū A B C, ut altera linearū posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, ut ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cū in triāgulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, erunt anguli A C D, A D C, supra basim C D, æquales: Ac proinde cum angulus A D C, minor sit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rursus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, erunt anguli B C D, B D C, super basim C D, æquales: Est autem iam ostensum, angulum B C D, multo esse minorem angulo B D C: Idem igitur angulus B C D, & minor est angulo B D C, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se A C, A D, & inter se quoque B C, B D. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis &c. Quod erat demonstrandum.







5. primi 9. prim.

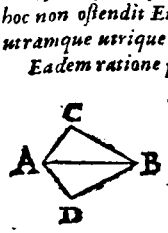
5. primi

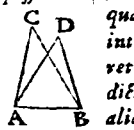
SCHOLION.

Fieri potest, ut duæ lineæ A D, B D, æquales sint duabus A C, B C, utraque utrique, ut A D, ipsi B C, & B D, ipsi A C, ut ultima figura indicat; Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, ut constat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem possident A; Itē B C, B D, eundem B; optimeq; demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, ut A C, A D, inter se sint æquales, ita ut B C, B D, quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione appositæ sunt hæc verba: eosdemq; terminos cum duabus

duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus assumit of se duæ lineæ simul sumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, BC, simul sumptis ut in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse utramque utrique esse æqualem &c.

Eadem ratione possunt ex A, & B, infra A B, basim trianguli A B C, hoc est ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita ut A D, exiens e puncto A, æqualis sit ipsi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipsi B C, ut perspicuum est in appositæ figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Deniq; esse poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter se, eundem terminum A, possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, ut reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter se quoque sint æquales, vt in hac figura appareat, & ab Euclide est demonstratũ. Appositæ igitur dictũ est in propositione: duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane scopus Euclidi in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.





8. ## THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebũt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F; æqualia, utrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; sit autem & basis B C, basi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum uidelicet vtrique dictis lateribus cõtinetur.

tinetur. Nam si mente intelligatur basis B C, superponi basi E F, neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum A B C, cogetur cadere super triangulum D E F, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cũ ponantur æqualia; Ac propterea angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterũ excedat. Quod si punctũ A, alio dicatur cadere, ut ad G, quomodocunq; id cõtingat, hoc est, siue in latus E D, siue intra triangulum E D F, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadem est, quæ B A) æqualis ipsi E D; & F G, (quæ eadem est, quæ C A) æqualis ipsi F D, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius: Hoc autem fieri non posse, iamdudum demonstratum est, cum tam rectæ E G, E D, terminũ eundem E, quam rectæ F G, F D, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet alio, quam in punctũ D: ac propterea angulus A angulo D, æqualis erit. Quare si duo triãgula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.



8. *prop.*

8. *prop.*

7. *primi.*

SCHOLION.

Videtur, hæc propositio conuertisse primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita ut theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos

angulos super baſes conſtitutos æquales, utrunque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrunque utrique, quæ uidelicet æqualibus lateribus ſubtendũtur, angulosq; reliquos hiſce lateribus incluſos æquales.

SIT enim baſis B C *æqualis baſi* E F, *& angulus* B, *angulo* E, *angulusq;* C, *angulo* D F E; *Dico latus quoque* A B, *lateri* D E, *& latus* A C, *lateri* D F, *æquale eſſe, angulumq;* A, *angulo* D. *Nã*



8. *prom.* *ſi baſis baſi ſuperponatur, congruent ſibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia ſibi congruent, propterea q; omnia inter ſeſe æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propoſitum, quod quidem magis proprie conuertere uidetur quartam propoſitionem, quam illud Euclidis, aliter demonſtrabit Euclides in prima parte propoſitionis 26, ut eo loco monebimus.*

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propoſitionis non ſolum colligi poteſt, angulos lateribus æqualibus contentos æquales eſſe, uerum etiam reliquos angulos, qui ad baſes cõſtituuntur, utrumq; utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totũ triangulum toti triangulo, ut conſtat ex eadem ſuperpoſitione unius trianguli ſuper alterum; Nam ſibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perſpicuũ eſt. Quod etiã ex quarta propos. colligi poterit, poſtquam demonſtratum fuerit, angulos æqualibus comprehenſos lateribus æquales eſſe. Inde enim fiet, cũ latera quoque ſint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula eſſe æqualia, ut in propos. 4. demonſtratum eſt.

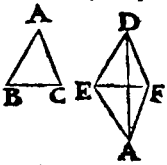
EX PROCLO.

PHILONIS familiares conãtur hoc idẽ theorema oſtẽdere de mõſtratione affirmatiua hac ratione. Poſito enim eodẽ antecedẽte, ſupponit intelligatur baſis B C, baſi E F ita ut triangulum A B C, cadat in diuerſas partes, & non ſuper triangulum D E F, quale eſt triangulũ A E F. Aut igitur duo latera, nẽpe D F, F A, conſtituunt unã lineã rectam;

rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si cõstituant unam linea rectam, veluti D A, ita propositum cõcludetur. Quoniam in triangulo A B D, duo latera A B, D B, ponuntur æqualia (est enim nunc A B, recta eadem quę A B, quæ per hypothesin rectæ D E, æqualis est) erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostendendum. Si uero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ uel cadet intra triangula, uel extra. Cadat primo intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, fuerint acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, erunt duo anguli E A D, E D A, æquales ad basim D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addãtur, fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat secundo recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia, erunt anguli E A D, E D A, æquales super basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo a prioribus ablatis, remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.

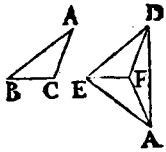


1. primi.



5. primi

2. prop.



5. primi

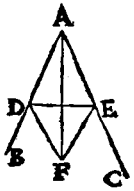
3. prop.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta A B, sumatur quodcunq; punctũ D, & rectæ A D, secetur ex A C, recta A E, æqualis, ducaturque recta D E. Deinde super D E, constituatur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos



3. primi

1. primi

augnol-

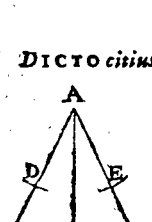
angulos inter se esse æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia sint lateribus E A, A F, trianguli E A F, utrumque utrique, quod D A, ipsi E A, per constructionem, sit æquale, & A F, commune; Sit autē & basis D F, basi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, constructum sit æquilaterum. Erit angulus D A F, angulo E A F, æqualis, 8. primi ideoque angulus B A C, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

SCHOLION.

QVOD si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilo minus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

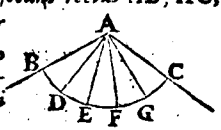
DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariā secabitur, hoc modo. Ex centro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales A D, A E cuiuscunque magnitudinis. Et circino non uariato (posses tamen ipsum nariare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes seſe in F. Recta igitur ducta A F, secabit angulum B A C, bifariam. Si enim ducerentur rectæ D F, E F, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum D A F, æqualem esse angulo F A F. Non descripsimus autem dictas lineas, ut nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus ne linearum multitudo tenebras nobis offundat pariatq; confusionem.



SCHOLION.

HINC aperte colligitur, angulū rectilineū quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum uterque iterum bifariam secetur, habeb.

habebimus 4. angulos æquales; Quod si singuli rursus diuidant, & bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides usquam neque ab ullo hactenus fuit demonstratum, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales posset diuidi. Si quis tamen id desideret, uti eius necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo, praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hoc nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunque interuallum, secans rectas AB, AC, in B & C. Deinde hic arcus officio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam; quoniam huius rei demonstratio adhuc desideratur) diuidatur in tot partes æquales in quot angulus propositus est diuidendus, vt iuxta exemplum propositum in quinque, in punctis scilicet D, E, F G. Si namque ad hæc puncta ex A rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cũ enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli 15. def.
BAD, æqualia duobus lateribus E A, A D trianguli E A D, utrumque utrique, cũ omnia ex centro egrediantur ad circunferentiã usque; Basis autẽ B D basi quoque D F, vt dictũ fuit, æqualis est: Angulus igitur B A D, angulo E A D æqualis existet; Eademq; ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propositionis lib. propterea quod circunferentiæ B D, D E, &c. acceptæ, sint omnes æquales inter se. Nemo uero miretur, quod praxes exhibeamus interdum quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus dependent. Hoc enim eo consilio facimus, vt singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales; Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, ubi eandẽ diuidit Euclides bifariã, & ita de singulis. Neq; enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstra-



8. primi

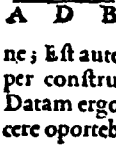
tiones

tiones, ſed ſolum, ut probetur recte eſſe per ipſas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonſtrationē requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, poſtquam demonſtrationes ad eam neceſſarias diligenter perceperit. Nam ſemper propoſitiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonſtrationibus noſtrarum praxium; quemadmodum et in proxima praxi citauimus propoſitionem 27. tertij libri.

10. **PROBL. 5. PROPOS. 10.**

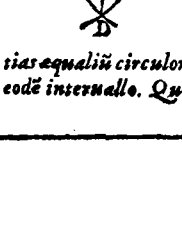
DATAM rectam lineam finitam bifariam ſecare.

1. *primi* 9. *primi* SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, ideſt, in duas partes æquales. Deſcribatur ſuper A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, diuidatur bifariam in D. Dico rectam A B, bifariam eſſe diuiſam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia ſunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, utrumque utrique, nempe A C, ipſi B C, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, eſt commune; 4. *primi* Eſt autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per conſtructionem: Erit baſis A D, baſi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam ſecuimus in D, quod facere oportebat.



PRAXIS.

Ex centro A, *ad quoduis interuallū, quod tamen dimidiū lineæ* A B, *excedat, deſcribātur duo arcus, unus ſuperne, alter inferne; Et ex cētro* B, *ad idē interuallū omnino aliꝰ duo arcus delineentur, q priores ſecēt in C, & D. Recta igitur ducta* C D, *ſecabit rectā* A B *in* E, *bifariā. Si. n. ex* A, *& B, ad C, & D, ducanꝰ quatuor rectæ, erūt hæ oēs inter ſe æquales, cū ex cētris ad circūferentias æqualiū circulorū cadāt; Nā arcus circulorū deſcripti ſūt eodē interuallo. Quoniā igiꝰ latera* A C, C D, *æqualia ſunt lateribus*



teribus B C, C D, *vtrumq; vtriq;, & basis* A D, *basi* B D, *eris angulus* A C D, *angulo* B C D, *æqualis. Rursus quia latera* A C, C E, *æqualia sunt lateribus* B C, C E, *vtrumq; vtriq;, & angulus* A C E, *angulo* B C E, *vt ostensum fuit; erit basis* A E, *basi* B E, *æqualis.* 8. *primi.* 4. *primi.*

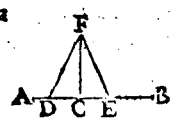
SCHOLION.

PERSPICVVM *est, eodem modo diuidi posse eandem lineã rectã* A B, *in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quauis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, uberrime trademus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, et nõ iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes linearum proportiones exposcant. Neq; vero indigebimus vnquam diuisione lineæ in quotlibet partes æquales, ad eum locum vsq;.*

PROBL. 6. PROPOS. 11. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectã lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit A B, & in ea punctũ C, a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, cui æqualis auferatur C E. De inde super D E, constituatur triangulum æquilaterum D E F, atq; ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumq; vtriq;, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est vero & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. Quare dicetur vterq; rectus, atq; adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data

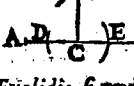


3. *primi.* 1. *prim.* 8. *primi.* 10. *def.*

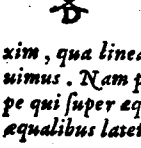
E igitur

igitur recta linea a pũcto in ea dato &c. quod faciendũ erat.

PRAXIS.



Ex puncto C, abscindantur vtrinq; lineæ æquales C D, C E. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes se se in F. Recta namq; ducta F C, erit perpendicularis : Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim data linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit A C, & punctũ datũ C, extremũ; protrahenda erit A C, in B, & sumenda æquales C D, C E, &c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcumq;, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis



A, & B, quibuscunq; lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus se se intersecantes in C, & D. Nam recta ducta C D, erit perpendicularis ad A B. hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases A E, B E, consistunt, opponunturq; æqualibus latetibus A C, B C.

EX PROCLO.

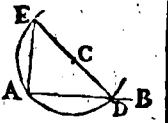
Si punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis C D, vt docuit Euclides; & abscindatur C E, æqualis ipsi A C: Deinde diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta C F; Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur B G. perpendicularis

3. primi.
9. primi.

dicularis ad C D, secans rectã C F, in G. Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam enim latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia sint lateribus E C, C G, triãguli E C G, vterumque vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri C G, æquales; Sed E. est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, ideoq; A G, ad A B, perpendicularis. 4. primi. 10. def.

SCHOLION.

BREVIVS *lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, sine extremum illud sit, sine non, hoc modo. Sit data linea* A B, *punctumq; in ea* A. *Ex centro C, extra lineã assumpto, vbi libuerit, (dũmodo recta* A B. *producta cum ipso non cõueniat) interuallo vero accepto vsq; ad* A, *describatur arcus circuli secãs* A B, *in* D.

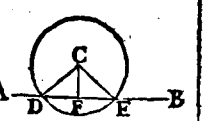


Et ex D, *per* C, *recta ducatur secans arcum in* E. *Recta igitur ducta* E A, *erit perpendicularis ad* A B. *Nam angulus* A, *est rectus., cum sit in semicirculo* D A E, *vt ostendemus propositione* 31. *lib.* 3.

PROBL. 7. PROPOS. 12. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIT recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Cẽtro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam AB; alias eam non secaret.) Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularẽ esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, F C,



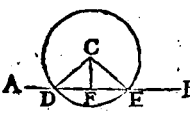
10. primi.

F C, trianguli, E F C, vtrumq; vtriq;, per conſtructionem; eſt autem & baſis C D, baſi C E, æqualis, cum hæ ſint ex centro C, ad circunferentiam: Quare erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterq; rectus. Ducta eſt igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

8. primi.

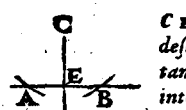
SCHOLION.

PROBE *appoſuit Euclides hãc particulam*: infinitam. *Si enim linea eſſet finita, non poſſet ſemper a puncto dato extra ipſam perpendicularis ad eam deduci. Vt ſi linea finita eſſet* B E, *& punctum* C, *non poſſet ex* C, *deſcribi circulus ſecans* B E, *in duobus punctis, quare neq; ex* C, *perpendicularis duci ad* B E. *Hac igitur de cauſa vult Euclides, rectam datam eſſe infinitam, hoc eſt, non habere magnitudinem determinatam, vt ſaltem ad ipſam producta perpendicularis poſſit deduci. Ita enim fiet hic, ſi* B E, *producatur, donec circulus ex* C, *deſcriptus ſecet totam* B A, *productam in* D, *&* E, *&c.*



PRAXIS.

CENTRO *C, & interuallo quouis eodem, deſcribantur duo arcus ſecantes rectam datam in* A, *&* B. *Deinde ex* A, *&* B, *eodẽq; interuallo, vel alio ſi placuerit, aliꝰ duo arcus deſcribantur ſecantes ſe in* D. *Nam ducta recta* C D, *ſecans* A B, *in* E, *erit perpendicularis ad* A B. *Demonſtratio huius operationis non differt a demonſtratione tradita in praxi propoſitionis* 10. *Nam anguli ad* E, *erũt recti, nempe inter ſe æquales.*

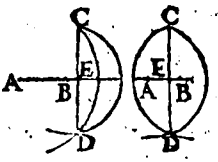


4. primi.

IDEM *efficiemus hoc modo. Ex quouis pũcto* A, *in linea data, & interuallo vſq; ad* C, *aſſumpto, arcus circuli deſcribatur: Deinde ex quolibet alio puncto* B, *interuallo q; vſq; ad idem* C, *alius arcus deſcribatur priorem ſecans in* C, *&* D; *Eritq; ducta recta* C D, *ſecans* A B, *in* E, *perpendicularis ad* A B.

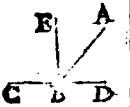
Demon

Demonstratio eadem est quæ prior. Nunc autem necesse, vt internallum B C, æquale sit internallo A C, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & brevior operatio si idem semper internallum accipiatur.



THEOR. 6. PROPOS. 13. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineã angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA A B, cõsistens super rectam C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, erũt dicti anguli duo recti. Si vero A B, non fuerit perpendicularis, faciet ynum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero duo anguli D B A, A B E, æquales sunt angulo recto E B D; appositio communi angulo recto E B C, erunt tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales duo recti E B D, E B C: Rursus quia duo anguli A B E, E B C, æquales sunt angulo A B C; appositio communi angulo A B D, erunt tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales duo anguli A B C, A B D: sed illis tribus ostensum fuit esse etiam æquales duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, inter se sunt æqualia: Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

10. *def.*
11. *primi.*
18. *pron.*
2. *pron.*
18. *pron.*
2. *pron.*
1. *pron.*

SCHOLION.

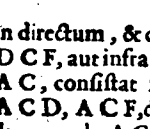
VIDETVR *hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus* A B C, *superat rectum an-*

gulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur, siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

14. THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A C, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse constitutas in directum, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim nõ est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cũ A C, consistat super rectam D C F, fient duo anguli



13. *primi.* A C D, A C F, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli A C D, A C E, æquales duobus rectis; & omnes recti sunt inter se æquales: Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt æquales. Ablato igi-

3. *post.* tur communi angulo A C D, remanebunt anguli A C F, A C E, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdũ. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, æquales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quæ C E; propterea q; , si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, &c.

Quod demonstrandum erat.

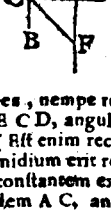
SCHO-

SCHOLION.

Est hæc propositio præcedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si D C E, sit recta, angulos A C D, A C E, duobus esse rectis æquales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis equales, rectas D C, E C, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hæc: & non ad easdem partes. Quoniam vt ait Porphyrius, fieri potest, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eadem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Ducatur C D, perpendicularis ad A B, diuidaturq; rectus angulus A C D, bifariam per rectam C E. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ C D, ducatur D B, perpendicularis ad C D, secans rectam C E, in B. Producta autem B D, ad partes D, sumatur D F, æqualis rectæ D B, & ducatur recta F C. Quoniam igitur latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia sunt lateribus F D, D C, trianguli F D C, vtrumq; vtriq;, & anguli D, ipsis contenti æquales, nempe recti; erit basis B C, basi C F, æqualis, & angulus B C D, angulo F C D. Sed angulus B C D, dimidium est recti: (Est enim rectus A C D, diuisus bifariam.) Igitur & F C D, dimidium erit recti. Quare C F, cum A C, facit angulum A C F, constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem C B, cum eadem A C, angulum A C B, dimidium etiam recti: Duo igitur anguli A C F, A C B, quos ad eadem partes faciunt rectæ C F, C B, cum A B; æquales sunt duobus rectis: Et tamen C F, C B, non sunt vna linea recta, propterea quod non sunt ductæ ad diuersas partes, sed ad eadem.



11. *primi.*
9. *primi.*
11. *primi.*
3. *primi.*
4. *primi.*

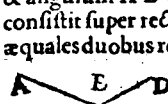
THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticē æquales inter se efficiēt.

SECENT se duæ rectæ A B, C D, in puncto E, vtcūq;. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C,

& angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, 14. primi consistit super rectam A B, erunt duo anguli A E D, D E B, æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erũt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cum igitur omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales. Dempto igitur cõmuni angulo D E B, remanebit angulus A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, (qui duobus sunt rectis æquales per præcedentem) æquales erunt duobus angulis D E B, B E C, (qui per eandem præcedentem duobus rectis sunt æquales.) Ablato igitur angulo communi B E C, remanebunt anguli A E C, B E D, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

10. pron.



3. pron.

3. pron.

COROLLARIVM. I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent). duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tum duos angulos A E D, D E B, quam duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM. II.

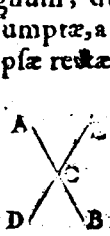
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plurimas partes, quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circunstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi autores asserunt, quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

18. pron.

EX PRO-

EX PROCLO.

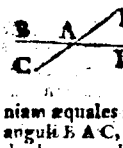
SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusq; signum, duæ rectæ lineæ non ad eosdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erũt.



EX punctо C, rectę A C, in' diuersas partes egrediantur duę rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter se æquales: Vel potius duos A C D, B C E. Dico dũas C D, C E, efficere vnã lineam rectam. Quoniam enim angulus A C E, æqualis sit angulo B C D, addito communi angulo B C E, erunt duo anguli A C E, E C B, duobus angulis D C B, B C E, æquales: Sed anguli A C E, E C B, sunt æquales duobus rectis; Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem C D, C E, erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæ quintæ. 2. *prom.* 13. *primi.* 14. *primi.*

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno punctо exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum connectę.



EX punctо A, quatuor lineę ductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, inter se æquales: Item duos B A C, D A E, inter se æquales. Dico tam B A, A D, facere vnã lineam rectam, quam C A, A E. Quoniam æquales sunt anguli B A E, C A D, si æquales illis addantur anguli B A C, D A E, erunt duo anguli B A E, B A C, æquales duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales sunt duobus rectis; atque adeo C A, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli B A E, E A D, æquales duo 2. *prom.* 4. *primi.*

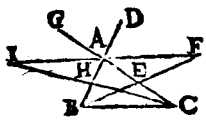
les duobus angulis D A C, C A B; Quare vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

16. THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVLVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D; Dico angulum externum D A C, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemq; maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta B E F, ita vt E F, abscissa sit æqualis rectæ E B; ducaturq; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumq; vtriq;, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit basis C B, æqualis basi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Est autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno, & opposito angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturq; recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum G A B, maiorem esse interno angulo, & opposito A B C: Est autem angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cũ lineæ B D, C G, se mutuo secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoq; ostensus angulo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c.

Quod demonstrandum erat.



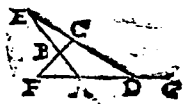
10 primi. 3 primi. 15 primi. 4 primi. 15 primi.

SCHO-

SCHOLION.

NON dixit Euclides angulum externum D A C, maiorẽ esse angulo B A C, interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet A C E, A B C, internorum, sibiq; oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoq; erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit: Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. Nam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cũ & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quilibet interno, & opposito possit esse maior; hac rõne absolue.

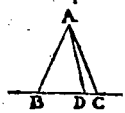


SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtusus, & A B C, rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ A B, D C, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ D A, C B, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse tribus internis B A D, A B C, B C D, sibi oppositis. Cũ enim A D E, triangulum sit, erit angulus externus EDG, maior interno opposito D A E. Rursus cum D A B, obtusus maior sit recto A B C, maior quoq; multo erit E D G, ipso ABC. Postremo, quia & in triangulo C D F, angulus externus C D G, maior est interno, & opposito F C D; manifestum est, in quadrilatero A B C D, externum angulum CDG, maiorem esse internis, & oppositis B A D, A B C, B C D. Quã ob rem propositio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est. 16. primi. 16. primi.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemq; lineã rectã non posse duci plures lineas rectas, quã duæ inter

inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D.



5. *primi.* Quoniam igitur latera A B, A C, sunt æqualia, erunt anguli A C B, & A B C, æquales super basim B C: Rursus quia latera A B, A D, sunt æqualia, erunt anguli A D B, & A B C, super basim B D, æquales. Quare cum vterq; angulus A C D,

5. *primi.*

1. *pron.* & A D B, æqualis sit angulo A B C, erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad B C, possunt duci. Quod est propositum.

17. ## THEOR. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



SIT triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D,

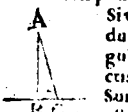
16. *primi.* & E. Quoniam igitur angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B, si addatur communis

4. *pron.* angulus A B C, erunt duo anguli A B D, A B C, maiores

13. *primi.* duobus angulis A B C, A C B; sed A B D, A B C, æquales sunt duobus rectis; Igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis: Item duo B A C, & B C A. Cuiuscunq; igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

EX PROCLO.

HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quâ vnâ.



Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum.

17. *primi.* Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo, quocunq; ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendicu-

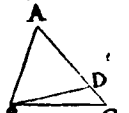
pendiculares, quam vnæ, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.

COROLLARIVM.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunq; reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse faceamus.

THEOR. 11. PROPOS. 18. 18.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



IN triangulo A B C, sit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, subtensum a maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui a minori latere A B, subtenditur. Nã ex A C, auferatur A D, æqualis ipsi A B, & ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionẽ, erunt anguli A B D, A D B, æquales: 5. primi. Est autem angulus A D B, maior angulo A C B; Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cum angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; Erit angulus A B C, multo maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendes angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

3. primi.

16. primi.

9. pron.

COROLLARIVM.



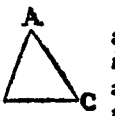
EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidẽ latus A C, minimũ autem B C; & medium locum habens A B. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit an-

erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus uero A; & C, mediũ locũ inter vtrunq; tenẽs.

18.

THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus A C, ſubtendens maiorem angulũ B, maius eſſe latere A B, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus A C, maius non eſt latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale eſſe ipſi A B, erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero A C, minus eſſe dicatur latere A B, erit angulus B, ſubtenſus a minori latere A C, minor angulo C, ſubtenſo a maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdũ. Cũ igitur A C, latus neq; æquale ſit lateri A B, neq; minus eo, erit maius. Eadẽ ratione probabitur, latus A C, maius eſſe latere B C, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.

5. *primi.*

18. *primi.*

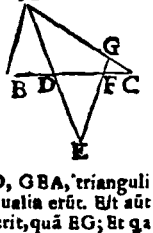
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idẽ theorema oſtẽdere affirmatiua demonſtratione, ſine adminiculo præcedentis, ſi tamen prius demonſtretur hoc ſubſequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecansq; angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus vero, quod cũ minori.

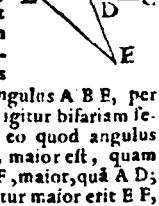
TRIANGVLI A B C, angulus B A C, diuidatur bifariã per rectã A D, quę ſecet baſin B C, in partes inequales, maiuſq; ſegmentum

tũ fit D C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Producatur enim A D, ad E, vt fit D E, æqualis ipsi A D; Deinde ex maiori segmẽto D C, auferatur recta D F, æqualis minori segmẽto D B, & g F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, triãguli A D B, æqualia sũt lateribus E D, D F, triãguli E D F, vtrũq; vtriq;, per cõstructionẽ; sunt aũt & anguli A D B, E D F, dictis lateribus cõtenti æquales; Erunt bases A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, æqualis: Est vero & angulus C A D, angulo B A D, æqualis, p hypothesin; Igitur anguli G A D, G B A, trianguli A G E, æquales erũt, ideoq; latera A G, E G, æqualia erũt. Est aũt recta A C, maior quã A G; quare & A C, maior erit, quã E G; Et qa E G, maior est, quam E F, erit & A C, multo maior, quam E F. Cum igitur demonstratum sit rectam E F, æqualem esse rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.



3. primi
15. primi.
4. primi.
1. pron.
6. primi.

Hoc ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, vt sit D E, æqualis ipsi A D; ducaturq; recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrũq; vtriq;, per constructionem; sunt autẽ & anguli A D C, E D B, dictis comprehensi lateribus æquales: Erũt bases A C, & B E, æquales, angulusq; A C D, angulo E B D, æqualis; Et quia angulus A C D, ponitur esse minor angulo A E C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoq; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam B F, cadet B F, supra B D, eo quod angulus A B D, maior sit angulo E B D. Quia vero E F, maior est, quam E D, & E D, posita est æqualis ipsi A D, erit E F, maior, quã A D; Sed adhuc A D, maior est, quã A F; Multo igitur maior erit E F, quam A F. Itaq; quia recta B F, diuidens angulum A B E, bifariã, secat basin A E, inæqualiter in F, estq; maius segmentum E F, minus aũt A F, erit per theorema a Proclo proxime demõstratũ, latus B E, maius latere A B. Ostẽsum est aũt B E, æquale esse lateri A C; Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Qđ erat demonstrandũ.



3. primi.
15. primi.
4. primi.
9. pron.
9. pron.

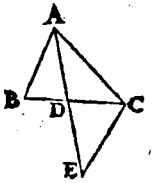
SCHOLION.

Hæc propositio 19 cõuersa est propositionis 18, vt perspicuũ est. Campanus autem duarũ istarũ propositionũ ordinẽ prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod

quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

POTERIMVS *quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.*

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.



DVO latera AB, AC, trãguli ABC, sint inæqualia; AC, maius, & AB minus. Recta autem AD, dimidiẽs angulũ BAC, bifariã, secet basin BC, in D. Dico segmentum DC, maius esse segmẽto DB. Si enim nõ est maius, erit vel æquale vel minus. Si dicat̃ esse æquale; producatur AD, ad E,

3. primi. *vt DE, æqualis sit ipsi DA, ducaturq; recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia sunt lateribus ED, DC, vtrumq; vtriq; ; AD, videlicet ipsi ED, per constructionem, & DB ipsi DC, per hypothesin aduersarij; Sunt autem & an-*

15. primi. *guli ad D, dictis lateribus contenti æquales: Erit basis AB,*

4. primi. *basi EC, æqualis; & angulo BAD, angulus CED. Positus autẽ est & angulo BAD, angulus CAD, æqualis; Igitur &*

6. primi. *anguli CED, CAD æquales erunt; Ideoq; latus AC lateri EC, æquale. Cũ igitur ostensum sit, lateri EC, æquale esse quoq;*

1. pron. *latus AB, erunt latera AC, AB, æqualia; quod est absurdũ, quia AC, maius ponebatur, quã AB. Non igitur erit segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si DC, dicatur esse minus, & DB, maius; erit, per theorema Procli, latus AB, maius latere AC; Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit DC, quam DB. Quare erit necessario maius.*

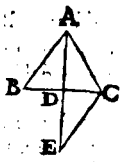
EODEM *modo demonstrari poterit hoc theorema.*

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoq; secet, erunt duo

latera

latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam dividit.

PRIMO *recta A D, secans angulum B A C, bifariam, dividat quoque basin B C, in D, bifariam; Dico latera A B, A C, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabis eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus A C, æquale esse lateri A B, si D C, segmentum segmento D B æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera A D, D B, æqualia sint lateribus E D, D C; & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; erunt bases A B, E C, æquales, & angulus C E D, angulo B A D, hoc est, angulo C A D, æqualis: Quare A C, æquale erit ipsi E C, hoc est, ipsi A B.* 15. primi. 4. primi 6. primi



SECUNDO *sint latera A B, A C, æqualia, & recta A D, secans basin B C, in D, dividat angulum B A C, bifariam; Dico segmentum D C, æquale esse segmento D B. Cum enim latera A D, A B, æqualia sint lateribus A D, A C, utrumque utrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin; erit basis B D, D C, æquales.* 4. primi

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

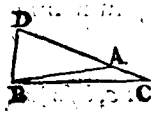
SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur unum ex illis, ut C A, usque ad D, sitque recta A D, æqualis alteri lateri A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia inter se sunt, per hypo-



3. primi

5. primi 9. pron.

theſin, erunt anguli A B D, A D B, æquales inter ſe: Eſt autem angulo A B D, maior angulus C B D; Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In



19. primi

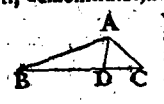
triangulo ergo C B D, latus C D, oppoſitum maiori angulo C B D, maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cum igitur duo latera A B, A C, ſimul æqualia ſint ipſi C D, (ſi enim

2. pron.

æqualibus A B, A D, commune addatur A C, fient tota æqualia; nimirum linea compoſita ex A B, A C, & linea cõpoſita ex A D, A C,) erunt quoque latera A B, A C, ſimul maiora latere B C. Eodem modo demonſtrabitur, quælibet alia duo latera maiora eſſe reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora &c. Quod demonſtrandum erat.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphyrij demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora eſſe latere B C. Diuidatur angulus B A C,



9. primi

illis lateribus contentus biſariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum eſt ad B, erit angulus externus

16. primi

B D A, maior interno & oppoſito C A D; igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B,

19. primi

oppoſitum maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione oſtendetur, latus A C, maius eſſe, quam

16. primi

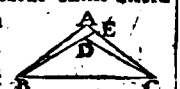
C D, quia angulus C D A, maior eſt angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademque eſt ratio quorumcunque duorum laterum, ſi angulus ipſis comprehenſus biſariam ſecetur.

21. THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maio-

maiorem uero angulum continebunt.

IN triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulū cōstituātur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes: Dico B D, C D, simul minores esse duobus lateribus B A, C A, simul; At uero angulū B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera B A, A E, maiora sunt latere B E. si addatur commune E C, erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rursus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Ostensum uero iam fuit B A, C A, maiora esse, quam B E, E C; Multo igitur maiora erunt B A, C A, quā B D, C D, quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus B D C, maior est angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est eandem ob causam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igitur super triangulī uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.



20. primi.
4. prop.
20. primi.
4. prop.
16. primi.

SCHOLION.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, uel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super unum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem una ab extremitate dicti lateris, altera vero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, ita vt hæ constitutæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus.

Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

Sit triangulum habens exempli gratia angulum A BC, obtusum. Dico ab extremo C, & a quouis puncto, nempe a D, prope aliud extremum B, lateris BC, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus B A, AC. Ducatur enim recta D A: Et quoniã in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B, minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtusus; erit A D B, minor recto, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, maius erit latere A B. Ex D A, abscindatur recta D E, æqualis rectæ A B; Et reliqua linea A E, bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ constituẽtes C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam in triangulo A F C, duo latera A F, F C, maiora sunt latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, æqualis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur æqualia addantur B D, & A B, fient rectæ C F, F D, maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ C F, E F, minores duobus lateribus C A, A B, ut Euclides demonstrauit.

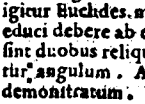
17. primi.



19. primi
3. primi
10. primi
20. primi
4. pron.

Rvrsvs sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximũ BC, minimum A B. Ex B C, auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, ut ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constituẽ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ C E, D E, quæ minorem angulum comprehendũt eo, quẽ efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim duo latera B A, B D, æqualia sint, erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, angulus maior est angulo C E D; Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis unius lateris, ut minores quidẽ sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem uero complectantur angulum. Alias enim propositio uera non esset, ut iam est demonstratum.

3. primi



5. primi
16. primi

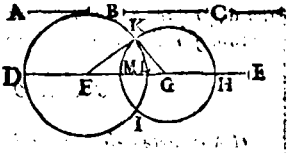
22.

PROBL. 8. PROPOS. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere

ſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam uniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliquæ ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, ut conſtat ex propoſ. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oportetque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Exaſſumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis abſcindatur recta D F, æqualis rectæ A; Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo uero F D, circulus deſcribatur D I K; Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus deſcribatur H I K, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K; (cum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; ſi ex F E, ſumatur recta F L, æqualis ipſi F D; & ex G D, recta G M, æqualis ipſi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namq; M, caderet in L, punctum, eſſent G L, F L, hoc eſt, G H, & F D, æquales rectę F G; Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ minores recta F G; quorum utrumq; eſt contra hypotheſin.) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducãtur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C. Cum enim recta F K, æqualis ſit rectæ F D, & recta A, per conſtructionem eidem F D, æqualis; erit latus F K, rectæ A, æquale: Rurſus quia G K, æqualis eſt ipſi G H, & recta C, eidem G H; erit quoq; latus G K, rectæ C, æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt. Cõſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



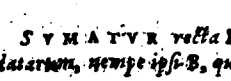
3. primi

1. def.

1. pron.

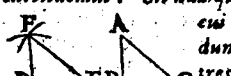
PRAXIS.

SVMATVR recta D E, æqualis cuiuscunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basim: Deinde ex D, ad internallū rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad internallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter internallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum internallum C; D E, vero latus, ac ceptum est rectæ B, æquale, ab initio.



SCHOLION.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulos q3, & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, B C, C A, quarum quælibet duæ maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam D E, æqualem uni lateri, nempe B C; & ex D, internallo lateris A B, arcum describo, item alium ex E, internallo reliqui lateris C A, qui priorē fecet in F, &c.



20. primi

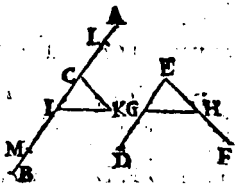
23. PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta utcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Deinde constituatur triangulum C I K, habens

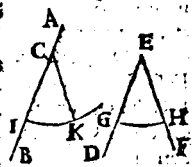
22. primi.

habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita ut C I, æquale sit ipsi E G; & C K, ipsi E H; & I K, ipsi G H. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G; & C L, ipsi E H; & I M, ipsi G H; Deinde ex centris C, & I, interuallis uero C L; & I M, circuli describantur secantes se se in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam duo latera C I, C K, æqualia sunt duobus lateribus E G, E H, utrumq; utrique, & basis I K, basi G H, per constructionem; erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. 8. primi.



PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in precedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oporteat æquale alteri triangulo, ut angulus dato angulo æqualis exhibeatur; ut perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq; officio circini arcus I K, arcui G H, æqualis: Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quod circino non variato utramque distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; erunt anguli I C K, G E H, æquales. 8. primi.



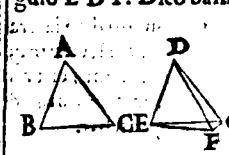
THEOR. 15. PROPOS. 24. 24.

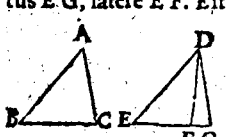
SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumq; utriq;,

angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, utrumque utrique, nempe A B, ipsi D E; & A C, ipsi D F; Angulus uero A, maior sit angulo E D F. Dico basin B C, maiorem esse basi E F. Ad lineam enim D E, ad eiusque punctũ D, constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus E D F, minor ponatur angulo A) ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primo supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G utrumq; utrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; Erit basis B C, basi E G, æqualis. Rursus quia duo latera D F, D G, inter se sunt æqualia; erunt anguli D F G, D G F, æquales: Est autem angulus D G F, maior angulo E G F: Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, quam E F. Quod est propositum.

23. primi
3. primi
4. primi
5. primi
9. pron.
19. primi





CADAT secundo E G, in ipsam E F. Et quia rursus, ut prius, basis E G, æqualis est basi B C: Et E G, maior quam E F: erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.

4. primi.
9. pron.

CADAT tertio E G, infra E F, producanturque rectæ D F, D G, usque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rursus, ut prius, basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia sunt inter se, per constructionem

4. primi.

ctionem, erũt anguli G F H, F G I, infra baſin F G, æquales: Eſt autem angulus F G I, maior angulo F G E; Igitur & angulus G F H, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, maius erit latus E G, latera E F. Eſt autem oſtenſum E G, æquale eſſe ipſi B C. Maior igitur erit quoque B C, baſis baſi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat oſtendendum.

5. primi.
9. pron.



9. primi.

SCHOLION.

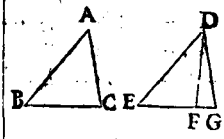
Si quis forte roget, cur in 4. propoſitione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluſerit non ſolum æqualitatem baſium, verum etiam triangulorum & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrunque vtrique, anguli vero lateribus illis comprehenſi inæquales, colligat tantum inæqualitatem baſium, non autem triangulorum, & reliquorũ angulorum: Huic reſpondendum eſt, neceſſario id ab Euclide peritiſſimo Geometra eſſe factum. Nam ex antecedente huius theorematis ſemper conſequitur baſium inæqualitas, ita vt baſis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus aſſumptis eſt maior, ſuperet baſin alterius trianguli, cuius angulus minor exiſtit, vt demonſtratum eſt; Non autem neceſſe eſt, triangulum illud maius hoc eſſe. Vt enim clariſſime ex Proclo demonſtrabimus ad propoſ. 37 huius primi libri, Triangulũ maiorem habens angulum aliquando æquale eſt triangulo minorem habenti angulum, aliquando uero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in uniuerſum inferri ex eo, quod angulus unius trianguli maior eſt angulo alterius, triangulum etiam maius eſſe, cum modo æquale ſit, modo minus & modo maius. Idem dici poteſt de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus A B C, minor

nor est semper angulo D E F; cum angulus D E G, (qui æqualis est, per 4. propos. angulo A B C,) minor sit eodem angulo D E F, parti toto: In secunda autem figura, existit quidem angulus A B C, angulo D E F, æqualis, per 4. propos. At uero angulus A C B, minor est angulo D F E, cum angulus D F E, maior sit angulo D G F, externus interno, & opposito; & angulus D G F, æqualis sit angulo A C B. In tertia denique figura angulus A B C, maior quidem est angulo D E F propterea quod angulus D E G, (æqualis existens per 4. propos. angulo A B C,) maior sit eodem angulo D E F totum parte: Sed angulus A C B, minor est angulo D F E. Nam si recta E F, producatur secans rectam D G, in K, fiet angulus D F E, maior angulo D K E, externus interno; Est autem & angulus D K E, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propos. æqualis est angulo A C B. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.

9. prom.

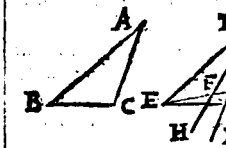


6. primi.



9. prom.

16. primi



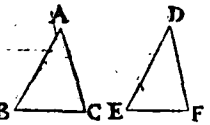
25.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

Duo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus

duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, utrumque utrique, hoc eſt, AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF; Baſis autem BC, maior ſit baſe EF. Dico angulum A, maiorem eſſe angulo D. Si enim non eſt angulus A maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur eſſe æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia ſint duobus lateribus circa D, utrumque utrique, per hypotheſin; erit & baſis BC, æqualis baſi EF; quod eſt abſurdum; Ponitur enim baſis BC, baſe EF, maior. Si uero angulus A, dicatur eſſe minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa iſtos angulos, baſis EF, maior baſi BC; quod magis eſt abſurdum, cum EF ponatur eſſe minor quam BC. Quare cum angulus A neque poſſit æqualis eſſe angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint &c. Quod erat oſtendendum.



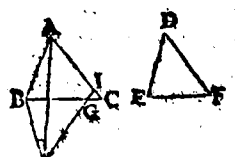
4. primi.

4. primi

SCHOLION.

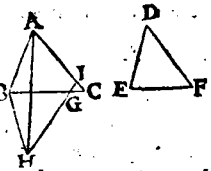
THEOREMA *hoc conuerſum eſt præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonſtratum eſt baſin illi reſpondentem, eſſe maiorem; in hoc autem ex maiori baſi oſtenſum fuit angulũ illi reſpondentem, maiorem eſſe. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata ſunt in propos. 18, & 19. Nam in 19 demonſtratum eſt, in uno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus reſpondere: At in 24. idem oſtenſum fuit in duobus diuerſis triangulis, quorum duo latera unius æqualia ſunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; diſcrimen reperies inter propos. 18. & 25.*

MENELAVS *Alexandrinus, ut ait Proclus, demonſtrat hoc idẽ theorema oſtenſiue, hac ratione. Poſitis eiſdem triangulis, ex baſe maiore EC, abſcindatur recta BG, æqualis baſi minori EF. Fiat quoque angulus GBH æqualis angulo DEF, & ſit BH, æqualis ipſi BA, atque adeo ipſi DE,*

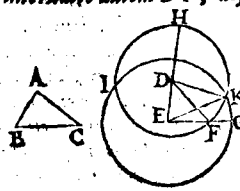


3. primi.
3. primi.
3. primi.

duca-

ducaturq; recta per G, ex H, secans A C, in I. Quoniã igitur
5. primi duo latera B A, B H, æqualia sunt, erunt anguli B A H,


B H A, æquales. Rursus quia latera B G. B H, æqualia sunt lateribus E F, E D, vtrumque vtrique, & angulus G B H, æqualis angulo D E F, per constructionem; erit basis H G, basi D F, atque adeo ipsi
4. primi A C, æqualis, anguluſque G H B, angulo E D F. Et quoniam recta H I, maior est quam H G, quæ est æqualis ipsi A C, erit quoque maior H I, quam A C;
9. pron. Sed A C, maior est adhuc, quam A I; Multo ergo maior erit
8. primi H I, quam A I. Quare angulus I A H, maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui
4. pron. ostensi sunt æquales, fiet totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior: Sed angulus B H G, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod est propositum.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor E F,
3. primi ad G, ut sit E G, æqualis basi maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, describatur circulus, producaturq;


15. def. E D, ad H, in circunferentiam. Quoniam igitur D H, est æqualis
2. pron. ipsi D F, erit quoque D H, æqualis ipsi A C. Additis igitur æqualibus D E, A B, fient A C, A B, simul æquales toti H E: Sed A C,
20. prim A B, simul maiores sunt quam B C, atque adeo quam E G; Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo E G, intersecabit rectam E H atque adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia sunt duobus lateribus D E, D K, utrumq; vtrique, (est enim D K æquale ipsi D F, per definitionem circuli; D F, autem positum est æquale lateri A C) & basis B C, ipsi E K, æqualis; (cum E K æqualis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, vero recta per constructionem facta sit

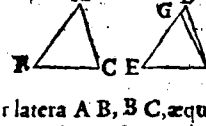
æqualis

æqualis baſi B C.) Erit angulus B A C, angulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior eſt angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior exiſtet. Quod eſt propoſitum. 8 primi 9. pron.

THEOR. 17. PROPOS. 26. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumq; latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, uterque vtrique, hoc eſt B, ipſi E, & C, ipſi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia eſſe, vtrumque vtrique, hoc eſt A B, ipſi D E & A C, ipſi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B non eſt æquale lateri D E, ſit D E, maius: a quo abſcindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia ſunt lateribus G E, E F utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypotheſin; Erit angulus, C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D; Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti; Quod eſt abſurdum. Non eſt igitur latus A B, inæquale lateri D E, ſed æquale. Quamobrem, cum



3. primi

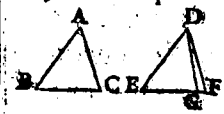
4. primi

cũ latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

4. primi

SINT secundo latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; Erit angulus C, angulo E G D, æqualis. Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

3. primi



4. primi

26. primi

SCHOLION.

PRIOR *huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus alterius, æqualia esse, reliquumque angulum reliquo angulo &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.*



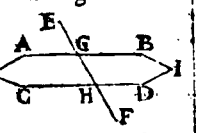
THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erũt inter se illæ rectæ lineæ.

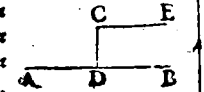
IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta C D, usque ad punctum I,) & angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & opposito D H G; quod est absurdum; quoniam externus interno maior est 16. primi



Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & opposito A G H, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D; Quare parallelæ erũt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens &c. Quod erat ostendendum.

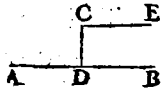
SCHOLION.

NECESSE est, ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano, ut ex definitione constat: Quare non satis est duos angulos alternos æquales inter se esse, ut duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in uno, eodemque existere plano. Fieri enim potest, ut linea recta incidẽs in duas rectas nõ in eodẽ plano existentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quæ in subiecto plano existit; &



ex

ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita ut punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito perspicuum est, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cum sint recti; & tamen C E, A B, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In vndecimo vero libro & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris disseritur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.

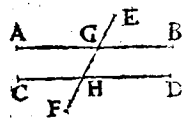


28. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erũt inter se ipsæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniã angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C, & eidẽ angulo E G A, æqualis est angulus H G B; erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales: Quare lineæ A B C D, parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.

15. primi
1. hon.
27. primi



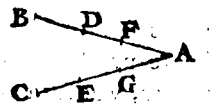
SECVN-

SECVNDO faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus, rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, duobus rectis æquales; 13. primi. Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdem partes, æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

IAMDVDVM pronunciatum vndecimum a principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propositio 29. illi innitatur, ita vt absq; eo demonstrari non possit, necesse est, vt illud ex hactenus demonstratis theorematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, cum Proclo confirmemus, vt antea pollicitis sumus. Hoc autem facile præstabimus, si prius duo explicemus, quorum primum hoc sit.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.

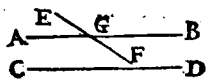


EXEANT a puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quã D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & linea ipsa

ultra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitæ esse productæ. Quare si dictæ lineæ A B, A C producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam.

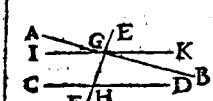
tex. 35. *Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum. Secundum, quod debet explicari, ita se habet.*

SI duarum parallelarum rectarum lineam alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productam secabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, secet ipsam A B, in G. Dico rectam E F si producatur, secturam esse quoq; ipsam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinite, excedunt omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela A B a parallela C D, distat, cum hæc distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia G B, a G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam G F, productam secuisse rectam C D. Nam quandiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, vndecimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



IN rectas A B, C D, incidens rectæ E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico re-

co rectas A B, C D, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, duobus rectis aequales; Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo communi angulo D H G, remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, constituatur angulus K G H, aequalis angulo D H F, cades G K supra G B, secabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, aequalem interno, & opposito K G H; Erunt rectae I K, C D, parallelae: Secat autem recta A B, ipsam I K, in G; Producta igitur secabit quoque ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conuenies ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum. 13. primi. 5. pron. 23. primi. 28. primi.

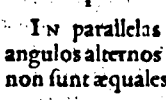
QVAMVIS autem optime a Proclo demonstratum sit vndecimum hoc pronunciatum, vt iure inter theoremata possit referri; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato, praesertim cum facile ei assensus praberi queat, intellecta prius recte propositione 28. Si enim lineae rectae propositae parallelae sunt, ita vt nunquam coeant, sed semper aequali inter se distantia progradiantur, etiamsi infinite producantur, quando recta in eas incidens facit duos angulos internos, ad easdem partes duobus rectis aequales, vt demonstratum fuit; quis non videt, si eadem recta incidens in duas rectas faciat angulos internos, ad easdem partes duobus rectis minores, alteram alteri appropinquare, ad eas partes, ad quas sunt interni anguli duobus rectis minores; quandoquidem aequali distantia procederent, si iidem anguli paulo maiores essent, duobus videlicet rectis aequales, vt haec propositio 28. demonstrauit? 28. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 29. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidēs linea; Et alternatim angulos inter se aequa-

les efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primũ, angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam



4. *pron.* 13. *primi.* igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus B G H, erunt duo A G H, B G H, maiores duobus D H G, B G H: At duo A G H, B G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes B, & D, coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes. quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neq; minor; Eadem enim ratione ostenderetur rectas coire ad partes A, & C: Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Badēq; est ratio de angulis alternis B G H, C H G.

11. *pron.*

DICO secundo, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum

15. *primi.* est; & eidem B G H, æqualis est angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G, inter se quoq; æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

1. *pron.*

DICO tertio, angulos internos ad easdem partes, A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quónia ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo C H G, interno; si addatur communis A G H, erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: sed duo A G E, A G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alter-

2. *pron.*

13. *primi.*

& alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

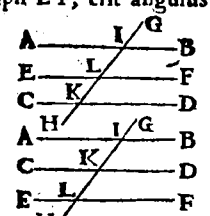
SCHOLION.

CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectę A B, C D, eidem rectæ E F, parallelę; Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam omnes hæ linę in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducatur recta G H, secans A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. Rursus quia C D, ponitur etiam parallela ipsi E F, erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli A I L, D K I, æquales inter se quoq; erunt. Cum igitur sint alterni, erunt rectæ A B, C D, parallelę inter se. Quæ igitur eidem rectę lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



29. *primi.*

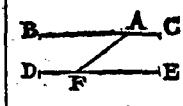
29. *prim.* 1. *pron.*

27. *primi.*

SCHOLION.

QVOD *si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendū est, duas A I, B I, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Cūstat aūt A I, productā coincidere cum B I. Quamobrem, quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, &*

inter se sunt parallelæ; Vel certe vnam, & eandem lineam constituunt, quando inter se coeunt. Quod ita demonstrabitur. Sint duæ rectæ A B A C, coeuntes in A, parallelæ ipsi D E. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta A F, secans D E, in F, vtcunq;. Quoniam igitur A B, D E, sunt parallelæ, erũt anguli alterni B A F, A F E, æquales; Addito ergo communi angulo C A F, erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis C A F, A F E. Sed hi duo æquales sunt duobus rectis cũ sint interni inter duas parallelas; Igit & duo anguli ad A, duobus erũt rectis æquales; ac propterea in rectũ erũt cõstitutæ ipsæ A B, A C. Qđ est propositũ.



29. primi.

2. pron.

29. primi.

14. primi.

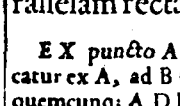
31.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq; faciens angulum quemcunq; A D B; Cui ad A, æqualis constituatur E A D. Dico igitur rectã E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cum enim anguli alterni A D B, D A E, æquales sint, per constructionẽ; Erunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato, igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

23. primi.



27. primi.

SCHOLION.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 7. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quã vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerent, cõuenirẽt ipsæ

ipsæ in puncto eodem, quod est absurdum, cum sint parallelæ.

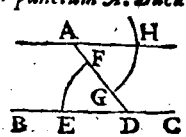
EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq; angulū illū cōprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim datæ rectæ A, B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ recta A sit æqualis, fiat angulus E D F, angulo C, & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E, agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela sunt, ex constructione; parallelogrammū erit D E G F. Quod cū ex cōstructione, habeat angulū D, angulo dato C, æqualē, & latera D E, D F, circa dictū angulū D, datis rectis A, B, æqualia; factū erit, qđ proponitur.

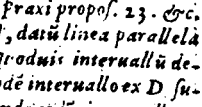


PRAXIS.

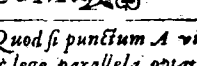
SIT ducenda parallela ipsi B C, per punctum A. Ducatur recta A D, vtcunq; ad B C, & ex D & A ad idē interuallū quodlibet describātur duo arcus ad diuersas partes; vnus ad partes B alter ad partes C: Deinde of ficio circini arcui E F, abscindatur ex arcu altero arcus G H æqualis. Si igit ex A, p H, recta ducaī, erit hæc parallela ipsi B C. Nā anguli 27. primi. E D F, H A G sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c.



ALIO modo ducet̄ per id̄e punctū A, datū lineæ parallelā lineæ datæ B C hac arte. Ex cētro A, ad quodvis interuallū describaī arcus secās B C in pūcto D; & eodē interuallo ex D sumatur punctū E, in eadē recta B C: Deinde eodē interuallo ex A, & E, describant̄ duo arcus duo arcus secātes se se in F. Nā ducta recta A F, erit parallela rectæ B C. Quoniā propter idē interuallium assumptū recta A F æqualis est rectæ D F; & recta A D, rectæ E F. si ducerēntur hæ lineæ; erit A F, oppositæ D E, parallela.



vt posteà demonstrabimus propos. 34. Quod si punctum A vicinum fuerit rectæ B C, commodiùs hac lege parallela optatæ ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ B C, nempe E, quod tamen aliquantulum distet a puncto D. (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo rectius parallela ducetur) Eodem interuallo arcus describatur ad partes A : Deinde ex A, interuallo D E alter arcus describatur secet priorem arcum in F. Recta igitur ducta A F, erit parallela rectæ B C. vt prius; quia recta A F, æqualis est rectæ D E, ob idem interuallum; & rectæ A D, rectæ E F, si hæ rectæ ductæ essent, &c.

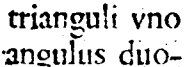


32. THEOR. 22. PROPOS. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto : Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, erunt anguli alterni A, & A C E, æquales. Rursus, quia recta B D, in easdem parallelas incidit, erit angulus externus D C E, æqualis interno B; Additis igitur æqualibus A C E, & A, fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, æqualis. Quod est propositum.

31. primi. *29. primi.* *29. primi.* *2. pron.*



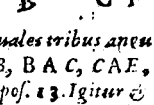
DICO secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cũ enim exter-

externus angulus A C D, ut oſtenſum fuit, æqualis ſit duobus internis A, & B; ſi addatur communis A C B, erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: Sed duo A C D, A C B, æquales ſunt duobus rectis; Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus ſunt rectis æquales. Quare cuiuſcunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonſtrandum. 2. pron. 13. primi.

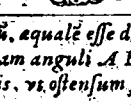
SCHOLION.

CVM *demonſtratum ſit propoſ. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem eſſe utrolibet interno, & oppoſito; Hic autem, eundem externum eiſdem internis eſſe æqualem; perſpicuum eſt, alterutrum internorum, & oppoſitorum ſuperari ab externo, reliquo interno angulo. Vt in triangulo propoſito angulus A, ſuperatur ab angulo A C D, angulo B; Et angulus B, ſuperatur ab eodem angulo A C D, angulo A, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, eſt æqualis. Rurſum, quia demonſtratum eſt propoſ. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli, quomodocunq; ſumptos, duobus eſſe rectis minores; Hic vero omnes tres duobus rectis æquales eſſe; manifeſtum eſt, duos a duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt, angulo A C B, &c.*

OMNE *porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonſtrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, ducatur rectæ B C, parallela D E. Quoniam igitur* 31. primi. *anguli alterni D A B, & A B C, æquales* 29. primi. *ſunt; ſi addantur æquales E A C, & A C B, (ſunt enim & hi alterni) erunt duo anguli* 2. pron. *D A B, E A C, duobus A B C, A C B æquales. Addito ergo communi angulo B A C, eruntres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus anguli A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales ſunt duobus rectis, vt conſtat ex propoſ. 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus ſunt rectis æquales, quod eſt propoſitum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum A C F, ſi latus B C, ſit protra-*



ctũ, æqualẽ esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus re-
13. primi. ctis, vt ostensum fuit; Sunt autem, & anguli ACF, ACB,



duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB,
3. pron. remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.

FACILE etiam conuerti poteris prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CF, recta sitq; angulus ACF, æqualis duobus angulis ABC, BAC: Dico, rectas BC, CF, in directum iacere. Cũ enim angulus ACF, æqualis sit angulis ABC, BAC, si addatur communis angulus ACB, erunt anguli
2. pron. ACF ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC,
32. primi. BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACF, ACB; duobus erunt rectis æquales. Quare BC, CF,
14. primi. vnam lineam rectam constituunt.

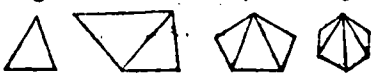
QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quot nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli vero secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempè quatuor rectis; Anguli autẽ tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tri-

bis tribus rectis, sex videlicet rectis. Et sic de reliquis. Enim uero locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, unde neq; figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ constitutionem requiruntur; Atq; ita triangulum, quia habet tria latera, totidemq; angulos, erit prima inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus relinquitur unum; Sic et figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus a 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaq; figura contenta 20. lateribus, cum sit decimaoctaua, habebit 20. angulos æquivalentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoq; omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquivalebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam a quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, & solum ad duos propinquos angulos non possunt duci: Quare in tot triangula distribuetur quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituant oes angulos rectilineæ figuræ prouolitæ, & oes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis; perspicuum est omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras; Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris. 32. primi.

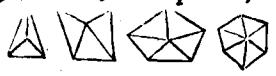


Secundus modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis

ptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

HOC est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis: Ita etiã anguli figuræ continentis 20. latera, æquabunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.

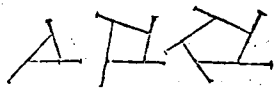


Demonstratio autẽ huius rei talis est. Si ab aliquo puncto intra figurã assumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosue, figura ipsa continet: Cum igitur anguli cuiuscunq; trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt: At anguli circa punctum intra figuram assumptum non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum, quot latera, vel angulos continet figura: Sunt autem illi anguli circa dictũ punctũ æquales 4. rectis, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiusq; figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor quot ipsa figura continet angulos, seu latera. quod est propositum.

32. primi.

EX hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producantur versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur cũ duob⁹ rectis, atq; adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosue figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus: Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni, & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt.

13. primi.



Exemplum In triangulo quouis, anguli interni & externi simul æquales sunt sex rectis; Cum igitur interni duobus sint

bus ſint rectis æquales, erunt ſoli externi æquales quatuor rectis. In quadrilatero, anguli externi, & interni ſimul æquales ſunt octo rectis: Cum igitur interni ſoli æquales ſint quatuor rectis, erunt & ſoli externi quatuor rectis æquales. In pentagono, ſeu quinquangulo, anguli interni, & externi ſunt æquales 10. rectis; quoniam vero interni adæquantur ſex rectis, remanebunt externi æquales quatuor rectis. Quæ omnia in appoſitis figuris conſpiciuntur; Eademq; eſt ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

SI pentagoni ſingula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra coeant; efficientur quinq; anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis.



IN pentagono A B C D E, latera in vtrãq; partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K. æquales eſſe duobus rectis. In triangulo enim B H K, cum latus H B, ſit protractum ad F, erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppoſitis H, K, æqualis: Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppoſitis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales ſunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinq; angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & quinq; anguli F, G, H, I, K, duobus ſunt rectis æquales. Quod eſt propoſitum. 32. *primi.* 2. *pron.* 32. *primi.*

COROLLARIVM. I.

EX hac propoſ. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis cuiuſq; alterius trianguli ſimul ſumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, æquales ſunt duobus angulis rectis. Vnde ſi duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq; erunt ipſa triangula. 3. *pron.*

COR-

COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum; Nam reliqui duo simul conficient vnum rectum. Quod si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem; Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto. Si denique dictus angulus exciterit acutus, vtrumq; reliquorum maiorem esse semirecto; Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoq; est, iquemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti; Vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, quibus æquales sint tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, fiet vnus duas tertias partes vnius recti.

COROLLARIVM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum, prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum demiq; tertiam partem vnius recti.

SCHOLION.

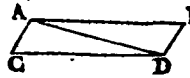
PORRO *ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, constituatur triangulum æquilaterum A B D: Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo A B D, bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.*

1. primi.

9. primi.

THEOR. 23. PROPOS. 33. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eadem coniungũt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales; Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia ſint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq;, & anguli quoq; dictis lateribus incluſi æquales; erunt baſes B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas A C, B D, erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum. 29. *primi.* 4 *primi.* 27. *primi.*

SCHOLION.

DIXIT *Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere coniungi, vt coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D; Item ad B & C, neque coniungentes eſſent parallelæ vnquam, ſed perpetuo ſe mutuo ſecarent, neq; eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.*

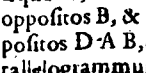
THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex

aduerſo

aduerſo & latera, & anguli; atq; illa biſariã ſecat diameter.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita A B, D C, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita A D, B C: Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe, nec non angulos oppoſitos D A B, & D C B: Deniq; ducta diametro A C, parallelogrammum ipſum biſariam ſecari. Cum enim A B, D C, ſint parallelæ, erunt anguli alterni



29. primi. B A C, D C A, æquales. Rurſus quã A D, B C, 29. primi. ſunt parallelæ, erũt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaq; cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales ſint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vtrq; vtriq;; & latus A C, dictis angulis adiacens commune vtriq; triangulo; erit 26. primi. recta A B, æqualis oppoſitæ rectæ D C, & recta B C, oppoſitæ rectæ A D: quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli B C A, 2. pron. D A C, toti quoq; anguli B A D, B C D, fiunt æquales; conſtat ſecundum, angulos nimirum oppoſitos eſſe æquales. Quoniam vero duo latera A B, B C, trianguli A B C æqualia ſunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq;; & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam 4. primi. oſtendimus; erunt triangula A B C, C D A, æqualia, ideoq; parallelogrammũ A B C D, diuiſum biſariam a diametro A C, quod tertio proponebatur. Parallelogrammiorum igitur ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex aduerſo &c. Quod oſtendendum erat.

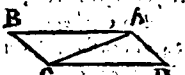
SCHOLION.

APPOSITE dixit Euclides, ſolummodo parallelogrammum a diametro diuidi biſariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat, anguli etiam biſariam diuiduntur a diametro. At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perſpicua erũt, ſi prius oſtenderimus, quatuor haſce figuras, Quadratum, Altera

Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, latera opposita A B, D C, æqualia, Item opposita latera A D, B C. Dico A B C D, esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemq; lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D, D A trianguli C D A, utrumque utrique, & basis A C, communis; igitur erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera A B, B C, æqualia sunt lateribus C D, D A, utrumque utrique, & anguli B, D, ostensi æquales; erit angulus B A C, angulo D C A, alterno æqualis, & angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare erunt A B, & D C, parallelæ; Item A D, & B C, quod est propositum.



8. primi

4. primi

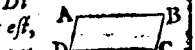
27. primi

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidē esse parallelogrammas; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, ut manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Convertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34 ut patet.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, anguli oppositi A, & C, æquales; Item oppositi anguli B, & D. Dico A B C D, esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C esse parallelas; Itemq; lineas A D, B C. Nam si æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D; erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, ut ad propos. 32. demonstravimus,

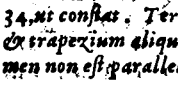


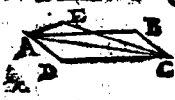
2. pron.

28. primi

ſtramus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare A D, B C, parallelæ ſunt. Eadē ratione erunt A B, D C, parallelæ. Erunt. n. duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, et C, æquales, &c. Quod eſt propoſitum. Ex hoc etiā manifeſtum eſt, Rhomboidem eſſe parallelogrāmum, cum eius anguli oppoſiti æquales ſint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppoſiti æquales, cum ſint recti, ex eorum definitionibus.

HOC theorema conuerti ſecundam partem propoſitionis 34. ut conſtat. Tertia autem pars non poteſt conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam ſecari poteſt a diametro, & tamen non eſt parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, uel Rhomboides A B C D, quod parallelogrammum eſſe oſtenſum eſt; in quo ducta diametro A C, conſtituatur ſuper A C, triangulo A B C, æquale triangulū A E C, inuerſo ordine, ita ut latus C E, ſit æquale lateri A B, & A E, ipſi C B, fiatq; trapezium A E C D. Quoniā uero triāgulū A B C, triāgulo A D C, æquale eſt,





34. primi

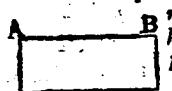
quod diameter A C, bifariā ſecet parallelogrāmū D B: Erit et triangulū A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuiditur a diametro A C.

QVOD ſi quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab utraque diametro, illud parallelogramum erit, ut oſtendemus ad propoſ. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri poteſt.

Tertium Theorema huiuſmodi eſt.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum.

SIT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti; Dico ipſum eſſe parallelogrammum; hoc eſt, lineas A B, D C, eſſe parallelas; Itemque A D, B C. Quoniam duo anguli A, & B, æquales ſunt duobus rectis, cum ſint duo recti; erunt A D, B C, parallelæ:



28. primi

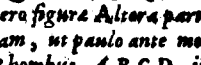
Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D, parallelogrammum. quod eſt propoſitum.

HINC rurſum conſtat, Quadratū, & Altera parte lon-

gius-

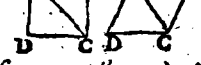
gius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

His in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos uero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, ut paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum; uel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniã igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, utrumque utrique, & basi B C, basi D C; (sunt enim hæ figuræ æquilaterę) erit anguli B A C, D A C, æquales; Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.



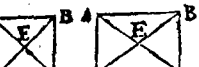
8. primi

Sit rursus, Altera parte longius, uel Rhomboides; A B C D, in quo diameter A C, sitq; maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B, maius est latere B C, erit angulus B C A, maior angulo B A C: Est autem angulus B C A, æqualis angulo D A C, alternoquod B C, A D parallelæ sint. (Est enim A B C D, ostensum esse parallelogrammũ.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur a diametro A C. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem appositio Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.



18. primi
29. primi

Eodem fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte lõgiore æquales esse; At uero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorẽ quidem eam quæ angulos acutos, minorem uero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit. n. quadratũ, uel altera parte lõgius A B C D, in quo diametri A C, B D, quas dico esse æquales. Cũ. n. duo latera A B, B C, triãguli A B C, æqualia sint duobus lateribꝰ A B, A D, triãguli



B A D, utrumque utrique, & angulus A B C, angulo B A D, quia uterque rectus; Erit basis A C, basi B D, aequalis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore aequales sunt.

4. primi

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri A C, B D, sint; anguli B A D, maior, A B C, minor. Non enim aequales sunt, quia alias uterque esset rectus, cum ambo aequales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem esse diametro A C. Quoniam duo latera A B, A D, trianguli B A D, aequalia sunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, utrumque utrique, & angulus B A D, angulo A B C, maior existit; erit basis B D, maior basi A C, quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 37. Euclidis asseruerit; eas tantum lineas quae coniungunt parallelas aequales ad easdem partes, aequales esse, ut ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectae A C, B D, inaequales sunt, licet coniungant parallelas A B, D C, quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, ut perspicuum est.

29. primi

24. primi

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli E A D, E D A, trianguli A E D, aequales sint alternis angulis E C B, E B C, trianguli B E C, utrumque utrique; & latus A D, aequale lateri B C, oppositum; Erit, & A E recta rectae C E, & recta D E, rectae B F, aequalis. Quare utraque diameter bifariam dimidiatur in puncto E.

29. primi
34. primi
26. primi

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariã diuidunt, parallelogrammũ est.

IN quadrilatero enim A B C D, diametri A C, B D, se mutuo bifariam diuidant in E. Dico A B C D, parallelogrammum esse. Cum enim latera A E, E B trianguli A E B, aequalia sint lateribus C E, E D, trianguli C E D; & anguli contenti

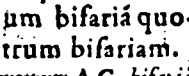
penti aduerticem E, æquales quoque: Erunt & bases A B C D æquales, & angulus A B E, angulo alterno C D E, æqualis. Quare rectæ A B, C D, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur A D, C B. Parallelogrammum ergo est A B C D. 13 primi 4. primi 17. primi



Hvc quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariã quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

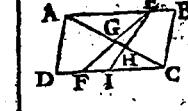
IN parallelogrammo A B C D, diametrum A C, bifariã secet recta E F, in puncto G; Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam angulus E A G, æqualis est angulo alterno F C G, & angulus E G A, angulo F G C, Est autem & latus A G, lateri C G, æquale per hypothesin; Erunt & latera E G, F G, æqualia. Quare cum latera A G G E, æqualia sint lateribus C G, G F, & anguli quoque contenti æquales; erunt triangula A G E, C G F, æqualia. Addita igitur communi quantitate B C G E, erit triangulum A B C, trapezio B C F E, æquale; Sed triangulum A B C, dimidium est parallelogrammi A B C D, Igitur & trapezium B C F E, dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoque recta E F, parallelogramum bifariã secat. 25. primi 15. primi 26. primi 4. primi 2. pron. 34 primi



SECET iam E F, parallelogrammum bifariam; Dico, & diametrum A C, bifariam secari in G. Si enim non bifariam diuiditur in G, diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta E H I; Eritque, vt iam demonstrauimus, E I C B, trapezium dimidium parallelogrammi A B C D, atque adeo æquale trapezio E F C B quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur A C, bifariam in G, & non in alio puncto. quod erat propositum. 10. primi

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrãmi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrã-

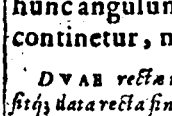
mũ, vel extra, quod tamẽ non fit in diametro, niſi ipſum ſecet diametrũ bifariã; quæ ratione ab illo puncto linea duci debeat, q̃ parallelogrãmũ bifariã ſecet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt ſi punctum ſit E, in latere A B, ducenda eſt recta E F, per G, punctum, in quo diameter A C, bifariam diuiditur; & ſic de alijs punctis.



DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarũ faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Opottet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem eſſe duobus rectis.

DVAE rectæ infinitæ A B, A C, contineant angulũ B A C, ſitq; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, ut duo anguli E, & B A C, minores ſint duobus rectis: Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cũ alterutra uero illarum, nimirũ cum A C, facientem angulum æqualem angulo dato E. Fiat angulus C A F æqualis angulo E,



23. primi. & producta F A, ad G, ſit A G, æqualis rectæ D; & per G,
3. primi ducatur G B, parallela ipſi A C, ſecans A B, in B: Deinde
31. primi per B, ducatur B C, parallela ipſi A G, ſecans A C, in C. Dico rectam B C, collocatam inter rectas A B, A C, æqualem eſſe rectæ D, angulumq; B C A, angulo E. Cum enim parallelogrammum ſit, per conſtructionem, A C B G, erit recta B C,
34. primi. rectæ G A, æqualis; At G A, æqualis eſt, per conſtructionẽ,
32. primi rectæ D; Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rurſus quia
29. primi. angulus B C A, angulo alterno C A F, æqualis eſt; & eidem angulo C A F, æqualis eſt, per conſtructionem, angulus E; erunt anguli E, & B C A, æquales. Q̃uod eſt propoſitum.

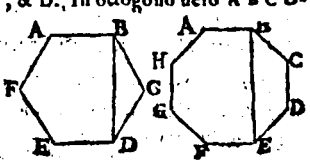
Cæterum

Caterum ex conſtructione manifeſtum eſſe cuilibet poteſt, tres duo anguli dati minores eſſe debeant duobus rectis. Nam aliàs non fieret triangulũ A B C, ſi anguli B A C, & B C A, æquales eſſent duobus rectis, vel maiores, ut conſtat ex propos. 17. uel 32.

EX PROCLO.

In omni figura rectilinea latera habens numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera, & æquiangula; erunt duo quælibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

LATERA oppoſita dicuntur illa duo, quę ex utraque parte latera habent æqualia numero; ut in hexagono A B C D E F, latera oppoſita ſunt A B, E D; quoniam tam ad partes A, & E, duo ſunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono uero A B C D E F G H, latera oppoſita erũt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria ſunt latera, quam ad partes B, & E. Et ſic in alijs figuris æquilateris parium laterum, ex utraque parte oppoſitorum laterum, erunt tot latera, quot ſunt in dimidio numero laterum, minus uno. Vt in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur duo quælibet latera oppoſita eſſe parallela; A B, nimirum ipſi E D, in hexagono; & A B, ipſi F E, in octogono, & ſic de cęteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorum laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, ut in 32. propos. demonſtrauimus, ſex anguli hexagoni æquales ſunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiuſdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales. Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, duobus rectis æquales; Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis æquales erunt; Quare parallelæ erunt A B, & E D. Rurſus quia octo anguli octogoni æquales ſunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, ſex rectis æquales. Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis; Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erũt rectis æquales, atq; adeo A B, F E, parallelæ erũt. Eodẽ modo demõſtrabit, in oĳs alĳs

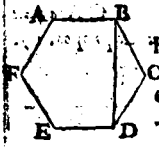


32. *primi*

28. *primi*

32. *primi*

figuris huiusmodi angulos duos ad lineã rectã extrema oppositorũ lateru coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam



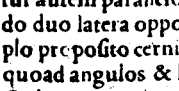
in decagono auferet ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt tribus rectis; At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis: Ablatis igitur tribus, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum, eadem linea abscindet hexagonũ, cuius anguli sunt octo rectis æquales; At sex anguli totius figuræ æquales sunt decẽ rectis; demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

QVAMVIS autem omnis figura æquiangula pariũ laterum habeat latera opposita parallela, ut ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea que in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35. THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

INTER duas parallelas A B, C D, super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F; (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad areã, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A & E Quoniam



igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E æqualis est rectæ C D oppositæ; & eidem C D æqualis est F B, in parallelogrammo C D B F; Erunt A E, F B, inter se æquales: Dempta igitur communi F E, remanebit A F, ipsi E B, æqualis: Est autem & A C, ipsi E D, æqualis in parallelogrammo C D E A, & angulus B E D, angulo F A C, externus interno. Quare triangulũ F A C, triangulo B E D, æquale erit: Addito igitur communi trapezio

34. *primi*

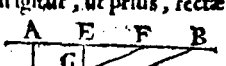
1. *pron.*
3. *pron.*
31. *primi*
29. *primi*
4. *primi*

pezo C D E F, fiet totum parallelogrãmum C D E A, toti parallelogrammo C D B F æquale. Quod est propositum. 2. pron.

CADAT secundo punctum F, in punctum E; Dico rursus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia esse. Erunt enim ut prius, rectæ A E, E B, æquales, atque adeo triangula E A C, B E D, æqualia. Adduo igitur cõmuni triangulo C D E; fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia. 4. primi 2. pron.



CADAT tertio punctum F vltra E, ita vt recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ A E, F B, sunt æquales; si communis addatur E F, erit tota A F, toti E B, æqualis, atque adeo triangulũ F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo cõmuni triãgulo E G F, remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum. 2. pron. 4. primi 3. pron. 2. pron.



SCHOLION

COMVERTEMVS *facile hanc propositionem, hoc modo.*

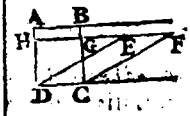
PARALLELOGRAMMA æqualia super eandem basin, ad easdemque partes cõstituta, erunt inter easdem parallelas.

SINT *duo parallelogramma æqualia* A B C D, C D E F, *super eandem basin* C D, *& ad easdem partes. Dico rectam* A B *productam, in directũ iacere ipsi* E F, *& propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim* A B, *producta uel cadet infra* E F, *uel supra; Cadat primo infra, qualis est* A H. *Erit igitur parallelogrammum* C D G H, *æquale parallelogrammo* A B C D; *Ponitur autem* 35. primi



1. pron. autem eidem parallelogrammo A B C D, æquale parallelogrämum C D E F; Quare parallelogräma C D E F, C D G H, æqualia erunt, totum, & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet A B, infra E F.

CADAT ſecundo A B, producta ſupra E F. Cadet igitur F E, protracta infra A B: Quare, ut prius erunt parallelogramma A B C D, C D H G, æqualia, totum et pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdū conſequeretur, ſi C F, D E, producerentur uſq; ad A B,

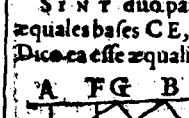


protractam. Eademq; demonſtratio conueniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum E, ſit ultra B, ſiue non, ut perſpicuum eſt. Non ergo cadet A B, ſupra E F; ſed nec infra, ut demonſtratum eſt: ergo producta, in directum iacet ipſi E F. ac proinde parallelogramma A B C D, C D E F, in eiſdem ſunt parallelis.

36. THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SINT duo parallelogramma A C E F, G H D B, ſuper æquales baſes C E, H D, inter eaſdem parallelas A B, C D. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarū



C E, G B, ad eaſdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D; & eidem H D, æqualis eſt G B. Erunt C E, G B, æquales inter ſe; ſunt autem & parallelæ, per hypotheſin: Quare & C G, E B, ipſas coniungentes parallelæ erunt, & æquales, ideoq; C E B G, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma A C E F, G C E B, ſint inter eaſdē parallelas, & ſuper eandem baſin C E, erit parallelogrammū A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rurſus quia parallelogramma G C E B, G H D B, ſunt inter eaſdē parallelas, & ſuper eandem baſin G B, erit quoq; parallelogrämum G H D B,

34. primi
1. pron.
33. primi.
35. primi.

GH D B, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, inter se æqualia erũt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, &c. Quod ostendendum erat. 35. primi. 1. prop.

SCHOLION.

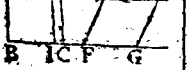
CONVERSVM huius theorematis duplex est, ad hunc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.

SINT primo duo parallelogramma æqualia A B C D, E F G H, super bases æquales B C, F G, & ad easdem partes constituta; Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est, A D, protractam coire in directum cum E H. Nam alias cadet aut infra E H, aut supra. Quo posito sequitur, totum et partem esse æqualia, quẽadmodum in conversa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligendæ sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta B G.



SINT secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas A H, B G. Dico bases B C, F G, esse æquales. Si enim altera, nempe B C, dicatur maior, abscindatur B I, æqualis rectæ F G, & ducatur I K, parallela ipsi C D; Erit{q} parallelogrãmum A B I K, æquale parallelogrammo E F G H; & ideo parallelogrammum A B C D, pars toti, quod est absurdum. Non ergo B C, maior est, quam F G. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases B C, F G, æquales sunt,



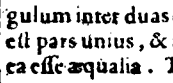
3. primi 31. primi, 36. primi

THEOR. 27. PROPOS. 37. 37.

TRIANGVLA super eadẽ basi cõsti-

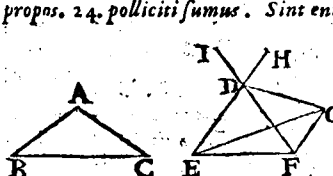
tuta,

tuta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D (Dicitur autē triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars unius, & angulus oppositus alteram tangit.) Dico ea esse æqualia. Per D, enim ducatur D E, parallela rectæ
31. primi. A C, & D F, parallela rectæ B C. Erunt


35. primi igitur parallelogrāma A C D E, A C D F, æqualia; Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed hō-
34. primi rum dimidia sunt triangula A C D B C D; quod A D B D, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F.
7. pron. Igitur & triangula A C D, B C D, æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

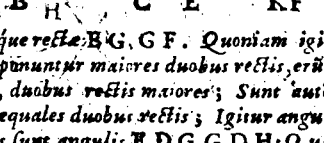
CONVERSA *huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos* 39. *Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula quorū duo latera unius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, ali quando esse æqualia, & aliquando inæqualia; Id, quod in propos.* 24. *polliciti sumus. Sint enim duo triangula* A B C, D E F, *& latera* A B, A C *æqualia lateribus* D E, D F, *& angulus*


A, *maior angulo* E D F, *sintque primo hi duo anguli duobus rectis æquales: Dico triangula esse æqualia. Producatur enim* E D, *ad* H, *&* F D, *ad* I. *fiatq;*
23. primi *angulus* E D G, *æqualis angulo* A, *& recta* D G, *rectæ* D F, *seu* A C; *ducanturque rectæ* E G, G F. *Quoniam igitur duo anguli* A, *&* E D F, *ponuntur æquales duobus rectis, & angulus* E D G, *æqualis est angulo* A; *erunt & anguli* E D G, E D F, *duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli*

quibus E D G G D H, duobus rectis æquales; Igitur anguli E D G, E D F, angulis E D G, G D H, æquales erunt: Quare ablato communi angulo E D G, remanebit angulo E D F, æqualis angulus G D H: Est autem eidem angulo E D F, æqualis angulus H D I; Igitur & anguli G D H, H D I, æquales erunt, atque adeo anguli G D H, dimidium erit totius anguli G D I. Rursus quia latera D F, D G, sunt æqualia in triangulo D F G, erunt anguli D F G, D G F, æquales; quia cum æquales sint externo angulo G D I, erit uterlibet eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I. Ostensum est autem, angulum G D H, dimidium quoque esse eiusdem anguli G D I: Quare anguli G D H, D G F, æquales erunt. Et quia sunt ad easdem partes inter E H, F G; erunt E H, F G, parallelæ. Quamobrem triangula D E G, D E F, æqualia erunt, cum habeant eandem basin D E, sintque inter easdem parallelas D E, F G. Quoniam uero triangulum D E G, æquale est triangulo A B C, propterea quod latera D E, D G, æqualia sunt lateribus A B, A C, & anguli A, anguli E D G; erit & triangulum A B C, triangulo D E F, æquale, quod est propositum.

13 primi
3. pron.
15. pri m.
5. primi
32. primi
27. primi
37 primi
4 primi

SINT secundo anguli A, & E D F, duobus rectis maiores; Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulum, minus esse triangulo D E F.

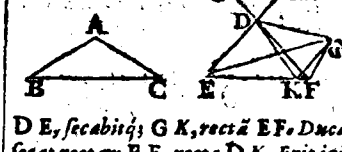


Producantur enim E D, ad H, & F D, ad I, fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A, & ducatur recta D G, recta E F, seu A C, æqualis; ducantur quæ rectæ B G, G F. Quoniam igitur anguli A, & E D F, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli E D G, E D F, duobus rectis maiores; Sunt autem anguli E D G, G D H, æquales duobus rectis; Igitur anguli E D G, E D F, maiores sunt angulis E D G, G D H; Quare ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, maior angulo G D H. Quoniam uero angulus E D F, angulo H D I, æqualis est, erit quoque H D I, maior quam G D H; æqua adeo G D H minor quam dimidium anguli G D I. Rursus quia latera D G, D F, æqualia sunt, erunt anguli D F G, D G F, æquales; quia cum sint æquales externo G D I, erit uterque eorum,

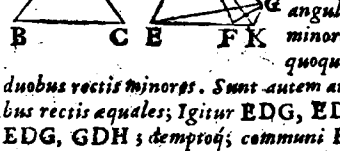
23 primi
3. primi
13. primi
15. primi
5 primi
32. primi

eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I; Oſtenſum eſt autem, angulum G D H, minorem eſſe dimidio eiuſdē G D I; Quare D G F, maior erit, quam G D H. Abſcindatur ex angulo D G F, angulus D G K, æqualis angulo alterno G D H: Erit ergo G K, parallela ipſi D E, ſecabitq; G K, rectā E F. Ducatur ex D, ad K, ubi G K, ſecat rectam E F, recta D K. Erit igitur triangulum D E G, æquale triangulo D E K. Quoniam autem triangulum D E G, æquale eſt triangulo A B C, propterea quod latera D E, D G, æqualia ſunt lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G; erit & triangulum A B C, triangulo D E K, æquale. Cum igitur D E K, minus ſit triangulo D E F, erit quoque A B C, triangulum triangulo D E F, minus: Quod eſt propoſitum.

23. primi
27. primi
37. primi
4. primi
9. pron.



SINT tertio anguli A, & E D F, duobus rectis minores: Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulum, maius eſſe triangulo D E F. Producatur E D, ad H, & F D, ad I, fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A, & recta D G, rectæ D F, ſeu A C; ducanturq; rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, & E D F, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli E D G, E D F, duobus rectis minores. Sunt autem anguli E D G, G D H, duobus rectis æquales; Igitur E D G, E D F, minores ſunt, quam E D G, G D H; demptoq; communi E D G, remanebit E D F, minor, quam G D H; Eſt uero E D F, æqualis ipſi H D I. Quare & H D I, minor erit, quam G D H, atque adeo G D H, maior eſt dimidio anguli G D I. Quoniam autem D G F, dimidium eſt eiuſdē anguli G D I, ut iam ſupra oſtenſum fuiſſe ris G D H, maior, quam D G F: Fiat igitur angulus D G K, æqualis angulo G D H, ducta recta G K, q̄ ſecabit rectam E F, protractā in K, & ducatur recta D K. Eritq́ue, ut prius, G K, parallela ipſi D E, triangulumq́; D E G, triangulo D E K, æquale: Eſt autem iterum D E G, æquale ipſi A B C. Igitur & A B C, æquale eſt ipſi D E K; Quocirca cum D E K, ma-



23. primi
13. primi
15. primi
27. primi
37. primi
4. primi
9. pron.

ius

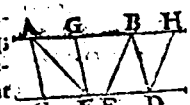
ius sit quam D E F; erit & A B C, maius, quam D E F; Quod demonstrandum erat.

Ex hic perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inaqualitatem basium, non autem triangulorum, ut ibidem admonuimus.

THEOR. 28. PROPOS. 38. 38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas A B, C D, & super æquales bases C E, F D, sint constituta triangula A C E, B F D. Dico ipsa esse æqualia. Ducatur. n. E G, parallela ipsi A C, & D H, ipsi B F; Eruntq; parallelogramma A C E G, B F D H, æqualia. Cum igitur horum dimidia sint triangula A C E, B F D; erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.



31. primi
36. primi
34. primi
7. pron.

SCHOLION.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si a quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari, Ducatur enim in triangulo A B C, ex angulo A, recta A D, diuidens bifariam latus B C, in D; Dico triangulum A B C, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi B C, erunt duo triangula A B D, A D C, inter easdem parallelas, et super æquales bases; Quare æqualia erunt.



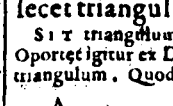
38. primi.

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in uno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, ut est ostensum: Si uero D, non diuidat B C, bifariam, secetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta D A, & per per E, parallela E F, ipsi

10. primi
31. primi



D A, secans A C, in F. Si igitur ducatur recta D F, erit triangulum diuisum bifariam a linea D F. Nam ducta recta E A, erunt triangula E F A, E F D, æqualia, cum sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Addito igitur communi C F E, erunt tota triangula A E C, C D F, æqualia. Est autem A E C, dimidium totius A B C, ut iam fuit ostensum; Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C. quod erat probandum.

37. primi
2. pron.



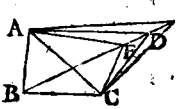
QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate E C, eodem modo problema conficiemus: sed hunc triangulum abscindemus ad partes B, trapezium uero ad partes C, ut figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos uniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

39.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B C, super eandem basin B C, & ad easdē partes; Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi B C. Si enim non est, ducatur ex A, parallela ipsi B C,



31. primi

quæ

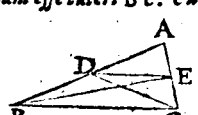
quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primo supra, qualis est A F, coeatq; cum B D, protracta, in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, B C, erit triangulo A B C, triangulum E B C, æquale: Est autem per hypothesin triangulum quoq; D B C, æquale eidem triangulo A B C; Igitur erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erūt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat. 37. primi. 1. pron.

SCHOLION.

Ex his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D E, latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cū enim triangula A D E, B D E, sint super æquales bases A D, D E, & inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi A B) erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E, æquale; Igitur triangula D B E, C E D, æqualia erunt: Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta: Quare inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallela erunt; Quod est propositum.

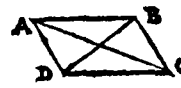


38. primi. 1. pron. 39. primi.

ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. pollicitisumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum quod ab vtraq; diametro bifariā diuiditur, parallelogrammū est.

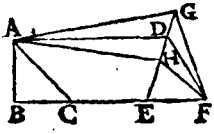
NAM *quadrilaterum A B C D, dividatur bifariam ab utraq; diametro A C, B D. Dico ipſum eſſe parallelogrammũ. Cum enim triangula* A D C, B D C, *dimidia ſint eiuſdem quadrilateri* A B C D, *ipſa inter ſe æqualia erunt. Quare cum eandem habeant baſin* D C, *ad eaſdemq; partes ſint, ipſa in eiſdem parallelis erunt: Atq; idcirco* A B, D C, *parallelæ ſunt. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe* A D, B C. *Parallelogrammum igitur eſt* A B C D. *Quod eſt propoſitum.*



39. primi.

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia ſup æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtitu ta; & in eiſdem ſunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, ſuper baſes æquales B C, E F, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ B F. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi B F, per A, ducta vel ſupra A D, vel infra. Cadat primo ſupra, coeatq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniã igitur parallelæ ſunt A G, B F, erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale; Ponitur autem, & triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale: Igitur triangula D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum; Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis eſt A H, ducta recta H F, erũt eadẽ argumẽtatione triãgula H E F, D E F, æqualia, pars & totũ; quod eſt abſurdũ. Eſt igit' A D, parallela ipſi B F. Quare triãgula æqualia ſup æqualib⁹ baſibus, &c. Quod erat demonſtrandũ.

38. primi.

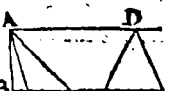
1. 5 ten.

SCHOLION.

EODEM *modo demonſtrari poteris hoc theorema.*

TRI-

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

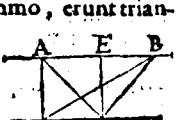


SINT triangula æqualia, A B C, D E F, inter parallelas A D, B F, & ſuper baſes B C, E F, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit B C, maior. Abſciſſa ergo recta C G, æquali ipſi E F; & ducta recta G A, erit triangulum A G C, triangulo D E F, æquale. Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo D E F, æquale: Igitur triangula A G C, A B C, æqualia erũt, pars & totum; quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes B C, E F, ſed æquales. Quod eſt propoſitum. 38. primi. 1. pron.

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

INTER parallelas A B, C D. & ſuper baſin C D, conſtituantur parallelogrammum A C D E, & triangulum B C D. Dico parallelogrammum eſſe duplum trianguli B C D. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt triangula A C D, B C D, æqualia; At parallelogrammum A C D E, duplum eſt trianguli A C D; Igitur & trianguli B C D, duplum erit idẽ parallelogrammũ A C D E. Quamobrem, ſi parallelogrammum cũ triangulo, &c. Quod erat demonſtrãdũ.

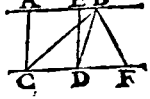


37. primi. 34. primi.

SCHOLION.

HINC ſequitur, ſi triangulũ duplã habuerit baſin, fueritq; in eiſ-

in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis C D producatur ad F, vt sit D F æqualis ipsi C D, ducaturq; recta F B, erit triangulum B C F, duplum trianguli B C D, quod



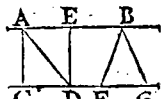
38. primi.

triangula B C D, B D E æqualia sint. Est autem & parallelogrammum A C D E, duplum eiusdem trianguli B C D: Igitur æqualia erunt triangulum B C F, & parallelogrammum A C D E.

41. primi.

6. pron.

IDEM *hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintq; in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo A C D E, & triangulo B F G, quorum bases C D, F G, æquales sunt. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt triangula A C D, B F G, æqualia; Cum igitur parallelogrammum A C D E, duplum sit trianguli A C D: erit quoque idem trianguli B F G, duplum. Eadem ratione si basis F G, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli B F G, &c.*



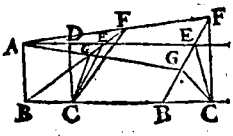
38. primi.

34. primi.

38. primis.

CONVERSVM *huius theorematis duplex est, hoc modo:*

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemq; parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem.



SIT parallelogrammū A B C D, duplum trianguli E B C sive eandem habeant basin, sive æquales; Dico rectam ductam A E, parallelam esse rectæ B C. Nam alias ducta parallela ex A, cadet aut supra

ſupra A E, aut infra. Vnde vt in 39. vel 40. propoſ. oſtendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. Quod eſt abſurdum.

SIT deinde parallelogrammum A B C D, duplum trianguli E F G, in eiſdemq; parallelis: Dico baſes B C, F G, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe B C, ſit maior, abſciſſa æquali C H,



& ducta H I, parallela ipſi A B, demonſtrabimus parallelogramma A B C D, I H C D, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum eſt trianguli E F G; illud quidem per hypotheſin, hoc vero per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis F G, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi B C, æqualis F H ducaturq; recta H E, erunt triangula E F H, E F G, æqualia, pars & totum; (nam vtriuſq; dimidium eſt parallelogrammi A B C D; Illud quidē per propoſ. 41. hoc vero per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

EX PROCLO.

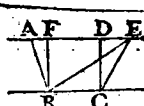
Si triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.

INTER lineas parallelas A E, B C, ſint conſtituta trapezium A B C D, & triangulum E B C, ſuper baſim B C, eandem, quæ ſit tamen maior quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus eſſe duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam B C, ſumatur A F, æqualis ipſi B C, & ducatur recta C F, quæ erit parallela ipſi A B; Atq; adeò parallelogrammum erit A B C F, quod duplum eſt trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cum ſit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiuſdem trianguli E B C, quod eſt propoſitum.



33. primi
41. primi.

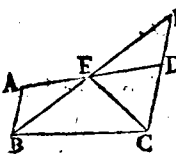
SINT rurſus trapezium, & triangulum, vt prius, ſed baſis



B C, sit minor quã reliqua linea parallela A D, in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, maius esse duplo trianguli E B C. Cum enim A D, maior sit, quam B C, abscindatur D F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta B F, quæ erit parallela ipsi C D, atq; adeo parallelogrammum erit B C D F, quod duplũ
33. primi. 41. primi. est trianguli E B C. Quare totum trapezium A B C D, quod superat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.

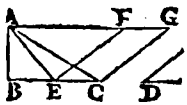


SIT trapezium A B C D, cuius duo latera opposita A B, D C, sint parallela, & super basin B C, constituatur triangulum E B C, verticem E, habens in medio puncto E, lateris A D: Dico trapezium A B C D, duplum esse trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe B E, donec coeat cum C D, protracto in F. Et quia parallelæ sunt A B, C F, erunt anguli alterni,
29. primi. 15. primi. E A E, F D E, æquales: Sunt autem & anguli A E B, D E F, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli A E B, lateri D E, trianguli D F E, æquale, per hypothesin: Igitur & reliqua latera A B, B E, reliquis lateribus, D F, F E, æqualia erunt,
26. primi. 4. primi. 2. pron. 38. primi. vtrumque vtrique, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales. atq; idcirco triangula A B E, D F E, æqualia erunt. Quare addito communi triangulo C D E, erunt triangulo C E F, æqualia triangula A B E, C D E: Est autem & triangulum B C E, eidem triangulo C E F, æquale, quod bases B E, E F, ostẽsæ sint æquales, & ipsa triãgula inter easdẽ sint parallelas, si p C, duceretur parallela ipsi B F. Igitur triangulum C B E, æquale erit triangulis A B E, C D E; & propterea C B E, triangulum dimidiũ erit trapezii A B C D, quod est propositum.

42. PROBL. 11. PROPOS. 42.

DATO triangulo æquale parallelo gram-

grammum constituere in dato angulo rectilineo.



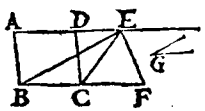
DATVM triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur construere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habēs angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, bifariam in E, & 10. primi.
fiat angulus C E F, æqualis angulo D: Ducatur itē per A, 23. primi.
recta A F, parallela ipsi B C; quæ secet E F, in F. Rursus per 31. primi.
C, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritq; constitutum parallelogrammū CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta
E A; quoniam parallelogrammum C E F G, duplum est 41. primi.
trianguli AEC; & triangulum ABC, duplum eiusdem trianguli AEC, quod triangula AEC, ABE, super æquales bases BE, EC, & in eisdem parallelis, sint æqualia: Erunt paral 38 primi.
lelogrammum CEFG, & triangulum ABC, æqualia inter 6. pron.
se. Cum igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo, æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo; Quod erat faciendum.

SCHOLION.

SVBIVNGIT *hoc loco Peletarius subsequens problema.*

DATO parallelogrammo æquale triangulū constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus C B E, angulo G æqualis, secetq; recta B E, rectā A D, productā in E: Extendatur quoq; B C, ad F, sitq; C F, æqualis rectæ B C. Dico triāgulū B E F, habēs angulū E B F,



23. primi.

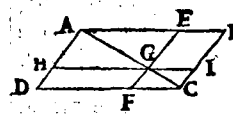
angulo dato G æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta CE, erit parallelogrammum ABCD, duplum trianguli BCE; Item triangulum BFF, ſuidem trianguli BCE, duplum; quod æqualia ſint triangula EBC, EBF. Quare æqualia inter ſe erunt parallelogrammum ABCD, & triangulum BEF.

41. primi. 38. primi. 6. pron.

43.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

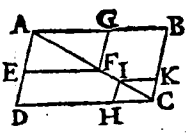
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.



In parallelogrãmo ABCD, ſint circa diametrum AC, parallelogrãma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter ſe eſſe æqualia. Cum enim triangula ABC, CDA, æqualia ſint; Itemq; triangula AEG, GHA; ſi hæc ab illis demantur, remanebunt trapezia CBEG, CDHG, æqualia: Sunt autem & triangula CGI, CGF, æqualia. Quare ſi detrahantur ex trapezijs, remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod oſtendendum erat.

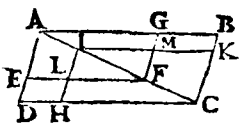
34. primi. 3. pron. 34. primi. 3. pron.

SCHOLION.



EODEM modo hoc theorema demonſtratur a Proclo, etiam ſi duo parallelogramma circa diametrũ nõ coniungantur in puncto G, ſed vel vnum ab altero ſit ſemotum, vel ambo ſe mutuo interſecent. Sit enim prius vnum ab altero diſtans, ita vt complementa ſint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, conſiſtat

consistant parallelogramma AEFG, CHIK: Dico complementa DEFIH, BKIFG, esse æqualia. Cum enim triangula ABC, CDA, æqualia inter se sint; Item triangula AEF, CHI, æqualia triangulis AGF, CKI; erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod est propositum. 34. primi. 3. pron.

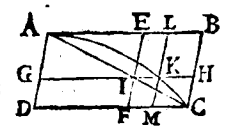


SECENT seiam mutuo parallelogamma AEFG, CHIK, circa diametrum, sta vt communem partem habeant ILFM; Dico adhuc cõplementa DELH, BGMK, esse æqualia. Cum enim æqualia sint triangula ABC, CDA; Item triangula AFG, AFE; erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia; Sunt autem rursus æqualia triangula IFM, IFL; Igitur si hæc addãtur dictis quadrilateris, erũt figuræ BCIMG, DCILE, æquales: Cum igitur & æqualia sint triangula CIK, CIH, erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod est propositum. 34 primi. 3. pron. 34. primi. 2. pron. 34. primi. 3. pron.

CONVERSVM quoq; huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogrãma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis EF, GH, quæ sint parallelæ rectis BC, CD, seq; secent in I, diuidatur parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorũ aduersa duo BEIH, DFIG sint æqualia: Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K, ducatur LM, parallela ipsi BC. Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, æqua-



31. primi. 43. primi.

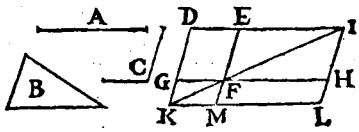
9. pron. *æqualia: Est autem* DGKM, *maius quã* DGIF; *Quare & maius erit* BHKL, *quã* DGIF. *Cum ergo* DGIF, *æquale ponatur ipsi* BEIH, *erit etiam* BHKI, *maius, quam* BEIH, *pars quam totius; Quod est absurdum. Non ergo diameter* AC, *rectam* GH, *in* K, *secat, sed per punctum* I, *transit. Quod est propositum.*

44. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Cõstituatur trian-

42. primi.



gulo B, æquale parallelogrãmũ DEFG, habens angulũ EFG, angulo C, æqualem, producaturq; GF, ad H, vt

31. primi. FH, sit æqualis rectæ A; & per H, ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectę DG, productæ in K; & per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturq; EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur; Habet enim latus FH, æqua-

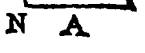
15. primi. le datæ rectæ A. & angulum HFM, angulo dato C, æqualẽ, cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Deniq; parallelogrammum LMFH, æ-

43. primi. quale est triangulo B, cũ æquale sit cõplemento DEFG, qđ factũ est æquale triangulo B. Ad datã igitur rectã lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

QVOD *si quis optet, lineam ipsam A, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammũ* FMLH,

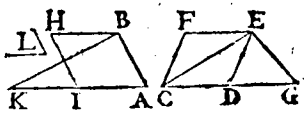
F M I H, ad rectam A, ex ijs quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditū fuit, effectum erit, quod quæritur.



ADDIT *hic aliud problema Peletarius, hoc modo.*

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

SIT data recta A B, data tū parallelogrāmū C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, vt D G, æqualis sit ipsi C D, & iungatur G E, recta: Eritq; triangulum C E G, parallelogrammo C D E F, æquale, vt demonstrauimus scholio propos. 41. Fiat iā super data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triāgulo C E G, hoc est, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt sit I K, æqualis ipsi A I, iungaturq; recta B K. Dico triangulum A B K, constitutum super datam rectam A B, habensq; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrammo C D E F. Cum enim triangulum A B K, æquale sit parallelogrammo A B H I, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo C D E F, constat propositum.



44. primi.

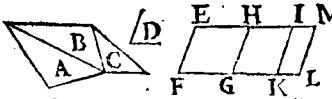
PROBL. 13. PROPOS. 45.

DATO rectilineo æquale parallelogrāmum cōstituere, in dato angulo rectilineo.

DATVM *rectilineum sit A B C, & datus angulus D: oportet igitur cōstruere parallelogrammū æquale rectilineo A B C, qđ habeat angulū æqualē angulo D. Resoluat rectilineū i triāgula A, B, & C. Deinde triāgulo A, æquale paralle-*

42. primi.

logram-



logrammum cõstituatur E F G H, habens angulum F, angulo D, æqualem.

44. primi. Item super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo, factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnũ parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, inter se sunt æquales, cum vterq; æqualis sit angulo D. Addito igitur cõmuni angulo F G H, erunt duo

29. primi. anguli E F G, F G H, qui duobus rectis æquiualent, æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus

14. primi. etiam rectis æquales erunt. Quare F G, G K, vnam rectã lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnã rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sint, (cum sint æquales oppositis an-

34. primi. gulis æqualibus E F G, H G K.) & duo anguli H I K, I H G,

29. primi. duobus sint rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint

30. primi. parallelæ; Itemq; E F, I K, quod vtraq; parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Dato ergo rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendũ.

SCHOLION.

Quamvis in hoc problemate Euclides absolute, & simpliciter docuerit, quanam arte parallelogrammum constituatur æquale rectilineæ figuræ datæ, non astringendo nos ad certam aliquam lineam rectam datam, vt in propos. 44. fecerat: Tamen eodem modo, quod iubetur, efficiemus, si recta aliqua linea nobis fuerit assignata. Nam si detur recta linea

E F,

EF, super ipsam constituemus parallelogrammum EFGH, aequale triangulo A. Et eodem modo super GH, constituemus aliud GHIK, aequale triangulo B, &c. Quibus peractis, constitutum erit super datam rectam EF, parallelogrammum EFLM, aequale rectilineo dato, in dato angulo F, qui aequalis est angulo D, proposito. 44. primi.

PARI ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum aequale, si omnia resoluantur in triangula, quibus aequalia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 42. & 44. ceu factum est ab Euclide in hoc problemate. Nam cũ omnia haec parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, veluti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum aequale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atq; A B, resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma EG, GI, IL, iuxta artem huius problematis, aequalia constituantur, ex propos. 42. & 44. erit constructũ parallelogrammũ totum EFLM, aequale duobus rectilineis A B & C. Et sic de pluribus.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quẽ nos tamẽ alio modo, et breuiori demõstrabimꝰ, in hũc modũ.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



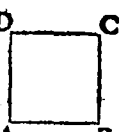
SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. Fiat parallelogrammum CDEF, in quocũq; angulo D, aequale maiori rectilineo A. Et super rectam CD parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, aequale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, superat parallelogrammum CDGH, parallelogrammo EFHG; superabit quoq; figura A, figurã B, eodẽ parallelogrãmo EFHG. Quod est propositum. 45. primi.

PRO-

45.

PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

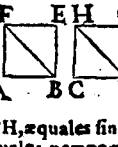


11. primi. 28. primi. 33. primi. 34. primi.

SIT data recta AB, sup quã oporteat quadratũ describere. Ex A, & B, educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintq; ipsi AB, æquales, & cõnectatur recta CD. Dico AB-CD, esse quadratũ. Cum. n. anguli A, & B, sint recti, erunt AD, BC, parallelæ: Sunt aũt & æquales, quod vtraq; æqualis sit ipsi AB; Igitur & AB, DC, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammũ est: ABCD; in quo, cũ AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineę æquales existũt; Sunt aũt & oẽs quatuor anguli recti, cũ C, & D, æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratũ igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde a data recta linea quadratũ describimus; Quod faciendũ erat.

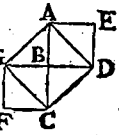
EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorũ æqualiũ æquales sũt lineæ.



4. primi. 34. primi.

SINT primo rectæ AB, CD, æquales; Dico earũ quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoq; esse. Ductis enim diametris BF, DH, erũt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus lateribꝰ DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumq; vtriq;, cũ ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales sint rectis AB, CD: Sunt autem, & anguli A, & C, æquales, nempe recti: Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.



14. primi.

SINT secundo quadrata ABDE, BCFG, æqualia; Dico lineas quoq; ipsorũ AB, BC, æquales esse. Cõiungantur. n. quadrata ad angulum B, vt rectæ AB, BC, in directũ cõstituantur. Et quoniã anguli ABG, ABD, sunt recti, erũt & rectæ GB, BD, in directũ cõstitutæ. Ducãtur diametri AD, CG, iungãturq; rectę AG, CD. Quoniã igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia sunt, erũt & triãgula ABD, BCG, eorũ dimidia, æqualia. Addito ergo cõi triãgulo BCD; fiet totũ triangulũ ACD, totũ triãgulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cũ eo-

dem

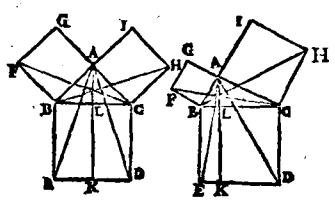
dem habeāt basin CD, ad eaſdēq; ſint partes, in eiſdē ſunt parallelis, ideoq; parallelæ ſunt AG, CD. Et qm̄, vt in ſcholio propoſ. 34. oſtēſum eſt, diameter in quadrato ſecat angulos quadrati bifariā, erūt anguli DAC, GCA, alterni ſemirecti, ideoq; æquales. Quāobrē & parallelæ ſunt AD, CG; Igitur parallelogrāmū eſt ADCG, ac propterea rectæ AD, CG, æquales: Quoniā ergo in triāgulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia sūt, & anguli, qb⁹ ea latera adiacēt, inter ſe ēt æquales, cū ſint ſemirecti, vt in ſcholio ppoſ. 34. oſtēſum fuit; erūt reliqua latera æqualia, nēpe AB, ipſi BC, &c. Qđ ē ppolitū. 39 *primi.* 27. *primi.* 34. *primi.* 36. *primi.*

SCHOLION.

POSSENT *hæc omnia multo breuius probari per ſuperpoſitionē quadrati vnius ſuper aliud. Nā ſi lineæ ſunt æquales, ſe vna alteri ſuperponatur, congruent ipſæ inter ſe; Cū ergo & anguli ſint æquales, nempe recti, conueniēt quoq; ipſi inter ſe, ideoq; totū quadratū toti quadrato congruet. Quod ſi quadrata ſunt æqualia, cōgruent ipſa inter ſe, propter æqualitatē angulorū; Igitur & lineæ; aliàs vnū quadratū alio maius eſſet.*

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectāgulis triāgulis, quadratū, quod a latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus.

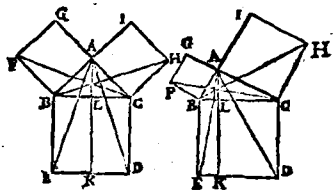


IN triangulo ABC, angulus BAC, ſit rectus, deſcribāturq; ſuper AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI BCDE: Dico quadratū BCDE, deſcriptū ſuper latus BC, quod angulo recto oppoſit⁹, æquale eſſe duob⁹ quadratis ABFG, ACHI, quę ſup alia duo latera ſunt deſcripta, ſiue hęc duo latera æqualia ſint, ſiue inæqualia. Ducatur enim recta AK, parallela ipſi BE, vel ipſi CD, ſecans BC, in L & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, & BAG, ſunt recti, erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodēq; modo IA, AB, vna recta linea erunt. 46. *primi.* 31. *primi.* 14. *primi.*

erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cũ sint recti, si addatur communis angulus A B C, fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterq; totus angulus B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur latera A B, B E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumq; vtriq;, vt constat ex definitione quadrati; Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æ-

2. pron.

4. primi.



41. primi.

quales, vt ostendimus; Erunt triãgula A B E, F B C, æqualia. Est autẽ quadratum, seu parallelogrãmũ A B F G, duplũ trianguli F B C, cum sint inter parallelas B F, C G, & super eandem basin B F; Et parallelogrammum B E K L, duplum trianguli A B E, quod sint inter parallelas B E, A K, & super eandẽ basin B E. Quare æqualia erunt quadratũ A B F G, & parallelogrammum B E K L; Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum A C H I, & parallelogrammum C D K L. Erunt enim rursus triangula A C D, H C K, æqualia, ideoq; eorum dupla, parallelogrammũ videlicet C D K L, & quadratum A C H I. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale est duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.

6. pron.

SCHOLION.

cap. 2. *INVENTIO huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quod se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues; si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisset; quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorum, com-*

posuit

posuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5 partes æquales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum; Idque in quamplurimis alijs numeris, vt in 6, 8, 10. & in 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omn. triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant unum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi uoluptate adinuenit, firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figurã quãlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam siue ea sit triangulũ, siue quadrangulum, siue quinquangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur. dummodo priori sint similes, similiterq; descriptæ, ut ibidem ostendemus.

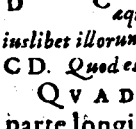
CAETERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperiuntur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, ut 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic ex 25. remoue vnitatem; Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula

tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6; Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros. 8. & 10. primus .n. est 6. nimirũ numerus par accepᵗ. Hac regula si accipiaï par 10. reperienẽ alij duo 24. et 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quã problemata, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, tui tium hinc sumentes.

I. SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplũ erit prædicti quadrati.

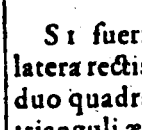
IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C; Dico quadratum A C, duplum esse quadrati A B C D. Cum enim in triangulo A B C, angulus B rectus sit, erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cum igitur quadrata linearũ A B, B C, æqualia sint, quod lineæ A B, B C, sint æquales; erit quadratum lineæ A C, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B; hoc est, quadrati A B C D. Quod est propositum.



47. primi

II. QVADRATVM diametri figuræ alterà parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia in triangulo A B C, angulus B, est rectus, erit quadratũ lateris A C, æquale duob. quadratis laterũ inæqualiũ A B B C. Quod est propositũ.



47. primi

III. SI fuerint duo triangula rectangula, quorũ latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterũ vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorũ duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli, A, & D, sint

sint recti, lateraq; opposita B C, E F, *æqualia: Dico duo quadrata laterum* A B, A C, *simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum* D E, DF, *simul sumptis. Nam quadrata linearũ* B C, E F, *æqualia inter se sunt, cum & ipsæ inter se ponantur æquales; Quadrato autẽ lineæ* BC, *æqualia sunt quadrata linearum* A B, A C; *Et quadrato lineæ* EF, *æqualia sunt quadrata linearum* D E, D F: *Perspicuum ergo est, quod proponitur.*

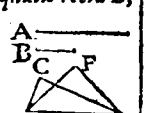


47. primi

47. primi.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis. IIII.

SINT A, *&* B, *latera duorum quadratorũ inæqualiũ; Fiat angulus rectus* D C E, *sitq;* D C, *recta æqualis rectæ* B, *& rectæ* C E, *rectæ* A. *Ducta deinde recta* D E, *coniungente puncta* D, E, *super ipsam constituantur duo anguli semirecti* D E F, E D F, *coeantq; rectæ* DF, EF, *in* F. *Quoniã igitur in triangulo* F D E *anguli* FDE, F E D, *æquales sunt, erunt & latera* D F, E F, *æqualia, ideoq; et quadrata eorumdẽ laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearũ* D F, EF, *æqualia esse quadratis linearũ* A, *&* B, *hoc est linearũ* CE, *&* CD. *Nam cum in triãgulo* DEF, *anguli* FDE, FED *faciant vnũ rectũ, erit reliquus angulus* F, *rectus. Quamobrẽ erunt quadrata linearum* DF, EF, *æqualia quadrato lineæ* DE; *sed eidẽ quadrato lineæ* DE, *æqualia sunt quoque quadrata* C D C E; *igitur quadrata linearum* DF, EF, *æqualia sunt quadratis linearum* D C, E C. *Quod est propositum.*



11. pron.

6. primi

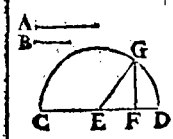
32. primi
47. primi

1. pron.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. V.

POTENTIA lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantũ enim quælibet recta linea posse dicitur, quantũ est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, *&* B, *oporteatq; cognoscere, quãto maius sit quadratũ maioris lineæ* A, *quã minoris* B. *Ex quauis linea recta* CD, *sumatur* CE, *æqualis rectæ* A,

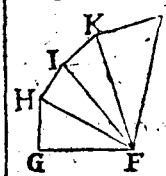
et E F. *æqualis rectæ* B. *Deinde cẽtro* E, *& interuallo* E C, *semi circulus describatur* C G D; *& ex* F, *ducaĩ* F G *ppendicularis ad* C D. *Dico quadratum rectæ* A, *hoc est, rectæ* C E, *sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ* B, *hoc est, rectæ* E F, *sibi æqualis, quadrato rectæ* F G. *Ducta enim recta* E G, *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum* E F, F G. *Quocirca quadratum rectæ* E G, *hoc est, quadratum rectæ* E C, *illi æquale, superabis quadratum rectæ* E F, *quadrato rectæ* F G. *Quod est propositum.*



47. *primi*

VI. PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. *oportet igitur inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque: Fiat angulus rectus* F G H, *sitq; recta* F G, *æqualis rectæ* A. *& rectæ* G H, *rectæ* B; *Ducta deinde recta* H F, *fiat angulus rectus* F H I, *sitq;* H I, *æqualis rectæ* C: *Ducta rursus recta* I F, *fiat angulus rectus* F I K, *sitque* I K, *æqualis rectæ* D: *Ducta denique recta* K F, *fiat angulus rectus* F K L, *sitque* K L, *æqualis rectæ* E. *Si igitur ducatur recta* F L; *Dico quadratum rectæ* F L, *æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ* F H, *æquale est quadratis rectarum* F G, G H, *hoc est, quadratis rectarum* A, *&* B. *Rursus quadratum rectæ* F I, *æquale est quadratis rectarum* F H, H I, *& idcirco quadratis rectarum* A, B, *&* C. *Item quadratum rectæ* F K, *æquale est quadratis rectarũ* F I, I K, *ideoque quadratis rectarum* A, B, C, *&* D. *Denique quadratum rectæ* F L, *æquale est quadratis rectarum* F K, K I, *ac propterea quadratis rectarũ* A, B, C, D, *&* E, *Quod est propositum.*



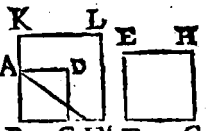
47. *primi.*

VII. PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram,

quæ

quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata A B C D, E F G H, *propositumque sit quadrato* A B C D, *apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato* E F G H, *&c. Sumatur recta* B I, *æqualis rectæ* F G, *lateri quadrati* E F G H. *Ducta autem recta* A I, *& producta recta* B A, *ad partes* A, *accipiatur* B K, *æqualis rectæ* A I, *perficiaturque quadratum* B K L M. *Dico figuram* A D C M L K, *quadrato* A B C D *adiunctam, æqualem esse quadrato* E F G H. *Quoniam quadratum rectæ* A I, *hoc est, quadratum* B K L M. *æquale est quadratis rectarum* A B, B I, *hoc est, quadratis* A B C D, E F G H; *si auferatur commune quadratum* A B C D, *remanebit figura* A D C M L K, *æqualis quadrato* E F G H. *Quod est propositum.*



47. primi

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire. VIII.

SIT angulus A, *rectus in triangulo* A B C *sintque primo cognita latera* A B, A C, *circa angulum rectum, quorum* A B, *ponatur* 6 *palmorum, &* A C, 8. *Quoniam igitur quadrata rectarum* A B, A C, *nempe palmi* 36 *&* 64. *æqualia sunt quadrato rectæ* B C; *si illa coniungantur simul, efficietur hoc palmorum* 100. *Latus ergo* B C, *continebit* 10. *palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata* 100. *palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint secundo cognita latera* A B, B C, *sitque* A B, 6. *palmorum, &* B C, 10. *Quoniam igitur quadrata rectarum* A B, A C, *æqualia sunt quadrato rectæ* B C; *si quadratum rectæ* A B, *quod continet palmos* 36. *detrahatur ex quadrato rectæ* B C, *quod est palmorum* 100, *remanebit quadratum rectæ* A C, 64. *palmorum. Latus ergo* A C, *continebit* 8. *palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus* 64. *palmorum. Quod*



47. primi

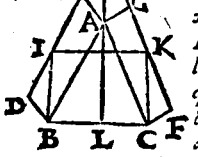
47. primi.

est propositum. Cæterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnes numeri habent latus, radicemve quadratam, vt notum est apud Arithmeticos; Vnde latus inuentum sæpe numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias.

THEOREMATE vero hoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunq; parallelogrammis super latera trianguli constructis, tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius.

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrāmo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelū rectæ ductæ ab angulo, quē duo illa latera cōprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorū lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli dicti producantur.

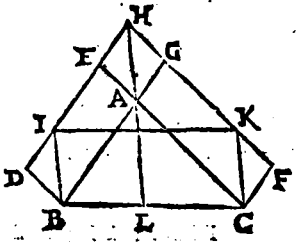
SIT triangulum quodcunque ABC, *constituanturq; super latera* AB, AC, *parallelogramma quæcunque* ABDE, ACFG, *quorum latera* DE, FG, *quæ lateribus* AB, AC, *assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli* A, *dictis lateribus* AB, AC, *cōprehens', conueniant in* H, *duaturq; recta* AH. *Dico parallelogrāma* AD, AF, *æqualia esse parallelogrāmo sup latus* BC, *descripto, cuius alterū latus æquale sit, & parallelū rectæ* AH. *Producta enim* HA, *secet* BC, *in* L; *& per* B, C, *agantur* BI, CK *parallelæ ipsi* AH; *iungaturq; recta* IK. *Quoniā igitur parallelogramma sunt* BIHA, CKHA, *erit vtraq;* BI, CK, *ipsi* AH, *æqualis*; *atquo adeo & inter se æquales erunt* BI CK, *quæ cū sint etiā parallelæ, quod eidem* AH, *parallelæ sint*; *erunt quoque* IC, IK, *parallelæ, & æquales. Quare parallelogrāmum est* BCKI *sup latus*



34. primi
30. primi
33 primi

latus BC, *habēs alterū latus* BI, *rectæ* AH *æquale, & parallelū: Cui quidē æqualia ostendēda sunt parallelogramma* AD, AF. *Quia æqualia sunt parallelogramma* AD, ABIH, *quod eādē habeant basin* AB, *in eisdemq; sint parallelis* AB, HD; *Est autē* ABIH, *parallelogrāmo* IL, *æquale, quod illud cum hoc etiā eandē habeat basin* BI, *in eisdemq; sit parallelis* BI, LH: *Erit quoque* AD, *eidem* IL, *æquale. Non aliter ostendemus,* AF, *ipsi* KL, *esse æquale. Quare parallelogramma* AD, AF, *parallelogramo* BK, *æqualia sunt. Quod est propositum.* 35. primi 35. primus.

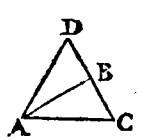
PAPPVS cōstruit figurā aliter. *Namsumit rectas* AC, AE; *et* AB, AG, *in directū positas, ita vt parallelogrāma* AD, AF, *sint æquiangula, habētia angulos* AED, AGF, *angulo* BAC, *ĭternos externo, æquales ceu hæc eius figura idicat. Sed nos vniuersaliu rē ꝓposuim⁹, vt manifestiū est.*



THEOR. 34. PROPOS. 48. 47.

SI quadratū, quod ab uno laterū trianguli describitur, æquale sit eis, quæ a reliqs trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum ABC, sitq; quadratū latetis AC, æquale quadratis reliquorū laterū BA, BC: Dico angulū ABC, esse rectū. Ducat namq; BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturq; recta AD. Quoniā igitur in triāgulo ABD, angulus ABD, rectus est, erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarū BA, BD: Est autē quadratū rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob lineaꝝ æquali



47. primi

tatē: Quare quadratū rectę AD, quadratis rectarū BA, BC, æquale erit. Cū ergo quadratū rectę AC, detē quadratis rectarū BA, BC, æquale ponat, erūt quadrata rectarū AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsę AD, AC, æquales. Quoniā igitur latera BA, BD, triāguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & basis AD, ostensa est æqualis basi AC; erunt anguli ABD, ABC, æquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus: Quare & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

8. primi

SCHOLION.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM II.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

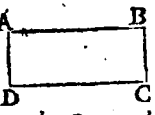


GIT Euclides in secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partiũ cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectãgula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis cõtineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum; Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti; Cuius quidem duo tantum sunt genera, Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo

lelogrammo ABCD, angulus A, rectus: Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint

29. primi



A D, BC, erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi, Igitur et B, rectus erit. Quoniam vero quilibet suo opposito

14. primi

est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ unũ eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D; vel sub A D, DC; vel sub DC, CB, vel denique sub AB, BC; quoniam quælibet huiusmodi duæ linea exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem; altera vero, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogramum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum re-

E ——— ctangulum sub rectis F, & F, contentũ,
F ——— erit idem, quod parallelogrãmũ A B C D; quoniam latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.

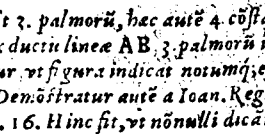
PERSPICVVM est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum; Cum enim quælibet illarum linearum æqualium æqualis sit

ſit linea oppoſitæ, erũt oĩa quatuor parallelogrãmi rectãguli latera æqualia: Quare ex definitione quadrati quadratum erit. 34. primi

ITEM *manifeſtũ eſt, ſi duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque utrique, rectangulũ parallelogrãmum ſub prioribus duabus comprehenſum, æquale eſſe ei, quod ſub duabus poſterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia ſunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiã ratione demonſtrari poteſt. Sint rectæ* A B. B C, *æquales rectis* DE, EF *vtraq; vtriq;; Dico parallelogrammum rectangulum* A B C G, *contentũ ſub* AB, BC *æquale eſſe parallelogrammo rectãgulo* DEFH, *contento ſub* DE, EF. *Ductis etenim diametris* AC, DF, *cũ latera* AB, BC, *trianguli* ABC, *æqualia ſint lateribus* DE, EF, *triãguli* DEF; *& anguli* B, *&* E, *æquales, nempe recti, erunt triangula* ABC, DEF, *æqualia; Eadem ratione æqualia erunt triangula* AGC, DHF: *Quare tota parallelogramma* A B-CG, DEFH, *æqualia erunt.* 4. primi



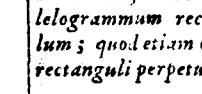
HABET *autem cõprehenſio hæc parallelogrammi rectanguli ſub duabus rectis lineis angulum rectũ continentibus, magnam affinitatẽ cum multiplicatione vnius numeri in alterũ. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formã parallelogrãmi cõſtituitur, vnde et contineri dicitur ſub 3. & 4: Ita quoq; parallelogrãmũ rectangulũ* ABCD, *cõprehẽſum ſub duabus rectis* AB, BC *quarũ illa ſit 3. palmorũ, hæc autẽ 4. cõſtat 12. palmis quadratis, q quidẽ ex ductu lineæ* AB *3. palmorũ in lineã* BC, *4. palmorũ pducuntur. vt figura indicat notumq; eſt Arithmeticis, atq; Geometris. Demõſtratur autẽ a Ioan. Regiomont. lib. 1. de triãgulis propoſ. 16. Hinc fit, vt nõnulli dicãt, parallelogrãmũ rectãgulũ gigni ex ductu duarũ linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ* AB *in lineã* BC, *vel (quod idem eſt) ex ductu lineæ* B C, *in lineam* A B. *Idem enim parallelogrammum procreatur, ſiue minor linea in maiorem, ſiue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem*



producitur

producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur. Tam enim ex multiplicatione 3. *in* 4, *quam ex* 4. *in* 3 *producitur hic numerus* 12.

OBITER *quoque monendus mihi lector uidetur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur; Vt superius parallelogrammum appellant* A C, *vel* B D



II.

IN omni parallelogrammo spatio, unũquodlibet eorum quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon uocetur.

IN *Parallelogrammo* A B C D, *siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter* A C, *ex cuius puncto quolibet* G, *ducantur rectæ* E F, H I, *parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo* E H, I F, *dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo* B G, G D, *complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, ut ex* I F, *vnacum duobus complementis* B G G D, *qualis est figura* E B C D H G E, *quam complectitur circunferentia* K L M, *dicitur Gnomon. Eadem ratione figura* F D A B I G F, *composita ex parallelogrammo* E H, *circa diametrum, & duobus*

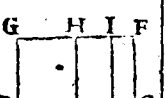


huic complementa B G, GD, *Gnomen appellabimus.*

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secetur̃que ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C: Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis; quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A; Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, uel C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, inter se quoque parallelæ 33. *primi* erũt: Rursus eædem, cum ex cõstructione parallelogramma sint B H, B I, æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ 34 *primi* A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B D; Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E; Item rectangulum E F sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, et segmentis B D, D E, E C, compre-

comprehẽduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

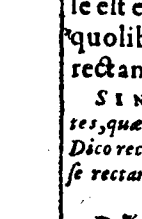
SCHOLION.

QVONIAM *lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si dividantur, ut lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus uerbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri unius in alterum respondeat ductui unius lineæ in alteram, ut supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq;, ut 6. & 10. dividatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur, id quod perspicuum est.*

DEMONSTRAT *hoc loco Federicus Cõmandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.*

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum cõprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis unius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum* A, *continentes, quæ secentur in partes* AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. *Dico rectangulum sub rectis* AB, AC, *cõprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub* AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB, GH; FB, HC, *continentur. Cõpleatur rectangulũ* AI, *ducanturq;* DK, EL, FM *parallelæ ipsi* AC, *vel* BI: *Item* HN, GO, *parallelæ ipsi* AB, *vel* CI; *quæ secent priores in* P, Q, R, S, T, V. *Quoniã igitur rectangulum* AS, *cõtinetur sub* AD, AG; *& GP. sub* AD, GH; *& HK, sub* AD, HC; (*quod rectæ* GS, HP, *ipsi* AD, *sint æquales:*) *Item*

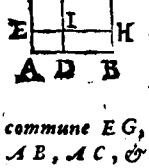


34. primi

Item rectangula DT, SQ, PL, continentur ſub DE, AG; DE, GH; DE, HC; *(quod DS, SP, PK, ipſis* AG, GH, HC, *æquales ſint, & ST, PQ, ipſi* DE.) *Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur ſub* EF, AG; EF, GH, EF, HC; *Nec non rectangula FO, VN, RI, ſub* FB, AG; FB, GH; FB, HC; *perſpicuum eſt, rectangulum ſub* AB, AC, *æquale eſſe rectangulis ſub ſingulis partibus* AD, DE, EF, FB, *& quolibet ſegmentorum* AG, GH, HC, *comprehenſis. Quod eſt propoſitum.* 34. primi

Si ſint duę rectę lineę, ſecenturque ambæ utcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo ſub una parte unius, & una parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.

Sint duæ rectæ AB, AC, *angulum continentes rectum* A, *quæ ſecentur vtcunque in* D, *&* E; *Dico rectangulum comprehenſum ſub* AB, AC, *vna cum rectangulo comprehenſo ſub partibus* AD, EC, *æquale eſſe rectangulis contentis ſub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur rectangulum AF, agaturque per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, parallela; nec non & per E, recta EH, ſecans DG, in I, parallela ipſi AB, vel CF.*



Quoniam igitur rectangulum AF, æquale eſt rectangulis EF, DH, AI; ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehenſa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AE, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.

In numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitio enim duobus hiſce numeris 10. *&* 5. *quorum prior in tres partes*

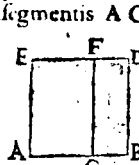
partes. 2. 4. 5. posterior vero in duas 3 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. aqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul addiii 80. vt volebat theorema 1 Federici.

Rvrsvs, si idem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoq; est 80. numerum productũ ex 10 in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. aqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea secta sit utcunque, Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

Recta linea A B, diuidatur utcunque in C. duas in partes; Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F parallela rectæ A E, vel B D, quæ æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B. Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectæ A B, ex definitione quadrati, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C; similiter erit rectangulum C D, comprehensum sub A B, & segmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, æqualia esse quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea secta sit utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.



34. primi

Aliter. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B, Quoniam

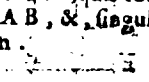
Quoniam igitur A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub inuicta D, & recta A B, nempe quadratum rectæ A B, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, inuicta, hoc est, sub A B, & singulis segmentis A C, C B, quod est propositum.

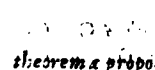


1. *secundi.*

SCHOLION.

Quanquam Euclides secundum hoc theorema propo-nat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vicinas, idem tamen eisdem mediis demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem percipitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7 & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100 quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in quatuor partes 3. 2. 1. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.

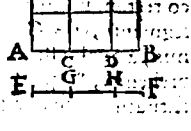




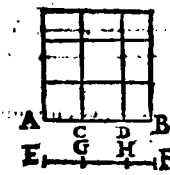
Simili modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

Si linea recta secetur in quotcumq; segmenta: quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

Sit recta A B diuisa in partes quotcunq; A C, C D, D B. Dico quadratū ex A B, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus A C, C D, D B, & quolibet segmentorū A C, C D, D B, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D,



L D B:



D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B, comprehensis. Sumpta enim recta E F, quæ æqualis sit ipsi A B, diuisaq; in partes E G, G H, H F, partibus A C, C D, D B, æquales; Eris ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub A B, E F, hoc est, quadratum ipsius A B. æquale rectangulis sub A C, E G; A C, G H; A C, H F: C D, E G; C D, G H; C D, H F: D B, E G; D B, G H; D B, H F. Cum igitur partes A C, C D, D B, partibus E G, G H, H F, sint æquales; Erit quoque quadratum ex A B, æquale rectangulis sub A C, A C; A C C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D, D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B. Quod est propositum.

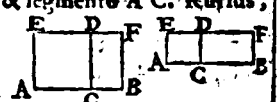
In numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. eris 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25, qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

3. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

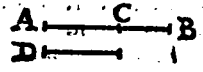
SI recta linea secta sit vtcunq; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.

LINEA recta A B, diuisa sit vtcunq; in puncto C: Dico rectangulum comprehensum sub tota A B, & vtrouis segmento, vt A C, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis A C, C B comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti A C Constituatur enim quadratū dicti segmenti A C, quod sit A D, & ex

& ex B, educatur B F, parallela ipſi A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectę A C, æqualis eſt ex quadrati definitione, erit rectangulum A F, comprehenſum ſub tota A B, & ſegmento A C. Rurſus, quia recta C D, eadem ratione æqualis eſt rectæ A C, erit rectangulum C F, comprehenſum ſub ſegmētis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F, æquale ſit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido conſtat, rectangulum ſub A B, tota, & ſegmento A C, comprehenſum, eſſe æquale rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis A C, C B, & quadrato prædicti ſegmenti A C. Itaq; ſi recta linea ſecta ſit vtcunq;, &c. Quod erat oſtendendum.



ALITER. Accipiatur recta D, æqualis ſegmento A C. Quoniam recta A B, diuiſa eſt in C, erit rectangulum comprehęſum ſub D, & A B, hoc eſt, ſub A B, & A C, æquale rectangulo ſub D, & C B, hoc eſt, ſub A C, C B, & rectangulo ſub D, & A C, hoc eſt, quadrato ſegmenti A C; quod eſt propoſitum.



1. ſecundi.

SCHOLION.

VT hoc theorema numeris accommodetur, ſit numerus 10. diuiſus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem eſſe numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipſa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. equalis numero 21. producto ex 3. in 7. ſimul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

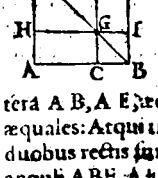
THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI recta linea ſecta ſit vtcunq;; Quadratum, quod a tota deſcribitur, æquale eſt

& illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA AB, diuisa sit vtcumq; in C. Dico quadratum totius rectæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur super AB, quadratum AD, ducaturq; diameter BE. Deinde ex C, agatur, CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectę AB; Eritq; quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma.

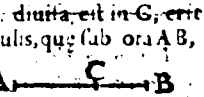


Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui tres anguli ABE, AEB, BAE, triāguli ABE, duobus rectis sunt æquales; & BAE, rectus est: reliqui ergo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadē ratione ostendes, angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex iis, quæ ad 4. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli tres trianguli EFG, æquales sunt duobus rectis; & angulus EFG, rectus est, cum sit æqualis recto D, externus interno; nec nō FEG, semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus, ideoq; æqualis angulo FGC. Quare æqualia erunt latera EF, & FG; quæ cum sint æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit parallelogrammū FH, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod HG, recta æqualis sit rectę AC; & rectāgula AG, DG, comprehensa erunt sub segmētis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sint rectæ CB; & EG, æqualis rectæ GH, hoc est rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratū AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectāgulo cōprehēso sub eisdē segmētis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunq;, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

5. primi.
32. primi.
32. primi.
29. primi.
6. primi.
34. primi.
34. primi.

ALI-

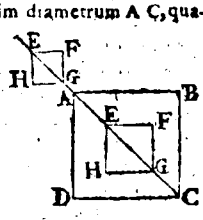
ALITER. Quoniam recta A B diuisa est in C, erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ sub ora AB, & segmentis AC, CB, comprehẽduntur: Rectangulum autem sub AB, & AC, comprehensum, æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC; Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmẽti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. quod est propositum. 2. *secundi*. 3. *secundi*.



COROLLARIVM.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demõstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrũ B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demõstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H; Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilo minus verum est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela fiant quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, constitat parallelogrammum P H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamẽ habeat latera lateribus quadrati B D, parallela; Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint A B, E F, erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus & externus; atq; eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erũt: Sunt autem anguli B A C, B C A, semirecti, vt ostensum iam fuit; Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt, propterea q; latera E F, F G, illis opposita, æqualia, & angulus F, rectus. Quare cũ E F, F G, latera æqualia sint oppositis lateribus G H, H E, erit F H, quadratum. Quod est propositum. 29. *primi*. 32. *primi*. 6. *primi*. 34. *primi*.



SCHOLION.

In numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus secundq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE *autem ex hoc theoremate demonstrabimus; Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum esse quadrati ex hac descripti. Sit enim linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa A B, bifariã in C, si fiat constructio, vt in theoremate; erunt quatuor parallelogramma A G, C I, F F, F H, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. omnesq; anguli recti. Quare cum quadratum A D, æquale sit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi A C. Est n. vtraq; dimidia lineæ A B.*



BREVIVS. *Ex hac propositione, quadratum rectæ A B, æquale est quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo sub rectis lineis A C, C B, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus A C. C B, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ A C; Constat quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ A C. cum æquale sit quatuor quadratis æqualibus quadrato rectæ A C.*

ECONTRARIO *ostendemus; Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum esse lateris huius. Sit enim quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum esse lateris K. Nam diuisa recta A B, bifariam in C, vt A B, dupla sit ipsius A C; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C; Erat autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarum K, & A C, & ipsæ rectæ K, & A C, æquales. Est autem A B, ex constructione, ipsius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipsius K. Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.*

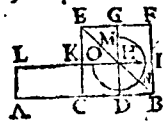
THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectãgulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cũ quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia recta sit C D, qua dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; est rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo complementa C H. F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale; Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint: Igitur D F, A K, æqualia inter se erunt; quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F, erit & rectangulum



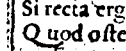
34. primi.

43. primi.

36. primi.

AH, vna cum quadrato AG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.



Alitèr hoc theorema ex Frãciſco Maurolyco demonſtrabimus, hoc modo. Quia quadratum ex CB, æquale eſt quadratis ex CD, DB vna cum rectangulo bis ſub CD, DB: Et rectangulo ſub CD, DB vna cum quadrato ex DB, æquale eſt rectangulum ſub CB, BD; Erit quadratum ex CB, æquale reliquo quadrato ex CB, vna cum reliquo rectangulo ſub CD, DB, & rectangulo ſub CB, BD, vel ſub AC, BD, atqui rectangulis ſub AC, BD, & ſub CD, DB, æquale eſt rectangulum ſub tota AD, DB. Igitur quadratum ex CB, æquale erit quadrato ex CD, vna cum rectangulo ſub AD, DB; hoc eſt, rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex CD æquale erit quadrato ex CB. Quod erat demonſtrandũ.

4. ſecundi.

3. ſecundi.

1. ſecundi.

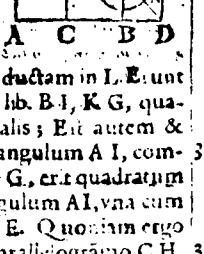
IDEM in numeris eſt manifeſtum: Dividatur enim numerus 10 æqualiter in 5. & 5. item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter ſectiones ſit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. ſuperat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem eſſe 25. quadrato dimidij numeri 5.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale eſt quadrato a linea, quæ tũ ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, deſcripto.

SECI-

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectũ addatur B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota cõposita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namq; C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D; Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 4. propos. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, æqualis; Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaq; est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, æquale est parallelogrãmo C H, quod bases A C, C B, æquales sint; Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaq; si recta linea bifariam secetur, & illi recta quæ dã linea in rectũ adijciatur, &c. Quod erat demonstrandũ.



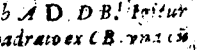
34. primi.

36. primi.

43. primi.

SCHOLION.

ALITER *idem ostendemus ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex C D, æquale est quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulo bis sub C B, B D; hoc est, vna cum rectangulis sub C B, B D, & sub A C, B D. Est autem rectangulis sub A C, D B; C B, D B; & sub D B, D B, hoc est, quadrato ex D B, æquale rectangulum sub A D, D B. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B, vna cũ rectan-*



4. secundi.

1. secundi.

rectangulo sub A D, D B: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex 10 in numero composito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet B D, eadem magnitudine C B: habebunt lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.



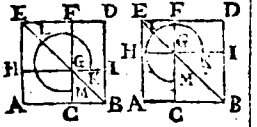
THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur vtcunq; Quod a tota, quodq; ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

RECTA

RECTA AB, secetur vtcunq; in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cũ quadrato reliqui segmẽti CB. Describatur. n. super AB, quadratũ AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secãs diametrũ in puncto G, per qđ agat HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollariũ 4. propos. huius lib, CI, HF, quadrata, & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulũ AF, cõprehensum sub tota AB, & segmẽto AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdẽ rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale est quadratũ AD; si apponatur cõmune quadratũ HF, erũt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quę comprehenduntur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod erat demonstrandum.



34. primi.

SCHOLION.

ALITER ex Francisco Maurolyco idem demonstrabimus. Quia quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadratis ex AC, CB, AC, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, æquale est rectangulum sub AB, AC; Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC. bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.



4. secundi.

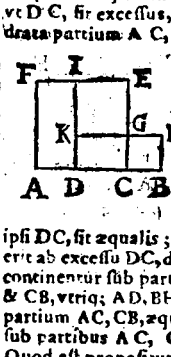
3. secundi.

IN *numeris autem, diuidatur numerus* 10. *vtcunq; in* 6. *&* 4. *Igitur* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 36. *quadratus numerus partis* 6. *æquales sunt numero* 120. *qui fit bis ex toto* 10. *in partem* 6. *vna cum* 16. *quadrato numero alterius partis* 4. *vt constat. Sic etiam* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 16. *quadratus numerus partis* 4. *æquales sunt numero* 80. *qui bis fit ex toto* 10. *in partem* 4. *vna cũ* 36. *quadrato numero alterius partis* 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECTVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, sitq; maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea A D; vt D C, sit excessus, quo pars A C, superat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub A C, C B, vna cum quadrato lineæ D C. Constituantur quadrata A E, C H; & agatur D I, ipsi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Iraq; quoniam A D, ipsi C B, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est C E, toti D B, æqualis; sit autẽ & C G, ipsi C B, æqualis, quod quadratum sit C H: Igitur & reliqua G E, reliquæ D C, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E,



34. *primi.* ipsi D C, sit æqualis; erunt G H, I E, æquales: idemq; I G, quadratum erit ab excessu D C, descriptum. Quoniam vero rectangula A I, D H, continentur sub partibus A C, C B, (sint. n. A C, vtriq; lineæ A F, D B; & C B, vtriq; A D, B H, æquales:) manifestum est, quadrata A E, C H, partium A C, C B, æqualia esse rectangulis A I, D H, quæ continentur sub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, excessus D C. Quod est propositum.

SCHOLION.

IN *numeris. Secetur numerus* 10. *inæqualiter in* 4. *&* 6. *ita*

ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. aequales esse numero 24. qui fit ex 4. in 6. bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI recta linea secetur vtcunq; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorũ, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuisa vtcunq;. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur A B, versus dictum segmentum C B, ad D, sitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E; Ducta autem diametro



D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propos. 4. huius lib. O I, N Q, B M, quadrata. Et quia O K, æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmenti A C: Rursus quia N H, æqualis est rectæ C B, erit N Q, quadratũ segmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cũ rectæ C B, B D, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento C B; Atq; adeo duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, cum L H, sit æqualis rectæ A B. Eadẽ rõne erũt duo rectan- 34. primi. 34. primi. 34. primi

rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cū NH, HM, rectæ æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc est, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erūt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinq; rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quāobrem, si recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod demonstrādum erat. 34. primi.

SCHOLION.

ALITER *idem ex Francisco Maurolyco demonstrabimus. Quia quadratū ex* AD *æquale est quadratis ex* AB, BD, *vna cū rectangulo sub* AB, BD, *bis; hoc est, quadratis ex* AB, BC, *vna cum rectangulo bis sub* AB, BC: *Et quadrata ex* AB, BC, *æqualia sunt rectangulo bis sub* AB, BC, *vna cum quadrato ex* AC; *Erit quadratū ex* AD, *æquale rectangulo quater sub* AB, BC, *vna cum quadrato ex* AC. *Quod demonstrandum erat.* 4. secundi.



7. secundi.

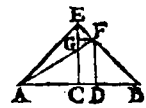
SECETVR *iam numerus* 10. *vtcunq; in* 6. & 4. *Numerus igitur* 240. *qui quater fit ex toto* 10. *in partem* 6. *vna cum* 16. *quadrato numero alterius partis* 4. *hoc est, numerus* 256. *æqualis est numero quadrato huius numeri* 16. *qui componitur ex dato numero* 10. & *dicta parte* 6. *vt constat. Eodem modo, numerus* 160. *qui fit quater ex* 10. *toto, in partem* 4. *vna cum* 36. *quadrato numero alterius partis* 6. *hoc est, numerus* 196. *æqualis est quadrato numero huius numeri* 14. *qui componitur ex* 10. & 4. *vt perspicuum est.*

9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & nō æqua-

æqualia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, dupla esse quadratorum, quę fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B; Ducanturq; rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoq; ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturq; A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; erunt anguli C A E, C E A, æquales. Est autem angulus A C E, rectus; reliqui igitur anguli alium rectum conficient, ideoq; A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, semirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rursus, quia trianguli F G E, angulus E G F, æqualis est recto E C B, externus interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum; igitur & E F G, semirectus erit, propterea que cum anguli F E G, F G E, æquales sint, erunt & latera E G, G F, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, esse æqualia; nam angulus F D B, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo A C E, angulus C, rectus sit, erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E; Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia; quod & lineæ A C, C E, æquales sint; Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F; At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum E G, G F; Igitur



5. primi.

32. primi.

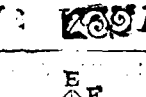
9. primi.

32. primi.

6. primi.

47. primi.

47. primi.



Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ C D; Est enim C D, recta rectæ FG, æqualis, cum C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, E F, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum A C, C D. Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D. Atqui quadratum rectæ D F, æquale est quadrato rectæ D B; ostensum enim est, rectas D F, D B, esse æquales. Quare duo quoq; quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

4. primi.
47. primi.
47. primi.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. *Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoq; A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis vna cum quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo sub A C, C D bis est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*



1. secundi.

ALITER ex Francisco Maurolyco. *Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum æquale est quadratis descriptis ex A C, C D, vna cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehensis; si commune ponatur quadratum ex D B, erunt quadrata ex A D, D B, æqualia quadratis ex A C, C D, D B, vna cum rectangulo bis sub A C, C D,*

4. secundi.

vel

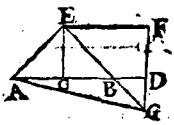
vel sub B C, C D, Atqui quadrato ex D B, vna cum rectangulo, bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod ostendendum erat. 7. secundi.

IAM vero rursus numerus, 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. cen in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

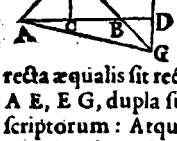
SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectũ quæpiam recta linea; Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D: Dico duo quadrata rectarum A D, B D, dupla esse quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, uel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur recta C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iã, angulum A E B, esse rectum, ut in præcedenti propos. & C E B, semirectum; ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque: Est autem angulus F, rectus, cum in paral-



29. primi
34. primi

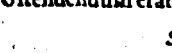
lelogrammo C F, recto angulo C, opponatur; Igitur & re-
32. primi liquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi EGF æqua-
6. primi lis. Quare rectæ E F, FG, & angulis FEG, EGF, oppositę, æquales erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G esse æquales, propterea quod angulus B D G sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æ-
47. primi quale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E, erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C.



47. primi Rursus quia quadratū rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, FG, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplū quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, cum C D,
34. primi recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum: Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G,
47. primi æquale est quadratum rectæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis æqualibus A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, est æqualis, & superat C D, ipsam CB, rectæ B D; superabit quoque CD, ipsam A C, eadem rectæ B D. Quare, vt ad 7. ppos. huius lib. ostēdimus, quadrata ex A C, CD, æqualia sunt



rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarū A C, CD, & rectangulum sub A C, CD, bis, vna cum quadrato rectæ
4. secundi *B D, dupla sunt quadratorum ex A C, CD; Atqui quadratis rectarū AC, CD, vna cū rectangulo sub AC, C D, bis, æquale est quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarū A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

ALITER

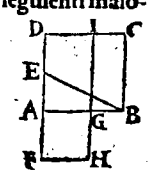
ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratũ ex AD, æquale est quadratis ex AC, CD, vna cũ rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; si commune addatur quadratũ ex BD, erunt quadrata ex AD, BD, æqualia quadratis ex AC, CD, BD, vna cũ rectangulo bis sub BC, CD. Sed quadrato ex BD, vna cũ rectangulo bis sub BC, CD, æqualia sunt quadrata ex CD, BC, hoc est, quadrata ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD; Quod erat demonstrandum. 4. secundi 7. secundi

NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinuis 3. vt totus numerus cõpositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9 horum numerorũ 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, ut perspicuum est.

PROBL. I. PROPOS. II. II.

DATAM rectam lineam secarẽ, ut cõprehensum sub tota, & altero segmentorũ rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

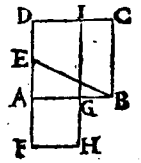
DATA sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum cõprehensum sub tota AB, & minori eius segmento, æquale sit quadrato reliqui segmenti maioris. Describatur ex AB, quadratũ AC, & diuiso latere AD, quod cũ linea data AB, angulũ rectũ efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF; & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Dico rectam AB, sectã esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub AB, & BG, æquale sit quadrato rectæ AG. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrãmum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia eius quatuor latera sint



I

34. primi

æqualia; & rectangulum C G, comprehensum sub A B, & segmento B G, quod A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F, erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum F H, sit æqualis ipsi F A;) una cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis rectarum A E, A B: Quare rectangulum D H, vna cũ quadrato rectæ A E, æquale est quadratis rectarum A E, A B: Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.



6. secundi

47. primi

SCHOLION.

Hoc theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos numeros diuiditur, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus.

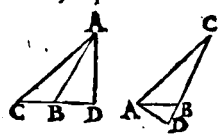
12. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angu

lum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, una cũ rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, diuisa sit in B, vtcunque, erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarũ CB, BD, & rectangulo cõprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarũ CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: Est aũt quadratis rectarũ CD, DA, æquale quadratũ rectæ AC; Quare & quadratũ rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarũ CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygonijs ergo trianguli, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.



4 *secundi.*

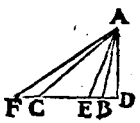
47. *primi*

47. *primi*

SCHOLION.

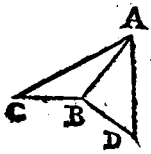
QVONIAM *assumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractũ; Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulũ in latus CB, protractum, cuiusmodi est recta AD. Si enim*

caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores cum ille sit obtusus, hic vero rectus: Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.



CONVERSVM quoque huius theorematis ita ostendemus. In triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC; Dico angulum B, quem dictum latus subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB perpendicularis BD, lineæ BC, æqualis, iungaturq; recta AD.

47. primi. Quoniam igitur quadratũ ex AD, æquale est quadratis ex AB, BD, hoc est ex AB, BC; Ponitur autẽ quadratũ ex AC, maius quadratis ex AB, BC: Erit quadratũ ex AD, minus quadrato ex AC, & idcirco recta AD, minor quã recta AC. Itaque quia latera AB, BC, triãguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumq; vtriq;, 25. primi. & basis AC, maior est basi AD; Erit angulus ABC, maior angulo ABD: sed ABD, rectus est. Igitur ABC, recto maior, & obtusus erit.

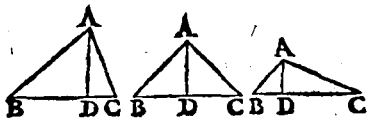


13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triãgulis, quadratũ a latere angulũ acutũ subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulũ cõprehendentibus, rectangulo bis comprehẽso, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutũ angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratũ lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, una cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duob' quadratis laterũ A C, C B: Cum enim recta B C, diuisa sit in D, utcunque, erunt quadrata rectarũ B C, C D, æqualia rectangulo cõprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D.



7. secundi

Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectãgulo bis cõprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarũ B D, D A: Duobus autem quadratis rectarũ C D, D A, æquale est quadratum rectæ C A; Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cũ ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, æquale sit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & quadrato rectæ A B: quod est propositum. Eodem modo ostenderur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo cõprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat.

47. primi

47 primi

SCHOLION.

QVAMVIS *Euclides theorema hoc proponat de triãgulis dũtaxat oxygonijs, quæ scilicet oẽs angulos habẽt acutos; Idẽ tamen verum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangu-*

lis rectangulis, & amblygonijs perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso; in oxygonijs vero a quolibet.



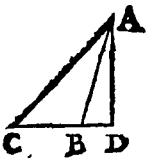
Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint enim in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior
16. primi A B C, acutus, maior interno & opposito recto A E B, quod est absurdum. Si vero caderet extra in B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiam si perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quæ latus A C, vt in rectangulis, vel extra triangulũ cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demõstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis nõ ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulũ rectangulũ A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quæ eadẽ erit, quæ latus A B, propter angulũ rectũ B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulũ C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & sub linea C D, quæ interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim
47. primi quadrata ex A B, C B, æqualia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D; Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex A C,

AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD, Quod est propositum.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum ABC, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam quadrata ex AD, CD, æqualia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, cõmuni, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD, æquale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, vna cũ quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, æqualia quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, vna cum rectangulo sub CB, BD, æquale est rectangulum sub CD, CB; Ac propterea duplo quadrati ex ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, æquale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis sub CB, CD, æquale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.



47. primi

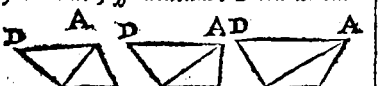
4. secundi

47. primi

3. secundi

CONVERSVM quoque huius theorematis in quodam antiquo scholio demonstratur in hunc fere modum.

IN triangulo quocunque ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulũ C, quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, lineæ CB, æqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, æquale est quadratis ex AC, CD hoc est, ex AC, CB; Ponitur autem quadratum ex AB, minus-



47. primi

nus quadratis ex A C, C E. Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B, & ideo recta A D, maior quam recta A B.



Itaque quia duo latera A C, C D, trianguli A C D, aequalia sunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B, vtrunque vtrique: & basis A D, maior basi A B: Erit angulus A C D, maior angulo A C B: Sed A C B, rectus est, ex constructione: ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

25. primi

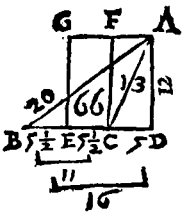
Ex his autem, quae in proximis duobus theorematibus, & in 1. lib. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus. Sit primo triangulum rectangulum A B C, cuius latera nota sint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. B C, 6. Diuiso latere B C, bifariam in D, vt sit C D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum A C D E, quod aequale est triangulo A B C, vt in scholio propos. 41. lib. 1. ostendimus. Quia vero ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area. rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum A B C, rectangulo C E, aequale. Quod est propositum.



Sit secundo triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. B C, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineae A D, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, maius est quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo bis comprehenso sub E C, C D; si quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. quae efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat

12. secundi

ſtrat propos. 17. lib. 1. de triangulis. Quia vero quadrata laterum A D, C D, *æqualia ſunt quadrato lateris* A C; *ſi quadratum 25. palmorum, nempe lateris* C D, *5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris* A C, *remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris* A D. *Quare latus* A D, *erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144 ſit 12. Itaque diuiſo latere* B C, *bifariam in* E, *educantur ex* C, E, *ad* B D, *perpendiculares* C F, E G, *occurrentes rectæ* A G, *quæ per* A, *ipſi* B D, *parallela ducitur, in punctis* F, G. *Quibus peractis, ſi* E C, *palmorum quinque cum dimidio, ducatur in* C F, *12. palmorum. (Eſt enim* C F, *ipſi* A D, *æqualis,) exurget area rectanguli* C G, *66. palmorum, quod cum æquale ſit triangulo* A B C, *ex ſcholio propos. 41. lib. 1. (ſunt enim rectangulum* C G, *& triangulum* A B C, *in eiſdem parallelis) Erit quoque area trianguli* A B C, *palmorum quadratorum 66. quod eſt propoſitum.* 47. primi



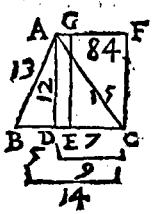
34. primi

Sit poſtremo triangulum acutangulum A B C, *latera habens nota;* A B, *13. palmorum;* A C, *15.* B C, *14. Primò igitur hic quoque reperienda eſt quantitas perpendicularis* A D, *hac ratione: Quoniam quadratum lateris* A B, *minus eſt, quam quadrata laterum* A C, B C, *rectangulo comprehenſo bis ſub* B C, C D; *ſi quadratum lateris* A B, *nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum* A C, B C, *hoc eſt, ex 225. 169. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo cõprehenſo bis ſub* B C, C D, *cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum ſub* B C, C D. *Si igitur 126. rectangulum ſub* B C, C D, *diuidatur per* B C, *latus notum, ut per 14; exibit reliquum eius latus* C D, *palmorum 9. ut conſtat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. Quoniam autẽ quadrata ex* A D, C D, *æqualia ſunt quadrato ex* A C; *ſi quadratum 81. palmorum, nempe lateris* C D, *9. pal-* 13. ſecundi



47. primi

9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris AC; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12 erit latus AD, 12. palmorum. Itaque diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, F, ad BC, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AF, quæ per A, ipsi BC, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si CE, 7. palmorum detur in EG, 12. palmorum; (est enim EG, recta ipsi AD, æqualis) exurget area rectanguli EF, palmorum 84. Quod cum triangulo ABC, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum EF, & triangulum ABC, in eisdem parallelis) erit quoque area trianguli ABC, 84. palmorum. Quod est propositum.

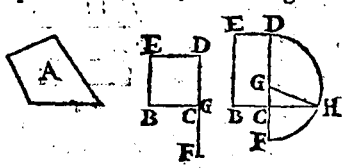


ITAQVE in uniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, ceu in exemplis datis est manifestum.

14. PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo, æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, ut DC, producatur ad F, sitque CF, recta æqualis rectæ BC. Diuidaturque DF, bifariã in puncto G, quod cadet aut in punctũ C, aut nõ. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, æqualia sint



45. primi

34. primi

sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero punctum G, nõ cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, uel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducatur enim recta G H. Itaq; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectãgulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

5. *secundi*

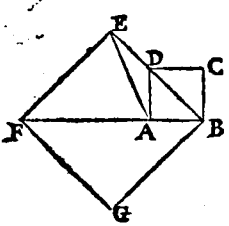
47. *primi*

SCHOLION.

Quoniam in secundo hoc libro Euclides de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato nõ iniucundum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

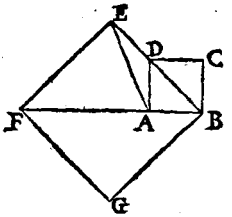
EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B. inueniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum A C, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, vt sit D E, recta rectæ A D, æqualis. Dico rectam B E, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus E E, excessu dato A B. Ducatur



Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quæ rectam BA, producta secet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus est, & EBF, semirectus; erit & BFE, semirectus. Quare recta BE, FE, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipsi BE, & ex B, recta BG, parallela ipsi EF, occurrens priori in G; constitutum erit quadratum rectæ BE. Quod si ducatur recta AE, erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, æquales, ideoque rectæ EF, AF, æquales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AF, superat data recta AB; superabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB; quod est propositum.

32. primi

6. primi



5. primi

6. primi

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLIDIS ELEMENTVM III.

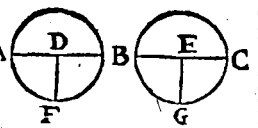
DEFINITIONES.

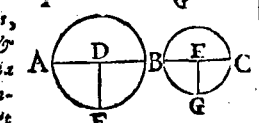
I.

AEQVALES circuli sunt, quorũ diametri sunt æquales; uel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.



QVONIAM Euclides in hoc 3. lib. uarias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens futurus est usus in hoc lib. Primo itaque docet eos circulos esse æquales, quorum diametri, uel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterũ extremũ fixum, & immobile, ceu in 1. lib. diximus, perspicuũ est eos circulos esse æquales, quorũ semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sũt æquales; uel etiã quorũ totæ diametri æquales sunt. Vt si diametri AB, BC, uel rectæ DF, EG, e centris D, & E ductæ sint æquales, æquales erunt circuli A F B, & BGC. Sic etiam si circuli sint æquales, erunt diametri, uel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, uel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales,





quales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem, &c.

II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

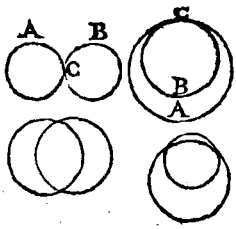


VT recta AB, *quia ita circulum* BFD, *tangit in* B, *vt producta ad* C, *nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicitur tangere circulum. At vero recta* EF, *quia ita eundem circulum tangit in* F, *vt producta ad* G, *secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.*

III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

EODEM *modo duo circuli* A C, B C, *se mutuo dicuntur tangere in* C, *quia ita se se continguntˢ in* C, *vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quãdo vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.*



IIII.

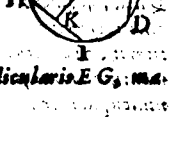
IN circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti a linea accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, a recta B C, dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quævis, quæ non perpendicularis est; quia A D, omnibus est brevior, quod angulus A E D, vel A F D, minor sit angulo recto A D E. Immo non solum A E, A F, maiores sunt quam A D, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim A F, maior, quam A E, cum angulus A E F, sit obtusus, Et A F E, acutus, & sic de aliis lineis non perpendicularibus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur distare a centro E, si perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abesse dicetur a centro E, quam linea H I, si perpendicularis E G, maior fueris perpendiculari E K.



19. primi.

19. primi.



V.

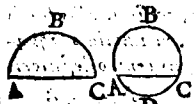
SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



VT si ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunq;, dicetur tam figura A B D, contenta circunferentia B A D, & recta B D; quam B C D, comprehensa recta B D, & circunferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmetum B C D. Vocatur à plerisq; Geometris recta B D, chorda, & circunferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autẽ angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur; Primo angulum segmenti, dicens, angulum mixtũ B A C, vel B C A, constantem sub recta linea A C, & circunferentia A B C, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si deniq; segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit

quod-

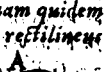
quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.



Sit segmentum circuli quodcunq; A B C, cuius basis recta A C. Ex suscepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extremæ basis, rectæ lineæ B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur existere in segmento A B C.

VIII.

CVM vero comprehendentes angulũ rectæ lineæ aliquam assumũt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

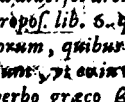


Ex puncto A, quolibet suscepto in circunferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circunferentiæ B C D, cuiusque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaq; rectilineus B A D, insistere dicitur circunferentiæ B C D. Perspicuum autem est, hunc angulum a precedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta precedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac vero insistere circunferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circunferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circunferentiæ, circunferentiam, qua basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur



segmentum, id quod circuli B C D, in circulo A B C D, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circumferentiæ C B D, insistens, erit B A D, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ eumpiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum commenire potest circumferentijs circuloxum, quibus anguli insistunt, non autem, in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoq; facile constat, ex verbo græco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circumferentiam C B D.

PRAETER tres dictos triangulos cõsideratur etiam a Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli, vel certe duabus circumferentijs se mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel C E E, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus C E D, tangat circulum E F G, exterius in E: Item circulus H F I, circulum E F G, interius in F: appellabitur tam angulus curuilineus C E F, quã E F H, vel G F I, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaq; vt videre, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.



B C E

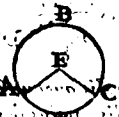
IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & a peri-

pheria

pheria ab illis assumpta.

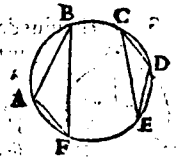
Sit in circulo A B C D, cuius centrum E, rectæ A E, C E, constituant angulum A E C, ad centrum E; nominabitur figura A E G D, contenta rectis A E, E C, & circunferentia A D C, quam prædictæ lineæ assumunt. Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circunferentiam, quæ ipsius basis est, non autem in ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circunferentiam A D C, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis A E, C E, assumptæ: Ita quoq; in illa intelligi esse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circunferentiam constituti; quandoquidem in vtraq; definitione vsus est eodem verbo græco ἐπιλαμβάνειν.



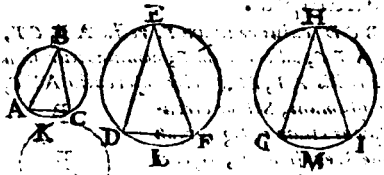
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

Segmenta, seu circunferentiæ A B D F, D C A F, quæ capiunt hos duos angulos A B F, D C E, æquales: vel, quod idem est, in quibus idem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.



Eodem modo segmenta diuersorũ circulorum tam æqualium, quam inæqualium a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si anguli A B C, D E F, G H I, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circunferentiæ A B C, D E F, G H I, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc

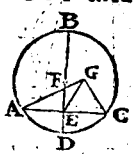


segmentorũ, circumferentiarũ similitudo in eo, quod qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circumferentiæ: vt qualis, & quanta pars est circumferentia A B C, totius circumferentiæ A B C A; talis & tanta quoque pars sit circumferentia D E F, totius circumferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circumferentia G H I, totius circumferentiæ G H I G. Vel potius segmentorum similitudo hoc consistit, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circumferentiasue, appellari similes.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.

SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa sunt æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam B D, centrum, a quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi C G; (a centro



centro enim ducuntur) erunt anguli A E G, C E G, æquales, ideoq; recti: Erat autem & angulus A E F, rectus ex constructione; Igitur recti A E F, A E G, æquales sunt, pars & totum quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum. 8. primi.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 2. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

In circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circunferentia: Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta. Inuento igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quodvis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetq; E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (e centro enim ducuntur) erunt anguli E A D, E C D, æquales: Est autem angulus E D A, angulo E C D, maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur & an- 1. tertij. 5. primi. 16. primi.



& angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo opposita, hoc est, recta
19. primi. E B, sibi æqualis, maior erit, quam recta E D, pars quam totum, Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C non posse cadere super arcum A B C, ita vt eadem sit, quę circumferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum A B C, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaq; sit in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLION.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circunferentia circuli A B, cuius centrũ C. Dico rectã A B, intra circulũ cadere, ita vt omnia eius pũcta media intra circulũ existãt. Assumatur in quodcunq; eius punctũ intermediũ D, & ex centro educãtur rectæ C A, C B, C D.



Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, æqualia sunt, erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem an-
5. primi. gulus C D A, angulo C B A, maior, externus interno; Igi-
16. primi. tur idem angulus C D A angulo C A D, maior erit, & ob
19. primi. id latus C A, latere C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta a centro ad circunferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circunferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum cadet: Idem ostenditur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulũ cadit; quod est propositũ.

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tãgit, ita vt eum non secet, in vno tãtum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum; Quare circulum secaret, quod est cõtra hypothesin.

THEOR.

THEOR. 21 PROPOS. 3.

3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoq; eam secabit.

PER A, centrum circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus lateribus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales; igitur anguli AFB, AFD, æquales erũt, hoc est recti. Quod erat primo propositũ. 8. primi.



SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD; dico rectam BD bifariam secari in F a recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF, & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoq; erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrũ extensa, &c. Quod demonstrandum erat. 5. primi. 26. primi.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars; quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectę AB, æquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratũ rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectę AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atq; idcirco rectæ FB, FD, æquales erunt. 47. primi.

THEOR.

4c

THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuo secent non per centrum extensæ; seſe mutuo bifariam non secabunt.

DVAE rectæ A B, C D, se mutuo in E, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo seſe bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum aliquando bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectę lineæ seſe mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

1. tertij.

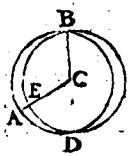


3. tertij.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli seſe mutuo secent; non erit illorum idem centrum.



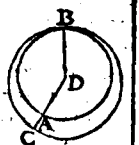
CIRCVLI A B D, E B D, se mutuo secent in B, & D. Dico ipsos non habere idē centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque C, a quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad sectionem B; C A, vero secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli

culi E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rursus quia G, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

6.

SI duo circuli sese mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DVo circuli A B, B C, se interius tangant in B; Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, a quo duæ rectę ducantur; D B, quidem ad tactum B; At D C, secans vtramq; circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, æqualis. Quare rectæ A D, & C D, inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

EVCLIDES *proposuit theorema hoc de circulis sese interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius sese tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.*

THEOR. 6. PROPOS. 7.

7

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua

in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrũ ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodẽ puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

IN diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ F C, F D, F E; Dico omnium, quę ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam esse G A, in qua est centrum, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit; Deinde rectam G C, quæ centro propinquior est, maiorem recta G D, quę a centro plus distat, & eadem ratione G D, maiorem recta G E; Denique ex G, ad vtrasq; partes minimæ lineæ G B, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur e centro F, ad C, D, & E, rectę lineæ F C, F D, F E. Quoniã igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectę G F, F C æquales rectis G F, F A, hoc est, rectæ G A; erit & G A, maior quam G C; Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



20. primi.

20. primi.

DEINDE, quoniam in triangulo E F G, latus E F, minus est duobus lateribus F G; G E; Est autem F E, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quam G E; Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

RVRSVS, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior est angulo G F D; erit basis G C, maior basę G D; Eadem ratione maior erit G C, quam G E; Item maior erit G D, quam G E. Quare linea propin-

24 primi.

propinquior centro maior est ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H, ita vt G E, G H, æqualiter distent a centro. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia sunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ G B, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit centro propinquior, maior quam G H; si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior a centro, minor quam G H, vt ostensum fuit. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ G B, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. 4 primi.

SCHOLION.

HANC propositionem nonnulli conuersam, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autem ab eo æqualiter distabunt.



IN circulo A B C, punctum sumatur D, a quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima vero D C: ipsarum vero D E, D F, maior sit D E, denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C,

DC, ipsi DA, esse in directum. Item DE, propinquiorem esse centro, quam DF. Denique DE, DB, aequaliter a centro abesse. Primum enim si DA, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, erit ea omnium ex
7. tertij. D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur: Transit ergo DA, per centrum.

DEINDE, si DC, non est in directum ipsi DA; protracta AD, in directū, erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius AD, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; vti DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.

RVRSVS, si DE, non est vicinior cētro, quā DF; aut aequaliter distabit ab eo; aut DE, longius ab eo abest: Si aequaliter
7. tertij. distant, ipsae erunt aequales; quod est absurdum, ponitur enim
7. tertij. DE, maior. Quod si DF; dicatur esse propinquior centro, ipsa erit maior, quam DE. Quod magis est absurdum.

POSTREMO, si DE, DB, non aequaliter distant a centro,
7. tertij. erit ea, quae magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim equales DE, DB.

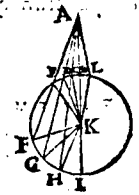
8. ## THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & dia-

metrum

metrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum transeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunq; . Dico omnium esse maximam A I, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ centro propinquior existit, maiorem recta A G, quæ remotior est a centro; Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. Econtrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse. Deinde rectam A C, quæ vicinior est minimæ A B, minorem esse recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipsam A D, minorem, quam A E. Denique ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ A B, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, maiora sunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc est, rectæ A I erit & A I, maior, quam A H: Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quã A F. Quare A I, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



20. primi.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia sunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior est angulo A K G; erit basis A H, basi A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F; Item A G, maior, quam A F. Quare linea centro propinquior maior est linea remotiore.

24. primi.

RVRSVS, quia in triãgulo A C K, recta A K, minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, C K, remanebit adhuc

20. primi.

adhuc A B, minor, quam A C. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium lineatum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

21. primi. RVRSVS, cum intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K, erunt A C, C K, minores, quam A D, D K; Sub æqualibus igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E; Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quam remotior ab eadem.

4. primi. POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis lateribus contenti æquales; erunt rectæ A C, A L, ex vtraq; parte minimæ A B, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior a minima, maior quam A L; Quod si cadat inter B & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam A L, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtraq; partes minimæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtraq; partes maximæ A I.



4. primi. FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, in vtraq; recta A M. Quid igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M; sunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: erunt bases A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducitur ad partes H, ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectam A H; ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.

THEOR.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales: Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quo



niam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C, & basis A B, A C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat. 8. primi

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C; erit recta A D, quæ propinquior est centro E, maior, quam recta A C, remotior a centro, quod est absurdum. Positæ

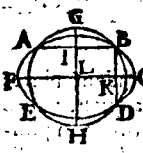


7. tertij

sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.



SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulũ AGBDHE, in pluribus, quã duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus bifariam diuisis in I, & K, educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraq; ex corollario propos. 1. huius lib. per centrũ ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrũ dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum. quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat: Quod erat demonstrandum.

5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, & B, & D. Inuentum autem sit I, centrũ circuli AGBDHE, a quo ad dicta tria puncta ducantur IA, IB, ID. quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniã igitur intra circulũ ABCDEF, assumptũ est punctũ I, a quo cadunt in circunferẽtiã plures, quã duæ rectę æquales, erit I, centrũ circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE; Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum; quod est absurdum.



2. tertij.

9. tertij.

5. tertij.

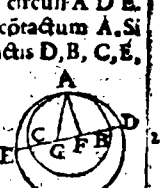
11. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & produ-

cta,

cta, i[illegible]ontactum circulorum cadet.

TANGAT circulus A B C, circulum A D E, intus in A, & sit F, centrū circuli A B C, & G, centrū circuli A D E. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in cōtactum A. Si enim non cadit, fecet utrumq; circulū in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur A F, A G. Quoniam igitur in triāgulo A F G duo latera G F, F A, maiora sunt latere G A; Est autem G A, recta rectæ G D, æqualis; (quod G, positum sit centrū circuli A D E) Erunt & G F, F A, rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi G F, remanebit F A, maior, quam F D: Quare cum F A, æqualis sit ipsi F B; (quod F, positū fuerit centrū circuli A B C) erit & F B, maior, quā F D, pars toto, quod est absurdū. Quod si quis velit cōtendere F, esse centrū circuli A D E; & G, centrū circuli A B C, instituetur argumētatio hac ratione. In triāgulo A F G, duo latera F G, G A, maiora sunt latere F A; Est autē recta F A, rectæ F E, æqualis: (cum F, ponatur centrū circuli A D E.) Igitur rectę F G, G A, maiores sunt recta F E; dempta ergo cōmuni F G, remanebit G A, maior, quā G E: Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C; (propterea quod G, ponatur esse centrū circuli A B C,) erit quoque G C maior, quā G E, pars toto. quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrū maioris circuli extra minorē ponatur. Nō ergo recta F G, extensa vtrumq; circulum secabit sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



20. primi

20. primi

THEOR. 11. PROPOS. 12. 11.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI A B C, D B E tangāt se exterius in B, & centrū circuli A B C, sit F; circuli uero D B E, centrū sit G; Dico rectā extensam p F, & G, trāsire per contactū B. Si enim non

transit, secet circunferentias in C, & E, ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniã igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, maiora sunt latere F G: Est autẽ recta B F, rectæ F C, æqualis, (quod F, sit centrũ circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, sit centrum circuli D B E,) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quã totũ, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E;) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



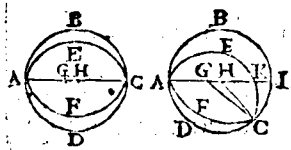
10. primi

12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, siue intus, siue extra tangat.

CIRCVLI A B C D, A E C F, tangant se intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C. Assumantur igitur centra horum circulorum G, H, per quæ recta G H, in utramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A C, diameter, diuidetur A C, bifariam in G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H quod est absurdum. Vna enim recta in uno duntaxat puncto diuiditur bifariam: Si enim G C, est dimidium totius A C, erit meæ sectio H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C. Quod si quis dicat rectã G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At uero ad partes H, minime pertinere ad contactum G, sed secare utrumque circulum in I, & K, ut in secunda figura perspicuum est: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrũ

11. tertij



circuli

circuli A B C D; & H, centrum circuli A E G F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C æquales ipsi G K (quod H C, H K, sint ex centro) & recta G C, rectæ G I (quod & hæ sint ex centro) erit quoque recta G K, maior quam G I, pars toto: quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli A E G F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum utraque ducta sit ex centro H;) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A; Quare dempta communi H G erit G C, maior quam G A, quod est absurdum, cum utraque ex centro G, ducatur: Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno. 20. primi 20. primi

TANGANT se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam uno, puncta F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant se in B; Ductis igitur rectis D B, E B, erunt rectæ D B, E B, æquales rectis D F, E F, hoc est ipsi D E: Sunt autem & maiores: quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno.



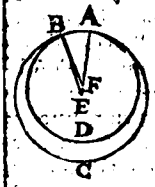
12. tertij
1
20. primi

ALITER. Si circuli A B, C B exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra unũ circulorum; per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra aliũ, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Si recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam uno videtur eã potissimum concludere, circulum nõ posse tangi a circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longe internallo a se dissideant; nõ autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem

argumento fere demonstrari possit. Quare vt omnia ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemque contactu non posse esse plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A, & per eorum centra E, & F, recta ducatur, E F, quæ ad contactū



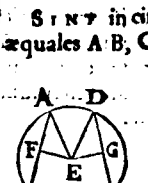
11. tertij. perueniet necessario, vt ad punctū A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si enim se tangant in alio puncto, vt in B, ductis eu B ad centra E, & F, rectis

20. primi B E, B F, erunt rectæ F E, F B, maiores, recta E B; Est autem recta E B, æqualis rectæ E A, cum vtraq; sit ex centro E: Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare demptâ communi E F, remanebit F B, maior, quā F A; quod est absurdum, cum F B, F A, cadant e centro F, ad circumferentiam, Ideoque ex circuli defin. æquales existant.

13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distāt a centro, æquales sunt inter se.

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D; Dico ipsas æqualiter distare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniugantur rectæ E A, E D; Secabuntque



3. tertij. rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariā. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ uidelicet A F, D G, æqualia. Quoniam igi-

47. primi quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter se sunt æqualia: Quadratum autem rectæ E A æquale est quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarū A F, F E, æqualia quadratis rectarū D G, G E. Ablatis ergo quadratis æquali-

æqualibus æqualiũ rectarũ A F, D G, remanebunt quadrata rectarũ F E, G E æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E; Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterũ ex cẽtro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; diuidentq; rectas AB, CD, bifariã. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earũ quadrata æqualia: Est autem quadratũ rectæ E A, æquale quadratis rectarũ A F, F E; & quadratũ rectæ E D, æquale quadratis rectarũ D G, G E. Quare & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoq: ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erũt; Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum.

3. tertij.

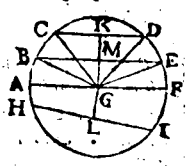
47. primi

THEOR. 14. PROPOS. 15.

14.

IN circulo maxima quidẽ linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo A B C D E F, cuius centrũ G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F; & H I, maiorem, quam C D. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior est C D, a cẽtro, quã H I, erit G K, maior quã G L, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex G K, recta G M, ipsi G L, æqualis, atq; per M, educatur B M E, perpendicularis ad G K, & cõnectantur rectæ G B, G C, G D, G E. Quũ igitur rectæ



ppendiculares G M, G L, æquales sunt, æqualiter distabũt rectæ B E, H I, a centro, per 4 defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, maiores

14. tertij

20. primi

quidem sunt rectæ B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E, Eadem ratione ostendetur A F, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, G D, triāguli C G D; & angulus B G E, maior est angulo C G D; erit recta B E, maior quam C D; atque adeo M I, quæ æqualis ostensa fuit ipsi B E, maior quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandū.

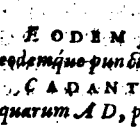


24. primi

SCHOLION.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemque puncto circumferentiæ plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim a puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, transeat. Dico A D, esse omniū maximam, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E, cum in triangulo A E C, latera A E, E C, maiora sint latere A C, sintque rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc est, rectæ A D; maior erit A D, quam A C; Eademque ratione maior erit, quam A B; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est A D.



20. primi

DEINDE, quia duo latera A E, E C, trianguli A E C, æqualia sunt duobus lateribus A E, E B trianguli A E B; & angulus A E C, totus, maior est angulo A E B; erit basis A C, maior basi A B; Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est.

24. primi

CÆTERVM & hinc duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad vtrasque partes maximæ A D. Si namq; angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia sint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C, A E F, æquales; Erunt bases A C, A F, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis poterit exhiberi; Quacunque enim ducatur ex A, supra A C, ea minor erit quam A C; si vero infra A C,

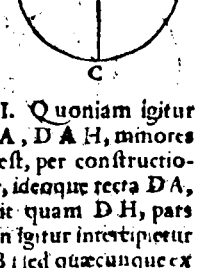
4. primi

& maior erit, quàm demonstratum est.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularē necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B; ducta D B, erunt duo anguli D A B, D B A, æquales; sed D A B, rectus est, per constructionem: igitur & D B A, rectus erit, 5. primi quod est absurdum; Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; nec eandē ob causam in ipsam circunferentiā, sed extra, qualis est E F. Dico iam inter A E, rectam, & circunferentiā A B, non posse cadere alteram rectā. Cadat enim, si fieri potest, recta A G, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H; secans circunferentiam in I. Quoniam igitur in triangulo D A H, duo anguli D H A, D A H, minores sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor, idemque recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I, maior erit quam D H, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur interciperetur recta inter A E, & circunferentiam A B; sed quæcunque ex A, du-

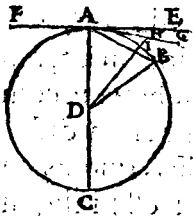


17. primi

17. primi

19. primi

A, ducatur infra A E, ea secabit circulū. Dico deniq; angulū semicirculi, contentū diametro A C, & circunferētia A B, maiorē esse omni acuto angulo rectilineo; reliquū uero angulū cōtingentiæ, qui cōtinetur recta A E, & circunferentia A B, minorē esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniā ostensū est, omnē rectā ex A ductā infra perpendicularē A E, cadere intra circulū, 1 I



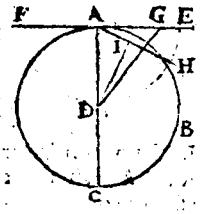
aciet nec essa rio ea cum A C, minorē angulū angulo semicirculi, at uero cū A E, maiorē angulo cōtingentiæ, cū ille sit pars anguli semicirculi, hic uero totum quidpiam ad angulū contingentiæ. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quod recta a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta, ipsum circulum tangit. Ostensum enim fuit, ipsam cadere extra circulum; Quare solum in puncto illo diametri extremo ipsum attingit.

EX ORONTIO.

Potest hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo A B C, cuius centrū D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quā dico extra circulū cadere. Sumatur enim in ea quodvis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniā igitur in triāgulo A D G, duo anguli D A G, D G A, minores sunt duobus rectis, & D A G, factus est rectus; erit D G A, recto minor. Quare maior erit recta D G, quā D A; ideoq; punctū G, extra circulū erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra A E, recta A H, quā dico necessario secare circulū. Fiat n. angulus A D I, æqualis angulo B A H. Addito igitur cōmuni angulo D A H, erūt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideoq; minores duobus rectis; quare coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, ut in I. Dico igitur punctū I, esse intra circulū. Quoniā cres anguli in triā



17. primi

19. primi

11. pron.

gulo

gulo D A I, æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostēsi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo maior, quam D A I, acutus. Quare recta DA, maior est quam DI. Non igitur D I, ad circunferentiā perueniet; propterea q; punctum I, extra circulum existet; atque adeo recta A H, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, ut prius. 32. primi 19. primi

SCHOLION.

EXISTIMAT Peletarius, angulū contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circūferentiæ, non effici angulum ullum. Vt autem sententia illius planior fias, afferemus in medium digressionem illam, quā ipse hoc in loco adducit. Sic igitur inquit:

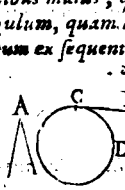
CVM huius theorematis caput postremū attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima species Geometriā nō satis sibi constare; immo adeo, repugnantiā in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiā est, ut inter quātitates minima dari possit; quale hoc loco angulū, quē dicunt contingentiæ, seu rectilineæ, contactus, minorē omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, ut maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundū eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam cōtinuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxiè expendere cœpi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, ut apparebas, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quā dimidiū, idq; continuò fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, & BCD, angulo (si modo sit angulo) cōtactus: Vult prima decimi, si auferas ab angulo A, maius q̄ dimidium, ac rursus a reliqua parte

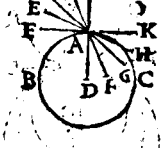
parte maius, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (ut sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non uidet propositi ductibus numeris 8. & 2. tum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, ut quinarium; tum a ternario residuo, maius quam dimidium, ut binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc uentum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda, aliisque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.



Nos igitur hanc dubitationem sic expediemus; ut dicamus lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbe, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sane ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cuique facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtusior fiet H E A, inde vero acutior B E H; sicque continuo, donec peruenieris ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam linea C D, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sic enim in circulo



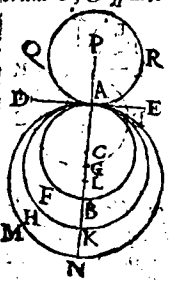
culo A B C A, cuius centrum D, linea D E, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea F D, facta sit E K, & tangat circulum A C tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet; non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contrafacit, quod deducantur lineæ, faciantque spatium C A K. Nam in sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non constet, quam uno; sit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumque A, peripheriæ in suo rotundo; neque vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contraria contrapositæ, fiant manifestiora: Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; ut nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non representet: Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per theoremata.



CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæ sextæ, lineam D E, contingere ipsum A F B A, circulum; ac propterea

rea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsexte. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, cẽtrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non esse quantitatem. Constat quippe circulum A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cum sit semidiametri G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum ex eodem huiusce decimæsexte consectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic, omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis cõtactui D A F: Fietq; ut M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat cõtactum D A M. Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.



Sed & probabimus. contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes: Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

Contactvs lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si D A F, sit quantitas

quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltimæ partis huius decimesextæ: neque per obliquam, vt per lineam A *M: Esset enim* F A *M, pars ipsius* D A F: *Atqui* F A *M, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur* F A *M, pars ipsius* D A F *Igitur* D A F, *neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare* D A F, *quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.*

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur B A, *diameter ad punctum* P. *Tum centro* P, *interuallo autem* P A, *describatur circulus* A Q K A; *tangens circulum* A B F A, *exterius in puncto* A. *Dico contactum* F A Q, *non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum* F A *M, non sit quãtitas, per primam harum; neque per rectam, cum neq;* D A F, *sit quantitas, per secundam earundem; neq;* D A Q *quantitas per eandem. Quare cum* F A Q, *partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.*

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

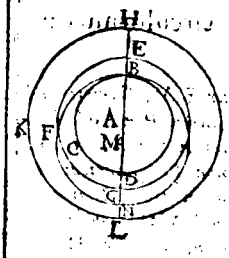
VT in posteriori figura, angulus B A F, *æqualis est angulo* B A D; *cum ipsi nihil accrescat ob contactum* D A F, *qui quãtitas nõ est: & ob id* Q A P, *rectus est, & æqualis ipsi* D A P, *cum* D A Q, *nihil addat: quod erat probandum.*

HAEC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quã ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subiecere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.

SINT

SI enim super centro A, duo circuli B G D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G se secent E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, esse aequales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior ullo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum unus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se aequales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione ullus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectae lineae, & peripheriae, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores fiunt.

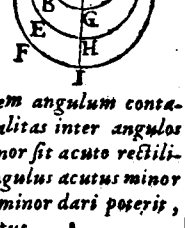


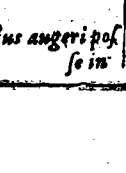
HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto intervallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro aequali ipsi A E; qui circulus tangat F C D B, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, aequalem esse angulo F E D, propter aequalitatem peripheriarum & diametrorum: Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D aequalis. Igitur C B F, contactus, nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quae in tertio libro adduximus, theorematum.

HAEC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quae omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi aequalem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset,

daſſet, vt demonſtraret, angulum contactus eſſe minorem omni acuto rectilineo, angulum vero ſemicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiuſmodi eſt angulus contactus, ex Peletarij ſententia, minus eſſe quocunque angulo? Quid quoque magis perſpicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum ſemicirculi, maiorem eſſe quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere eſſe angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Vnde diſſoluenda ſunt a nobis omnia Peletarij ſophiſmata, quæ in hac digreſſione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil eſſe.

PRIMVM igitur extra intelligentiam eſſe fatemur, vt inter quantitates minima dari poſſit: ſed inficiamur, nos aſſerere, angulum contactus eſſe minimam quantitatem; Immo vero aſſeueramus, quemuis angulũ contactus & ſi ab Euclide minor oſtenſus eſt omni acuto rectilineo, diuidi poſſe in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonſtrauit, & optime; ſed per lineam circularem. Vt propoſito angulo contactus C A B, ſi per A, deſcribatur circulus A F H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod ſi adhuc maior circulus A F I, deſcribatur, erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita ſine fine ſemper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor ſit acuto rectilineo quocunque: Quemadmodum quiuis angulus acutus minor eſt recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi poſſit infinite. Vt angulus acutus B A C, minor eſt recto B A F; & tamen ſi ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D: Quod ſi alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.





PARI ratione aſſerimus, angulum contactus augeri poſ-

se infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior est angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam A B G, describantur, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodũ quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior est acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit aequalis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, uel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui aequalis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est, quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit: quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD

QVOD autem anguli contactus ſint inæquales inter ſe, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, ſimiliter & anguli ſemicirculorum, ex eo manifeſtum eſt, quod angulus quilibet conſiſtit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt conſtat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiuſdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius ſi vnus alteri ſuperponatur; Ea enim æqualia ſunt, quæ ſibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis ſemicirculorum, nequaquam reperiatur ſemper eadem inclinatio, quod (vno ſuperpoſito alteri) lineæ eorum non ſibi reſpondeant, ſed prorſus inter ſe diſſideant, ceu ex figuris ſuperioribus perſpicuum eſt; Non erunt omnes anguli huiuſcemodi inter ſe æquales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam ſecari nequeat, vt recte oſtendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri poteſt cauſa; Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum ſecabit, donec iterum ipſum contingat: Tunc enim primum ſecare deſinet circulum: Quare ſi uel minime inclinari intelligatur ſuper puncto illo contactus fixo, ſecabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum poſſit tangere, vt ex 2. propoſitione huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli ſemicirculorum æquales inter ſe erunt, qui efficiuntur a peripheriis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ ſibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui a peripheriis maioribus, minores. Anguli denique ſemicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obſcure intelligi poteſt ex ſuperioribus figuris: Neque enim linea talium angulorum ſibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri poſſe æqualem exhiberi, ac rurſus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod

etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtranis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue deniq; quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem dictæ propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria,

& li

& linea recta illam tangens, vel etiam duas peripheria se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes aquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes aquales. Sic etiã omnes formica (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

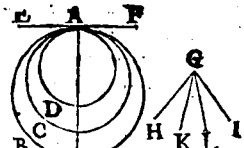
NEGAMVS deinde angulos segmentorum similium aquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propositione 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliqua Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit vera pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori; non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Sem-

cto. *Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet.*

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



Proponantur enim angulus ſcontactus B A E, & acutus H G I. Sigitur deſcribantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam E F, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum eſt. Si rurſus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: at tamē ſemper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor eſt angulo acuto, quantumuis diminuatur.

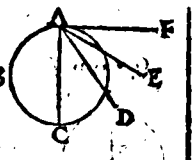
EX CAMPANO.

1. *poſſer.* CAETERVM ex hac propoſitione 16. perſpicuum eſt, vitioſam eſſe argumentationem hanc, qua vſus eſt Briſon in quadrando circulo, vt auctor eſt Ariſtoteles. Videlicet.

TRANSITVR a minori ad maius vel cōtra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per punctum

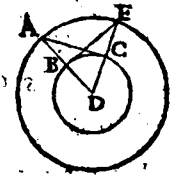
cta D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc conceſſo, manifeſtum eſt, quamdiu recta A C, ſecat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo ſemicirculi; quamprimum vero ſecare ceſſat, efficiangulum rectũ maiorem eodem angulo ſemicirculi. Cum igitur factus ſit tranſitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo ſemicirculi; (Rectus enim, vel obtuſus, maior eſt; & acutus, minor;) conſtat quoq; vitioſam eſſe poſteriorem conſequentiam.



PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

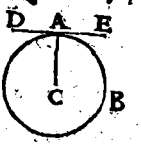
A DATO puncto rectam lineam dũcere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda ſit linea, quę tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum B C, in B; Deinde centro D, interuallo autem D A, deſcribatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, ſecans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, ſecans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cũm enim duo latera D B, D B, trianguli B D E, æqualia ſint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrunque vtrique, vt conſtat ex circuli definitione; anguluſq; D, contentus dictis lateribus, ſit communis: Erunt & baſes B E, C A, & anguli D B E, D C A, ſuper ipſas, æquales: Eſt autem D B E, rectus ex conſtructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaq; C A, cum ſit perpendicularis ducta ad C, extremum ſemidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propoſitionis. A dato ergo puncto A, ducta eſt A C, recta tangens circulum B C, in C. quod faciẽdũ erat.



4. primi.

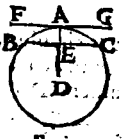
SCHOLION. I.



Quod si punctum A, datum fueris in circunferentia circuli A B, cuius centrum C, facilius ex eo ducetur recta tangens circulum, hoc modo. Ducta semidiametro A C, educatur per A, ad A C, perpendicularis D E. Hæc enim per corollarium præcedentis propositionis, circulum tanget: quod est propositum.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



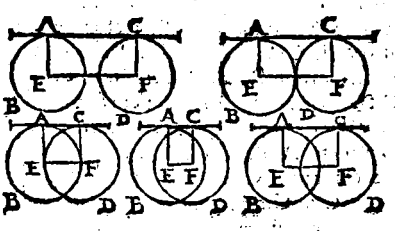
CIRCVLVM A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, excendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetq; circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.

28. primi.

SCHOLION. II.

Sed & sequens problema cum Cardano absoluemus.

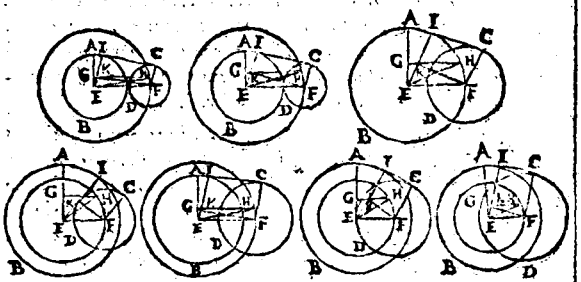
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterũ includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum.



SINT *primũ duo ppositi circuli æquales A B, C D, quorũ centra E, & F, rectæ jungantur E F, ad quã ducãtur perpendiculares E A, F C, secãtes circun-*

circunferentias in punctis A, & C. Dico rectam par A, & C, eductam vtrunq; circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallelæ, quod anguli E, & F, recti sint; Erunt quoq; EF, AC, æquales & parallelæ; Ideoq; & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrunq; circulũ tanget, cum rectos angulos constituat in extremis atibus semidiametrorum. 28. primi. 33. primi. 29. primi.

SINT secundo duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorũ rursus cẽtra E, & F, iungãtur recta EF, ad cuius inter

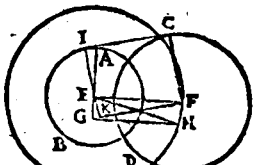


uallũ ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea recta AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH vsq; ad circunferentiã circuli vltimo descripti. Ducta aũt recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atq; ex F agatur ipsi EI, parallela recta FC. Dico rectã p punctã I, & C, ductã vtrũq; circulũ cõtingere. Abscindatur.n. ex IE, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris circuli æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoq;, ducaturq; recta KF. Quoniã igitur latera HE, EG trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, triãguli FEK, & anguli ipsis cõtenti æquales, ex cõstructione: Erunt anguli HGE, FKF, æquales; Ac proinde, cũ HGE, rectus sit, ex cõstructione, eris & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK æquales sunt, & parallelæ, ex cũstructione, vtrũq; IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus EIC, cũ æqualis sit externo FKE, recto exist; Ideoq; 4. primi. 33. primi. 29. primi.

Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrũq; circulũ cõtinget, cũ rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorũ. Quod erat ppõsitũ.

SATIS *aũt conflat, si circuli ppositi æquales fuerint, id quinq; modis posse fieri. Aut.n. alius extra aliũ cadit, aut se mutuo cõtingũt, aut se inuicẽ p cẽtra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra consistant in cõmuni eorũ segmento, vel certe extra illud.*

ITEM *si circuli ppositi fuerint inæquales, id cõtingere pos se septẽ modis. Aut.n. minor totus extra maiorẽ cadit, aut ipsum tãgit, aut ipsũ secat, ita vt vel cẽtrũ eius sit in circũferẽtia maioris, vel intra, hac tamẽ lege, vt circũferẽtia minoris citra centrũ maioris trãseat, vel cẽtrũ minoris sit extra circunferẽtiã maioris, vel intra, ita tamẽ, vt circũferẽtia minoris p maioris centrum incedat, vel deniq; intra, ita tamen, vt circunferentia minoris includat centrum maioris.*



QVONIAM *vero, circuli inæqualibus existẽtibus, initiũ cõstructionis sumpsimus semp a maiori, si quis maluerit a minori incipere, id efficiet eadẽ cõstructione, demõstrationeq;, nisi qđ rectæ AE, IE, protrahẽdæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, cõtẽtos lateribus HE EG; FE, EK, ideirco æquales esse, qđ HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales sint ex cõstructione. Deniq; angulũ EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.*

17. ## THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulũ tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiũcta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tãgat in C, circulũ CD, cuius cẽtrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularẽ esse ad AB.

A B. Si.n. nō est, ducatur E F, perpēdicularis ad A B, secās circunferentiā in D. Quoniā igitur in triangulo C E F, duo anguli E C F, E F C, minores sunt duobus rectis; Et est E F C, rectus, ex cōstructione: erit E C F, minor. Quare maior erit recta E C, hoc est, E D, quā E F, pars quā totū. qđ est absurdū. Est igitur E C, perpēdicularis ad A B. Quare si circulū tāgat recta quæpiā linea, &c. Q đ demōstrādū erat.



17. primi.

19. primi.

ALITER Si E C, non est perpendicularis ad A B, erit alter angulorū A d C, obtusus, & alter acutus: Sit ergo E C B, acutus, q cū maior sit angulo semicirculi E C D, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: qđ est absurdū. Ois siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto.

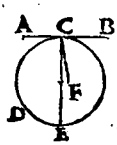
16. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a cōtactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C; & ex C, ducatur C E, perpendicularis ad A B. Dico in C E, esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta F C, quæ perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod est absurdū. Nō igitur extra C E, cētrū circuli existet. Itaq; si circulū tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demōstrandū.



18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum, & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplū esse anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC, & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniā igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorū, vt anguli DAB. Eodē mō duplus ostēdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: qđ est ꝓpositū.

5. primi.
32. primi.



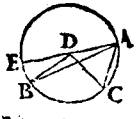
SECVNDO non includāt rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi aūt duo inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

32. primi.
5. primi.

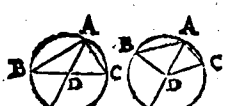


TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrū D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrū, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandē basin EC, & recta AE, extēditur per centrū; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostēsum fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent.n. hi anguli eandē basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si.n. totum totius est duplū, & ablatū ablati; erit & reliquū reliqui duplū. In circulo igit̄ angul⁹ ad cētrū duplex est, &c. Qđ erat demōstrādū.

19. pron.



SCHOLION.



QVOD si rectæ BD, CD, in cētro angulū nō cōstituāt ad partes basis BC; qđ tū dem.ū fit, quādo segmentū BAC, est vel semicirculus, vel segmentū minus; nihilo minus spatiū illud ad centrū duplū erit anguli ad circunferētiā, qui eādē habeat basin, quā spatiū illud. Ducta.n. recta AE, per centrū

strũ, erit tã angulus BDF, ad cẽtrũ duplus anguli BAE, ad circunferentiã, quã angulus CDF, ad centrũ anguli CAE, ad circunferẽtiã, vt oſtẽſum eſt. Spatiũ igit ad centrũ D, baſin habẽs BEC, cõſtansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ eſt totius anguli BAC. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

IN circulo, qui in eodem ſegmento ſunt, anguli, ſunt inter ſe æquales.

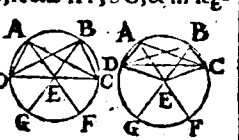
IN circulo ABCD, cuius centrum E, exiſtãt anguli A, & B, in ſegmento DABC; Dico eos eſſe æquales. Sit enim primo ſegmentum DABC, ſemicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrũ E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus eſt tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cũ omnes habeant eandẽ baſin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. Quare inter ſe æquales erunt. Eadẽq; ratione oẽs alij anguli exiſtentes in ſegmento DABC, oſtendent eſſe æquales.



20. tertij.

7. pron.

SIT ſecũdo ſegmentũ DABC, vel ſemicirculus, vel ſemicirculo minus: Ducãtur p centrũ E, rectæ AF, BG, & in ſegmẽto minori connectãtur rectæ DE, CE. Quoniam igit anguli DEF, ad cẽtrũ, dupli eſt anguli DAF, ad peripheriã: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & ſunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, ſimul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.



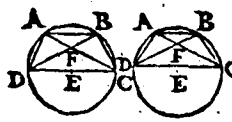
20. tertij.

ALITER. Quoniam, vt in ſcholio propoſ. præcedẽtis demonſtrauimus, ſpatiũ ad centrũ B, cuius baſis DGFC, duplum eſt vtriuſq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: Erunt ipſi anguli DAC, DBC, inter ſe æquales.

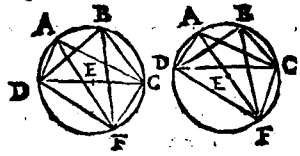
7. pron.

ALITER. Secẽt ſeſe rectæ AC, BD, in F, & connectat recta AB; Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales ſunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam li, quam

15. primi.



quã hi æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, qui æquales sunt; erũt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmẽto maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.



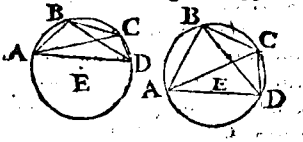
ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctũ circũferẽtiæ quodvis F, includẽtibus cẽtrũ E, ita vt tã DABCF, q̃ FDABC, sit segmẽtũ maius, iungãtur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec nõ & anguli FAC, FBC, in segmẽto eiũ maiori FDABC, existẽtes: Si hi illis addãtur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaq; in circulo, qui in eodẽ segmento sunt, &c. Quod erat ostẽdendũ.

21. THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius cẽtrũ E, inscriptũ sit quadrilaterũ ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Item BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis n. diametris AC, BD, erũt duo anguli ABD, ACD, in eodẽ segmẽto ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodẽ segmẽto CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igit cõi angulo CDA, erũt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA: Sed hi tres æquales sunt duobus rectis; igitur & duo

21. tertii.



32. primi.

& duo ABC, CDA, duobus erũt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis æquales. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM *quoq; huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.*

SI in quadrilatero anguli, q̃ ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circul⁹, qui p̃ tres quoſcũq; eius angulos deſcribitur, trãſibit etiam per reliquũ quartũ angulũ; Atq; adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti A, & C; Item B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autẽ hoc fieri poſſit, in 25. propoſ. huius lib. & in 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiã per D. Si n. nõ, tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducant ur ergo recta CE, AF, ad circunferẽtiã, ita vt nõ ſecent rectas CD, AD. Quo facto, erũt anguli B & F, æquales duobus rectis; Erãt aũt & anguli B, & D, duobus rectis æquales: Igitur duo anguli B, F, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quare circa ablato cõi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod eſt abſurdũ. Ducta.n. recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus p̃ p̃ũctũ D. qđ eſt propoſitũ



22. tertij.

21. primi.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, nõ conſtituentur ad eaſdem partes.

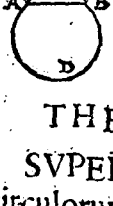


Si in. fieri pōt, ſup̄ recta AB, cōſtituātur ad eaſdem partes duo ſegmēta ſimilia, & inęqualia ACB, ADB. Perſpicuū ē aūt, qđ ſe ſolū inter ſe cēt in pūctis A, & B: circulus .n. circulū nō ſecat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius ſegmēti tota erit extra peripheriā alterius. Ducatur igitur recta AD, ſecās circunferētias in C, & D, & cōnectārum rectę CB, DB: Quoniā ig ē ſegmēta ponūtur ſimilia, erit p̄ 10. defin. huius lio angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: qđ eſt abſurdū. Nō igitur ſegmēta ſimilia. Quare ſup̄ eadē recta linea, &c. qđ erat demōſtrādū

18. *tertij.*

16. *primi.*

SCHOLION.

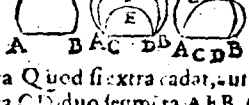


EADEM ratione, neq; ad diuerſas partes ſuper eadē rectā lineā duo ſegmēta circulorū ſimilia, & inæqualia cōſtituētur. Nā ſi alterū corū intelligai moueri circa lineā AB vt iā ambo ſint ad eaſdē partes; in idē abſurdū incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, cōſtituta ſint ſegmēta ſimilia AEB, CFD. Dico ea inter ſe eſſe æqualia. Si hęc enim AB, CD, cum ſint æquales, congruent inter ſe, ſi altera alteri ſuperponatur. Dico igitur & ſegmētū AEB, ſegmento CFD, cōgruere. Si .n. nō cōgruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod ſi extra cadat, aut intra, cōſtituetur ſuper eadē recta CD, duo ſegmēta AEB, AFB, ſimilia, & inęqualia; qđ eſt abſurdū. Demōſtratū .n. eſt cōtrarū. Quđ ſi partim extra cadat, partim intra, ſe abūt ſeſe in plurib⁹ pūctis, q̄ duob⁹, nimirū in A, B, G. Quđ eſt abſurdū. Circuli .n. nō ſe ſecāt in pluribꝰ pūctis, q̄ duobus. Cōgruet igit ſegmētū AEB, ſegmento CFD,



8. *tertij.*

10. *tertij.*

CFD, atq; adeo ipsa inter se æqualia erūt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

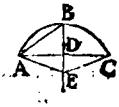
Non solum in hac propositione ostenditur segmenta similia AFB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verū etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi inuicem congruant.

Conversum quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem alterum alteri congruet: quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint.

PROBL. 3. PROPOS. 25. 24.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

Sit segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, uel maior est angulo DAB uel æqualis, uel minor. Sit primo maior, (quod quidē continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tuncenim, quia BD, transit per centrum ex corollario propos. 1. huius lib, quod est extra segmentum; cum ponatur esse minus, erit DA, maior, quam DB,



cum DB, perficiens diametrum, sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt; Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentū ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, triāguli CDE, & anguli contenti, recti: Quare bases EA, EC, æquales erunt; 7. tertij. 18. primi 4. primi

6. primi
9. tertij.

Est autē & E A, æqualis ipsi E B, quod anguli E A B, E B A, æquales sint. Igitur tres lineæ E A, E B, E C, æquales erūt, ac propterea E centrū erit circuli A B C. quandoquidē ex E, plures quā duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.

Si vero secundo angulus D B A, angulo D A B, æqualis; (Quod demū continget, quando segmentū A B C, semicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, centrum, atq; adeo rectæ D A, D B, æquales; quare & anguli D A B, D B A, æquales erunt.)



5. primi
6. primi
9. tertij.

Erunt igitur rectæ D A, D B, æquales: Erat autem, & D C, æqualis ipsi D A; Quapropter cum tres rectæ D A, D B, D C, cadant ex D, in circunferentiam, erit D, centrum.

Si vero tertio angulus D B A, angulo D A B, minor; (quod quidē euenict, si segmentū A B C, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, transit per centrū, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidē intra segmentum, cū maius esse ponatur, exibit; erit D B, ōmnium, quæ ex D, in circunferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quā D A, ideoq; angulus D A B, maior angulo D B A.) fiatq; angulus B A E, æqualis angulo D B A, & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostēdetur esse centrum eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B. ut constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

7. tertij.
18. primi



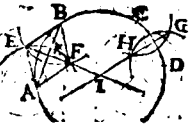
SCHOLION.

BREVIVS *inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C quæ duabus rectis coniungantur A B, B C, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educātur ad A B, B C, perpendiculares D F, E F. Quoniā igitur p corollariū propos. 1. huius lib. tam D F, quā E F, incedit per centrum circuli, cuius A B C, est segmentū, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum; quod est propositum.*



ALITER, *vt Mechanici solent. Accipiantur in circunferentia*

ferentia duo puncta vtcunque A, & B, a quibus describantur duo arcus ad E inuicem alium quodcunque, qui se inuicem secent in E, & P; postea ex aliis duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idē quod prius, siue diuersum. Si igitur iungantur rectæ EF, GH, transibunt ambæ per centrū: quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autē lineæ EF, GH, per cētrum transeunt, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorū. Quoniā igitur latera AB, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF, & bases quoque AF, BF, æquales: Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, quæ secet EF, in K; quoniā latera AE, FK, triāguli AEK, æqualia sunt lateribus BF, FK, triāguli BEK; & anguli AEK, BEK, oppositi quoque æquales; erunt & bases AK, BK, & anguli AKE, BKE, æquales, ideoque recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos; transibit per centrū ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur GH, transire per centrum.



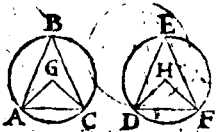
8. primi

4. primi

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorū cētra G, H, cōstituti sint primo ad cētra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quib⁹ insistūt, siue sup quas ascēderūt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs ABC, DEF, duo puncta B, E, ad q̄ rectę ducant AB, CB, DE, FE, cōnectanturq; rectę AC, DF. Quoniam igitur anguli B, & E, dimidij sunt æqualiū angulorum G, & H, erunt ipsi æquales inter se: Quare ex definitione segmēta ABC, DEF, similia erunt.

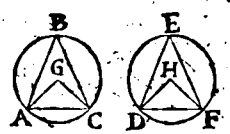


20. tertij.

Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorum æqualitatem, & anguli, quos continẽt G, H, æquales. ex hypothesi; erũt bases A C, D F, æquales: Cum igitur segmenta similia A B C, D E F, sint super lineas æquales A C, D F, erunt ipsa inter se æqualia; Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta A C, D F, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F: Quod est propositum.

4. primi

24 tertij.



SINT, secundo ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; dico rursus, peripherias A C, D F, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta A B C, D E F, similia. Cum igitur sint super æquales lineas A C, D F; (cum enim anguli G, H, æquales sint, quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erũnt, vt prius, rectæ A C, D F, æquales) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta A C, D F æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

20. tertij.

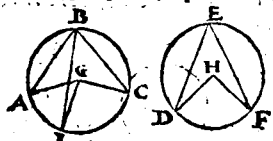
24. tertii.

SCHOLION

HAEC *secunda pars brevius ita demonstrabitur, Quoniã anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ A C, D F, super quas ascenderunt, æquales erunt.*

20. tertij.

QVOD *si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, sit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Ite angulus A B C, ad circumferentiam maior angulo D E F, ad circumferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem esse peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I, angulo D H E, & angulus C B I, angulo D E F, æqualis; erunt, ut ostensum est, peripheriæ C I, D F, æqua-*



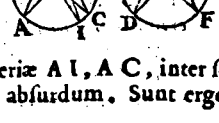
les;

les ; ac propterea A C, *maior, quam* D F.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistũt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primo anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripherijs A C, D F; Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales.



26. tertij.

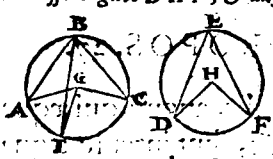
INSISTANT secundo eisdem peripherijs æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt A B C, maior est; fiat angulo E æqualis angulus A B I; eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod est absurdum. 26. tertij.

SCHOLION.

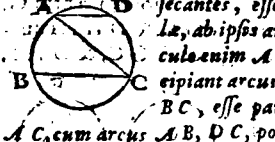
HAEC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniã anguli A B C, *&* E, *dimidij sunt angulorum* A G C, *&* H, *quos iã ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.* 20. tertij.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circunferentiam, quam minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria A C *maior, quam peripheria* D F. *Dico angulum* A G C, *maiorem*

rem esse angulo DHF; & angulum ABC, maiorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, ducanturq; rectæ IG, IB, erunt, ut ostensum est, tot anguli ad centrum CGI, DHF, quot anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit maior.



EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo nō secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipiant arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ducta namque recta AC, cum arcus AB, DC, ponuntur æquales, erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni, erunt AD, BC, parallelæ.



27. tertij
27. primi

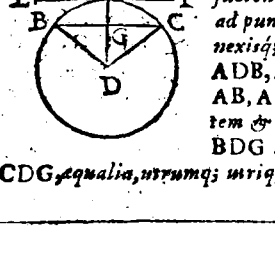
SINT iam AD, BC, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, ducta recta AC, erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales; Ac proinde arcus AB, DC, quibus insistunt, æquales erunt.

29. primi
26. tertij.

VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: si delicet.

LINEA recta quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcū BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad puncta contactus A, recta DA, connexisq; rectis DB, DC, erunt anguli ADB, ADC, circumferentijs æqualibus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, utrumq; utriq;. Igitur & anguli ad G, æquales



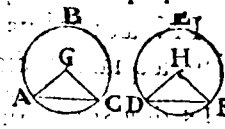
21.
27. tertij.
4. primi

tes sunt super bases G B, G C; ac propterea recti. Igitur & AGB AGC illi deinceps recti sunt. Sunt autem & anguli GAE, GAF recti, quod DA, perpendicularis sit ad EF; Ergo E F, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum. 18. tertij. 28. primi

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

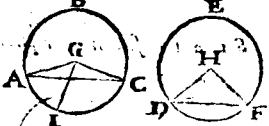
IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorē quidem maiori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorē peripheriam A B C, æqualē esse maiori D E F; & minorē A C, minori D F. Ducantur enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F; Sunt autē & bases A C, D F, æquales: Igitur anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, æquales erunt; quæ cum tota ex totis æqualibus, reliquæ quoque æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum. 2. 8. primi 26. tertij.



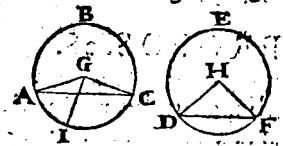
SCHOLION.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorē peripheriæ, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo, Nā si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriæ, quā minor. In circulis.n. æqualibus ABC, D E F, quorum centra G, & H, sit recta A C, maior, quam D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F; At peripheriam A B C, minorem



notem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F; Ponitur autem basis A C, maior basi D F: Igitur angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H F, æqualis; eritque propterea peripheria C I, peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D E F. Ideoque reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.

25. primi



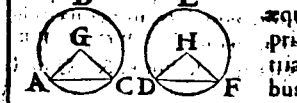
26. tertij.

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

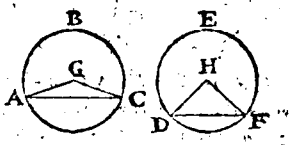
IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F; Sunt autem & anguli G, H, æquales, quod æqualibus peripheriis A C, D F, insistant: Igitur bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

27. tertij. 4. primi



SCHOLION.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorē maior linea, quam minorem, si de segmētis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmētis maioribus simicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem.



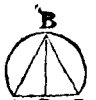
rem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, *quorum centra* G, *&* H, *sint peripheriæ semicirculo minores* A C, D F, *sitque* A C, *maior, quam* D F; *Ac proinde* A B C, *minor quam* D E F. *Dico lineam* A C, *maiorem esse, quam* D F. *Ductis enim rectis* A G, G C, D H, H F, *erit angulus* A G C, *maior angulo* D H F, *ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera* A G, G C *trianguli* A G C *æqualia sint lateribus* D H, H F, *trianguli* D H F, *erit basis* A C, *maior basi* D F; *&c.* 24. primi

Svnt autem proxime antecedentes quatuor propositiones 25. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo. Hoc est, In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, &c. ut constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in uno eodemque circulo.

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

Sit peripheria A B C, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens A C, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B; Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti: igitur & bases A B, C B, æquales erunt; Ac propterea peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus: Quod erat faciendum.



4. primi
28. tertij.

THEOR. 27. PROPOS. 31. 30.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui uero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus ma-

ioris

ioris segmenti, recto quidē maior est: minoris autē segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI ABC, cuius centrū D, diameter sit AC, cōstituaturque in semicirculo angulus ABC, existetq; angulus BAC, in maiori segmēto CAB, constituatur quoq; in CEB, minori segmēto angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum uero BAC, in maiore segmento, minorem recto; & angulū BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulū maioris segmenti cōprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehēsum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducantur enim rectæ BD, & extendatur AB, in F. Quoniā igitur rectæ DA, DB, æquales sunt; erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit: Est autem & angulus FBC, externus, eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.



Ducatur. n. recta BD,

5. primi

32. primi

QVONIAM uero in triāgulo ABC, duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores: Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

17 primi

RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulū descripto, duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

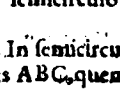
22. tertij.

AMPLIVS cum angulus rectus ABC, pars sit anguli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cū angulus segmenti minoris, comprehensus

hensus recta B C, & peripheria B E C, pars sit quoq; anguli recti F B C; Erit angulus segmẽti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter A C, & centrũ D, sit angulus A B C, quem dico esse rectũ. Ducta. n. recta B D, erunt anguli D B A, D A B, æquales, quod rectæ D A, D B, æquales sint. Cũ igitur angulus B D C, externus æqualis sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triãgulo A B D: Erit angulus B D C, duplus anguli D B A; Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C; atq; adeo duo anguli ad D, duplicrũt totius anguli A B C. Cũ igitur anguli ad D, sint duobus rectis equales; erit angulus A B C, eorũ dimidius, rectus: quod est primũ.



5. primi

32. primi

13. primi

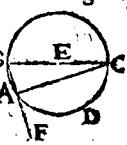
SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod est secundum.



SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus; quicum sit pars anguli A B C, erit angulus A B C, recto maior: quod est tertium.



IAM vero proponatur segmentum maius A B C, & segmentum minus A D C, quorum centrum B. Dico angulũ C A B, segmenti maioris, esse recto maiorem; At angulum C A D, segmenti minoris, recto minorem. Ducta enim diametro C B & recta B A F; erit angulus B A C, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps F A C. Cum igitur angulus rectus B A C, sit pars anguli C A B, segmenti maioris: & angulus C A D, segmenti minoris, pars



quoque

quoque anguli recti F A G; constat utrumque.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod ille contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priori demonstratione.

EX CAMPANO.

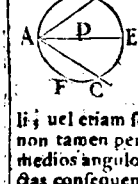
EX hac propositione perspicuum quoque est, non ualere duas illas argumentationes, quas impugnauimus in propos. 16. huius lib. quarum una est.

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA uero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. Erit igitur angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur uersus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, ubi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si ulterius moueatur ad A C, faciet à fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi; uel etiam segmenti minoris, quorum uterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, uitiosas esse prædictas consequentias.



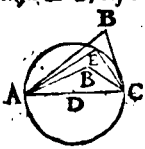
SCHOLION.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis. Hoc est, segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculus est. Nam si esset maius, angulus in eo foret acutus; si minus, obtusus; & sic de reliquis partibus theorematis.

HINC etiã perspicuum est, si angulo recto recta subtensa bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circulus describatur

ad

ad internallum dimidia ſubtenſa; circulum tranſire per angulum rectum. Angulo enim recto A B C, ſubtenſa A C, biſariam ſecetur in D, puncto, ex quo ad internallum D A, uel D C, circulus deſcribatur A E C, quem dico tranſire per B. Si enim tranſeat citra B, uel ultra, ductis rectis A E, C E, erit angulus A E C, rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod eſt abſurdum, cum angulus E, ſit neceſſario, uel maior, uel minor angulo B. Tranſit igitur circulus per punctum B, quod eſt propoſitum.



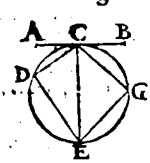
31. tertij.

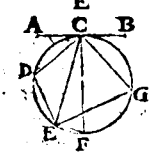
21. primi

THEOR. 28. PROPOS. 32. 31.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs, qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt, angulis.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C, puncto, a quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo ſegmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem eſſe angulo C G E, in alterno ſegmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque ſegmento. Tranſeat enim primo recta C E, per centrum. Erit igitur uterque angulus A C E, B C E, rectus: ſunt autem & anguli C G E, C D E, in ſemicirculis recti; Igitur angulus A C E, angulo C G E; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis eſt.





18. tertii
31. tertii

NON tranſeat iam C E, recta per centrum. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F, eritque C F, perpendicularis ad

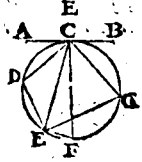
18. tertii

31. tertii ad A B, & anguli C E F, rectus; ac propterea reliqui anguli E C F, B F C, æquales erunt uni recto, ut angulo recto A C F. Dempto ergo communi angulo E C F, erit reliquus A C E, reliquo C F E, æqualis: Est autem angulo C F B, æqualis quoq; angulus C G B, cum uterque sit in segmento C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis erit. Quoniam uero in quadrilatero C D E G, duo anguli C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: Sunt autem & duo anguli A C E B C E, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si ergo circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.



22. tertii

13. primi



SCHOLION.

POTEST *theorema hoc converti hoc modo.*

SI linea recta ducta ad extremitatem lineę circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem constructione transeat prius recta C E, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tangere circulum. Quoniam angulus C G E, rectus est; erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam uero C E, non transeat per centrum, constituatur que figura, ut supra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E; in alterno segmento maiori, & hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Additio ergo communi angulo E C F, erit angulus A C F, æqualis duo-

31. tertii

21. tertii

bus

bus angulis E F C, E C F; *Atqui anguli* E F C, B C E, *æquales sunt uni recto, quod angulus* C E F, *rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo* C E F, *æquales sint duobus rectis. Angulus igitur* A C F, *rectus quoque erit, ideoque per coroll. propos.* 16. *huius lib.* A B, *circulum tanget.* 31. tertii 32. primi

EODEM *modo, si angulus* B C E, *æqualis fuerit angulo* C D E, *in alterno segmento minori, ostendetur recta* A B, *tangere circulum. Cum enim anguli* B C E, *&* C F; *duobus sint rectis æquales: Item duo anguli* C D E, C G E, *duobus rectis æquales; si demantur æquales* B C E, C D E, *remanebunt anguli* A C E, C G E, *æquales. Quare, ut demonstratum iam est, recta* A B, *circulum tanget.* 13. primi 22. tertii

PROBL. 5. PROPOS. 33. 32.

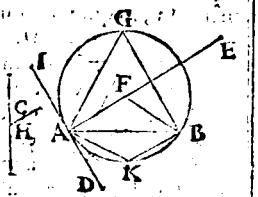
SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA, data sit A B, & datus angulus primo rectº C. oportet igitur super A B, segmentū describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem D A, uel D B, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nam angulus A E B, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.



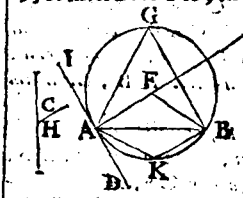
31. tertii.

SIT secundo angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angulº F B A, secetq; B F, rectã A E, in F. Erit igitur recta F A, F B, æquales. Quare si circa



6. primi

F, & interuallo F A, circulus describatur A G B, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod describitum est super A B, esse æqualē angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A; recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter angulus
32. tertii. D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno.

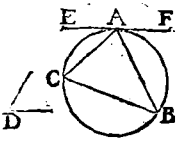


Sit tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, describtumque erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo alterno I A B, hoc est, angulo dato obtuso H. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea describimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

33. PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus sit A B C, a quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo
17. tertii. D. Ducatur recta E F, tangens circulum in A; Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulū A C B, in segmento ablato A C B, æqualem esse dato angulo D. Est enim
32. tertii. angulus A C B, æqualis angulo alterno F A B, hoc est, angulo D. A dato ergo circulo abscidimus segmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.



THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

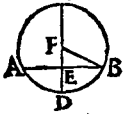
SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E; Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primo utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus, æquale esse ei, quod sub reliquis duobus comprehenditur, rectangulo.



TRANSEAT secundo CD, sola per centrum F, diuidatque prius rectam AB, bifariam, ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniam igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB; Sunt enim rectæ FD, FB, æquales: Est autem quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FE, EB; Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB; cum AE, EB, rectæ sint æquales.

3. *tertij.*



5. *secundi*

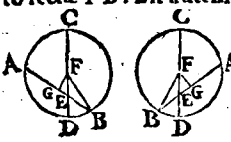
47. *primi*

Diuidat iam CD, transiens per centrum rectam AB, nō bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB, eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam uero rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato

3. *tertij.*

5. secundi 47. primi

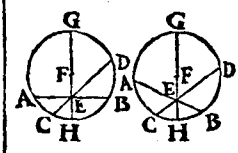
rectæ F E, æquale est quadrato rectæ F D, hoc est, quadrato rectæ F B: Est autem quadratum rectæ F E, æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F G, G B; Erit rectangulum sub C E, E D, una cum quadratis rectarũ F G, G E, æquale quadratis rectarũ FG, GB.



Dempto ergo eõmuni quadrato rectæ F G, remanebit rectangulũ sub C E, E D, una cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulũ sub A E, E B, una cum quadrato rectæ G E, æquale est eidem quadrato rectæ G B: Igitur rectangulũ sub C E, E D, una cũ quadrato rectæ G E, æquale est rectangulo sub A E, E B, una cum quadrato eiusdem rectæ G E. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale rectangulo sub A E, E B. quod est propositum.

5. secundi

TERTIO neutra per centrũ tranſeat, siue una illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta G H. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub A E, E B, æquale esse rectangulo sub G E, E H, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, E D, æquale esse quoq; eidem rectangulo sub G E, E H, siue C D, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. quod est propositum.



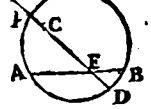
SCHOLION.

CONVERTI *poterit theorema istud hoc modo*.

SI duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus.

SECENT

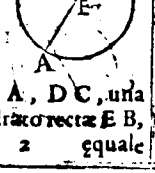
SECENT *se mutuo rectæ A B, C D, in E, sitque rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D: Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis, (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut ultra C, uel citra, ut per F. Quoniam ergo rectangulum sub F E, E D æquale est rectangulo sub A E, E B;* 35. tertij. *& rectangulum sub C E, E D, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub A E, E B: Erunt rectangula sub C E, E D; & sub F E, E D, aqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositũ.*



THEOR. 30. PROPOS. 36. 35.

SI extra circulum sumatur punctum ali quod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera uero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum A B C, punctum sumatur D, a quo linea ducatur D A, secans circulum in C, & linea D B, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub D A, D C, æquale esse quadrato rectæ D B. Transeat enim primo recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, quæ perpendicularis erit ad D B: Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E C, hoc est, cum quadrato rectæ E B, 6. secundi

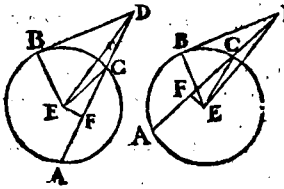


17. tertij.

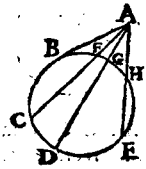
18. tertij.

æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ
47. primi D E, æquale quadratis rectarum E B, B D; Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B; B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; Quod est propositum.

NON transeat iam D A, per centrũ E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F, eritque
18. tertij. E B, ad B D, perpendicularis; &
3. tertij. E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ C F, æ-
6. secundi quale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum
47. primi D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratum rectæ E C, ideoque quadratũ rectæ E B; Et quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadra-
47. primi tum rectæ D E, æquale sit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo cõmuni quadrato rectę B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM. I.

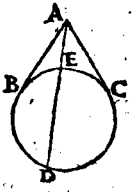


HINC manifestum est, quod si a puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula cõprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se sunt æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ A C, A D, A B, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub A C, A F; Item sub

ſub A D, A G; & ſub A E, A H, æqualia inter ſe. Nam ducta A B, tangente circulum, erunt quadrato rectæ A B, æqualia ſingula dicta rectangula; quare & inter ſe omnia æqualia erunt. 36. tertij.

COROLLARIVM. II.

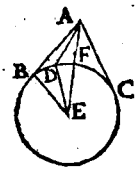
CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter ſe eſſe æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico eſſe æquales inter ſe. Ducta enim recta A D, quæ circulum ſecet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quam quadratum rectæ A C, æquale rectangulo ſub A D, A E; Quare quadrata rectarum A B, A C, inter ſe æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, AC, æquales quoque erunt.



36. tertij.

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM denique eſt, ab eodem puncto extra circulum aſſumpto, duci tantum poſſe duas lineas, quæ circulum tangât. Si enim præter duas A B, A C, duci poſſit tertia A D, circulum eundē tangens; ductis rectis EB, ED, ex centro E, erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod eſt abſurdum. Nam ſi ducatur recta A E, erit angulus A D E, maior angulo A B E.



18. tertij.
21. primi

ALITER. Erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, ut oſtenſum eſt; quod eſt abſurdum. Ducta namque recta A E, ad centrū E, quæ circulum ſecet in F, erit A D, cum ſit propinquior minimę A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior eſt. Solum igitur duæ rectę ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod eſt propoſitum. 8. tertij.

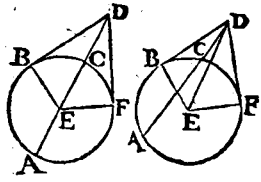
THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, com-

prehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum, ad punctum B; sitque rectangulum sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B: Dico D B, circulum tangere in B. Ducatur enim A F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod si D A, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, D C, æquale est quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B, erunt quadrata rectarum D F, D B, inter se æqualia, ideoq; & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus D B, B E, trianguli D B E, & basis D E, communis; erunt anguli D F E, D B E, æquales: Atqui angulus D F E, rectus est, quod A F, circulum tangat: Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulũ sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandũ.

17. tertij.



36. tertij.

8. primi
18. tertij.

SCHOLION.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCLIDIS ELEMENTVM IIII.

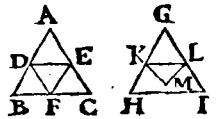
DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cũ singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.



GENS *Euclides in quarto hoc libro de uarijs inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus; nec nõ de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa eadem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens a rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I,*



non dicetur triangulum K L M, inscribi in triangulo G H I; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.

II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circunscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E CONTRARIO dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt, &c. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cũ singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.



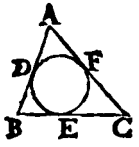
VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC; dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriã, nõ diceretur triangulũ esse inscriptũ in circulo.

IIII.

FIGVRA uero rectilinea circa circulum describi dicitur, cũ singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT

AT vero, si latera trianguli A B C, singula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

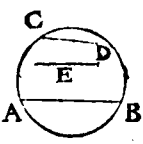
CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus D E F, inscriptus esse in triangulo A B C: At vero circulus A B C, descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

VT recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in periphe-



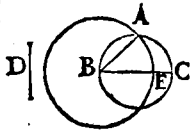
peripheria circuli A B C, exiſtunt, coaptata, ſeu accommodata in dicto circulo eſſe dicetur: Non autem recta E, uel C D; quia hæc unum duntaxat extremum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa uero nullum.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior.

IN circulo A B C, coaptanda ſit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non ſit diametro circuli dati. (Cum enim diameter ſit omnium rectarum in circulo max ma, ſi data recta, diametro maior foret, non poſſet in circulo aptari illi una æqualis) Ducatur diameter B C. Itaque ſi data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si uero D, minor fuerit diametro, abſcindatur B E, æqualis ipſi D, & centro B, interuallo autē B E, circulus deſcribatur E A, ſecans circulū A B C, in A; Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. Eſt enim B A, æqualis ipſi B E; & D, æqualis eidē B E, per conſtructionē: Quare A B, & D, inter ſe æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

15. tertij.

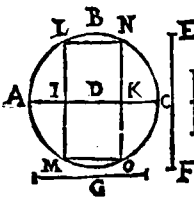


EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accōmodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda ſit recta

ctæ æqualis rectæ E F, quę diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. Ducatur per centrum D, diameter A C, rectę G, parallela. Quod si recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si uero E F, diametro minor fuerit, ea secta bifariam in H, abscindatur D I, ipsi H B, & D K, ipsi H F, æqualis, ut tota I K, toti E F, sit æqualis. Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur L M, N O; iungaturq; L N. Dico L N accommodatam esse æqualem ipsi E F, & ipsi G, parallelam. Cum enim L M, N O, æqualiter a centro distent, ipsæ æquales inter se erunt: quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta A C, per centrum D, transeunte; erunt & earum dimidię L I, N K, æquales. Quia uero L I, N K, parallelę etiam sunt; erunt quoque L N, I K, æquales, & parallelę. Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G; Erit etiam L N, æqualis ipsi E F, & ipsi G, parallela. Eadem ratione, si recta ducatur M O, erit ea æqualis ipsi E F, & parallela ipsi G. Quod est propositum.



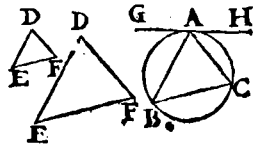
31. primi
11. primi
14. tertij.
3. tertij.
28. primi
33. primi.
30. primi

PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo A B C, dato describendū triangulū æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatq; angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C, angulo E; atq; extendantur rectæ A B, A C, ad circunferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturque recta B C. Dico triangulum A B C, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo D E F. Est enim angulus C, æqualis angulo G A B; & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione: Quare anguli C, & F, inter se quoq; erūt æquales. Similiter quia angulus B, æqualis est angulo H A C, & eidem angulo H A C, æqualis est, per cōstructionē, angul⁹ E; erūt etiā anguli B, & E, inter se æquales.



32. tertij.
32. tertij.

Cum

Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales
sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, erunt quoque
32. primi reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo
triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circu-
lo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

3. ## PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

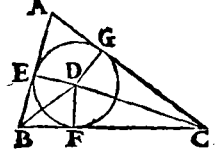
CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triã
gulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto late-
re E F, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, du
catur recta utcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis an
gulo D E G; & angu-
lus B I C, angulo D F H;
Deinde ex A, B, C, edu
cantur ad A I, B I, C I,
perpendiculares K L,
L M, M K, quæ circu-
lum tangent in punctis
A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K L, M; (si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; quare A K, C K, coibunt, &c.) Descriptum est igitur circa circulũ trian
gulum K L M, quod dico esse æquiangulũ triangulo D E F.
Quoniam omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales
sunt quatuor rectis, ut ad 32. propo. lib. 1. ostensum fuit;
& anguli I A L, & I B L, sunt duo recti; erunt reliqui A I B,
& L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli D E G,
13. primi. D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales
A I B, & D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqua
lis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse
32. primi angulo D F E. Reliquus igitur angulus K, reliquo angu-
lo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum K L M, æqui-
angulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c.
Quod efficiendum erat.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inſcribere. 4.

SIT deſcribendus circulus in dato triangulo A B C. Diuiſis duobus angulis A B C A C B, bifariam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coeant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales ſunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, uterque utrique; & latus B D, commune; erunt quoque latera D E, D F, æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, ſint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, deſcriptus tranſibit per reliqua puncta F, & G; tangetq; latera trianguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod perpendicularia ſint ad ſemidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum deſcripſimus. Quod erat efficiendum.

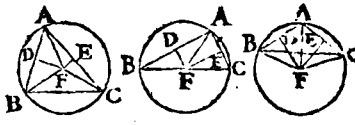


16. primi

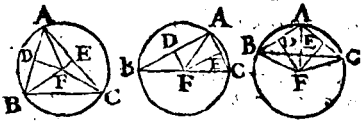
PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulũ A B C. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, uel obtuſangulo ſumenda ſunt circa rectum, uel obtuſum angulum) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet.



tet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, uel intra triangulum, uel in latere BC, uel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur laterá AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, triāguli BDF, & anguli ad D, recti: erūt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triāgulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.



4. primi

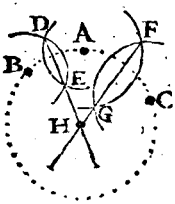
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si uero sit in latere BC, angulum BAC, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulū BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

CONTRA uero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum.

SCHOLION.

COLLIGITVR *etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, ut constituatur triangulum; facile circa ipsum circulus describetur. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo, duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH.*

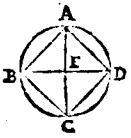


D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo, uel etiam, si placet, eodem, alij duo arcus delineentur secantes se se in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in H Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam a rectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare ut in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; erũt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter se sunt. Sunt autem & anguli recti, cum omnes in semicirculis existant. Quare quadratum erit A B C D; propterea que in dato circulo quadratum descripsimus. Quod erat faciendum.



4. *primi*

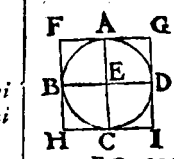
31. *tertij.*

PROBL. 7. PROPOS. 7. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E, describendum

describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos, & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico F H I G, esse quadratũ circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli A E B, F B E, sint recti, erũt F H, A C, parallelæ; similiterque erunt G I, A C, parallelæ. Quare & F H, G I parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est A C H F, erunt latera oppositа A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: sed A C H, est rectus, igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus, angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G, æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circa circulum tãngunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.



28 primi
30. primi
34. primi

8. PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E; sunt autem hæ inter se æquales, cum sint dimidiæ æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G,



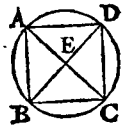
33. primi

I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum I E, transibit quoque per puncta F, G, H; qui cum contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. propo. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat. 29. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera A B, D A trianguli A B D, æqualia sunt; erunt anguli A B D, A D B, æquales: est autē angulus B A D, rectus; Quare A B D, A D B, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, sint æquales; erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulū descripsimus. quod erat faciendū.



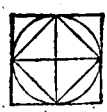
5. primi

32. primi

6. primi

SCHOLION.

QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum uero diametri dupluum est quadrati, cuius est diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

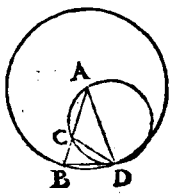


10.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulū cōstituere, quod habeat utrumq; eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

11. *secundi* SVMATVR quæuis recta linea A B, quę diuidatur in C, ita ut rectangulū sub A B, B C, æquale sit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo uero A B, circulus describatur, in quo accommodetur recta B D, æqualis ipsi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales sunt, erit triangulum A B D, Isosceles. Dico utrumq; angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, describatur circa triangulū A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectę A C, hoc est, quadrato rectæ B D; & recta A B, secat circulum D C A: tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare ahgulus B D C, æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur cōmuni C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A; sed his eisdem æqualis est etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, hoc est, angulo A B D, cum A B D, A D B, æquales sint; ac propterea rectæ C D, B D, æquales erunt: Est autē B D, æqualis posita rectæ A C. Igitur & C D, ipsi C A, æqualis erit, ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Cum igitur angulus A, æqualis sit ostēsus angulo B D C, erūt quoque anguli B D C, C D A, æquales; ac propterea angulus A D B, duplus erit anguli C D A, hoc est, anguli A, sibi æqualis. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdē anguli A. Isosceles ergo triangulum cōstituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.



1. *quarti*

5. *quarti.*

37. *tertij.*

32. *tertij.*

32. *primi*

5. *primi*

6. *primi*

5. *primi*

SCHOLION.

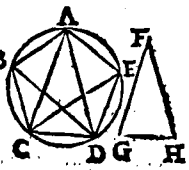
NON *est autem quod se excrucient Campanus, & Peletarius, ut probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, ut eū nullo*

nullo modo secet. Nã propterea quod quadratũ rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est in ultima propos. 3. lib. rectam BD, perpendicularẽ esse ad semidiametrũ circuli ex D, ductam. Quare circulũ tanget, & nulla ratione secabit.

PROBL. 11. PROPOS. 11. 11.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituatur triangulum Isosceles FGH, ita ut uterq; angulorũ G, H, duplus sit reliqui F. & in circulo inscribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & uterq; angulorũ ACD, ADC, bifariam diuidatur rectis CE, DB; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD; & diuisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ACE, æquales. Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atq; idcirco & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Aequilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æquales sunt, addito communi BCD, fient æquales ABGD, EDCB; Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistẽtes æquales erunt. Eodẽ modo æquales erunt cuilibet horũ angulorũ reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulũ est ergo pentagonum ABCDE. Quare cũ & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptũ erit in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendũ erat.



10. *quarti*
2. *quarti*
9. *primi*
26. *tertij.*
29. *tertij.*
27. *tertij.*

SCHOLION.

QVOD si detur recta linea terminata CD, super ea

10. quarti

constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. Fiat triangulum Isosceles F G H, habens quemlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituantur anguli A C D, A D C, æquales angulis G, H, coeantq; rectæ C A, D A, in A, quæ efficient angulum C A D, æqualem angulo F; atque propterea triangulí A C D, uterque angulorum A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam vero circa triangulum A C D,



32. primi

5. quarti

circulus describatur A B C D E; In quo cum sit inscriptum triangulum A C D, si anguli A C D, A D C, bifariam secentur, inscribetur ut prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta C D. Quod est propositum.

12. PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum A B C D E, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducant perpendiculares G H, H I, I K, K L, L G, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum n. anguli G A E, G E A, duobus sint rectis minores, coibunt rectæ A G, E G, ad partes G; & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum G H I K L, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, ac æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erunt quadrato rectæ F H, æqualia tam quadrata rectarum F A, A H; quam rectarum F B, B H: Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebũt quadrata rectarũ A H, B H, æqualia; ideoq; & rectæ A H, B H,

11. quarti



12. pron.

47. primi

B H, æquales erunt. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lateribus B F, F H, trianguli B F H; Est autem & basis A H, basi B H, æqualis, ut ostensum est: erunt anguli A F H, B F H, æquales; Igitur & anguli A H F, B H F. Duplus igitur est angulus A F B, anguli B F H; & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo ostendemus, angulum B F C, duplum esse anguli B F I, & angulū B I C, anguli B I F. Cum igitur anguli A F B, B F C, sint æquales, quod insistant circunferentijs A B, B C, quæ æquales sunt, cum a rectis æqualibus subtendantur A B, B C; erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cum duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales sint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus illis adiacens commune B F; erunt & latera B H, B I, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione ostendemus G H, rectam duplam esse rectæ H A: Sunt autem ostensæ æquales H B, H A; igitur & earum duplæ H I, H G, æquales erūt. Similiter demonstrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales esse cuilibet rectarum H I, H G. Aequilaterum ergo est pentagonum G H I K L. Rursus quoniam ostensum est angulos B H F, B I F, æquales esse, ac dimidios angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli I K L, K L G, L G H, erunt æquales cuilibet angulorum B H A, B I C. Aequiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. quod efficiendum erat.

8. primi
4. primi.
27. tertij.
28. tertij.
26. primi

PROBL. 13. PROPOS. 13.

13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribēdus circulus in dato pentagono ABCDE; Diuidantur duo eius anguli B A E, A B C, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F. Cum enim anguli B A F, A B F,

9. primi

sint minores duobus rectis, coibunt necessario rectæ A F, B F: Connectantur deinde rectæ F C, F D, F E. Quoniã igitur latera A B, B F, trianguli A B F, æqualia sunt lateribus C B, B F, triãguli C B F; Sunt autẽ & anguli ipsis contenti æquales A B F, C B F, erunt



4. primi bases A F, C F, & anguli B A F, B C F, æquales. Cum igitur anguli B A E, B C D, ponã tur æquales, & B A F, dimidium sit anguli B A E, per constructionem; erit & B C F, dimidium anguli B C D. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos C D E, D E A, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A, F A G, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L; estque latus A F, subtensum uni æqualium angulorum, commune; erunt & 26. primi rectæ F G, F L, æquales. similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares F H, F I, F K, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo F G, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam uero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cũ rectis F G, F H, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

14. PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ circulũ describere.

SIT circa pentagonũ A B C D E, æquilaterũ, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis B A E, A B C, bifariã rectis A F, B F, quæ coeant in F; & coniũctis rectis F C, F D, F E, ostẽdemus, ut



in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos B C D, C D E, D E A, secari bifariã; Erunt ergo oẽs anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales ponãtur. Quũ igitur in triãgulo A F B, duo

duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademq; ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autē F A, transibit quoq; per puncta B, C, D, E. Circa datū ergo pentagonū, &c. Quod faciendum erat. 6. primi

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribendū hexagonum æquilaterū, & æquiangulum. Ducta diametro A D, describatur circulus ex centro D, interuallo uero D G, qui secet circulū datū in punctis C, & E, e quibus per centrū G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur cōnectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum, & æquiangulum. Cū enim recta G C, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, DC, æquales inter se. Ideoq; triangulum C D G, erit æquilaterū. Quare tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars ~~unius recti~~. Eodē modo erit angulus DGE, tertia pars ~~unius recti~~. Sunt autē tres anguli CGD, DGE, EGF, æquales duobus rectis: Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars est ~~unius recti~~. Sūt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cū etiā æquales sint anguli FGA, AGB, BGC; erūt sex anguli ad cētrū G, æquales. Quare circūferentię, quibus insistūt, ac propterea rectę AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonū A B C D E F. Rursus quia circunferentia B C, æqualis est circunferentiæ A F; si addatur communis CDEF, erunt circunferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, æquales erunt. Similiterq; ostēdemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorū. Quare æquiangulū quoq; est hexago-



5. primi
32 primi.
13. primi
15. primi
26. tertij.
29. tertij.
27. tertij.

duorū rectorū?
duorū rectorum
duorū rectorū?

num A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonū æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendū erat.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

CAETERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa idem hexagonum describemus circulum.

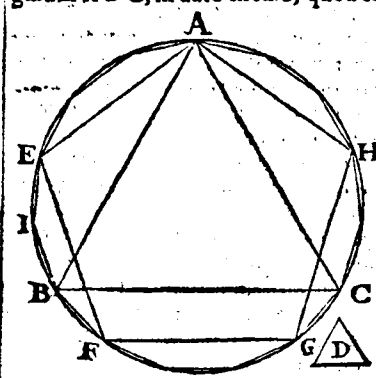
16. PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterū,

2. *quarti*

28. *tertij.*



eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales. Qualiū igitur ~~partiū æ~~qualium quindecim est circunferētia ~~tota~~ ABC, talium quinque erit arcus AB, q̄ tertia pars est totius circunferentiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonū æquilaterum, & æquiangulum

11. *quarti.*

28. *tertij.*

A E, F G H, eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A.

HA, æquales. Qualium igitur partium æqualiū quindecim est tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens totius circunferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, subtendet decimam quintam partem totius circunferentiæ; cui si aliæ quatuordecim æquales in circulo accomodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, ut perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod erat faciendum.

30. tertij.

1. quarti
27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum; Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLION I.

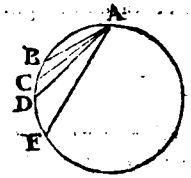
EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, ac ars quædam, qua infinita propemodū figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod sit latus trianguli æquilateri, & recta A E, a quinario, quod sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex dictis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc est, 3. exceditur a denominatore lateris A E, nempe a 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur

duæ

duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter dicta latera incluſus, tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter ſe differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inſcribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates ſunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR *in circulo A B C D E, initio ſemper facto a puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem A B, pentagoni uero A C, & quadrati A D, trianguli deniq; æquilateri A E. Quoniã igitur denominator lateris A B, nempe 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. unitate;*



continebit arcus B C, inter dicta latera incluſus unum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium: Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium æqualium 30. eſt tota circunferentia, talium 5. eſt arcus A B, ſexta pars circunferentiæ; & talium 6. eſt arcus A C, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus B C, unam talem continebit partem. Pari ratione arcus B D, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium: Nam denominator lateris A B, uidelicet 6. ſuperat denominatorem lateris A D, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24. Ita quoque arcus B E, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum. Arcus uero C D, complecterur unum latus figuræ 20. laterum; & arcus C E, duo latera figuræ 15. laterum. Arcus denique D E, continebit unum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inueſtigabuntur fere infinitarũ figurarum latera.

EX CAMPANO.

OMNIS figura æquilatera circulo inſcripta, aut circunſcripta, eſt

est quoque æquiangula. Nam figuræ inscriptæ anguli, cum insistant arcubus æqualibus, æquales erunt. Anguli uero circunscriptæ, æquales ostendentur, ductis a centro rectis lineis ad omnes angulos, & ad puncta, quibus latera circulum tangunt, ut in pentagono est factum, propos. 12. 27. tertij.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum, inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterũ, figuræ 32. 64. 128. laterum, &c.

SCHOLION. II.

OMNES figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt officio Isoscelium triangulorum, ut recte hoc loco docet Peletarius.

IMPARIVM enim laterũ figuræ inscribent officio triãgulorũ Isoscelių, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad uerticem sunt, angulorum. Vt officio Isoscelis, cuius uterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad uerticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulũ æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulũ æquilaterũ erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius uterq; angulorũ ad basin duplus sit eius, qui ad uerticem, inscribetur secunda figura imparium laterũ, utpote pentagonũ, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam ueluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonũ, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triãgulũ Isosceles habens utrumq; angulorum ad basin triplum eius, qui ad uerticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad uerticẽ. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur officio Isoscelis, cuius uterq; angulorũ ad basin quadruplus est eius, qui ad uerticem, si uterq; distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad uerticem, &c. 6. primi. 23. primi. 23. primi.

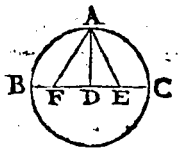
PARIVM

PARIVM vero laterum figuræ in circulo inscribentur, officio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circunferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem; subtendent ipsi tres partes circunferentiæ, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circunferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis habentis vtrunque angulorum ad basin triplum sesquialterum anguli ad verticem, &c.

SI igitur inuenta fuisset ars, qua Isoscelia triangula construerentur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplũ anguli ad verticem, facile in circulo describerentur figuræ omnes laterum imparium. Quod si arcus earum diuiderentur bifariam, inscriberentur quoque omnes figuræ parium laterum, atque adeo qualibet circunferentia circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuideretur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota exiſtit: Non enim recte sibi eam uendicat Oronti⁹ Finæus in libello hactenus, ut ipse ait, desiderato, de absoluta rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophistica, ut Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

QVONIAM verolonga est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua una eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus

culus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æquales abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit A F, latus pentagoni, & D F, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, ut ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non uidetur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in propos. 13. differenda.



NON *erit autem præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienũ, si sequens adhuc theorema adiungamus, videlicet.*

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idem centrũ habens.

SIT *enim figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inscriptam figuræ A B C D E F, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera subtendunt angulos æquales cõprehensos æqualibus rectis, utpote dimidijs laterum æqualium, æqualia sunt. Quoniam uero tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quam tres F L M, M L K, K L E, duobus sunt rectis æquales; Sunt autem A M G, L M F; F L M, K L E, inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque a basibus æqualibus: Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura G H I K L M. Quod autem*



4. primi

13. primi.

8. primi.

13. primi

autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur



rectæ N G, N H, &c. iunctis quoque rectis N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntq; bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemq; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æqualium a centro N, æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, intervallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet: Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M. Quod est propositum.

8. primi

14. tertij.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM V.

DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EIT *in præcedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata: Nunc uero in duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed pro ut una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. In hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, nõ descendendo ad ullam eius speciem, ut ad lineam, superficiẽ, vel corpus aliquod. In 6. lib. uero ostendit, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circunferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius uocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.*

ITAQVE *ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C; dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C.*

At



At uero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit a magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædã metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum uel excedit, uel ab eodẽ deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc in loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia ut ex lib. 7. constabit, pars aliquanta non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc in loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamẽ in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc utramq; illam metitur. At uero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metiatur. Itaque pars ad multiplex refertur,

fertur, & multiplex ad partem, ita minor quantitas mensurãs maiorem, dicatur pars maioris; Maior uero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, qua perfecte metitur suum totũ. Si enim 6. diceretur metiri 7. ut uult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundũ quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, ut duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una maior est, quam altera, uel minor, uel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (ut aliis placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, uel numerus cum linea, non dicetur ea cõparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea, sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVAMVIS autem in solis quantitatibus proprie reperiatur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo natura sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, uoces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, uel minus, uel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora considerantur, veluti quantitates.

CAETERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad

aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea uero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si econtrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum, ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens uero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

DE PROPORTIONIBVS.

OPERAE *pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionũ apud Mathematicos, uel ob hanc præcipue utilitatem, ut ea, quæ in his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit.*

PROPORTIO *igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis uero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati, ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, ceu in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem uero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autẽ quantitates commensurabiles, quæ habent inam cõmunem*

munem partem aliquotam, seu quas eadem mensura metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorú est utriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineá 20. palmorum; Ita quoque eadem lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem unitas omnes metitur. Quantitates uero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri: Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati: quamuis enim qualibet harum linearium infinitas habeat partes aliquotas, utpote partem dimidiam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota unius, quantumuis minima, alteram metiri potest, ut demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. ultima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter dictas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, ut inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorú, & lineã 10. palmorú, &c. Inæqualitatis uero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, ut inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duo-

bus eam connexionem, ut omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, non recte a quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis; cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori uero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; ut a nobis factum est.

RVRSVS *proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius sub diuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeát proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quádo maior quántitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c.*

Pro-

Proportio minoris inæqualitatis eſt, quãdo minor quãtitas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis & ſuperuacanea, ut multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. Sed multum inter ſe differunt, cum ualde diuerſus ſit uſus utriuſque, ut perſpicuum eſt ijs, qui uel mediocriter in rebus geometricis, & regula Algebræ ſunt uerſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſeclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniã de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. eſt ſermo futurus.

PROPORTIO *ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinque genera, ut in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Pari ratione proportio minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, ſi modo ſingulis uocabulis præponatur præpoſitio (ſub) ut in proportionem ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularem, & ſubmultiplicem ſuperpartientẽ. Horum autem quinque generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora uero duo ex illis tribus compoſita, ut manifeſtũ eſt. Cur uero tantum ſint quinq; hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, prope finem omnium proportionum oſtendemus.*

PROPORTIO *Multiplex, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, decies, centies, &c. continet. qualis est proportio 20. ad 4. Nam 20, comprehendunt 4. quinquies. Item lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c. Hæc autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis, maior quantitas minorē bis tantū continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla; si decies, decupla; si centies, centupla, &c. Itaque proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorē, quando maior minorem octies complectitur. Eodemq; modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: ut proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10 cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.*

PROPORTIO *superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper unam eius partem aliquotam, scilicet dimidiam, tertiam, quartam, &c. qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continens 2. semel, & adhuc unitatem, quæ dimidia pars est 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedū, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & adhuc lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c. Hæc quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est medietas minoris quantitatis, constituitur proportio*

sesqui-

ſeſquialtera; Si eſt tertia pars, exurgit proportio ſeſquitertia; ſi quarta, ſeſquiquarta; ſi milleſima, ſeſquimilleſima, &c. Vnde ex ipſomet uocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum ſuperparticularium. Erit enim proportio ſeſquioctaua, quá do maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. & inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

PROPORTIO *ſuperpartiens, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes unam aliquotá. qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres unitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, utpote quinta, huius numeri 5. Conſtat autem ternarium ex illis compoſitum, non eſſe partem unam aliquotam numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere unam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aſpectu uidentur eſſe ſuperpartientes, cum tamen ſint ſuperparticulares: cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quamuis enim 10. contineant ſemel 8. & duas unitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8. tamen quia binarius ex illis unitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe ſeſquiquarta. Itaque, ut duæ quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartientem, neceſſe eſt, ut maior quantitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, quæ ſimul ſumptæ non conſtituant*

unam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt. Diuiditur primo proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes unam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c. Diuiditur deinde quodlibet horum generum, habita ratione partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur superdecupartiens undecimas; Quod si decem illæ partes sint decimætertiæ, uocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus. Ne autem proportiones superpartientes uel inter se cõfundantur, uel cum proportionibus superparticularibus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunq; proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter commonstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore superfint; alter uero, quotæ partes, aut quátæ sint, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotan-

denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorē, & adhuc tres eius partes aliquotas; posterior autem ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, eiusmodi esse debere, ut non habeant ullam partem aliquotam communem, præter unitatem, quæ quidem est omnium numerorū pars aliquota. Tales sunt duo prædicti numeri 3. & 8. Nam sola unitas, ut constat, est utriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter unitatem aliā cōmunē mensurā, uidelicet 3. Nā ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senariū metitur. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cū maior quātitas cōtineat semel minorē, & eius partē dimidiā. Eadē rōne nō recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiēs sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habēt 2. cōem partem aliquotā, præter unitatem; atq; ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cū maior quātitas cōtineat minorē semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur nō difficile erit unicuiq; denominare cōuenienter oēs proportiones superpartiētes. Perspicuū ēt ex dictis relinquitur, cur proportionē superpartientē diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem

tertias,

tertias, quintas, septimas, nonas, &c. præterennte superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrētur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter unitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica edocetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

PROPORTIO multiplex superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, uel quater, &c. continet, & præterea unam eius partem aliquotam; cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, utpote cum dupla) & insuper comprehendunt unitatem, quæ est quarta pars minoris; qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ eadem proportio proposita similis est. Diuiditur autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita. Veluti multiplex, in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper unam partem minoris quantitatis aliquotam. Vnumquodque rursus horum generum in infinita alia subdiuidetur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio tripla superparticularis, continet sub se triplam sesqualteram, (ut quando maior quantitas minorem

rem ter continet, & præterea dimidiam eius partem;) triplam ſeſquitertiam; triplam ſeſquiquartam, & ita infinitas alias.

PROPORTIO denique multiplex ſuperpartiens eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes unam: qualis eſt proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes unam, ob cauſam dictam in proportione ſuperpartiente. Nam ſi partes illæ aliquotæ unam efficerent, non eſſet proportio multiplex ſuperpartiens, ſed multiplex ſuperparticularis: Vt proportio 20. ad 6. non dicenda eſt multiplex ſuperbipartiens ſextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas ſextas; quia duæ ſextæ conficiunt unam tertiam partem: Quare uocabitur proportio tripla ſeſquitertia. Diſtribuitur autem hæc proportio primo, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam ſuperpartientem; triplam ſuperpartientem, &c. Deinde quælibet harum, habita ratione numeri partium, ſub ſe continet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c. Poſtremo quælibet iſtarum, habita ratione partium aliquotarũ, in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens, diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile eſt cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNIA uero, quæ dicta hactenus ſunt de quinque his generibus proportionum rationalium maioris in-

inæqualitatis, intelligenda sunt quoq; de quinque generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmißa tamen semper præpositione (sub,) ut dictum est. Nam si in exemplis adductis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias: Ita proportio 3. ad 11. est sub tripla superbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.

Caetervm ex dictis perspicue colligitur, nō posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam exposita. Cum enim, ut Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, ut diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, ut omnis proportio rationalis quarumcumque quá titatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione constituitur proportio multiplex: aut semel tantummodo, ac præterea unam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis; aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque uero alio modo minor quantitas a maiore contineri potest. Eadem

ratione

ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis.

QVONIAM uero non exiguus est usus denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expositimus, non abs re erit, paucis docere, a quibusnã numeris singulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, & aperte habitudinem unius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ, est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ, est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, ut arbitror, quod Euclides in lib. 6. & ceteri Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius, quia denominator, ut diximus, ostendit, quanta sit una quantitas ad alteram, cum qua confertur, ut ex propositis exemplis constat.

Ex dictis autẽ facile colligi potest denominator cuiusq; proportionis. Denominator .n. proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numerus integer; quia maior quantitas aliquoties minorem debet continere. Vt proportionis duplæ denominator, est 2. Noncuplæ 9. Centuplæ 100. millecuplæ 1000. &c. Denominatores autem proportionũ submultiplicium multiplicibus correspõdentiũ, sũt partes aliquotæ a dictis denominatoribus denominatæ: Vt denominator proportionis subdu-

subduplæ, est $\frac{1}{2}$; *subnoncuplæ*, $\frac{1}{9}$: *subcentuplæ*, $\frac{1}{100}$: *submillecuplæ*, $\frac{1}{1000}$; *Denominator autē proportionis subquintuplæ est* $\frac{1}{5}$. *Eodē modo & denominatores aliarū proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis, est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est unitas; denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, ut ex dictis exemplis patet.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis superparticularis, est unitas cum parte una aliquota: quoniam maior quantitas debet minorem semel tantum, & unam eius partem aliquotam comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator, est* $1\frac{1}{2}$; *sesquioctauæ*, $1\frac{1}{8}$; *sesquimillesimæ*, $1\frac{1}{1000}$, *&c. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores una tantum unitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est* $\frac{2}{3}$; *subsesquioctauæ*, $\frac{8}{9}$; *subsesquimillesimæ*, $\frac{1000}{1001}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis fumatur denominator partis aliquotæ, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus unitate maior: Vt denominator proportionis subsesquidecimæ est* $\frac{10}{11}$, *&c.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis superpartientis, est unitas cum pluribus partibus aliquotis non efficientibus unam: quia maior quantitas debet semel tantum minorem continere, & plures eius partes. Vt denominator proportionis supertripartientis*

tis septimas, est $1\frac{3}{7}$; supertripartientis vigesimas, $1\frac{3}{20}$; &c. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores sunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$; subsupertripartientis vigesimas, $\frac{20}{23}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis sub superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, cui si addatur numerus partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis undecimas, est $\frac{11}{15}$; Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio $\frac{5}{8}$. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientium denominatores.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis, est numerus cum una parte aliquota: quia maior quantitas continere debet minorem aliquoties, & insuper unam eius partem aliquotam. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ, est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{22}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{46}$; etc. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multipli-

multiplicis, addaturque unitas numero producto, habebitur denominator eiusdem fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$, &c.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus cum pluribus partibus aliquotis, non constituentibus unam: quoniam maior quantitas minorem debet aliquoties comprehendere, & eius plures partes aliquotas non facientes unam. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$; quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$, &c. Denominatores uero proportionum submultiplicium superpartientiũ, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{29}$: subquadruplæ superbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$, &c.

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis, perpetuo est unitas: quia una quantitas debet alteram semel duntaxat continere.

IIII.

PROPORTIO vero eſt rationum ſimilitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία pleriſque autem latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter ſe, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter ſe, proportionalitas ſolet nuncupari. Vt ſi proportio quantitatis A, ad quãtitatem B, ſimilis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter hæc proportiones, proportionalitas. Eodem modo, ſi ſimilis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc ſimilitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, ſeu proportionalitates, (Nos enim comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus; habitudinem autẽ proportionum, Proportionalitatẽ) à ſcriptoribus, præſertim Boetio, & Iordano, deſcribuntur; inter quas primum ſemper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Muſica, ſeu harmonica: Verum Euclides de ſola Geometrica agit in hoc libro; quæ quidem duplex eſt, continua altera, in qua ſingulæ quantitates intermediæ bis ſumuntur, ita ut nulla fiat proportionum interruptio, ſed quælibet quantitas intermedia ſit & antecedens, & conſequens; Antecedens quidem quantitatis ſubſequentis, conſequens vero quantitatis præcedentis. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio E, ad F, ea eſt F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera uero diſcreta, ſeu non continua, in qua ſingulæ quantitates intermediæ ſemel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas ſit & antecedens, & conſequens, ſed uel antecedẽs tantum, vel conſequens tantum. Vt ſi dicatur, quæ eſt proportio A, ad B, ea eſt C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, diſcreta, ſiue non continua.



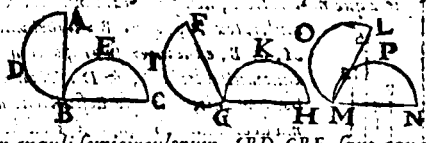
DEFINITIO VI.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM *Euclides in tertia definitione habitudine duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat proportionem, seu rationem; explicat nunc in hac 5. definitione, quid nam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportione habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet; adeo vt si alterutra quamcumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circunferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circunferentiam superat, cum omnis circunferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habebunt, quia & æqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum, ad modum Lunæ nouæ, quãdo falcata esse cernitur; & Archimedes parabolim quadrarit; hoc est, illi cuidam lunulæ, hic uero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato*

20. primi.

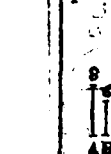
dr. 20. Hoc idem demonstratur à Proclo in angulis rectilineis, ac curuilineis. Ostendit enim, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus ABC, contentus rectis æqualibus AB, BC, circa quas semicirculi describantur ADB, BEC.



Quoniã igitur anguli semicirculorum ABD, CBF, sunt æquales; addito communi angulo mixto ABE, fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, æqualis. Similiter ostendes, angulum curuilineum IGK, æqualem esse obtuso FGH; nec non curuilineum OMP, acuto LMN, idemmodo hic ab angulis semicirculorum LMO, NMP, auferas commune angulum mixtum, qui continetur recta linea LM, & curua MP; Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum, posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At uero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, ullam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quotcumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo: seu propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque ut apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, uolun hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata, alteram possit superare, aliæ non. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare unam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus.

PERSPICVVM est ex his, quam inepte, & quam falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duæ quæcunque

propositæ quantitates habeant. Itaque ut inquit, ait Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habebunt magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æquemultiplicia C, & D. Non aduertis autem, hoc quod ais, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5 lib. ubi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quã illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B; Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.

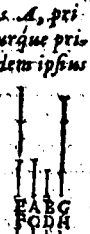


VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundã, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque uel una deficiunt, uel una æqualia sunt, uel una excedunt; si ea sumãtur, quæ inter se respondent.

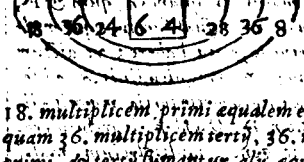
EXPLICAT hoc in loco Euclides, quasnam conditiones requirant apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut rectius exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam

quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, sive hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, sive non. Quod si iam inter se conferantur sumpta æque multiplicia ea, quæ inter se respondent, ut multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est E, & G; Item multiplex tertiæ & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H; deprehensumque fuerit perpetuo, ex ita inter se se habere, ut si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H; Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quam H; (quod est utrumque ab utroque vel una deficere, vel una æqualia esse, vel una excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, ideſt, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & ut nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique ut nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquam deprehensum fuerit, æque multiplicia quæuis acceptæ, perpetuo sese ita habere; vt dictum est, dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G; non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, seu in defin. 8. fiet perspicuum.



ITAQVE vt demonstratione aliqua concludantur quatuor

suor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cū quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionē, concedatur quoque necesse est, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuliber æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem. Debes enim definitio & definitio reciprocari. Vt autem perspiciatur, quomodo puncto, propositis quæ suos magnitudinibus eandem proportionem habentibus, quædā æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, a quibusdā æque multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, utrumque ab utroque una deficiant, alia vero una æqualia sint, alia denique una excedant, si exsumantur, quæ inter se respondeant, placuit vnum exemplum adducere in numeris. Sint enim quæ suos numeri 3. 2. 6. 4. sumanturque primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æque multiplices, ut septupli 14. & 28. Videsigitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij a 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æque multiplices; ut noncupli 18. & 36. Videsergo, tā 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, videlicet 4. & 8. Videsigitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus in quacunque sumantur multiplicatione semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.



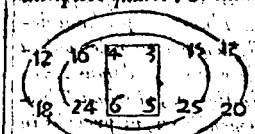
CAMPANVS vero atque Orontius, longè aliter definitionem

tionem hanc exponunt, *Dicunt enim Euclidem velle, non de-*
mum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum
primæ & tertiæ æque multiplicia, & secundæ & quartæ æque
multiplicibus, utrumque ab utroque, vel una deficiunt pro-
portionaliter, hoc est, in eadem proportione; vel una æqua-
lia sunt, vel una excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ
inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando eorū
æque multiplicia proportionalia sunt, id est, eū eandē proportio-
nem habet multiplex primæ ad multiplex secundæ, quam mul-
tiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, si ea
intelligatur definitio, Euclidem ide per idem definire? Quod
sane absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitu-
dines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si
sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est)
in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate
huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in ea-
dem proportione, earum æque multiplicia eandem quoque ha-
bere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc de-
finitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstra-
ri, quod ridiculum est; ueluti eo in loco demonstrabimus. Ac-
cedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima The-
oremata quinti libri non posse demonstrari, ut proprys in
locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, ut exposui-
mus, sic ut, propositis quatuor magnitudinibus in eadem pro-
portione, si multiplex primæ deficit a multiplici secundæ, uel
æquale sit, uel excedat; etiam multiplex tertiæ deficiat a mul-
tiplici quartæ, uel æquale sit; uel excedat, quicunque sit ille
defectus, excessusve. Nam in 4. posiex Theoremate demonstra-
bitur, dictum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, *definitionem*
hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nā
si de quocunque intelligeretur, essent quatuor hi numeri 4. 3.
6. 5. in eadē proportione. Si enim
primi & tertij, utpote 4. & 6. su-
mantur æque multiplices nume-
ri, ut dupli, 8. & 12. Item secun-
di & quarti, nempe 3. & 5. æque
multiplices, ut dupli quoque, 6.
& 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secun-



di, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemq; cernitur ſi primi, & tertij ſumantur quadrupli 16. & 24. ſecundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur ſufficit, vt æque multiplicia accepta una excedant ſe ſe quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter ſe mutuo ſuperent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cum proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia, proportio vero 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligendus igitur eſt defectus, aut exceſſus æque multiplicium, proportionalis: Ita enim fies, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non ſe ſe excedant proportionaliter, vt conſtat. Verum tamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe. Quamuis enim numeri æque multiplices adducti ſe ſe vna excedant; tamen quamplurimi alij reperiuntur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quincuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, ſed deficiet. Quod ſi primi, & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At vero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur quælibet æque multiplicia dictorum numerorum ſic ſe habere, vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoque multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus ita eſſe contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionẽ, vt adhuc clarius conſtabit ex 8. definitione.



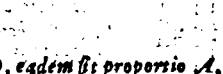
CAETERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, ſi modo ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcumque ſumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multi-

multiplicium sumpta ad 6. & 4. uel aequalia sunt, vel una excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales uocentur.

VT si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur dictæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales cõtinuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales sunt non continuæ, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum est in 4. definitione.

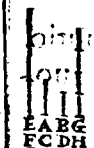


VIII.

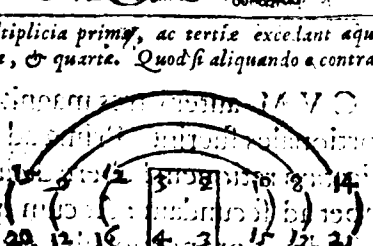
CVM uero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartã, dicens.

dicens: Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprobesæq; fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplici secundæ, multiplex autem tertiæ non esse maius multiplici quartæ, sed uel minus, uel æquale; dicetur, habere eam proportionem prima magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam: ut perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt multiplicia E, & F, secundæ uero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius est quam G, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quam H, multiplex quartæ, sed minus; idcirco maior esse dicetur proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam. Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quam tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamuis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque fieri, ut tã multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ. Item ut & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ; & multiplex tertiæ multiplice quartæ. Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ, uel minus est, uel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, ut perspicuum est in sequenti exemplo. Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut æque multiplicia earum, iuxta quasuis multiplicationes accepta, uel una deficiant, uel una æqualia sint, uel una excedant, ceu in 6. defin. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex vero tertiæ non superet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras multiplicationes,



tiones, æque multiplicia primæ, ac tertiæ excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ. Quod si aliquando a contrario multiplex prima deficiat a multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ; dicatur prima magnitudo ad secundam minore habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamvis secundum plurimas multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris, minor dicetur proportio 8. ad 7, quam 7 ad 6, &



DEFINITIO X.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quæ interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedens, & consequens, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum duo antecedentia, & duo consequentia. Quare si proportionalitas

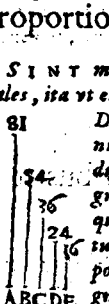


fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, sive magnitudines: At vero si fuerit continua, tunc cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, & tam sit consequens vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscumque, solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

SINT magnitudines A, B, C, D, E, continuæ proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E. Proportio igitur A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reperiuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; vt proportio A, ad B; & B, ad C. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B; propterea quod quatuor proportiones interciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.



QVOD si e contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D: At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoq; proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTER-

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione; ſi proponantur aliquot quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, eſſe duplam proportionis primæ quantitatis ad ſecundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, eſſe triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam, &c. Quod tamen nulla eſt ratione concedendum. Nec enim Euclides hoc ſignificare voluit, ſed docuit tantummodo, proportionē primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad ſecundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperiantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quā habet prima quantitas ad ſecundam, & ſic de cæteris, ut diximus. Non autem, illam duplam eſſe huius, intellexit, ne Theorema proponeret, quod meritò quiſpiam concedere recuſaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continuè proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam eſſe proportionis 25. ad 5. cum potius ſit quincupla? At verò, illam dici huius duplicatam, nemo inficiabitur, eo quod bis ſit poſita, & continue: proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor ſit, hæc autem maior? Dicetur tamen illa huius duplicata, ob cauſam iam explicatam, licet ſit eius quinta pars. Quare & ſi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decuplæ proportio eſt eiuſdē dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla duplæ eſt proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, ſit ſedecupla, vt hic patet 16. 4. 1.

ITAQVE hoc in loco Euclides explicat tantum, quid nam intelligendum ſit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonſtrationes ſequentium librorū percipiantur, rebuſq; poſſint materialibus accommodari. Non autem determinat, quæ nam proportio ſit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Quare cum ex propoſitione 20. lib. 6. conſtet, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam eſſe proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus poſterioris, colligendum erit, ſi continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, eſſe eam, quæ eſt primi termini ad tertium; ita vt ſi prioris quadrati latus fuerit

rij trium palmorum, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nonies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ si noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur, sphæras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur tripla proportionis, ceu hic perspicitur 27. 9. 3. 1. &c.

CAETERVM proposita quacumque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio sedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in dictum productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ, vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic videtis, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatæ proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis;

portionis bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato. Nam ter tria faciunt 9. denominatorem nonuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At uero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito et sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3 ter posito sic. 3. 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exoritur ex denominatore quater posito; Quintuplicata ex eodem quinquies posito, ac ita multiplicato, &c. Quo circa proportio duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapit naturam quodam modo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur. Proportio vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habet conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportio, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interiiciuntur, obtinet naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodū etiam cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmedicos, qui Algebra regulam exposuerunt, &c.

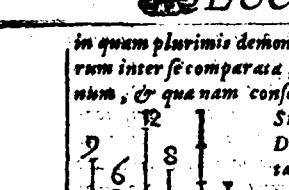
XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes uero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionū esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologas ve, dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus

in

in quam plurimis demonſtrationibus, quæ nam latera figurarum inter ſe comparata, antecedentia debeant eſſe proportionum, & quæ nam conſequentia, ceu in 6. lib. perſpicuum fiet.



Si igitur eſt proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, ſimilis quantitati C; & B, ſimilis ipſi D; propter ſimilitudinem enim proportionum, neceſſe eſt, utramq; magnitudinem antecedentem vel æqualem eſſe utrique conſequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem; Aliàs non haberet veraque antecedens ad utranque conſequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propoſitis, in quibus antecedentes maiores ſunt eodem modo conſequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ ſunt, quam F, & G, vt conſtat. Atque hanc ob cauſam Euclides in defin. 6. & 8. tuſſit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc eſt, antecedentium: Item alia æque multiplicia ſecundæ, & quartæ magnitudinũ, nempe conſequentium. Hæ enim ſimiles ſunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione conſtat; in magnitudinibus uero non proportionalibus diſſimiles.

ORONTIVS, *& nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus uarie inter ſe conferri poſſe & antecedentes magnitudines, & conſequentes; ceu in ſequentibus definitionibus patebit. Verum ſi verba definitionis diligentius ponderentur, & uſus eiuſdem in 6. lib. cõſideretur, noſtram expoſitionem huic anteferendam eſſe, nemo dubitabit.*

XII.

ALTERNA ratio, eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

EXPLICAT *hic quoſdam modos argumentandi ex proportionibus,*

portionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, uel disiuncta proportionalitas: Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique uocatur proportio ex æqualitate, seu aqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandē esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterum in dicto modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdē generis, ut inter binas vt ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur; Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, ut linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, ut perspicuum est ex defin. 5.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentē, uelut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, ut D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad

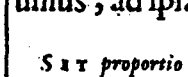
B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, uel e contrario, erit quoq; B, ad A, ut D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse unius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C.



XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

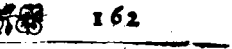
SIT proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius A C, nempe antecedentis cum consequente, ad B C, consequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum consequente, ad E F, consequentem; Dicitur huiusmodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, ut D F, ad E F. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.



XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, quæ proportio est totius A B, ad C B, ea est totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens cõsequentem superat, ad C B, consequentem, ut D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hæc porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.



XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad F E; igitur ita etiam erit eadẽ A B, ad A C, excessum, quo cõsequentem superat antecedens, ut D E, ad D F; Dicemur proportionem conuertere. Vnde sic fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionẽ rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus propos. 19. huius lib.

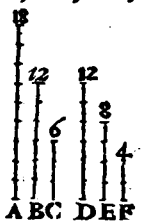


XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per ſubductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidē D, E, F, ſintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc eſt, A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Si igitur infera-



tur, propterea eam eſſe proportionem A, ad C, primæ ad ultimam in primis magnitudinibus, quæ eſt D, ad F, primæ magnitudinis ad ultimā in ſecundis magnitudinibus; dicetur huiuſmodi argumentandi formula deſumpta ex æquo, ſiue ex æqualitate, in qua ſcilicet extremæ magnitudines, ſubductis mediis, colligunt habere unā, eandemq; inter ſe proportionem, ceu in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vna quidem, ſumendo binas ac binas magnitudines in eadem proportione, atque ordinate procedendo; altero vero, cum ordo inuertitur; fit ut duplex ſit proportio ex æqualitate, non quidem ratione proportionis extremorum, ſed ratione proportionis magnitudinum intermediarum. Id quod clariſſime duæ ſequentes definitiones explicant.

XVIII.

ORDINATA proportio eſt, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; fuerit etiam, ut conſequens ad aliud quidpiam, ita conſequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rurſus vt B, conſequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, conſequens ad F, aliud quidpiam; Ideoque concludatur A, ad C, vt D, ad F; Di-

F; dicetur talis modus argumentandi ex æqualitate, ordinata proportio, quod in utrisque magnitudinibus idem ordo in proportionibus seruetur. Hic autem modus demonstratur propos. 22. huius lib.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

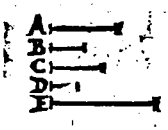
Sit, ut ex æqualitate colligatur eadem proportio extremorum, ordo in proportionibus perturbetur, ita ut dicatur, quēadmodum A, ad B. Ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B. consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinib⁹ aliud quidpiā ad E, antecedentē magnitudinē; nuncupabitur huiusce modi mod⁹ argumentandi ex æqualitate, Perturbata proportio, & nō seruetur idē ordo in proportionib⁹ magnitudinum. Consecutionem uero hanc ualidam esse, ostendetur propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quā ordinata, semper infert ex æqualitate eandē extremorum proportionem, etiamsi plures magnitudines ponantur, quam tres, ceu propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.



VTVNTVR Euclidis interpretes hoc in libro, & in alijs, ubi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate

quodam, quod ut hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

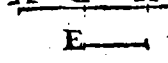


VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Non enim ex hoc absurdum aliquod consequitur, quamuis ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, quum sane esse posse, dubitandū non est.

I. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quã multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines A B, C D, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex A B, ipsius E, uel C D, ipsius F. Cum enim A B, C D, sint æque multiplices ipsarum E, & F; si A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipsi E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipsi F, æquales; erũt magni-



magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, erunt A G, C I, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt G H, & I K, simul, æquales ipsis E, & F, simul; Nec non H B, & K D, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in A B, uel F, in C D, continetur, toties & E, F, simul, in A B, C D, simul comprehendentur: Ideoque, quam multiplex est A B, ipsius E, tam sunt multiplices A B, C D, simul, ipsarũ E, & F, simul. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum. 2. *pron.*

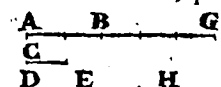
SCHOLION.

Hoc idem demonstrabitur vniuerse in omni genere proportionis, propos. 12.

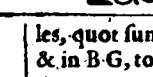
THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cũ quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cũ B G, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quã multiplex est D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartę. Cum enim A B, D E, sint æque multiplices ipsarum C, F; erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales,



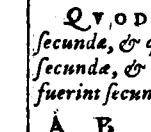
les, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erũt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H; erunt totę multitudines A G, D H, æquales. Quare toties cõprehẽditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.



2. *pron.*

SCHOLION.

Quod si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ: Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima, & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota D H, (tertia ac sextæ) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinũ æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, cẽu perspicuum est in proposito schemate. Si uero tam primæ & tertiæ, quam quintæ, & sextæ æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius exibit, primam & quintam simul; atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.



Hoc quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis uniuerse propos. 24.

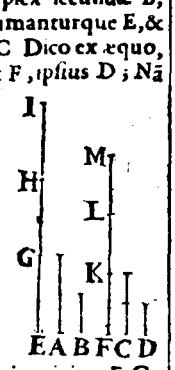
THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque

atque tertia quartæ; ſumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumanturque E, & F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo, tam multiplicem eſſe E, ipſius B, quam eſt F, ipſius D; Nã cum E, & F, ſint æque multiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, ut in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam uero E G, F K, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æque multiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt G H, K L; Itẽ H I, L M, æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam eſt multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F K, tertia quartæ D; Item G H, quinta tam multiplex eſt eiuſdem, ſecundæ B, quam multiplex eſt K L, ſexta eiuſdem quartæ D; Erit & E H, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F L, compoſita ex tertia & ſexta, quartę D. Rurſus cum ſit E H, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt F L, tertia quartæ D; ſit autem & H I, quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt L M, ſexta multiplex quartæ D; Erit & E I, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt F M, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c.



2. quinti.

Quod oſtendendum erat.

SCHO-

SCHOLION.

OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ binæ sumptæ eandem habent proportionem.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quāuis multiplicationem. Dico quoque esse ut E, multiplicem primæ ad G, multiplicē secundæ, ita F, multiplicem tertiæ ad H, multiplicem quartæ. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, primæ ipsius A, secundę, quam F, tertiæ ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primę ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; sumptæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ; Item L, M, æque multiplices secundæ & quar-



3. *quinti.*

& quartæ; fit ut ſi I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici ſecundæ, etiam K, multiplex tertiæ deficiat ab M, multiplici quartæ: & ſi I, æqualis ſit ipſi L, etiam K, ipſi M, ſit æqualis: & ſi I, excedit ipſam L, etiam K, excedat ipſam M: Idemque oſtendetur in quibuſcunque æque multiplicibus ipſarum E, & F, nec non magnitudinum G, & H. Ita que cum I, & K, ſint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices ſecundæ G, & quartæ H; oſtenſumque ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex ſecundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque eſſe M, multiplici quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: Erit, ut E, prima ad G, ſecundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad ſecundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonſtrandum. *6. defin. 5.* *6. defin. 5.*

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi quatuor quantitates fuerint proportionales, eaſdem & contra, ſeu inuerſa ratione, proportionales eſſe. Cum enim, propterea quod ſit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam, oſtenſum ſit, ſi I, multiplex primæ minor fuerit quam L, multiplex ſecundæ, uel æqualis, uel maior, etiam K, multiplicem tertiæ minorem eſſe, uel æqualem, uel maiorem M, multiplici quartæ; Perſpicuum eſt, ſi e contrario L, maior fuerit quam I, uel æqualis, uel minor, etiam M, maiorem fore, uel æqualem, uel minorem, quam K, ſecundum quamcunque multiplicationem ſint ſumpta hæc æque multiplicia. Nam ſi utraque I, K, minor eſt quam utraque L, M; erit contra utraque L, M, maior quã I, K, &c. Quare erit ut B, prima ad A, ſecundam, ita D, tertia ad C, quartam. *6. defin. 5.*

SCHOLION.

Orontius *quartum hoc Theorema ſic conatur demonſtrare. Poſtquam ex 3. propoſ. huius lib. oſtendit I, K, eſſe æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, eſſe æque multiplices magnitudinum B, D, infert ſtatim per conuerſum 6. definitionis, iuxta ſuam expoſitionem, ita eſſe I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonſtratio admodum eſt mutiloſa, tum quia ſecundum hunc ſenſum demonſtra*

tur

tur conuersum 6. definitionis, per conuersum eiusdem, æque idcireo idem per idem, quod est absurdum; tum etiam, quia eodem modo statim a principio licuisset illi inferre, sic esse, per conuersum 6. definitionis E, ad G, ut F, ad H. sine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda est ergo huiusce modi demonstratio, una cum expositione 6. definitionis, ut supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, uel æqualis, uel maior, etiam K, minorem esse, uel æqualem, uel maiorem, quam M: quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, si sumantur, prout inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, ut est F, tertia ad H, quartam.

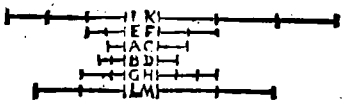


CAETERVM non uidetur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis mathematicis ualde familiare, quamuis a nemine, quod sciam, sit demonstratum. Videlicet.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad secundam, & quartam magnitudines, eandem habebunt rationẽ: Necnon æque multiplices secundæ & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra eandem rationẽ habebunt secunda & quarta, ad æque multiplices primæ & tertiæ; Nec non prima & tertia, ad æque multiplices secundæ & quartæ.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, sumanturque F, & F, æque multiplices ipsarum A, & C; Item G, & H, æque multiplices ipsarum B, & D. Dico ita esse E, ad B, ut F, ad D; Item G, ad A, ut H, ad C; Et e conuerso,

uerſo, ita eſſe B, ad E, ut D, ad F; Item A, ad G, ut C, ad H. Sumantur enim rurſus ipſarum E, F, æque multiplices I, K; Item ipſarum G, H, æque multiplices L, M. Erũt igitur ex æquo, ut ante probatum eſt,



3. quinti.

I, K, æque multiplices ipſarum A, C; Item I, M, ipſarum B, D, æque multiplices. Quocirca ſi I, multiplex primæ A, deficit a G, multiplici ſecundæ B, etiam K, multiplex tertiæ C, deficiet ab H, multiplici quartæ, &c. Igitur erit ut F, prima ad B, ſecundam, ita F, tertia ad D, quartam. Eodem modo oſtendetur, ut eſt G, ad A, ita eſſe H, ad C; Atque idcirco erit conuertendo, ut B, ad E, ita D, ad F; Item ut A, ad G, ita C, ad H,

6. defin. 5.

6. defin. 5.

Ex quo conſtat modus argumentandi, quo frequentiſſime utuntur Geometræ, maxime Apollonius Pergæus, Archimedes, Theon, &c. Videlicet; Vt eſt A, ad B, ita eſt C, ad D; ergo ut duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipſius A, utpote E, ad B; ita quoque erit duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipſius C, quale eſt F, ad D. Item ut eſt A, ad B, Ita eſt C, ad D; igitur ut A, ad duplum uel triplum, uel quadruplum, &c. ipſius B, nempe ad G; ita erit quoque C, ad duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipſius D, nimirum ad H.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

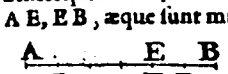
Ita multiplex ſit tota A B, totius C D, ut eſt multiplex A E, ablata ablatæ C F: Dico reliquam E B, ita eſſe multiplicem reliquæ C D, ut eſt tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuſpiam magnitudinis uidelicet

delicet ipſius GC, ut eſt A E, ipſius C F. Quoniam igitur A E, E B, æque ſunt multiplices ipſarum C F, G C; erit

1. *quinti.*

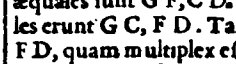


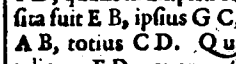
tota A B, totius G F, ita multiplex, ut A E, ipſius C F, hoc eſt, omnes omnium, ut una unius. Sed tam multiplex ponitur A B, ipſius C D, quam eſt multiplex A E, ipſius C F; Igitur A B, tam eſt multiplex ipſius G F, quam ipſius C D; atque idcirco æquales ſunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipſius F D, quam multiplex eſt ipſius G C. Sed ita multiplex poſita fuit E B, ipſius G C, ut A E, ipſius C F, hoc eſt, ut tota A B, totius C D. Quare tam multiplex eſt reliqua E B, reliquæ F D, quam eſt tota A B, totius C D: quod eſt propoſitum.



ALITER. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, ut ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquę F D, eſſe ſic multiplicem, ut eſt tota toti. Poſita enim G A, ita multiplici ipſius F D, ut eſt A B, ipſius C F; erit tota G E, ſic multiplex totius C D, ut A E, ipſius C F. Sed ita quoque multiplex eſt A B, eiuſdem C D, ut A E, ipſius C F, ex hypotheſi: Aequę multiplices ſunt igitur G E, A B, ipſius C D; atque adeo inter ſe æquales. Quare, dempta communi A E, æquales erunt G A, E B; Ideoque æque multiplices ipſius F D, cum G A, ſit multiplex poſita ipſius F D: Atqui ita eſt multiplex poſita G A, ipſius F D, ut A B, ipſius C D; Igitur & E B, reliqua ſic erit multiplex ipſius F D, reliquæ, ut A B, tota totius C D; quod eſt propoſitum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonſtrandum.

1. *quinti*





SCHOLION.

VNIVERSE *idipſum demonſtrabitur propos.* 19. *in magnitudinibus cuiuſcunque proportionis, &c.*

THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

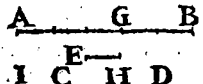
SI duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æque multiplices: & reliquæ eiſdē aut æquales ſunt, aut æque ipſarum multiplices.

SINT AB, CD, æque multiplices ipſarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut eſſe æquales eiſdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, ſit multiplex ipſius E, & ablata quoque AG; erit reliqua GB, uel æqualis ipſi E, uel eius multiplex, alias inęqualis, uel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod eſt abſurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipſi E; Dico etiam HD, ipſi F, eſſe æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipſi F. Et quia prima AG, tam eſt multiplex ſecundæ E, quam CH, tertia quartæ F; & quinta GB, æqualis eſt ſecundæ E, ſicut & CI, ſexta æqualis eſt quartę F; erit AB, prima cum quinta, ita multiplex ſecundæ E, ut HI, tertia cum ſexta, quartæ F; Atqui CD, ipſius F, erat quoque tam multiplex quã AB, ipſius E; Aeque multiplices igitur ſunt HI, CD, ipſius F; Ideoque æquales inter ſe. Quare dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, poſita ſit æqualis ipſi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. quod eſt propoſitum.



2. *quinti.*

SIT ſecundo GB, multiplex ipſius E; Dico ita quoque eſſe multiplicem HD, ipſius F. Poſita namque CI, ita multiplici ipſius F, ut eſt multiplex GB, ipſius E, erit, ut prius AB, ita multiplex ipſius E, ut HI, ipſius F. Quare iterum æquales erunt HI, CD, atque adeo reliquæ CI, HD;



2. *quinti.*

HD; sed CI, est ita multiplex ipsius F, ut GB, ipsius E, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

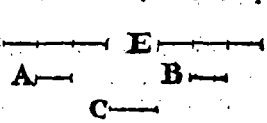
SCHOLION.

HOC quoque ostendemus uniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C; Item C, ad A, & B. Sumantur D, E æque multiplices ipsarũ æqualium A, B, eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, utcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sũt, fit ut utraque uel minor sit, quam F, uel æqualis, uel maior, iuxta quãcunque multiplicationẽ id fiat. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplici secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinũ, &c.) uel æquales, uel maiores; Erit ea proportio primæ A, ad C, secundã, quæ tertiæ B, ad C, quartam. Eodem pacto ostendemus F, uel minorem esse utraque D, E, uel utrique æqualẽ, uel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat a D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartę B; uel una æqualis sit, uel maior; Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartã B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi



6. defin. 5.

5. defin. 5.

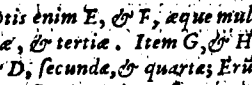
per

per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit esse A. ad C, ut B, ad C, erit contra C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem; Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonstrationem constat, utranque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed solum, cùm illæ sint æquales, utramque esse uel minorem, uel æqualem, uel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt.

EODEM fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ, & quartæ; Erit tam E, & F, inter se æquales, quam G, & H, inter se, ut constat ex iis, quæ in 1. lib. docuimus, cum axioma sextum explicaremus; quod E, & F, sint æqualium A, & B, æque multiplices, necnon G, & H, æque multiplices quoque æqualium C, & D. Quare si E, multiplex primæ deficit a G, multiplici secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplici quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam, ex defin. 5. Quod est propositum.

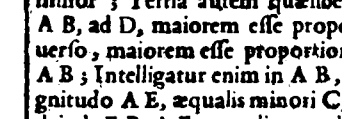


THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem ha-

bet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorē.

SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At e conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad A B; Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, ut sit reliqua E B; Vtraq; deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed uel maior, uel æqualis. Quoniam igitur duæ F G, GH, æque multiplices sunt duarū



1. quinti. B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, ut H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & A E: Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proxime maior sit, quam H G, nempe dupla. Quod si dupla, maior non fuerit quam H G, sumatur tripla, uel quadrupla, &c. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quam H G, (alias I K, non erit multiplex ipsius D, proxime maior quam H G; sed & I L, maior erit quam H G) & idcirco H G, erit uel æqualis ipsi I L, uel maior. Et quia F G, maior est posita quam D; L K, uero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K; Est autem H G, non minor, quā I L, ut demonstratū est, sed uel æqualis, uel maior: Erit igitur tota F H, maior quam I K. Itaq; cum F H, H G, sint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C; Atque I K, multiplex ipsius D, quę instar est secundæ & quartæ; sit autē F H, multiplex primæ, maior quā I K, multiplex secundę; At H G, multiplex tertiæ non sit maior, quā I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi (sumpta enim est I K, multiplex maior quā H G) erit maior proportio A B, primę ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

8. defin. 5.

QVONIAM uero e contrario I K, multiplex primæ D, (ponitur

D, (ponitur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda, & A B, quarta) maior est quam H G; multiplex secundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non est, quam F H, multiplex quartæ A B, immo minor, cum F H, maior sit, quam I K, ut ostensum est; Erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum. 8. *defin.* 5.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; sunt inter se æquales.

HABEANT primo A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera nempe A, maior & B, minor. Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quã B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat secundo C, eandem proportionem ad A, & B; Dico adhuc A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.



8. *quinti.*

8. *quinti.*

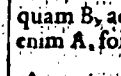
THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem

maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primo A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, haberent A, & B, eandem proportionem ad C; Si autem A, minor esset, quam B, haberet B, maior ad C; maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis uel minor quam C, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse, quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque uero B, maior erit quam A; alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorē: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quā A; quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

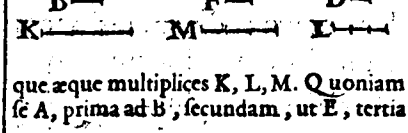
7. *quinti.*
8. *quinti.*
7. *quinti.*
8. *quinti.*



11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, E, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut E, tertia ad F, quartam; fit,

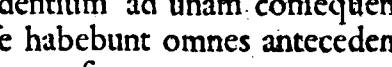


fit, ut si G, multiplex primæ deficit a K, multiplici secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, uel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, uel maior: sed (ut eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, uel æqualis, uel maior, est quoque H, minor, quam L, uel æqualis, uel maior, propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam; Quare si G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplici secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplici quartæ D; Et si G, æqualis est, uel maior quam K, etiam H, æqualis erit, uel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque æque multiplicibus. Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum. 6. defin. 5. 5. defin. 5. 6. defin. 5.

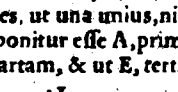
THEOR. 12. PROPOS. 12. 12.

SI sint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D, & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentiũ, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium, & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, ut una unius nempe ut G, 1. quinti.



ipsius A ; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipsius B. Quoniam uero ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut E, tertia ad F, quartam; sit ut si G, *6. defin. 5.* multiplex primæ deficit a K, multiplici secundæ, deficiat quoq; H, multiplex tertiæ ab L, multiplici quartæ, & I, ab M; Et si G, æqualis est ipsi K, uel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L; & I, ipsi M, uel maior. Quare si G, minor est, uel æqualis, uel maior quam K, erunt & omnes G, H, I, omnibus K, L, M, minores, uel æquales, uel maiores. Quocirca ut est A, prima ad B, secundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. *6. defin. 5.* Si sint itaq; magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.



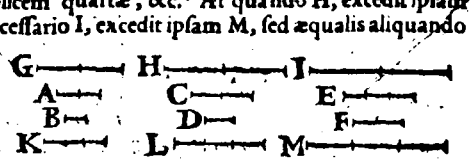
13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, *6. defin. 5.* quartam; fit ut si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam

L, mul-

I, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, aliquando minor, qđ maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat.



3. *defin.* 5.

8. *defin.* 5.

SCHOLION.

Quod ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E, ad F, maior quam C, ad D; ſit ut ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, uel ei æqualis ſit. Sed ſi H, deficit ab L, uel ei æqualis eſt, etiam G, deficiet a K, uel ei erit æqualis, eo quod ponatur C. prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario G, excedet ipſam K; atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F, quod eſt propoſitum.

8. *defin.* 5.

8. *defin.* 5.

8. *defin.* 5.

Eodem modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

A multo maior

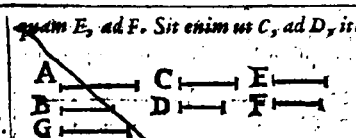
Quod ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundã, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

multo maior

~~*Sit proportio A, ad B, maior, quã C, ad D; & C, ad D, maior, quã E, ad F. Dico proportionem A, ad B, maiorem quoque eſſe,*~~

Hæc ab hoc loco ſecundum ſubaudi, uſq; ad finẽ ſchol.; uide delenda ſunt.

quam E, ad F. Sit enim ut C, ad D, ita G, ad B, ita ue A, ad B, maiorem habeat rationem, quam G, ad B. Quo posito, erit ratio G, ad B, maior quam E, ad F; Cum igitur ratio A, ad B, maior sit quam G, ad B; multo maior erit ratio A, ad B, quam E, ad F.



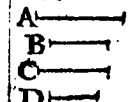
13. quinti.

IAM vero, si proportio A, ad B, minor fuerit, quam C, ad D; & C, ad D, minor, quam E, ad F; demonstrabimus, per ea, quæ in hoc scholio ostensa sunt, proportionem G, ad B, minorem esse quam E, ad F. Cum ergo proportio A, ad B, minor sit quam G, ad B; erit multo minor proportio A, ad B, quam E, ad F.

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima uero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si uero minor, & minor erit.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D; Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D; Si denique A, minor fuerit quã C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primo A, maior quã C, eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, ut ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam; Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sex-



8. quinti.

13. quinti.

B, sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D, quod est propositum. 10. *quinti.*

SIT secundo A, æqualis ipsi C, eritque idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; Ideoque æquales erunt B, & D, quod est propositum. 7. *quinti.* 11. *quinti.* 9. *quinti.*

A——
B——
C——
D——

SIT tertio A, minor quam C, eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem: Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam; Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandē habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum. 8. *quinti.* 13. *quinti.* 10. *quinti.*

A——
B——
C——
D——

THEOR. 15. PROPOS. 15. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æque multiplices C D, & E F. Dico ita esse, C D, ad E F, ut A, ad B. Cum enim C D, & E F, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidat ergo C D, in partes C G, G H, H D, æquales ipsi A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipsi B; eritque C G, ad E I, ut A, ad B, ex scholio propos 7. huius lib. quod C G, & A, æquales inter se sint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K; & H D, ad K F, ut A, ad B; Ideoque

C G H D E I K F
A—— B——

11. quinti. B; Ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionē. Quo circa ut CG, ad EI, hoc eſt, ut A, ad B, ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, ſimul, ad omnes EI, IK, KF, ſimul, quod eſt propoſitum. Partes itaque cū pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonſtrandum.

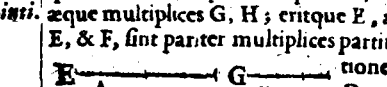


12. quinti.

16. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & uiciſſim proportionales erūt.

SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uiciſsim, ſeu permutando, eſſe quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim ipſarum A, B, æque multiplices E, F; Item ipſarum C, D, æque multiplices G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum E, & F, ſint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F; & C, ad D, ſint eædem proportioni A, ad B; erunt & ipſæ inter ſe eædem. Rurſus quia proportiones E, ad F; & G, ad H, eædem ſunt proportioni C, ad D, erunt & ipſæ eædem inter ſe, hoc eſt, ut eſt E, prima ad F, ſecundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare ſi E, maior eſt quam G, uel æqualis, uel minor, erit quoque F, maior quam H, uel æqualis, uel minor, in quacunque multiplicatione. Eſt igitur A, prima ad C, ſecundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, ſint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, ſecundæ, & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, uel una æquales ſint, uel una excedant, &c.) quod eſt propoſitum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & uiciſſim proportionales erunt. Quod oſtendendum erat.



15. quinti.

11. quinti.

14. quinti.

6. defin. 5.

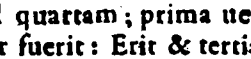
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc & illud demonstrabitur.

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sit enim ut A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D; & si æqua-

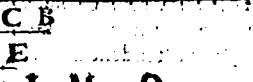


lis, æqualem; & si minor, minorem. Erit enim permutando, ut A, ad C, ita B, ad D. Quare si A, maior est, quam B, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum. 16. quinti. 14. quinti.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 17.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, AB, ad CB, ut DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiatur eodem ordine GH, HI, KL, LM, eritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC, hoc est



1. quinti.

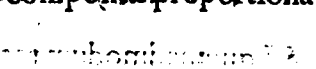
hoc eſt, ut K L, ipſius D F; ſed ut eſt multiplex K L, ipſius
1. quinti. D F, ita quoque multiplex eſt K M, ipſius D E. Aeque
multiplices ergo ſunt G I, K M, ipſarum A B, D E: Capian
tur rurſus I N, M O,
æque multiplices ipſarũ
C B, F E. Quoniam igi
tur ſic eſt multiplex H I,
prima ſecundæ C B, ut
L M, tertia quartæ F E;
Itẽ ita eſt multiplex I N,
quinta ſecundæ C B, quã
M O, ſexta quartæ F E;
2. quinti. erit & H N, ſic multiplex ſecundæ C B, ut L O, multiplex
eſt quartæ F E. Itaque cum ſit A B, prima ad C B, ſecun
dam, ut D E, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſint æque
multiplices primæ ac tertiæ; Item ſecundæ & quartæ; ſit
ut ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici
ſecundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab
L O, multiplici quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis; & ſi ex-
cedit, excedat. Deficiat nunc G I, ab H N, & K M, ab
L O. Ablatis ergo communibus H I, L M, deficiet quoq;
G H, ab I N, & K L, ab M O. Quod ſi G I, æqualis fue
rit ipſi H N, & K M, ipſi L O, erit & G H, æqualis ipſi I N,
& K L, ipſi M O. Et ſi G I, exceſſerit ipſam H N, & K M,
ipſam L O; excedet quoque G H, ipſam I N, & K L, ipſam
M O. Quam ob rem cum G H, K L, ſumptæ ſint æque
multiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O,
æque multiplices ſecundæ C B, & quartæ F E, oſtenſumq;
ſit, æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus
6. defin. 5. ſecundæ & quartæ uel una deficere, uel una æquales eſſe,
uel una excedere; Erit A C, prima ad C B, ſecundam, ut
D F, tertia ad F E, quartam: quod eſt propoſitum. Si com
poſitæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c.
Quod oſtendendum erat.

18. THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuiſæ magnitudines ſint proportio
nales,

nales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

SINT diuisæ magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales, hoc est, A C, ad C B, ut D F, ad F E; Dico eas etiam compositas proportionales esse, ut A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, ut prius, ipsarum A C, C B, D F, F E, æque multiplices G H, H I, K L, L M; Item ipsarum C B, F E, aliæ æque multiplices I N, M O; eruntque rursus G I, K M, ipsarum A B, D E, æque multiplices. Item H N, L O, ipsarum C B, F E, ceu in præcedenti Theoremate ostensum fuit. Quoniam uero positum est A C, prima ad C B secundam, ut D F, tertia ad F E, quartam; sumptæque sunt æque multiplices primæ ac tertiæ, Item secundæ & quartæ; fit ut si G H, multiplex primæ deficit ab I N, multiplici secundæ, etiam K L, multiplex tertiæ deficiat ab M O, multiplici quartæ; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc G H, ab I N, & K L, ab M O: additis igitur communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Quod si G H, æqualis fuerit ipsi I N, & K L, ipsi M O, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O: Et si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O, excedet quoque G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici secundæ C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplici quartæ F E; & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; erit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam: quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.



1. quinti.

2. quinti.

6. defin. 5.

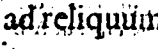
6. defin. 5.

THEOR.

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

SIT tota A B, ad totam C D, ut ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam F D, ut est tota A, ad totam C D. Cum enim sit A B, ad C D, ut A E, ad C F, erit & permutando A B, ad A E, ut C D, ad C F: Diuidendo ergo erit E B, ad A E, ut F D, ad C F: quare permutando rursus erit E B, ad F D, ut A E, ad C F, hoc est ut tota A B, ad totam C D, cum posita sit A B, ad C D, ut A E, ad C F; Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.



16. quinti. 17. quinti 16. quinti.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur a conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT enim A B, ad E B, ut C D, ad F D; Dico per conuersionē rationis esse quoque A B, ad A E, ut C D, ad C F; Cum enim sit A B, ad E B, ut C D, ad F D; erit permutando A B, tota ad C D, totam ut E B, ablata ad F D, ablatam: ut igitur tota A B, ad totā C D, ita A E, reliqua ad C F, reliquam. Permutando ergo rursus erit A B, ad A E, ut C D, ad C F: quod est propositum.

16. quinti. 19. quinti. 16. quinti.

20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

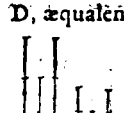
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quã tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sex-

ta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

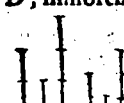
SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C; ut E, ad F, sit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita D, ad E; maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B; At ut C, ad B, ita F, ad E; (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo ut C, ad B, ita F, ad E,) maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E; Quare D, maior erit, quam F; quod est propositum. 8. quinti. 13. quinti. 10. quinti.



SIT secundo A, æqualis ipsi C; Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, erit A, ad B, ut C, ad B; est autem ut A ad B, ita D, ad E; Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B; At ut C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, uti prius. Quare erit D, ad E, ut F, ad E; Ideoque æquales erunt D, & F; Quod est propositum. 7. quinti. 11. quinti. 9. quinti.



SIT tertio A, minor quam C; Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; sed ut A, ad B, ita D, ad E; Minor ergo proportio est D, ad E, quã C, ad B; Est autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E; Igitur minor est proportio D ad E, quam F ad E; propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum. 8. quinti. 10. quinti.



THEOR.

21. THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quã tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; Sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E; Sit autem primo A. prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita E, ad F: Maior ergo proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam uero ut B, ad C, ita D, ad E, erit conuertendo ut C, ad B, ita E, ad F. Quare maior erit proportio E, ad F, quam E, ad D; Ideoque maior erit D, quam F; quod est propositum.

8. quinti.



4. quinti.

10. quinti.

SIT secundo A, ipsi C, æqualis; Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, erit A, ad B, ut C, ad B; sed ut A, ad B, ita est E, ad F: Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F; est autem, ex inuersa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, ueluti prius. Igitur erit ut E, ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit: quod est propositum.

7. quinti.



9. quinti.

SIT tertio A, minor, quam C; Dico & D; minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; Vt autem A, ad B, ita E, ad F: minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B.

8. quinti.

Quoniam

Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione vt C, ad B, Ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F; quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



10. *quinti.*

THEOR. 22. PROPOS. 22.

22.

SI sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunq; magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, sitq; A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F; Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; erit quoq; G, multiplex primæ ad I, multiplicem secundæ, vt H, multiplex tertiæ ad K, multiplicem quartæ. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secūdam, vt E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ ad L, multiplicem secundæ, vt K, multiplex tertiæ ad M, multiplicem quartæ.



4. *quinti.*

Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur, sit vt si G, superat ipsam L, superet quoque H, ipsam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaq; cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiāt vna ab L, M, æquemultiplicibus secūdæ C, & quartæ F, vel vna æqua

20. *quinti.*

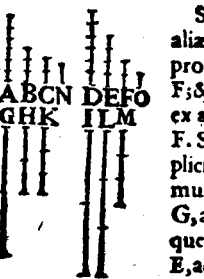
6. defin. 5. les ſint, vel vna excedãt, in quacũq; multiplicatione; Erit A, prima ad C, ſecũdã vt D, tertia ad F, quartã. qđ eſt ꝓpoſitũ.



Quod ſi fuerint plures magnitudines tribus, ita vt ſit etiã C, ad N, vt F, ad O; Dico adhuc eſſe vt A, ad N, ita D, ad O. Cũ. n. iã ſit oſtẽſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, vt D, ad F; ponatur aũt C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadẽ rõne ſumũtur: ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtẽſa, rurſus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodẽq; modo idẽ oſtẽdetur in quinq; magnitudinib⁹, per quatuor; ſicut id in quatuor demõſtratũ fuit, per tres; Et ſic de pluribus. Itaq; ſi ſint quotcũq; magnitudines, &c. Quod erat oſtendẽdũ.

23. THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI ſint tres magnitudines, aliæq; ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earũ proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, ſitq; perturbata earum proportio, hoc eſt, ſit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoq; ex æqualitate eſſe vt A, ad C, Ita D, ad F. Sumptis. n. ipſarũ A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Itẽ ipſarũ C, E, F, æquemultiplicib⁹ K, L, M; Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, ſint ipſarũ A, B, æquemultiplices; At vt A, ad B, ita eſt E, ad F: Igitur vt G, ad H, ita eſt E, ad F; Sed vt E, ad F, ita eſt quoq; L, ad M, qđ

15. quinti.
11. quinti.
15. quinti.

L, M,

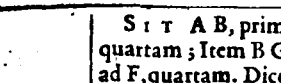
L,M,ſint ipſarũ E,F,æquemultiplices. Igitur erit vt G,ad H, ita L,ad M. Rurſus quoniã eſt B,prima ad C, ſecũdã, ut D, tertia ad E,quartã;erit quoq; ut H,multiplex primæ ad K, multiplicẽ ſecundæ,ita I,multiplex tertiæ ad L,multiplicem quartæ. Quia igitur ſunt tres magnitudines G,H,K,& aliæ tres I,L,M,quæ binæ in eadẽ rõne ſumũtur,eſtq; earũ proportio perturbata; fit ut ſi G,ſuperat ipſã K, ſuperet quoq; I,ipſam M; & ſi æqualis,æqualis; & ſi deficit,deficiat. Itaq; cũ G,I,æquemultiplices primæ A,& tertiæ D,a K, & M, æquemultiplicibus ſecũdæ C,& quartæ F, uel una deficiant, uel una æqualia ſint, uel una excedant; erit ut A, prima ad C,ſecundam, ita D, tertia ad F, quartam. 5. quinti. 21. quinti. 6. def. 5.

QVOD ſi fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata,ut ſi fuerit A, ad B, ut F, ad O; & B, ad C, ut E, ad F; & C, ad N, ut D,ad E. Dico adhuc eſſe ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus magnitudinibus, eſſe A, ad C, ut E, ad O; Ponatur autem eſſe ita C, ad N, ut D, ad E; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quę binæ in eadem ſumuntur proportione, eſtq; perturbata earum proportio: Ergo rurſus ex æqualitate in tribus magnitudinibus oſtenſa, erit ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem oſtendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, ſicut id in quatuor fuit demonſtratum, per tres; Et ſic de pluribus. Itaque ſi ſint tres magnitudines, &c. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 24. PROPOS. 24. 24.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta, ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta, ad quartam.

SIT A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt

4. quinti. 

C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniã igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H; erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H: componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rursus sit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

22. quinti.
18. quinti.
22. quinti.

SCHOLION.

EODEM *fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theorema sextum huius lib. demonstrauit in æquemultiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.*

Si duę magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionẽ, & detractæ quędam habeant ad easdem eandẽ proportionẽ: & reliquæ ad easdem eandẽ proportionẽ habebũt.

HABEANT A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detracta A B, D E, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem, ita vt sit quoque A B, ad C, vt D E, ad F; Dico & reliquas B G, E H, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse B G, ad C, vt E H, ad F. Cum enim sit vt A B, ad C, ita D E, ad F; erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur est A G, ad C, vt D H, ad F; & C, ad A B, vt F, ad D E; erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H, ad D E. Diuidendo ergo erit vt B G, ad A B, ita E H, ad D E,

4. quinti.
22. quinti.
17. quinti.

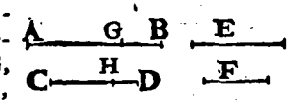
Itaq;

Itaque cum rursus sit B G, *ad* A B, *vt* E H, *ad* D E; *&* A E, *ad* C, *vt* D E, *ad* F; *eris ex aequali* B G, *ad* C, *vt* E H, *ad* F. *Quod est propositum.* 22. *quinti.*

THEOR. 25. PROPOS. 25. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT A B, ad C D, vt E, ad F, sitq; A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, simul esse maiores duabus C D, & E, simul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, aequalis ipsi E; & ex C D, alia C H, aequalis ipsi F; Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc est, vt A B, ad C D. Quare cum sit tota A B, ad totam C D, vt ablata A G, ad ablatam C H; erit quoq; vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D. Est autem A B, (cum sit omnium maxima) maior, quam C D: Igitur & G B, maior erit quam H D. Quoniam vero A G, & E, aequales sunt; si ipsis addantur aequales F, & C H; fient A G, & F, simul aequales ipsis E, & C H, simul. Additis igitur inaequalibus G B, & H D, fient A B, & F, simul maiores quam E, & C D, simul, cum G B, sit maior quam H D. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



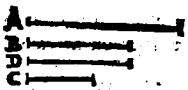
19. *quinti.*

SCHOLION.

NECESSE *est autem, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam, ceu in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt* A B, *ad* C D, *ita* E, *ad* F; *&* A B, *maior quã* E; *erit quoq;* C D, *maior quam* F. *Item quia maior est* A B, *quam* C D, *erit quoque* E, *maior quam* F. *Quod si e contrario* 14. *quinti.*

antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C. Sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumptæ enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, vt proxime demonstratum est, hoc est, quã dupla ipsius E. Quod est propositũ.

HIC finem Euclides imponit quinto libro; Verum quia Campanus, & nonnulli alij adiiciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, quæ fieri potest, breuitate demonstrare, nec non in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autẽ traduntur de magnitudinib⁹ improportionalibus, quarum prima hæc est.

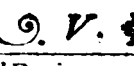
26. THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartã: habebit cõuertẽdo secũda ad primã minorẽ proportionẽ, quã quarta ad tertiam.

HABEAT A, ad B, maiorẽ proportionẽ, quã C, ad D. Dico proportionẽ B, ad A, minorẽ esse proportione D, ad C.

Intel.

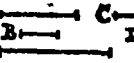
Intelligatur.n.esse E,ad B,vt C,ad D;eritq; proportio A,ad B,maior quoq; quã E,ad B; ac propterea A, maior erit quã E; Quare minor erit proportio B, ad A, maiorẽ quã B,ad E,minorẽ;Sed ut est B,ad E,ita est conuertendo D,ad C. Igitur proportio B, ad A,minor est quoque,quam D,ad C;quod est propositum.



10. quinti. 8. quinti. 4. quinti.

SCHOLION.

Eodem fere modo demonstrabimꝰ,si prima ad secũdã habueris minorẽ proportionẽ,quã tertia adquariam, cõuertendo maiorẽ esse proportionẽ secũda ad primã,quã quarta ad tertiã; dũmodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.



Sit enim minor proportio A,ad B,quã C,ad D. Dico conuertendo,B,ad A,maiorẽ habere proportionẽ,quã D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B,vt C,ad D; Eritq; proportio A, ad B,etiã minor,quã E, ad B;ac propterea A, minor erit, quã E. Quare maior erit proportio B, ad A,minorẽ,quã B,ad E, maiorẽ.Sed vt B,ad E,ita est cõuertẽdo D, ad C.Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

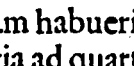
10. quinti. 8. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

27.

SI prima ad secundam habuerit maiorẽ proportionẽ,quã tertia ad quartam:Habebit quoq; vicissim prima ad tertiã maiorẽ proportionẽ, quã secunda ad quartam.

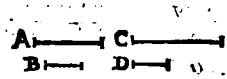
Habeat A,ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorẽ esse quoque proportionem A, ad C, quã B,ad D.Intelligatur nãq; esse E,ad B,ut C,ad D, erito; proportio A,ad B,maior etiam quã E,ad B; Ideoq; A,maior erit quam E. Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C: Quoniam vero permutando, est vt E,



10. quinti. 8. quinti.

16. quinti. ad C, ita B, ad D; (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D, quod erit propositum.

SCHOLION.



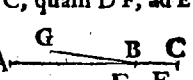
SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quã tertia ad quartam, vicissim primam ad tertiã minorẽ esse proportionẽ, quã secundæ ad quartã.

SIT namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; Ac propterea A, minor erit, quam E. Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

28. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem esse proportionem A C, ad B C, quam D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, maior quoque, quam G B, ad B C; Ideoq; A B, maiori quam G B. Addita ergo communi B C,

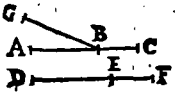


10. quinti.

BC, fiet A C, maior quam G C; maiorq; propterea erit proportio A C, ad B C, quam G C, ad B C; Sed componendo, ut est G C, ad B C, ita est D F, ad E F; (quod posita sit GB, ad B C, vt D E, ad E F,) Maior ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F, quod est propositum. 8. quinti. 18. quinti.

SCHOLION.

EADEM ratione ostendemus, si proportio primæ ad secundam minor fuerit, quam tertiæ ad quartam, minorem quoque esse proportionem primæ & secundæ simul, ad secũdam, quam tertiæ & quartæ simul, ad quartam.

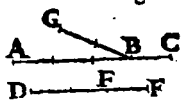


SIT minor proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo minorem esse proportionem A C, ad B C, quã D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad BC, vt DE, ad EF; eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque quam GB, ad BC; ideoq; AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi B C, fiet A C, minor, quam G C; minorq; propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita est DF, ad E F. (quod posita sit G B, ad BC, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. quod est propositum. 10. quinti. 8. quinti.

THEOR. 29. PROPOS. 29. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cũ quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

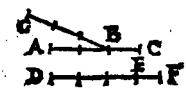
SIT maior proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. Dico & diuidendo maiorem esse proportionẽ A B, ad B C, quam

quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, ut
10. quinti. D F, ad E F; eritq; proportio A C, ad B C, maior quoque proportione G C, ad B C; ideoq; maior erit A C, quam G C. Ablata ergo cõmuni B C, maior erit A B, quam G B;
8. quinti. Ac propterea maior erit proportio A B,
17. quinti 

ad B C, quam G B, ad B C; sed diuidendo, vt est G B, ad B C, ita est D E, ad E F; (Posita namq; est G C, ad B C, ut D F, ad E F,) Igitur maior quoq; erit proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. quod est propositum.

SCHOLION.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cũ quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartã: vt eodem modo potest ostendi, si modo vocem maioris vbiq; mutes in vocem minoris, & contra, ceu in præcedentibus factum est.



30. THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad se cũdam habuerit maiorem proportionem, quam cõposita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

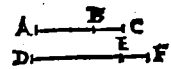
29. quinti. 

SIT maior proportio A C, ad B C, quã D F, ad E F. Dico per conuersionẽ rationis, minorẽ esse proportionẽ A C, ad A B, quã D F, ad D E. Cum enim sit A C,

A C, ad B C, maior proportio, quam D F, ad E F; erit & diuidendo maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quare conuertendo minor erit proportio B C, ad A B, quam E F, ad D E; Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad A B, quam totius D F, ad D E. Quod est propositum. 29. quinti. 26. quinti. 28. quinti.

SCHOLION.

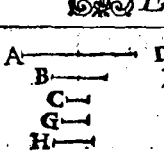
Non dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima & secundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam: dummodo vbique pro voce maioris reponamus vocem minoris.



THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiã, quam primæ posteriorum ad tertiã.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut B, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C; Ideoq; B, maior quã G. Quare maior erit pro- 10. quinti.

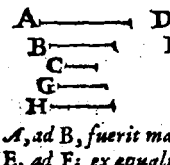


proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem; Ponitur autē proportio A, ad B, maior quam D, ad E: Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Ideoq; A, maior erit, quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C; Atqui vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F: (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) maior ergo proportio quoq; est A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

8. *quinti.*

22. *quinti.*

SCHOLION.



EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F: Vel contra, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F, ceu in proposita figura cernere licet.

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem.

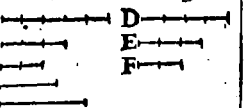
QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus.

32. THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ poste-

posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorũ ad tertiã.

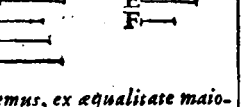
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Iem maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C; Ideoq; maior erit B, quam G. Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem: est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoq; maior erit A, quam H. Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionẽ, quam H, minor ad eandem C: At vt H, ad C, ita est ex æqualitate D ad F, (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & vt E, ad F, ita est H, ad G,) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.



10. *quinti.*
8. *quinti.*
10. *quinti.*
8. *quinti.*
23. *quinti.*

SCHOLION.

EADEM *ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F; At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel cõtra, si proportio A, ad B, maior quam E, ad F; At B, ad C, eadem, quæ D, ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F, vt in proposita figura perspicitur.*



HAVD *secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum*

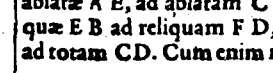
tudinũ minores fuerint, etiã extremarũ ꝓportionẽ esse minorẽ.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque vel minorem esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimã, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c.

33. THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT maior proportio totius A B, ad totam C D, quã ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B ad reliquam F D, maiorem esse, quam totius A B, ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B, ad C D, quam A E, ad C F, erit quoque permutando maior proportio A B, ad A E, quã C D, ad C F; ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quã C D, ad F D. Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D. quod est propositum.



27. quinti.
30. quinti.
27. quinti

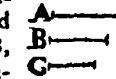
QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, ut ex modo demonstrandi liquet.

34. THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad primam posteriorũ, quam

quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autē, quam prima priorum ad primā posteriorū.

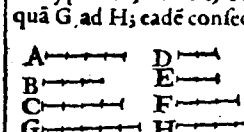
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres, D, E, F; Sit aūt maior proportio A, ad D, quā B, ad E; Itē maior B, ad E, quā C, ad F. Dico ꝓportionē ipsarū A, B C, simul, ad ipsas D, E, F, simul maiorē esse proportione C, ad F, & proportione ipsarū B, C, simul, ad ipsas E, F, simul, minorē vero proportione A, ad D. Cū.n. maior sit proportio A, ad D, quā B, ad E; erit permutando maior A, ad B, quā D, ad E. Igitur cōponēdo maior erit proportio ipsarū A, B, simul ad B, quā ipsarū, D, E, simul ad E: ꝓmutādo ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul quā B, ad E. Itaq; cū tota A, B, ad totā D, E, maiorē habeat ꝓportionē, quā ablata B, ad ablatā E; habebit quoq; reliqua A, ad reliquā D, maiorem ꝓportionē, quā tota A, B, ad totā D, E. Eadē rōne, maior erit ꝓportio B, ad E, quā totius B, C, ad totā E, F. Multo ergo maior erit ꝓportio A, ad D, quā B, C, totius ad totā E, F. Permutādo igitur, maior erit ꝓportio A, ad B, C, quā D, ad E, F; & cōponēdo ergo maior est ꝓportio totius A, B, C, ad B, C, quā totius D, E, F, ad E, F; Et rursus ꝓmutādo maior ꝓportio oīum A, B, C, simul ad oēs D, E, F, simul, quā B, C, ad E, F; qđ est secūdū. Itaq; cū sit maior ꝓportio totius A, B, C, ad totā D, E, F, quā ablatæ B, C, ad ablatā E, F; erit & maior ꝓportio reliquæ A, ad reliquā D, quā totius A, B, C, ad totā D, E, F. qđ est tertiū. Quoniam uero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; erit permutando maior quoque



17. *quinti.*
28 *quinti.*
27. *quinti.*
33. *quinti.*
27. *quinti.*
28. *quinti.*
27. *quinti.*
33. *quinti.*
27. *quinti*

quoque B,ad C,quam E, ad F; & componendo maior to
28. *quinti.* tius B C,ad C,quam totius E,F, ad F; & rursus permutan
27. *quinti.* do maior B C,ad E,F,quam C,ad F. Est autem maior pro portio A,B,C,ad D,E,F, vt ostendimus,quam B, C, ad E, F.Multo ergo maior erit proportio omniū A,B,C, ad omnes D,E,F,quam vltimæ C,ad vltimā F; quod est primū.

QVOD si fuerint quatuor magnitudines vtrobiq; cū ea dē hypothesi, hoc est, si sit quoq; maior proportio C,ad F, quā G,ad H; eadē consequentur. Vt.n. iam in tribus est ostensum, maior est proportio B,ad E,quā B,C,G,ad E, F,H. Multo ergo maior erit A,ad D, quam B,C,G,ad E, F, H. Permutādo ergo, maior erit A, ad



18. *quinti.* B,C,G,quam D,ad E, F, H; & componendo maior A, B, C,G,ad B,C,G,quam D,E,F,H,ad E,F,H; & permutādo
27. *quinti.* A,B,C,G,ad D,E,F,H,maior quā B,C,G,ad E,F,H, quod est secundum. Itaq; cum sit maior proportio totius A, B, C,G,ad totam D,E,F,H,quam ablatæ B,C,G, ad ablatam
33. *quinti.* E,F,H; erit & reliquæ A,ad reliquam D, maior proportio, quam totius A,B,C,G,ad totam D,E, F, H; quod est tertium. Quoniam vero vt in tribus est demonstratū, maior est proportio B C,G,ad E,F, H, quam G, ad H; & maior A,B,C,G,ad D,E,F,H,quam B,C,G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A,B,C,G,ad D,E, F,H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est primum. Eadem arte concludes,eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinq;, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VI.

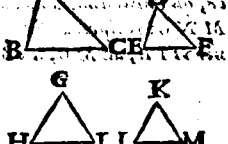
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habẽt, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula A B C, D E F, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit; Itẽ latera circa æqua les angulos proportionalia, hoc est, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F; & vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, & vt A C, ad C B, ita D F, ad F E.

QVOD si anguli vnius æqua les fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales an gulos non proportionalia, am contra; non dicentur tales figuræ simi les. Ex quibus constat, omnes figu ras rectilineas æquiangulas et æqui lateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quamuis inter se maximè sint inæquales. Cuiusmodi sunt trian gula æquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim æqualitatem

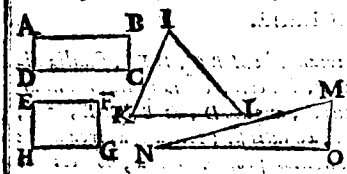


tertium, erit G H, ad G I, ut K L, ad K M; item G H, ad H I, ut K L, ad L M; & G I, & I H, ut K M, ad M L, cum semper sit proportio equalitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

Vt si in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, ut vtrobique sit & antecedens, & consequens, diuersarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio A B, ad E F, quæ F G, ad B C; seu A B, ad F G, ut E F, ad B C; (utroque enim modo A B, est antecedens vnius proportionis & B C, consequens alterius, in figura A B C D; quemadmodum & primo modo E F, est consequens vnius, & F G, antecedens alterius; uel secundo modo F G, consequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula I K L, M N O reciproca, si fueris ut I K, ad M N, ita M O, ad I L; uel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L.



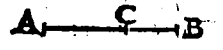
III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur,

cum

cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

Si linea recta quæuis A B, *ita diuidatur in* C, *inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota* A B, *ad maius segmentum* A C, *ita* A C, *maius segmentum ad* C B, *minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebis Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub aliis uerbis iam docuit lib. 2. propos. 11. ut fiet perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque utilitates lineæ hoc modo diuisæ, ceu ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. ut non immmerito a quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea est diuisa.*



IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a uertice ad basin deducta.

Si a uertice A, trianguli A B C, *ad basin* B C, *perpendicularis ducatur* A G; *dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli* A B C; *ita ut tantam dicatur habere altitudinem dictum triangulum, quanta est perpendicularis* A G. *Sic etiam perpendicularis* D H, *ducta a* D, *uertice trianguli* D E F, *ad basin* E F, *ad partes* E, *protractam, appellabitur altitudo trianguli* D E F. *Vnde si duarum figurarum perpendiculares a uerticibus ad bases, (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem dictæ perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac uertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares* A G, D H, *triangulorum* A B C, D E F, *in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli* A G H, D H G,



interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo
28. primi. recti; erunt rectæ A G, D H, parallelæ; sunt autem & A D, G H, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G;
34. primi. ac propterea latera opposita A G, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicetur dicta triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases uero A B, & D E; non habebunt eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin D E, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin A B, deducta, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.



RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribis Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse finita, determinataque & non indefinita: Inter oēs autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataque. Qua de re plura scripsimus ad initium cōmentariorum, quos in sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subqua-

subquadrupla videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vsus igitur in hac definitione Euclides, proportionem aliquam ex duabus, uel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zamberrus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla & secupla; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem secuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producuntur eadem 12. denominator scilicet duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quincuplæ. Nam harũ denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

PORRO *quemadmodum in magnitudinibus continuo proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, ceu in quinto libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam, duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiã in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam, consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primo, inductione quadam Theonis Alexandrini, quã hoc in loco adducit, confirmabimus: Deinde uero idem duabus demonstrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1 lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11.*

alterâ autem ex Vitellione lib. 1. propo. 13. suæ perspectiuæ, comprobabimus.

THEON *igitur rem propositam ita conatur absoluere. Habent* A B, *ad* C D, *rationem datam, veluti duplum, aut triplam, aut quamlibet aliam; & C D, ad E F, eandem quoque datam. Dico quod ipsius* A B, *ad* E F, *ratio constat ex* A B, *ad* C D; *& ex* C D, *ad* E F; *vel quod ipsius* A B, *ad* C D, *rationis quantitas multiplicata in ipsius* C D, *ad* E F, *rationis quantitatem, efficit ipsius* A B, *ad* E F, *rationis quantitatem. Si enim primum* A B, *quam* C D, *maior; & C D, quam* E F: *& sit quidem* A B, *ipsius* C D, *dupla, & C D, ipsius* E F, *tripla. Quoniam igitur* C D, *ipsius* E F, *tripla est; ipsius autem* C D, *duplæ est* A B; *erit* A B, *ipsius* E F, *sexcupla. Quoniam si triplum alicuius duplicemus, fit sexcuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam* A B, *dupla est ipsius* C D, *dividatur* A B, *in ipsi* C D, *æqualia, hoc est,* A G, *&* G B: *& quoniam* C D, *ipsius* E F, *tripla est; æqualis autem est* A G, *ipsi* C D; *&* A G, *igitur ipsius* E F, *tripla est. Id propterea &* G B, *ipsius* E F, *tripla est. Tota igitur* A B, *ipsius* E F, *sexcuplæ est. Ipsius igitur* A B, *&* E F, *ratio connectitur per* C D, *medium limitem, compositâ ex ipsius* A B, *ad* C D; *&* C D, *ad* E F, *ratione.*

SIMILITER *autem, & si minor fuerit* C D, *utraque ipsarum* A B, *&* E F, *idipsum colligitur. Sit enim rursus* A B, *ipsius* C D, *tripla; At* C D, *ipsius* E F, *sit dimidia. Et quoniam* C D, *ipsius* E F, *dimidia est; Ipsius autem* C D, *tripla est* A B; *erit* A B, *sesquialtera ipsius* E F. *Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam* A B, *ipsius* C D, *tripla est; &* C D, *ipsius* E F, *dimidia: qualium* A B, *æqualium ipsi* C D, *trium, talium est* E F, *duorum. Quare sesquialterum est* A B, *ipsius* E F. *Igitur ratio ipsius* A B, *ad* E F, *connectitur per* C D, *medium limitem, compositâ ex ipsius* A B, *ad* C D; *&* C D, *ad* E F, *ratione.*

SED *iam rursus sit* C D, *utraque ipsarum* A B, *&* E F,

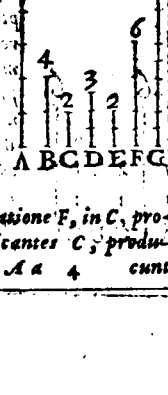
maior ; & ſit quidem A B, ipſius C D, dimidium, & C D, ipſius E F, ſeſquitertium. Quonium igitur, qualium eſt A B; duorum, talium eſt C D; quatuor, qualium autem C D, quatuor, talium E F, trium. Ex qualium igitur A B, duorum, talium E F, trium. Conuertitur igitur ratio ipſius A B, ad E F, per C D, medium limitem, quæ duorum eſt ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis caſibus. Et manifeſtum eſt, quod ſi ex compoſita ratione quanis vna compoſitarum auferatur, vno ſimplicium eiecto, reliqua compoſitarum aſſumetur.

Hæc ad verbum deſumpſimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCIVS.

Hæc demonſtrata ita ſe habent.

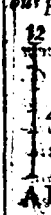
SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, compoſi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facile demonſtrabitur, aſſumpto prius hoc principio; Quantitatem, ſeu denominatorem cuiuuis proportionis multiplicatum in conſequentem magnitudinem proportionis eiuſdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad conſequentem, neceſſe eſt, conſequentem ſumptam ſecundum denominatorem, hoc eſt, multiplicatam, in denominatorem, reſtituere antecedentem. Vt quia 12. ad 32 habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator ſit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, eſſe quantitatem, ſiue denominatorem proportionis A, ad C, hoc eſt, ſi multiplicetur F, in C, produci A. Cum enim D, ſit denominator proportionis A, ad B, ſi multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, ſi E, multiplicetur in C, producetur B; producatur quoque G, ex multiplicatione F, in C. Oſtendendum ergo eſt G, æqualem eſſe ipſi A; atq; adeo ex multiplicatione F, in C, produci A. Quoniam F, & E, multiplicantes C, produ-



8. *septimi*
7. *septimi*

cunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B; ut dictum est;) eris ut F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; erit ut E, ad B, ita F, ad A; & permutando ut E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, ut F, ad E, ita A, ad B. Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur ut A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; æquales erunt quanticates A, & G. Quamobrem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea quæ F, quotuplex erit proportionis A, ad C; quod est propositum.

SIMILIS ratio est in plurimis magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimam componitur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt ostensum est: At eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod erat propositum. Idque cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; et B, ad C. Hæc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Enuncij. Denominatorem indicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sint namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E. Quoniam quod ex F, prima quantitate in E, quartam producitur, æquale est ei, quod



ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) erit ut F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. quod est propositum. Hæc Vitellio. 19. septimi

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio.

ITAQVE cum proportio extremorum componatur ex proportionibus intermediis, ceu demonstratum fuit; nihil aliud colligendum erit, quando proportio aliqua ex duabus proportionibus dicetur esse composita, quam eam proportionem eandem esse, quæ illa, quam habet prima aliqua quantitas ad tertiam, si modo tres quantitates ita coordinentur, ut proportio primæ ad secundam sit eadem, quæ altera componentium, & proportio secundæ ad tertiam eadem, quæ reliqua componentium. Vt, quando dicitur proportio 16. ad 12. compositæ esse ex proportionibus 8. ad 3. & 2. ad 4. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres quilibet numeri 24. 9. 18. secundum proportionē 8. ad 3. & 2. ad 4. (est enim ut 8. ad 3. ita 24. ad 9. & ut 2. ad 4. ita 9. ad 18.) eam esse proportionem 16. ad 12. quam habent 24. ad 18. Vt manifestum erit propo. 23. huius lib.

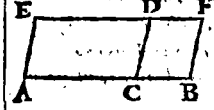
QVINQVE autem prædictis definitionibus Euclidis addendam esse censemus sequentem sextam quæ multum conducet, ut rectè intelligantur 27, 28 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurimæ aliæ decimi libri. Ea autem est eiusmodi.

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatū, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere uero, quando occupat maiorem lineam, quā

fit ea, secundum quam applicatur.

Sit data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, complea tur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrammum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita ut D B, appelletur defectus.



Rvrsvs sit data recta linea A C, supra quam constituatur parallelogrammum A F E; quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, uocetur excessus.

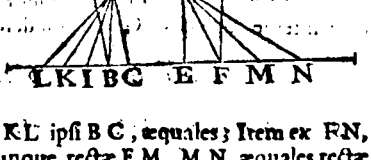
Hic autem defectus D B, uel excessus, in rectangulis quidem esse potest uel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem, uel Rhombus, vel Rhomboides, ut perspicuum est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

Sint duo triangula A B C, D E F, quorum bases B C, E F, habeant eandem altitudinem. Item duo parallelogramma C G, E H, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases B C, E F. Dico ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H, ut est basis B C, ad basin E F. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas G H, L N. (Nam ut in defin. 4. dictum

ctum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares a uerticibus ad bases demissæ æquales erunt) & ex B L, sumantur quotcũque rectæ B I, I K, K L ipsi B C, æquales; Item ex F N, abscindantur quotcunque rectæ F M, M N, æquales rectæ E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ A I, A K, A L, D M, D N. Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, A L K, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triãgula D E F, D F M, D M N. Quam multiplex est ergo recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quam multiplex est recta E N, rectæ E F, tam quoque, multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F; quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N. Quoniam uero si basis C L, æqualis fuerit basi E N, necessario triangulum A C L, æquale est triangulo D E N; & si C L, maior fuerit quam E N, necessario A C L, maius est quãm D E N; & si minor, minus; deficient proptrea una C L, recta, & triangulum A C L, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ A B C, ab E N, recta, & triangulo D E N, æque multiplicibus secundæ E F, & quartæ D E F; uel una æqualia erunt, uel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quare quæ proportio est primæ B C, ad secundã E F, basis ad basin, ea est tertiæ A B C, ad quartã D E F, triangulũ ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita triãgulum ad triangulum. quod est propositum.



38. primi

38. primi

6. defin. 5.

QVONIAM autem ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita parallelogrammum C G (quod duplũ est trianguli A B C, per 34. propositionem primi.) ad parallelogrammum E H (quod est duplũ trianguli D E F) perspicuũ est, ita quoq; esse parallelogrammum ad parallelogrammum,

15. quinti.

11. quinti.

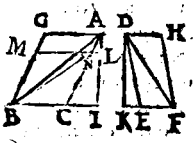
mum, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G; nec nō ex punctis M, N, parallelæ, ipsi F H. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Sed & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut bases, eandem habent altitudinem, æqualesue.

Sit triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammū A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut basis B C, ad basin E F. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares A I, D K, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit A I, si fieri potest, maior, quā D K. Abscissa igitur I L, ipsi D K, æquali, ductaque L M, ipsi B C, parallela, quæ latus A C, secet in N, coniunctaq; recta B N, erit N B C, triangulū ad triangulum D E F, vt basis B C, ad basin E F; cum altitudines I I, D K, ponantur æquales. Sed fuit etiam A B C, ad D E F, ut B C, ad E F. Igitur triangula N B C, A B C, ad triangulum D E F, eandem habent proportionem; Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines A I, D K, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma N M B C, A G B C, æqualia esse, si altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.



1. *sexti.*
11. *quinti*
9. *quinti.*

Addit hoc in loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quo-

rum,

rum æquales sunt bases, uel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines.

SINT duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia bases æquales B C, E F. Dico esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, est ad altitudinem D K.



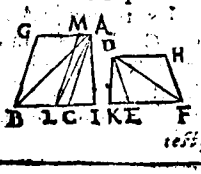
Si enim sumantur rectæ I L, K M, basibus B C, E F, æquales, ducanturque rectæ L A, M D; erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cum sint super bases æquales L I, B C, & inter easdem parallelas A G, I B. Eodem modo æquale erit triangulum D K M, triangulo D E F. Quare erit, ut A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M. Est autem, ut A L I ad D K M, ita A I, ad D K. (Nam si bases ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, ut A I, ad D K. Quod est propositum. 38. primi. 7. quinti. 1. sexti.

QVONIAM uero est, ut A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C, triangvli A B C, duplum, ad parallelogrammum D E F H, trianguli D E F, duplum; Erit quoque A G B C, ad D E F H, ut A I, ad D K. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur L G, M H. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basim. 15. quinti. 11. quinti.

Hoc uero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut altitudines, æquales habent bases.

SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorum bases B C, E F æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit B C, si fieri po-



test,

test, maior, quam E F. Abscissa igitur B L, ipsi E F, æquali, ducta quæ recta L A; erit, ut proxime demonstrauimus, A B L, ad DEF, ut A I, ad D K. Sed ut A I, ad D K, ita posita est ABC, ad DEF. Igitur A B L, A B C, ad DEF, eandem habent proportionem; Ac proinuicem se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta L M, ipsi G B, parallela ostendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, æqualia esse, si bases BC, E F, dicantur inæquales.

11. quinti. et 9. quinti.



IN omnibus autem his non uariabitur demonstratio, etiam si triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita ut altitudines sint ipsorum latera, uel unum fuerit rectangulum, alterum uero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget quandoque constructione.

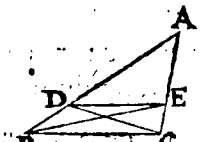
2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse ut A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E, erunt triangula D E B, DEC, super eandem basin D E, & inter easdem parallelas D E, B C,

37. primi

BC, constituatur, inter se æqualia. Quare ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita triangulum idem AED, ad triangulum DEC; Atqui ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita basis AD, ad basin DB, (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, ut constat; si per E, agatur parallela recta ipsi AB;) & eadem ratione, ut triangulum AED, ad triangulum DEC, ita basis AE, ad basin EC. Vt igitur AD, ad DB, ita AE, ad EC. (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, uel trianguli AED, ad triangulum DEC.) quod est propositum.



7. quinti.
1. sexti.
11. quinti.

SECET iam recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursus rectis CD, BE, erit ut basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem ut AD, ad DB, ita AE, ad EC; igitur ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE ad EC. Sed rursus ut basis AE, ad basin EC, ita triangulum AED, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur ut triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita triangulum idem AED, ad triangulum DEC. Aequalia ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea cum eandem habeant basin DE, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC; quod est propositum. Si itaq; ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

1. sexti.
11. quinti
1. sexti.
11. quinti
9. quinti.
39. primi

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

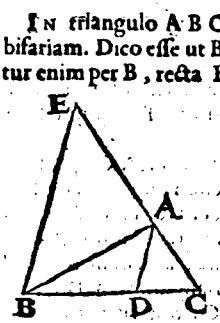
SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt

rationem

rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a uertice ad sectionẽ producitur, ea bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo A B C, recta A D, secet angulum B A C, bifariam. Dico esse ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A, producta conueniat in E; eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æquales; Ideoque rectæ B A, E A, inter se æquales. Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C; Atqui ut E A, ad A C, ita B D, ad D C, cũ in triangulo B C E, recta A D, sit parallela lateri B E; Igitur ut B A, ad A C, ita B D, ad D C, quod est propositum.

29. primi



6. primi. 7. quinti

2. sexti. 11. quinti

SIT iam ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Dico rectã A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta B E, ipsi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur ut B A, ad A C, ita ponitur B D, ad D C; ut autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta A D, sit lateri B E, parallela) Erit ut B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. Aequales igitur sunt B A, & E A, inter se; ac propterea anguli A B E, & E, æquales erunt. Cum igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D; & angulus E, externo D A C; erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales; quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

2. sexti

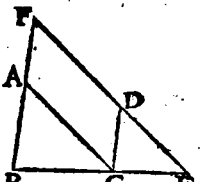
11. quinti 9. quinti. 29. primi.

THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

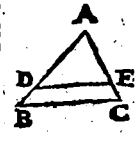
SINT æquiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico esse A B, ad B C, ut D C, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D; & A B, denique ad A C, ut D C, ad D E; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita ut angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B, minores sunt duobus rectis; est autē angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniā uero angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C; parallelæ erunt C D, & B F. Eadem ratione, parallelæ erunt C A, & E F, quod angulus externus A C B, sit æqualis interno D E C. Parallelogrāmum est igitur A C D F; propterea que recta A F, æqualis rectæ C D; & recta C A, rectæ D F. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F; erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æqualis est ipsi A F,) ut B C, ad C E. permutando igitur erit A B, ad B C, ut D C, ad C E. Rursus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri B F, erit B C, ad C E, ut F D, hoc est, ut C A, (quæ



17. primi
11. prop.
28. primi
34. primi
2. sexti.
16. quinti
2. sexti.

16. quinti. æqualis est ipsi F D) ad E D. permutando igitur erit B C, ad C A, ut C E, ad E D. Cum igitur sit A B, ad BC, ut DC, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D: erit & ex æquali
22. quinti. A B, ad CA, ut D C, ad E D. quod est propositum. Æquiangulorũ ergo triangulorũ proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.



HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico triangulum A D E, toti triangulo A B C, esse simile. Aequiangula namque sunt, cum anguli A D E,
29. primi A E D, æquales sint angulis A B C, A C B, externi internis; & angulus A, communis. Quare ut
4. sexti. demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

SCHOLION.

NON *alienum a nostro instituto esse putauimus, si hic demõstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ uehuntur in aqua; Secundum uero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.*

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum uero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.

SIT recta A B, & expunctis A, & C, educantur duæ parallelæ A D, C E, proportionem habentes, quam A B, BC, ita ut sit A D, ad C E, sicut A B, ad B C, uel C E, ad A D,

vt B C, *ad* A B. *Dico rectam, quæ coniungit extrema* B, *&* E, *transire per punctum* D. *Item rectam, quæ coniungit extrema* B, *&* D, *transire per punctum* E. *Si enim recta* B E, *nõ transit per* D, *coeat cum* A D, *in* F, *puncto, quod sit vel supra* D, *vel infra; ut in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula* B A F, B C E, *similia sunt; erit, ut* A B, *ad* A F, *ita* B C, *ad* C E; *Et permutando, ut* A B, *ad* B C, *ita* A F, *ad* C E: *Vt autem* A B, *ad* B C, *ita erat quoque* A D, *ad* C E; *Igitur erit, ut* A F, *ad* C E, *ita* A D, *ad* C E: *Ac propterea æquales erunt rectæ* A F, A D, *pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta* B E, *per punctum* D. *Quod est primum.*



4. *sexti.* 16. *quinti.* 11. *quinti* 9. *quinti*

RVRSVS *si recta* B D, *non transit per* E, *transeat per* F, *punctum, quod sit vel supra* E, *vel infra, ut in secunda figura. Quoniam ergo, per dictum coroll. triangula* B A D, B C E, *similia sunt; erit, ut* A B, *ad* A D, *ita* B C, *ad* C F; *& permutando, ut* A B, *ad* B C, *ita* A D, *ad* C F: *Vt autem* A B, *ad* B C, *ita quoque erat* A D, *ad* C E; *Igitur erit, ut* A D, *ad* C F, *ita* A D, *ad* C E: *Ac proinde æquales erunt rectæ* C F, C E, *pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta* B D, *per* E. *Quod est secundum.*

Secundum vero est.

4. *sexti.* 16. *quinti.* 11. *quinti.* 9. *quinti.*

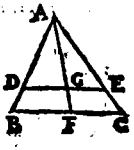
SI in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus dictum, in easdem rationes.

IN *triangulo* A B C, *ducta sit* D E, *lateri* B C, *parallela, & ex puncto* F, *quocunque ad angulum* A, *recta extendatur* F A, *secans* D E, *in* G. *Dico esse, ut* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quoniam triangula* A F B, A G D, *ex coroll. huius propos. similia sunt; erit ut* A F, *ad* B F, *ita* A G, *ad* D G; *& permu-*



4. *sexti.*

16. quinti. tando, ut A F, ad A G, ita B F, ad D G. Æque eodem argumento concludemus esse, ut A F, ad A G, ita F C, ad G E. Igitur erit, ut B F, ad D G, ita F C, ad G E; & permutando, ut B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod est propositum.

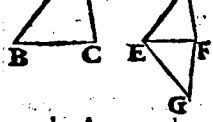


ALITER. Quoniã triangula A B F, A D G, similia sunt, nec non triangula A F C, A G E, per 4. sexti. coroll. huius propos. erit, ut B F, ad F A, ita D G, ad G A: Item ut F A, ad F C, ita G A, ad G E. Ex æquo igitur, ut B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod erat demonstrandum.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula A B C, D E F, latera proportionalia, sitque A B, ad B C, ut D E, ad E F; & B C, ad C A, ut E F, ad F D; & A B, denique ad A C, ut D E, ad D F. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F; sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C, conueniantque rectæ E G, F G, in G; eritq; reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula A B C, G E F. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; Vt autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. Igitur ut G E, ad E F, ita D E, ad E F, eandem: propterea que æquales erunt G E, D E. Rursus, quoniam ut B C, ad C A, ita E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D;



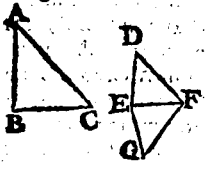
22. primi
4. sexti.
11. quinti.
9. quinti.
4. sexti.

F D; erit ut E F, ad F G, ita eadē E F, ad F D; ideoque æquales erunt F G, F D. Itaque cum latera E G, F G, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumque utrique; & basis communis E F, erunt anguli G, & D, æquales; ac propterea reliqui anguli G E F, reliquis angulis D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat. *9. quinti.* *8. primi* *4. primi*

THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

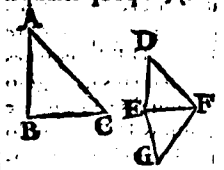
SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc est, sit A B, ad B C, ut D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulū scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, ut in præcedenti propos. dictum est, triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; sed ut A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F; igitur ut D E, ad E F, ita G E, ad eandem E F; ac idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E,



4. sexti. *11. quinti.* *9. quinti.*

E F, æqualia sint lateribus G E, E F, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est, æqualis angulus F E G, æqualis est positus angulus D E F, propterea; æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F,) erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A; & angulus E F G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, E F D; & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F. quod est propositum. Si igitur duo triangula unũ angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.



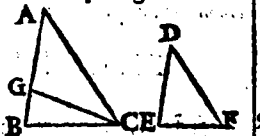
4. primi

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum uero simul utrunque aut minorem, aut nõ minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F; & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est, sit ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit uel minor recto, uel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet A C B, & F, circa quos sunt latera proportionalia, nec non & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primo uterq; B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, non sunt æquales, sit A C B, maior, quam F; fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur

ponatur æqualis, erit & reliquus A G C, reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare ut A C, ad C G, ita D F, ad F E; sed ut D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B: Vt igitur A C, ad C G, ita eadem A C, ad C B; ac propterea æquales erunt C G, C B, & anguli C B G, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoque ei deinceps A G C, recto maior; cum A G C, C G B, sint duobus rectis æquales; Est autem ostensus angulus A G C, angulo B, æqualis. Maior igitur recto est angulus E; Sed positus est etiam recto minor. quod est absurdum.



32. primi
4. sexti.
11. quinti.
9. quinti.
5. primi
13. primi

Sit secundo tam B, angulus, quam E, recto non minor, eritque ut prius angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, recto non minor erit, ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed uel maiores, uel æquales duobus rectis, quod est absurdū. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, ac idcirco reliqui etiā anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

17. primi
32. primi

SCHOLION.

Addidit Euclides, utrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse uel minorem recto, uel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi non sequeretur, triangula esse equiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, habebunt duo triangula A B C, A G C, unum angulū uni angulo æqualē, immo angulum A, cōmunem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, ut A C, ad C B, ita eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt ullo modo æquiangula triangula A B C, A G C, ut constat. Quod ideo euenit, quia non uterque angulorum A B C, A G C, minor est recto, uel non minor. Immo A B C, est quidem recto minor; A G C,

7. quinti.

utro recto maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint, & ideo anguli C B G, C G B, æquales; erit uterque eorum recto minor, ac propterea A G C, recto maior.

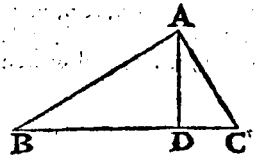
5. primi
17. vel 32. primi.

8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, a quo ad basin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, similia esse & toti triangulo A B C, & inter se. Cum enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, sint recti, & angulus B, communis, erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Æquiangulum est igitur triangulum D B A, triangulo A B C, ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, erit ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & ut B A, ad A C, ita B D, ad D A; & ut B C, ad C A, ita B A, ad A D. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C; Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis; ac propterea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare ut B C, ad C A, ita C A, ad C D; & ut C A, ad A B, ita G D, ad D A; & ut C B, ad B A, ita C A, ad A D. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & A D C, cū anguli A D B, A D C, sint recti, & anguli A B D, C A D, ostensi æquales, nec non anguli B A D, A C D; Atq; idcirco sit ut B D, ad D A, ita D A, ad D C, &c. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.



32. primi
4. sexti.
4. sexti.
32. primi
4. sexti.

COROL-

COROLLARIVM.

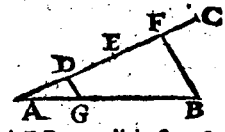
Ex *hoc manifestum est, perpendicularē quæ in rectangulo triāgulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta:* Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod dicto lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse ut B D, ad D A, ita D A, ad D C; ac propterea D A, esse mediam proportionalem inter B D, & D C: Item esse ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & idcirco B A, mediam esse proportionalem inter C B, & B D: Denique esse ut B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, esse proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. 11.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

IMPERETVR, ut ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, utcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex A B, ut in proposito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, esse partem tertiam imperatam.

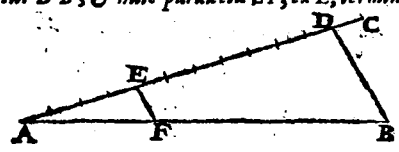


Nam cum in triangulo A B F, lateri F B, parallela sit recta D G; erit ut F D, ad D A, ita B G, ad G A; componendo igitur, ut F A, ad D A, ita B A, ad G A: sed F A, ipsius A D, est tripla ex constructione; Igitur & B A ipsius A G, erit tripla, ideoque A G, erit tertia pars ipsius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat. 2. *sexti.* 18. *quinti.*

SCHOLION.

QVOD *si ex A B, auferenda sit pars, quæ contineat quatuor undecimas ipsius A B, sumendæ erunt ex* A C, *undecim partes*

partes æquales usque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partiũ.



Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rursus ut D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare, & componendo ut A E, ad A D, ita A F, ad A B: Est autem A E, pars continens quatuor undecimas ipsius A D, ex constructione; Igitur & A F, eadẽ pars erit rectæ A B. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas.

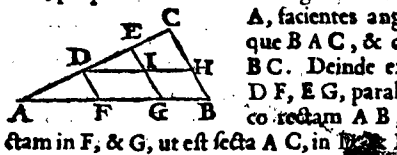
4. quinti.

12.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare; ut data altera recta secta fuerit.

SIT recta A B, secanda similiter, ut secta est recta A C, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad



A, facientes angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, ut est secta A C, in D, & E. Nam ut A D, ad D E, ita A F, ad F G; Proportionales ergo sunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quod si ducatur D H, ipsi F B, parallela, secans E G, in I, erit rursus ut D E, ad E C, ita D I, ad I H, hoc est, ita F G, ad G B; quod F G, ipsi D I, & G B, ipsi I H, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

2. sexti.

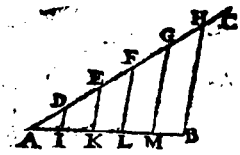
2. sexti.

34. primi

SCHO-

SCHOLION.

EX hoc problemate colligi poteſt facilis admodum via, ad ratio dividendi lineam rectã datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus. Sit enim data recta A B, dividenda in quinque partes æquales. Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunque angulũ C A B, ſumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, utcunque eſt diviſa, ſi ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur D I, E K, F L, G M; erit A B, ſimiliter diviſa, ut A H, ceu conſtat ex demonſtratione huius problematis. Cum igitur A H, ſit diviſa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diviſa. Haud aliter in plures partes æquales dividetur eadem recta A B.



HVIC rationi dividendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi poſſunt aliæ non inuncundæ, ceu propos. 10. lib. 1. ſumus polliciti. Sit enim rurſus data linea recta A B, dividenda in quinque partes æquales. Ducatur ex B, recta B C, utcunque faciens angulum cum A B; Deinde ex aſſumpto puncto D, agatur D E, parallela ipſi A B, ex qua abſcindantur quinque æquales partes D F, F G, G H, H I, I K, ea lege tamen, ut D K, minor ſit quam A B. Poſtremo ex A, per K, recta ducatur A L, occurrens ipſi B C, in L, puncto, a quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur L P, L O, L N, L M, quæ dico dividere rectã A B, in quinque partes æquales. Cum enim D E, ſit parallela ipſi A B, erit angulus L I K, angulo L M A, & angulus L K I, angulo L A M, æqualis: eſt autem angulus A L M, communis; Æquiangula igitur ſunt triangula L K I, L A M, ac propterea ut L I, ad I K, ita L M, ad M A; Item eadem ratione, ut L I, ad I H, ita L M, ad M N: ſed ut L I,



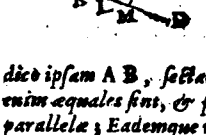
29. primi

4. ſexti.

ad

7. quinti. 11. quinti. 9. quinti. *ad I K, ita L I, ad I H, quod æquales sumptæ sint I K, I H; igitur ut L M, ad M A, ita eadem L M, ad M N; ideoque æquales erunt A M, M N. Non aliter ostendes M N, æqualē esse ipsi N O; & N O, ipsi O P, & O P, ipsi P B. Diuisa est ergo A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.*

ALITER. *Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ B C, A D, inter se parallelæ; Et ex B C, abscindantur quatuor partes æquales B E, E F, F G, G H, ut sint tot partes una minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex A D, totidem æquales resecentur A I, I K, K L, L M. Ductis igitur rectis E M, F L, G K, H I, secantibus rectam A B, in N, O, P, Q; dico ipsam A B, sectam esse in quinque partes æquales. Cum*

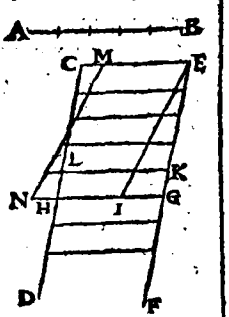


33. primi *enim æquales sint, & parallelæ G H, I K, erunt & H I, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cum A M, secta sit in quatuor æquales partes, erit & A Q, similiter in quatuor partes æquales diuisa, ut constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quod B H, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cum tam A N, quam B Q, æqualis sit singulis partibus N O, O P, P Q; erūt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter se æquales. Quod est propositum.*

ALITER. *Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum. Ductis duabus rectis inter se parallelis utcunque C D, E F; ex utraque abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde officio circini capiatur longitudo rectæ A B, diuidenda, eaque ex aliquo puncto lineæ C E, ut ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illius lineæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo est recta G H; ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E, ad I, recta ducatur E I, quā dico diuisam esse in quinque æquales partes. Cum enim G K,*

33. primi *H I, æquales sint, & parallelæ, erunt quoque G H, K I, parallelæ; Eodemque modo omnes lineæ inter rectas C D, E F, inter*

inter se parallelæ ostendentur. Quare, ut ex demonstratione huius 10. propos. liquet, quemadmodum E G, diuisa est in quinque partes æquales, ita similiter in totidem diuisa erit E I. Si igitur officio circini singulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propositam A B, ipsi E I, æqualem, diuisa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.



ALIQVANDO autem necesse est lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadē linea transferatur ab M, usque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoque M N, diuisa in quinque paries æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi E G, parallela, usque ad rectam G H. Quod si linea dividenda fuerit admodum breuis, accipienda erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio datam lineam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. Id enim non raro a Geometris exigitur.

SIT secanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam recta C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta A F, ipsi C, & F G, ipsi D, æqualis: Ducta deinde G E, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, eum sit, ut A F, ad F G, atque adeo, ut C, ad D, ita A H, ad H B.



2. sexti.

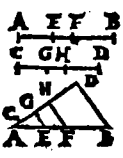
POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ uehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones

ctiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECENTVR rectæ A B, C D, *proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita ut sit* A E, *ad* E B, *sicut* C G, *ad* G D; *Item* A F, *ad* F B, *ut* C H, *ad* H D. *Dico sectiones intermedias* E F, G H, *proportionales quoque esse cum duobus segmentis* A E, C G; *uel cum duobus* F B, H D; *hoc est, esse* A E, *ad* E F, *ut* C G, *ad* G H. *Item* F B, *ad* E F, *ut* H D, *ad* G H. *Cum enim sit, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* E B, *ita* C D, *ad* G D. *Item cum sit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* F B, *ita* C D, *ad* H D; *& conuertendo, ut* F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D. *Itaque cum sit, ut* F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D; *Et ut* A B, *ad* E B, *ita* C D, *ad* G D; *Erit ex æquo, ut* F B, *ad* E B, *ita* H D, *ad* G D; *Et conuertendo, ut* E B, *ad* F B, *ita* G D, *ad* H D; *Et per conuersionem rationis, ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Et diuidendo, ut* F B, *ad* E F, *ita* H D, *ad* G H. *Quod est secundum.*

22. *quinti.*



RVRSVS, *quia est, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Et ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Erit ex æquo, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod est primum.*

BREVIVS *tota propositio demonstrabitur hoc modo. Cõueniant duo puncta* A, *&* C, *in unum, ut fiat angulus* B C D, *uel* B A D; *iungantur que rectæ* D B, H F, G E. *Quia igitur est, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Parallela erit* G E, *ipsi* D B. *Rursus, cum sit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D; *Parallela erit eadem ratione* H F, *ipsi* D B. *Quare &* G E, H F, *inter se parallelæ sunt: Ac propterea erit, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod est propositum.*

2. *sexti.*

30. *primi*

2. *sexti.*

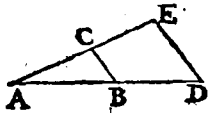
10.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ A B, A C, ita dispositæ, ut efficiant angulum

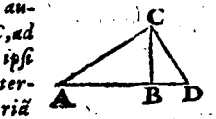
angulum A, quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam uolumus esse antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipsi A C. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipsi A C, productæ in E. Dico C E, esse tertiam proportionalẽ, hoc est, esse ut A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cum enim in triãgulo A D E, lateri D E, parallela sit recta B C; erit ut A B, ad B D, ita A C, ad C E; Sed ut A B, ad B D, ita eadem A B, ad A C, æqualem ipsi B D: Vt igitur A B, ad A C, ita A C, ad C E. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



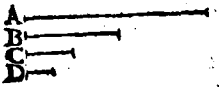
2. *sexti.*
7. *quinti.*

SCHOLION.

ALITER *idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ* A B, B C, *constituantur ad angulum rectum* A B C; *& coniungatur recta* A C. *Producta autem* A B, *antecedente, ducatur ex* C, *ad* A C, *perpendicularis* C D, *occurrens ipsi* A B, *productæ in* D. *Dico* B D, *esse tertiam proportionalem. Cum enim in triãgulo* A C D, *angulus* A C D, *sit rectus, & ab eo ad basin* A D, *deducta perpendicularis* C B; *erit per coroll. 8. propos. huius lib.* B C, *media proportionalis inter* A B, *&* B D, *hoc est, ut* A B, *ad* B C, *ita eris* B C, *ad* B D. *Quod est propositum.*



INVENTA *autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis* A, *&* B, *adinueniatur tertia proportionalis* C; *&* B, *&* C, *tertia proportionalis* D, *erunt quatuor lineæ* A, B, C, D, *continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis,*

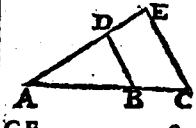


tionalis, sexta, septima, octaua, &c.

10. PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Disponantur primæ duæ A B, B C, secundum lineam rectã, quæ sit A C: Tertia uero A D, cum prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit ~~perpendicularis~~ B D, parallela erit ut A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



2. sexti.

SCHOLION.

HINC *facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ* A, B, *in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur* C, *& ei quarta proportionalis inueniatur* D, *ut sit quemadmodum* A, *ad* B, *ita* C, *ad* D; *factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum bina semper eandem habeant proportionem.*

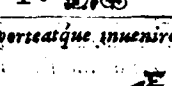


OSTENDEMVS *etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.*

TRIBVS datis rectis lineis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam.

SINT

SINT tres rectæ A B, B C, C D; oporteatque inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam sit, ut A B, prima ad B C, secundam. Disponantur primæ duæ A B, B C, in directum, ut faciant rectam A C: Tertiaue C D, cum secunda B C, faciat angulum C, quemcunque.



Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A, parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ, in E. Dico E D, esse quartam, hoc est, esse E D, ad D C, tertiam, ut est A B, prima ad B C, secundam. Hoc autem manifestum est, cum A C, E C, proportionaliter secentur in B, & D. 2. sexti.

PROBL. 5. PROPOS. 13. 9.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam A C. Diuisa A C, bifariam in E; ex E, centro, & interuallo E A, uel E C, semicirculus describatur A D C; Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circumferentiam usque. Dico B D, esse mediam proportionalē. Ductis enim rectis A D, C D, erit angulus A D C, rectus in semicirculo existens. Cum igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta sit ad basin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium 8. propos. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediā proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



31. tertij.

SCHOLION.

PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, medianm esse proportionalem, 11

inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Deinceps semicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipsi A C. Dico D B, esse proportionalem mediam inter A D, & D C, id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ A B, C B, fiet angulus

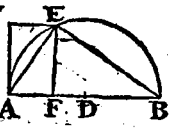


31. tertij. A B C, rectus; Quare per coroll. propos. 8. huius propositionis. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, &c.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

SIT data recta A C, & diuidenda proponatur recta A B, (quæ minor non sit quam dupla ipsius A C, sed uel dupla, uel maior) ita ut inter huius segmenta, media proportionalis sit A C. Disponantur rectæ A B, A C, ad angulum rectum B A C, & diuisa A B, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem D A, uel D B, semicirculus describatur A E B. Deinde per C, ducatur ipsi A B, parallela C E, secans circumferentiam in E, puncto, a quo demittatur ad A B, perpendicularis E F. Dico A C, esse mediam proportionalem inter segmenta A F, F B. Ductis enim rectis A E, B E,



34. primi erit ut iam est demonstratum, ex coroll. 8. propos. huius lib. E F, media proportionalis inter A F, & F B. Cum igitur E F, æqualis sit ipsi A C, eo quod parallelogrammum sit A C E F; (Est enim

28. primi C E, ipsi A F, parallela per constructionem, & A C, ipsi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A;) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod est propositum.

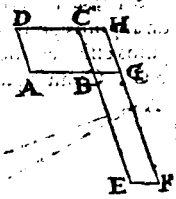
13. THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & unum uni æqua-

lem

lem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos A B C, E B G, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut A B, & B G, unam efficiant lineã rectam. Quo facto, cum anguli A B C, E B G, sint æquales, erunt & E B, B C, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam D C, & F G, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma D B, B F, erit ut D B, ad B H, ita B F, ad idem B H. Sed ut D B, ad B H, ita est A B, basis ad basin B H, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter ut B F, ad B H, ita est basis E B, ad basin B C: Igitur ut A B, ad B G, ita est E B, ad B C, quod est propositum.



7. quinti. 1. sexti.

E CONTRARIO, sint iam latera circa æquales angulos A B C, E B G, reciproca, hoc est, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, esse æqualia. Facta enim eadem constructione, cum sit, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C; Vt autem A B, ad B G, ita D B, ad B H; & ut E B, ad B C, ita B F, ad idem B H: erit quoque ut D B, ad B H, ita B F, ad idem B H; Ac ideirco æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

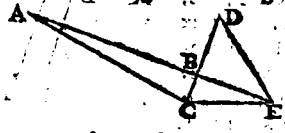
1. sexti.

9. quinti.

14. THEOR. 10. PROPOS. 15.

AEQVALIVM, & unum uni æquale habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B E, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur triangula ad angulos æquales, ita ut



A B, B E, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli A B C, D B E, sint æquales; erit & D B, B C, una recta linea, ceu demonstratum est, ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E; quoniam æqualia sunt triangula A B C, D B E, erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idē B C E; sed ut triangulum A B C, ad triangulum B C E, ita est basis A B, ad basin B E, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter ut D B E, ad B C E, ita basis D B, ad B C; Quare ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Quod est propositum.

7. quinti.

8. sexti.

IAM uero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit ut A B, ad B E, ita D B, ad B C; ut autem A B, ad B E, ita triangulum A B C, ad triangulū B C E; & ut D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E. Erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E; propterea æqualia erunt triangula A B C, D B E.

12. sexti.

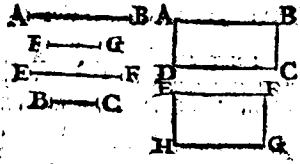
9. quinti.

DBE. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 11. PROPOS. 16. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C, ut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehenſum ſub extremis A B, B C; rectangulum uero E F G H, comprehenſum ſub medijs E F, F G. Dico rectangula A C, E G, eſſe æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit ut A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogrãma A C, E G, æqualia erunt. Quod eſt propoſitum.



14. *ſexti.*

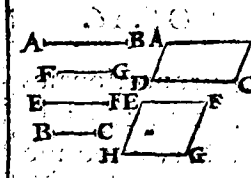
CONTRA uero, ſint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B G, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe ut A B, ad F G, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia ſint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F; erunt latera circa hoſce angulos reciproca, ſicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales

14. *ſexti.*

F

fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

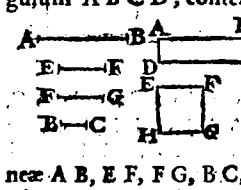


IDEM *verum eſt, etiam ſi parallelogramma A C, E G, non ſint rectangula, dummodo ſint æquiangula, ita ut anguli dictis rectis lineis comprehenſi ſint æquales. Veluti manifeſtum eſt in hac figura. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.*

16. THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ ſint proportionales: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod à media deſcribitur, quadrato. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei, quod a media deſcribitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C, ſitque rectangulum A B C D, contentum ſub extremis A B, B C; & quadratum mediæ E F, ſit E F G H. Dico æqualia eſſe rectangulum A C, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis ſit ipſi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritque quadratum E G, comprehenſum ſub mediis E F, F G, propter æqualitatem rectarū E F, F G; Quare rectangulum A C, comprehenſum ſub extre-

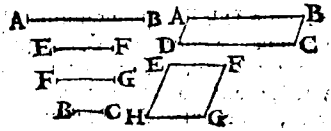


extremis A B, B C, æquale est quadrato E G, hoc est, rectangulo sub mediis E F, E G, comprehenso: Quod est propositum. 16. sexti.

Sed sint iam æqualia rectangulum A C, & quadratum E G. Dico esse ut A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia sint rectangula A C, & E G, erit ut A B, ad E F, ita F G, ad B C. Vt autem F G, ad B C, ita est E F, ipsi F G, æqualis, ad eandem B C. Quare ut A B, ad E F, ita est E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. 1. 6. sexti. 7. quinti.

SCHOLION.

EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut E G, sit Rhombus, & A C, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, ut figura indicat.



COROLLARIVM.

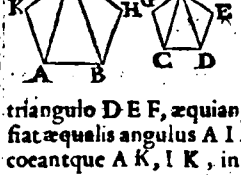
Ex posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, ostensum fuit, esse ut A B, ad E F, ita E F, ad B C. Quare E F, media est proportionalis inter A B, & B C.

PROBL. 6. PROPOS. 18. 19.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describere.

Sit data recta A B, super quam describendum sit re-

ctilineum rectilineo C D E F G, simile similiterq; positum, Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantque rectæ A I, B I, in puncto I; eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis, totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rursus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H; conueniantque B H, I H, in puncto H; eritque eadem ratione triangulũ B H I, triangulo D E F, æquiangulum. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K; coeantque A K, I K, in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G E, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, simile esse, similiterque positum. Cũ enim angulus I A B, constiturus sit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis; Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut constat ex constructione. Quare æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam uero ita est A B, ad B I, ut C D, ad D F; & ita B I, ad B H, ut D F, ad D E; erit ex æquo ita A B, ad B H, ut C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia sunt. Sunt autem & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia, ob triangula æquiangula B H I, D E F. Rursus ita est H I, ad I B, ut E F, ad F D; & ita I B, ad I A, ut F D, ad F C; & ita I A, ad I K, ut F C, ad F G; Quare ex æquo erit ita H I, ad I K, ut E F, ad F G; & ideo latera quoque circa angulos H I K, E F G, proportionalia, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data ergo



32. primi
4. sexti.
22. sexti.
4. sexti.
4. sexti.
22. sexti.

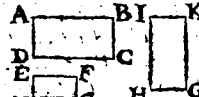
ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus; Quod faciendum erat.

SCHOLION.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & reliqui æquales semper ordine se se consequuntur, nec non, & latera proportionalia. Vt triangula A B C, D E F, non solum erunt similia, sed etiã super rectas B C, E F, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit



A B, ad B C, ut D E, ad E F, &c. At super rectas B C, D E, non dicentur similiter esse descripta, cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula A C, E G, similia, dicentur similiter esse descripta sup rectas D C, H G, quoniam ut A D, ad D C, ita est E H, ad H G, &c. At vero rectangula A C, I G, non dicentur similiter descripta super rectas D C, H G, quamuis sint similia, ut manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas D C, I H, uel super rectas A D, I G.

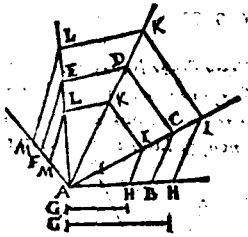


Omnes autem figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, ut patet in rectilineis A B H I K, D E F G, super lineas A B, & C D, descriptis. Item omnes æquilatere figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter.

FORTASSE autem expedietur Problema propositum constituemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, super datam rectam G, describendum simile rectilineum, similiterque positum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C, A D, A E, quantumlibet. Deinde ex A B, abscindatur A H, æqualis datæ rectæ G, uel certe ex ipsa A B, ulterius producta, si uidelicet G, fuerit maior, quam A B. Post hæc per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, recta

I, recta I K, lateri C D, parallela, & ſic deinceps, donec omnia latera ſicas habeant parallelas, demptis duobus, lateribus productis A B, A F; factumq; erit, quod proponitur. Cũ enim anguli A, ſit communis; & anguli A B C, A F E, æquales ſint anguli A H I, A M L; Nec non & anguli A C B, A C D, æquales ſint anguli A I H, A I K, hoc eſt, toti angulo B C D, æqualis ſit angulus H I K; Eodemque modo anguli C D F, D E F, æquales ſint anguli I K L, K L M: Æquiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, ſimilia ſint, per coroll. propoſ. 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, ut A B, ad B C, ita A H, ad H I. Rurſus, ut B C, ad C A, ita H I, ad I A; Et ut C A, ad C D, ita I A, ad I K: Ac proinde, ex æquo, ut B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur, ex defin. ſimilia ſunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, & ſimiliter poſita.

29. primi

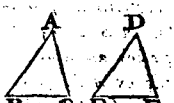


4. ſexti.

17. THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SINT triangula ſimilia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et ſit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico triangula inter ſe rationem habere duplicatã eius, quam habent latera homologa B C, & E F. Sint enim primum latera B C, E F, æqualia; eruntque propterea triangula inter ſe æqualia, habebuntque proportionem æqualitatis, quemadmodũ & latera homologa; Atqui proportio æqualitatis



26. primi

litatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, ut constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad ternam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam.) Igitur triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet latus B C, ad E F. Quod est propositum.

SIT secundo B C, latus latere E F, maius; & ex B C, abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis E G, ducaturq; recta A G. Quia igitur est ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando ut A B, ad D E, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad E F, ita est per constructionem E F, ad B G: Vt ergo A B, ad D E, ita erit E F, ad B G. Quare cum triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipsa inter se æqualia erunt; & propterea ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G; Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiusdem altitudinis, ita est basis B C, ad basin B G. Igitur ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cum tres lineæ B C, E F, B G, sint proportionales, erit proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata proportionis B C, primæ ad E F, secundam. Quare & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis B C, ad E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

11. *sexti*.



11. *quinti*.

15. *sexti*.

7. *quinti*.

1. *sexti*.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque descripta.



Dico,

Dico, ut est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B: Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

19. sexti.



EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiã simile similiterq; descriptum, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est recta C, ad rectã A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

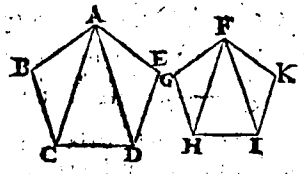
18.

THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SINT polygona similia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; Item angulos B, G, & sic deinceps. habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem A B, ad B C, ita F G, ad G H; & ut B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primo, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint A C, A D, F H, F I; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia, cũ propter similitudinem habeant angulos numero æquales. Quoniam uero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula

triangula A B C, F G H, habentia angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G; ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula A E D, F K I. Deinde quia est ut A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob similitudinem triangulorum A B C, F G H; ut autem C B, ad C D, ita est, ex hypotesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum; Ex æquo erit ut A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; est autem & ablatus A C B, ostensus æqualis ablato F H G; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. Quare triangula A C D, F H I, æquiangula erunt, ideoque similia.



6. *sexti.*

4. *sexti.*

22. *quinti.*

6. *sexti.*

Dico præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis. Quoniam similia sunt triangula A B C, F G H, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H: Atque eodem argumento proportio triangulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum A D E, ad triangulum F I K, ut A C D, ad F H I. Atque ita proportionalia sunt triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula altetius consequentia proportionum. Vt autem unum antecedens ad unum consequens, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homoga erunt totis polygonis.

19. *sexti.* *Auctor*

12. *quinti.*

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triangulum

gulum uero A B C, ad triangulum F G H, habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa A B, F G: habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorũdem laterum homologorum A B, F G. Itaq; similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

19. quinti.

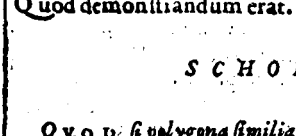


SCHOLION.

QVOD si polygona similia, fuerint aequilatera, & aequiangula, dividentur quoque in similia triangula, & numero aequalia, ductis e centris circulorum ipsa circunscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, aequilatera, & aequiangula A B C D E F, G H I K L M, quæ circunscribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducãtur N A, N B, &c. Dico triangula N C D, O I K, similia esse. Quoniam anguli C N D, I O K, æquales sunt; (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrunque spacium N, & O, quatuor rectis æquivalens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. dividitur in angulos & numero, & quantitate æquales, subtensos nimirum a basibus æqualibus, contentosque lateribus æqualibus.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum utrobique sit proportio æqualitatis; Similia erunt triangula N C D, O I K. Eademque est ratio de cæteris. At uero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negocio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, ut patet, habebunt utique eandem cum ipsis proportionem.

6. sexti.

15. quinti

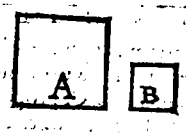


PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theore-

theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, ut constat ex 1. defin. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut hic apparet. 1. 2. 4.



SIT iam quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, ut dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in exemplo adducto superius apparet.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum.



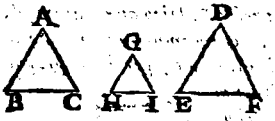
Hoc non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate: Vt perspicuum est in hac figura apposita.

THEOR.

20. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SINT rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis



rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiusdem rectilinei G H I; erunt per communem sententiam, anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cum ob eandem similitudinem latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea uidelicet, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei G H I; erunt quoque latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea nimirum, quæ angulos ambiunt æquales; Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea A B C, D E F. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

11. *quinti*

21. THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales,

nales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Constituantur que super A B, C D, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta A B I, C D K; Item super E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q, eritque ex æquo, ut A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib, uel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. Igitur ut A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod est propositum.



11. *sexti.*

22. *quinti.*

11. *quinti.*

EIDEM positis, sint iam dicta rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, esse quoque proportionales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H. Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, super quam describatur rectilineum R S V T, simile rectilineo E M, & ob id rectilineo G O, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, ut iam est ostensum, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoque ponitur E M, ad G O: Igitur erit ut E M, ad R V, ita E M, ad G O; Ac idcirco æqualia erunt R V, G O. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus, super rectas R S, G H, æquales. Quare erit ut E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, ut A B, ad C D. Igitur erit ut A B, ad C D, ita E F, quoque ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

12. *sexti.*

21. *sexti.*

11. *quinti.*

9. *quinti.*

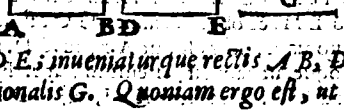
7. *quinti.*

11. *quinti.*

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV; Ponatur autem GH, maior quam
14. quinti. RS; erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. quod est propositum.

ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt recta AB, DE, esse æqualia. Si enim nō credátur æqualia, sit AB, maius, quam DE; inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, ut AB, ad DE, ita DE, ad G; Est autem AB, maior, quam DE: Erit quoque DE, maior, quam G; ac propterea multo maior AB, quam G. Vt uero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. Igitur cū AB, maior sit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione,



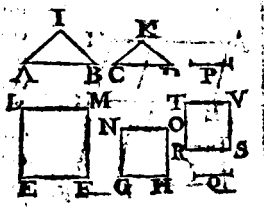
ne; quia & rectilineum ABC, minus ostenderetur rectilineo DEF; quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.

SCHOLION.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, ut hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, eo quoll & linea secunda sit æqualis tertiæ; manifestum est, quod proponitur.



BREVIVS. ita hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primo esse ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoque, ut ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Cum enim sit proportio rectilinei ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD; Itē proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH: erunt proportiones ABI, ad CDK; & EM, ad GO, æquales; quādoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium AB, ad CD; & EF, ad GH. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse, ut ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico esse quoque ut AB, ad CD, ita EF, ad GH. Cum enim sit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD; Item proportio EM, ad GO, duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD; & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI, ad CDK; & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod est secundum.



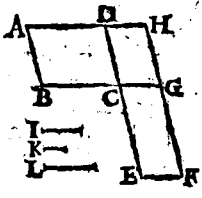
19. uel 20. sexti.

19. uel 20. sexti.

24. THEOR. 17. PROPOS. 23.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Coniungantur parallelogrammi ad angulos æquales, ita ut B C, C G, efficiant unam lineam rectam; Quo facto, cum anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H. Sumpta iam recta I, quacunque, inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K: Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H; Vt autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K; erit quoque ut A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut H C, ad C F, ita K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; hoc est, ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque



12. *sexti.*

1. *sexti.*
11. *quinti.*
22. *quinti.*

demque ratione oſtendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, ut B C, C E, efficiant unam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum. 33

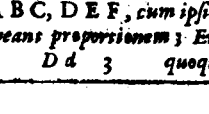
SCHOLION.

EXPEDITIVS idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, ut prius; Cum ſit ut A C, ad C H, ita B C, ad C G: & ut C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum. 1. ſexti.

DEMONSTRAT hoc in loco Federicus Commandinus nonnulla alia ad compoſitionem proportionum pertinentia non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonſtrationibus; Sunt autem ea, quæ ſequuntur.

TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam. I.

SINT triangula A B C, D E F, angulum C, angulo F, habentia æqualem. Dico proportionem trianguli A B C, ad triangulum D E F, compoſitam eſſe ex lateribus, hoc eſt, ex proportione B C, ad E F, & ex proportione A C, ad D F; Vel ex proportione B C, ad D F, & proportione A C, ad E F. Completis enim parallelogrammis C G, F H, erunt ea æquiangula; atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula A B C, D E F, cum ipſis, quorum ſunt dimidia, eandem habeant proportionem; Erit 23. ſexti. 15. ſexti.



quoque proportio A B C, *ad* D E F, *compositæ ex proportionibus laterum* B C, A C, *ad latera* E F, D F.

II. PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, *quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos* 23. *Sint enim tres proportiones* A, *ad* B; C, *ad* D; *&* E, *ad* F. *Oportet iam ex ipsis unã proportionem componere. Fiat ut* A, *ad* B, *ita* G, *ad* H; *& ut* C, *ad* D, *ita* H, *ad* I; *& ut* E, *ad* F, *ita* I, *ad* K. *Dico proportionem* G, *ad* K, *compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim composita sit ex proportionibus* G, *ad* H; H, *ad* I; *&* I, *ad* K, *per defin.* 5. *huius lib. composita etiam erit ex proportionibus* A, *ad* B; C, *ad* D; *&* E, *&* F; *quod his illæ sumptæ sint æquales.*

III. PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

SIT *proportio* A, *ad* B, *minor auferenda ex proportione maiore* C, *ad* D. *Fiat, ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E; *statuaturque* E, *terminus medius inter* C, *&* D. *Dico ablatam esse proportionem* A, *ad* B, *ex proportione* C, *ad* D, *reliquamque esse proportionem* E, *ad* D. *Cum enim proportio* C, *ad* D, *componatur ex proportionibus* C, *ad* E, *&* E, *ad* D: *Si proportio* C, *ad* E, *hoc est* A, *ad* B, *auferatur, relinquetur proportio* E, *ad* D.

IIII. TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateri-

bus

bus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

Sint triangula A B C, D E F, *angulum* A *angulo* D, *habentia æqualem. Dico esse* A B C, *ad* D E F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Ductis enim ad* A C, D F, *perpendicularibus* B G, E H, *erunt triangula* A B G, D E H, *æquiangula, ut constat ex coroll.* 1. *propos.* 32. *lib.* 1, *cum duo anguli* A, A G B, *duobus angulis* D, D H E, *sint æquales. Igitur erit, ut* G B *ad* B A, *ita* H F, *ad* E D: *Ut autem* G B, *ad* B A, *ita est rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* A B, A C. (*Nam si bases ponantur* G B, B A, *erit eorum eadem altitudo* A C.) *Et eadem ratione, ut* H E, *ad* E D, *ita est rectangulum sub* E H, D F, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Rectangulum igitur sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* A B, A C, *est, ut rectangulum sub* E H, D F, *ad rectangulum sub* D E, D F; *& permutando, rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* E H, D F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Sed ut rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* E H, D F, *ita est triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases* A C, D F, *altitudinesque easdem* B G, E H; *ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Quod est propositum.*



4. *sexti.*

1. *sexti.*

1. *quinti.*

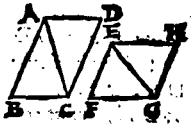
15. *quinti.*

41. *primi*

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa. V.

Sint parallelogramma A B C D, E F G H, *æquiangula inter se, quorum anguli* B, *&* F, *sint æquales. Dico esse,*

ut B D, ad F H, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Ductis enim diametris A C, E G, quæ angulos æquales B, F, subtendant, habebunt triangula A B C, E F G, angulũ B, angulo F, æqualem. Quare, ut iam demonstrauimus, erit, ut A B C, ad E F G, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Cum ergo parallelogramma B D, F H, eandem habeant proportionem, quam triangula A B C, E F G, ipsorum dimidia; Erit quoque ut B D, ad F H, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Quod est propositum.

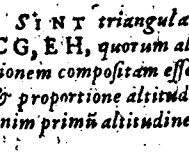


15. quinti.
11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent cõpositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

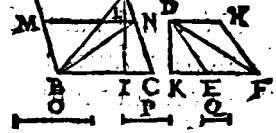
SINT triangula A B C, D E F, & parallelogramma C G, E H, quorum altitudines A I, D K. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis B C, ad basin E F, & proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K. Sint enim primũ altitudines æquales, bases uero uel æquales etiã, uel inæquales. Fiatque, ut B C, ad E F, ita L, ad M; Vt autem A I ad D K, ita M, ad N. Quo facto, erit M, ipsi N, æqualis, quod & A I ipsi D K, æqualis ponitur; Ac proinde erit L, ad N, ut L, ad M, hoc est, ut B C, ad E F. At uero, ut B C, ad E F, ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H. Igitur quoque erit, ut L, ad N, ita triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H; Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, basis B C, ad basin E F; & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis A I, ad altitudinem D K. Proportio ergo trianguli A B C, ad triangulum D E F, & pa-



7. quinti.
1. sexti.

& parallelogrammi C G, ad parallelogrammi E H, ex viſdem proportionibus eſt compoſita. Quod eſt propoſitum.

SINT iam altitudines A I, D K, inæquales, & A I, maior; baſes vero B C, E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt A I, ad D L, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abſciſſa deinde I L, æquali ipſi D K; ducatur per L, ipſi B C, parallela L M, ſecãs A C, in N, iungaturq; recta B N. Quoniam igitur eſt triangulum A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad



parallelogrammum C M, vt altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipſi I L, æqualem, hoc eſt, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propoſ. huius lib. oſtendimus: Et vt triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, ita eſt, baſis B C, ad baſin E F, (cum eadẽ ſit altitudo) hoc eſt, ita P, ad Q, erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc eſt, altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc eſt, baſis B C, ad baſin E F: Ex eiſdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod eſt propoſitum. 1. ſexti.

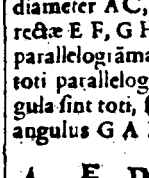
EODEM pacto oſtendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, compoſita eſſe ex proportione baſis E F, ad baſin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinẽ A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius, erit triangulũ D E F, ad triangulũ N B C, & parallelogrammũ E H, ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C, hoc eſt, vt Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, ſeu D K, ad A I, hoc eſt, vt P, ad O. Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, E F, 2. ſexti.

E F, ad B C, & ex proportione P, ad O, hoc eſt, D K, ad A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eiſdem proportionibus.

22. THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

ESTO parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctũ I, ducantur duæ rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogrãma circa diametrũ, nempe E G, F H, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe ſe. Quod enim æquiangula ſint toti, facile oſtendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam angulus G A E, idem eſt qui angulus B A D; & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum eſt E G, ipſi B D: Et eadẽ ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum ſit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, ut perſpicuum eſt ex 29. propos. lib. 1. uel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. erit ut A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa angulos B, & G, proportionalia ſunt. Rurſus erit ut B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item ut C A, ad C D, ita I A, ad I E. Ex æquo igitur, ut B C, ad C D, ita G I, ad I E; ac propterea & latera circa angulos B C D, G I E, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, eſſe proportionalia. Quare per definitionem, ſimile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte oſtendes parallelogrãmum



4. *ſexti.*

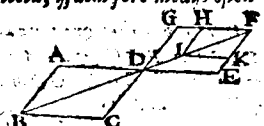
22. *quinti.*

mum F H, simile esse eidem parallelogrammo B D; atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum. 21. sexti.

SCHOLION.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius, esse talia, quæ habeant unum angulũ cum toto parallelogrammo communem, ut manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrãmi productam consistat parallelogrammum aliud, ita ut duo huius latera recta duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, uel certe illa his sint parallela, ijsdem fere mediis ostenderur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim A B C D, diameter B D, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammum D E F G, cuius duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, simile esse parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. Rursus quia anguli A D C, G D E, ad uerticem, sunt æquales, erunt his quoque oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula sunt G E, A C, parallelogramma. Quod autẽ latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulũ sit triangulo D G F; & triangulum B C D, triangulo D E F, ex constat ex propos. 29. lib. 1. Erit ut B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rursus ut A D, ad D B, ita G F, ad F D; & ut D B, ad D C, ita F D, ad F E; ac propterea ex æquo ut A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, & A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse.



34. primi

15. primi

34. primi

4. sexti.

Quare

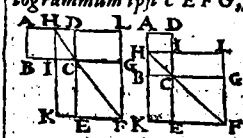
Quare similia sunt parallelogramma A C, G E. Quod si circa eandem diametrum constitat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonstrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, simile ipsi G E, ut Euclides demonstrauit: Atqui eidem G E, simile est quoq; A C, vt nunc ostendimus. Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod est propositum.

21. *sexti.*

SED *& absoluemus cum Peletario sequens problema.*

DATIS duobus parallelogrammmis æqui angulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint A B C D, C E F G; & ex A B C D, abscindendum sit parallelogrammum ipsi C E F G, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita ut sit una linea recta B C G, & propterea ut ad ppos. 15. lib. 1. demõstratum est, E C D, quoq; una recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H, secet uel latus A D, uel latus A B; & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogramum abscissum H C, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F; circa diametrum; Quare inter se similia, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.

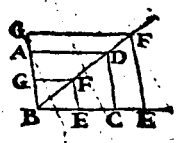


EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, ut fiat simile alteri. Sit enim augendum A B C D, ut fiat ipsi C E F G, simile. Coniungantur vti prius, & diameter F C, extendatur, donec in H, secet uel latus B A, protractum; uel latus D A, protractum. Deinde per H, ducatur H I, parallela ipsi A D, uel ipsi A B, donec secet vel C D, protractam, uel C B, protractam in I. Dico parallelogrãmum auctum H C, simile esse parallelogrammo C F. Nam si com-



compleatur totum parallelogrammum K L, consistens H C, C F, circa diametrum; Quare similia inter se erunt.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi, in hoc Scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia; Verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo A B C D, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus unum, nempe B C; Atque ex F, quolibet puncto vltra C, ipsi C D, parallela E P, ducenda, secans diametrum B D, productam in F; & per F, ducenda F G, parallela ipsi A D, occurrens rectæ B A, productæ in G. Erit enim parallelogrammum G E, simile similiterque positum ipsi A C, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, ut prius, seu figura indicat.

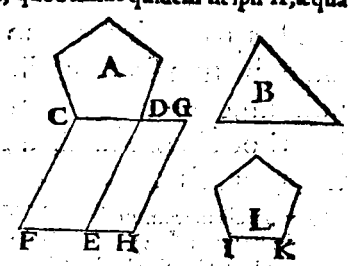


PROBL. 7. PROPOS. 25.

25.

DATO rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

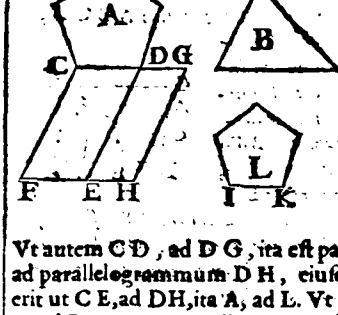
SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale uero ipsi B. Super C D, unum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constituatur parallelogrammum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis sit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipsi B; eritque C D G, linea una



44. *uel* 45. *primi.*

media

una recta, nec nō F E H, ceu demonſtratum fuit propos. 45. lib. 1. Inueniatur iam inter rectas C D, D G, tertia proportionalis I K, ſuper quam conſtituatur rectilineum L, ſimile ipſi A, ſimiliterque poſitū. Dico L, æquale etiā eſſe alteri rectilineo B. Cū enim ſint, 13. *ſexti.* 18. *ſexti.* pportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit p coroll. propos. 20. huius lib. ut C D, prima ad D G, tertiā, ita A, rectilineum ſuper primam C D, ad rectilineum L, ſuper I K, ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptū.



1. *ſexti.* Vt autem C D, ad D G, ita eſt parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiuſdem altitudinis. Igitur erit ut C E, ad D H, ita A, ad L. Vt autē C E, ad D H, ita eſt A, ad B, propter æqualitatem parallelogrammorum, & horum rectilineorum. Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; propterea q; æqualia erunt rectilinea B, & L. Eſt autem & L, ſimile ipſi A, per conſtructionem. Dato igitur rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituimus. Quod erat faciendum, 11. *quinti.* 9. *quinti.*

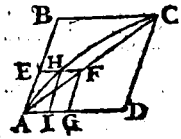
23. THEOR. 19. PROPOS. 26.

SI a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit, & ſimile toti, & ſimiliter poſitum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit.

Ex parallelogrammo B D, abſciſſum ſit pallelogrammū E G, ſimile ſimiliterq; poſitum, habens cum ipſo angulū cōmunem E A G. Dico E G, conſiſtere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ ſi fuerint una

linea

linea recta, perſpicuum eſt, cum A F, ſit diameter ipſius E G, & A C, diameter ipſius B D, parallelogrammum E G, conſiſtere circa diametrũ A F C, totius parallelogrammi. Quod ſi A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius paralle ogrammi diameter A C, ſecans latus E F, in H puncto, per quod ipſi F G, parallela agatur H I. Quoniã igitur parallelogramma B D, E I, ſunt circa eandem diametrum A H C, ipſa erunt ſimilia, ſimiliterq; poſita. Quare erit ut B A, ad A D, ita E A, ad A I: Sed ut B A, ad A D, ita quoque eſt E A, ad A G; quod parallelogramma B D, E G, ponantur ſimilia, ſimiliterque poſita. Igitur erit ut E A, ad A I, ita E A, ad A G. Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G; pars, & totum; quod eſt abſurdum.

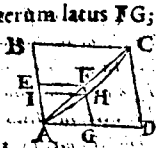


24. *ſexti.*

11. *quinti.*

9. *quinti.*

Quod ſi dicatur recta A H C, ſecare alterum latus F G; Tunc ducta H I, parallela ipſi E F; erunt rurſus ſimilia parallelogramma B D, I G, ſimiliterq; poſita. Quare erit ut D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed ut D A, ad A B, ita quoque eſt G A, ad A E, ob ſimilitudinem parallelogrammorum B D, E G; Igitur erit ut G A, ad A I, ita G A, ad A E; ideoq; æquales erunt rectæ A I, A E; pars & totum: Quod eſt abſurdum. Itaq; ſi a parallelogrãmo parallelogrammum ablatum ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.



24. *ſexti.*

11. *quinti.*

9. *quinti.*

SCHOLION.

ALITER *idem theorema demonſtrabimus oſtenſiue, hoc modo. Diuiſis lateribus A B, B C, bifariam in punctis H, I; ſiue punctum H, cadat in punctum E; ſiue ſupra, ſiue infra; ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur, propter ſimilitudinem parallelogrammorum, eſt ut A B, ad B C, ita A E, ad E F; Vt autem tota A B ad totam B C, ita eſt dimidia H B; ad dimidiam B I; Erit ut H B, ad B I, ita A E, ad E F. Triangula igitur H B F, A E F, cum habeant circa angulos*

15. *quinti.*

11. *quinti.*

angulos æquales B, F, latera proportionalia, erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniã uero recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, ducitur concipitur, parallela quoq; est rectæ HI, propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc cõstituti ABC, proportionaliter essent sectæ in H, & I, utpote bifariam; efficitur, ut ducta recta AC, eadem fiat quæ AF, transeatq; per punctum F; cum ex puncto A, solum una linea parallela rectæ HI, possit duci, ut manifestum est. Confistunt ergo BD, EG, parallelogramma circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

6. sexti.

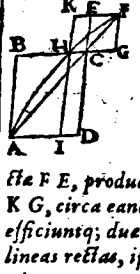
28. primi

2. sexti.



QVOD si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra aliud, hac tamen lege, ut ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem fere medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungãtur, ut lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, linea DC, CE, unam quoq; lineã rectam componant. Dico parallelogrãma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, unam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, nõ faciunt unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, productæ in K. Quoniam igitur parallelogrãma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, productam consistunt, efficiuntq; duæ rectæ BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit ut HB, ad BA, ita FK, ad KH. Habet autem CB, maior ad BA, maiorem proportionem, quam HB, minor ad eandem BA; &

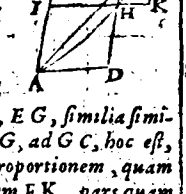
8. quinti.



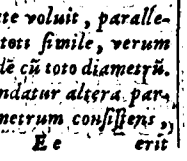
est

est ut C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similiterque descripta: Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc est, quam F K, ad K H. Quare ob rem cum F E, ad K H, maiorem habeat proportionem, quam F K, ad eandem K H, erit F E, maior quam F K; pars quam totum: Quod est absurdum. 10. quinti.

QVOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ F G, protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut H D, ad D A, ita F K, ad K H. Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionem, quam H D, ad D A; Et est ut C D, ad D A, ita F G, ad G C, propterea quod parallelogramma B D, E G, similia similiterque posita sunt concessa; Igitur & F G, ad G C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad K H; ideoque F G, maior erit, quam F K, pars quam totum: Quod est absurdum. 8. quinti. 10. quinti.



OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum B D, E G, anguli B, E, sunt æquales; estque ut A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia, ac idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo communi angulo B C F, erunt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales; sed hi inter parallelas B C, E F, æquales sunt duobus rectis. Quare & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales; Ac propterea A C, F C, unam component rectam lineam. Quod est propositum. 6. sexti. 29. primi 14. primi



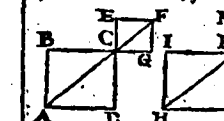
RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiã similiter positũ, vt ostẽdatur circa eandẽ cũ toto diametrũ. Nam si ex altera parte longiori B D, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistens,

24. sexti. erit E G, ipsi B D, simile similiterque positum. At vero si in



rectangulo I L, quod sit aequilaterũ ipsi B D, sumatur H M, aequalis ipsi E F, & M N, aequalis ipsi A E, &c. erit: quidem rectangulum M O, aequale & simile rectangulo E G, propter aequalitatẽ laterum, & angulorum, qui sunt recti, & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto I L, diametrum.

IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis, quorum unũ est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se



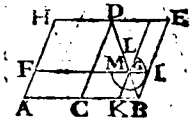
connexa, ut duo latera unius sin directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G, & I L, M O; in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At vero M O, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cũ prorsus sit aequale ipsi E G. Nam K M, aequalis est ipsi E F, & M N, ipsi E C, &c.

26. THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod a dimidia describitur; maximũ id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammũ simile existens defectui.

DETVR recta A B diuisa bifariam in C, superq; eius dimidiam B C, constituatur quodcunque parallelogrammũ C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum paralle-

parallelogrammum A B E H, erit parallelogrãmum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundũ A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum, deficiensque parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quę secundum A B, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, utcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B, B E; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. Quoniam uero complementa C G, G E, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoq; cõmuni C G; æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius sit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonẽ parallelogrãmum adhuc D G,) erit quoq; A D, æquale existens ipsi C E, propter bases æquales A C, C B, maius quam parallelogrammum A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemq; modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, ut puncta G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam dimidia A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.



24. *sexti.*
43. *primi*
36. *primi*
36. *primi*
43. *primi*

ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. Parallelogramma F D, D I, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, sibi æquale, parallelogrammo D G; Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Adiecto igitur communi C F, maius erit A D, quam A G, parallelogrãmo eodem D G.

QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta



HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq; rectis AK, BE, protractis in H, & M; Iteꝝ ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammũ AG, applicatum secundum rectam AB, deficiẽs parallelogrammo FM, quod ipsi CE, est simile similiterque positũ, cum sit circa eandem diametrum cum CE; Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim
24. sexti
34. primi
CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, deoque æqualia
36. primi
parallelogramma HD, DM. Cum igitur DM, sit æquale complemento DF, erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL; Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis cõcludes AD, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam dimidia AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidia AC, qualis est AK, in priori figura, uel minorem, cuiusmodi est AF, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur uel in diametro BD, uel in ea producta ad partes D.

27. PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ simi-

lis

lis fit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

A D datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B bifariam in E, super medietatem E B, describatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D; similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale est ipsi C, cum sit applicatum ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D, factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus erit. Nam cum per præcedentem ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari ullum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora: Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoq; sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua uero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad ppos. 45. lib. 1.) & cõstituatur parallelogrammũ K L M N, simile quidem ipsi D, seu ipsi E G, æquale uero excessui inuento I, ut sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul, & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit ut E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, uel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, uel minus, ut constat. Quare abscissis rectis F O, F Q, quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O, erit hoc ipsi



18. *sexti.*

25. *sexti.*

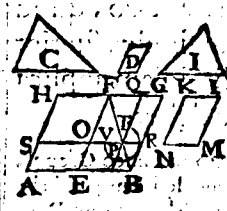
L N, æquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi E G : atque adeo circa eandem diametrum cum E G, consistet, quæ sit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, adrectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo P B, & simile est ipsi E G, & propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. Nam cum P G, æquale sit complemento P E; si addatur commune P S, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, quod æquale est ipsi E R, propterea quod æquales E A, B B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C. (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

26. sexti.

24. sexti.

43. primi

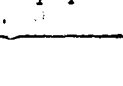
36. primi



SCHOLION.

MOVENT hoc in loco dubium quoddam, Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verumetiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Quæ de re consule eorum commentarios.

PRAETEREA illud antemex dictis est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factæ continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C. Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C B; continebitur quoq; A C, sub segmentis A D, D B, per applicationem factis.



PROBL.

PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E, super dimidiam E B, constituatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque 18. *sexti.*
positum. Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G con 14. *secundi*
stituatur quadratum H, æquale, cui quidem fiat paralle
logrammum I K L M, æquale, simile uero ipsi E G, simili- 25. *sexti.*
terque positum; eritque propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod cõstructũ est rectilineo C, una cum parallelogrammo E G, æquale. Cum igitur ob similitudinẽ M K, E G, sit ut M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoq; latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, uel minora, esset quoque M K, uel æquale ipsi E G, uel minus, ut perspicuum est. Productis igitur F E, F G, ut rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrãmo O N, erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cũ sit æquale ipsi M K, & simile. Quare O N, E G, circa eandem diametrum consistent, quæ sit F P. Productis iam A B, G B, 26. *sexti.*
ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S; erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, quod simile est 24. *sexti.*
ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. Nam cũ A O, E R, sint æqualia; & E R, æqua 36. *primi*



43. primi. le complementa B N, erit & A O, ipsi B N, æquales. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P N. At qui gnomon E P N, æqua lis est rectilineo C, (nam cum M K, hoc est, O N, æquale, sit rectilineo C, una cum E G; Si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P N, & rectilineū C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

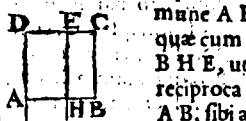


29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatã, extrema, ac media ratione secare.

Sit recta A B, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato A B C D; ad latus D A, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, erit q; propterea A F, quoq; quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet deinde recta E I, rectam A B, in H. Dico A B, in G, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint D F, & A C; si demantur cõmune A E, remanebunt æqualia G H, H C; quæ cum habeant angulos æquales A H F, B H E, utpote rectos; erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit ut E H, hoc est, ut A B, sibi æqualis, ad H F, hoc est, ad A H, sibi æqualem, ut A H, ad H B. Quare secta est A B, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineã terminatam, &c. Quod erat faciendum.

29. sexti.

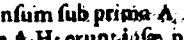


14. sexti.

ALITER

ALITER. ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitq; rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; erunt ipsæ proportionales, ut AB, quidē ad AH, ita AH, ad HB. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione. 17. sexti.

ALITER totum problema conficiemus. Diuidatur AB, in C, ita ut rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. Erunt enim rursus, ut prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum. 11. secundi. 17. sexti.



SCHOLION.

HABET admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes utilitates, proprietatesq; quas in libris Stereometriæ manifestum erit, ut hō sine causa a plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilē eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem; ab alijs uero simpliciter nocetur diuisa proportionaliter. 3

THEOR. 11. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum subtendēte descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ a lateribus rectū angulum continentibus describuntur.

TRIANGVLVM rectangulum sit ABC, habens angulum BAC, rectū; describaturq; super BC, quæcunq; figura rectilinea BCDE, cui similes similiterq; positæ super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK; erit per corollarium propos. 8. huius 18. sexti.

huius lib. ut B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare ut B C, ad C K, prima linea ad tertiã, ita figura B D, ſuper primã, ad figuram C H, ſuper ſecundam ſimiliter poſitã, per corol. propoſ. 19. uel 20. huius lib. & conuertendo ut C K, ad B C, ita figura C H, ad figurã B D. Non ſecus oſtendetur, eſſe quoque ut B K, ad B C, ita figuram B G, ad figurã B D; cum tres lineæ B C, B A, B K, ſint quoq; proportionales, &c. Quoniam igitur eſt ut C K, prima quantitas ad B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut B K, quinta quantitas ad B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad
24 *quinti.* B D, quartam; erit ut prima C K, cum quinta B K, ad B C, ſecundam, ita tertia C H, cum ſexta B G, ad B D, quartã. Sunt autem prima C K, & quinta B K, ſimul æquales ſecundæ B C; ergo tertia C H, & ſexta B G, ſimul æquales quoque erunt quartæ B D. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. Quod erat oſtendendum.

8. *ſexti.* ALITER. Cum triangulo A B C, ſimile ſit triangulũ K A C, ſintq; homologa latera ipſorum B C, C A; (Nam eſt ut B C, ad C A, in triãgulo A B C, ita C A, ad C K, in triãgulo
19. *ſexti.* K A C) habebit triangulũ K A C, ad triangulũ A B C, duplicatã proportionem eius, quam habet C A, ad B C. Habet autẽ
19. *uel* 20. *ſexti.* & figura C H, ad figuram B D, proportionẽ duplicatã proportionis C A, ad B C. Quare erit ut triangulũ K A C, ad
11. *quinti.* triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione oſtendetur eſſe, ut triangulũ K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rurſus eſt, ut K A C, prima quantitas ad A B C, ſecundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut K B A, quinta ad ad A B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad B D, quartam; erit &
24. *quinti.* prima K A C, compoſita cum quinta K B A, ad ſecundam A B C, ita compoſita tertia, C H, cum ſexta B G, ad quartam B D. Sunt autẽ K A C, K B A, prima & quinta ſimul, æquales ſecundæ A B C: Igitur & C H, B G, tertia & ſexta ſimul, æquales erunt quartæ B D.

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, ſecundam quantitatem, ita eſt figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem,

titatem, cum utraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit ut quadratū rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundā quantitatē, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nempe quadratū rectę A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundū, hoc est, ad quadratū rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, nempe ad figuram B D: Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt. 19. vel 20 sexti. 24. quinti. 47. primi

SCHOLION.

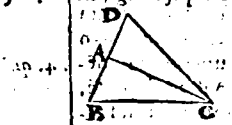
VIDES igitur, longe esse uniuersalius theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, ut propos. 47. primi lib. monuimus. Est tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, adhuc uniuersalius hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisque etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque similibus, & similiter positis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano nō aliter, quam 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab uno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum A B C, sitque figura quæuis super latus B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulū B A C, esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sit ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniā igitur angulus C A D, rectus est, erit figura super C D, (quæ similis

31. sexti. similis sit ei, quæ super B C, similiterque posita) describatur æqualis figuris super A D, A C, descriptis, quæ et ipsæ similes sint, similiterque positæ: Est autem figura super A D, æqualis figuræ super A B, ob æqualitatem laterum. Quare figura super C D, æqualis erit figuris super A B, A C. Cum igitur figuræ super B C, ipsis figuris super A B, B C, æquales ponantur; erunt figuræ super C D, B C, inter se æquales, ac propterea rectæ C D, B C, æquales erunt, ut conflat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus A B, A C, trianguli A B C, & basis D C, ostensa est quoque æqualis basi B C; erunt anguli

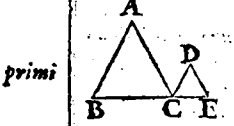


8. primi D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit B A C; quod est propositum.

30. THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela; tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineã collocata reperiẽtur.

HABEANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, ut quidem A B, ad A C, ita D C, ad D E; componanturque ad angulum A C D, ita ut latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua B C, C E, rectam cõponere lineam. Cum enim parallelæ sint A B, D C, erit angulus A, alterno A C D, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem A C D, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent



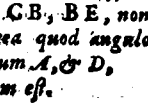
29. primi æquales. Quoniam igitur triangula A B C, D C E, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erũt inter

inter se æquiãgula, habebuntq; æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis D C E, A C D, hoc est, angulo A C E, æquales. Rursus addito communi A C B, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis; ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: Ac idcirco BC, CE, unam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum. 6. sexti. 32. primi 14. primi

SCHOLION.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula cõponuntur; veluti in schemate theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quẽ triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeoque B C, C E, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.

QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliqua hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triãgula A B C, D B E, habent duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D B, proportionalia, vt quidem A B, ad A C, ita D E, ad D B; compositaque sunt ad angulum CBD, ita vt eam homologa latera A B, D E, quam A C, D B, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera C B, B E, non constituunt vnam lineam rectam; propterea quod angulo C B D, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.



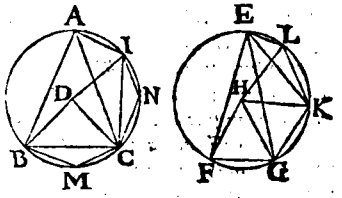
THEO-

32.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper uero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem insistat anguli B D C, F H G; ad circunferentias uero anguli B A C, F E G. Dico esse ut arcū B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G; & angulum B A C, ad angulum F E G; & sectorem B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur, ad sectorem F H G, quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, applicentur ipsis in circulis æquales rectæ, C I, quidem ipsi B C, At uero G K, K L, ipsi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales sunt rectæ B C, C I, erunt quoque æquales arcus B C, C I, ac propterea anguli B D C, C D I, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus F G, G K, K L, & anguli F H G, G H K, K H L. Quā multiplex ergo est arcus B C I, ipsius arcus B C, tam multiplex erit angulus B D I, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui B C I, anguli B D C: Et quā multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G, tam multiplex erit angulus F H L, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcū F G K L, insistentium, anguli F H G: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli B D I, F H L, in quot arcus æquales secti sunt arcus B C I, F G K L. Quoniā uero



1. *quarti.*

28. *tertij.*

27. *tertij.*

uero si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, necessario angulus B D I, angulo F H L, æqualis est; Ac proinde si arcus B C I, maior fuerit arcu F G K L, necessario angulus B D I, maior est angulo F H L; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & angulus B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab F G K L, arcu, & angulo F H L, æque multiplicibus secundæ magnitudinis F G, & quartę F H G; uel una æqualia erũt; uel una excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. 27. tertij.

Quare quæ proportio est arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit anguli B D C, tertiæ magnitudinis, ad angulum F H G, quartam magnitudinem. 6. defin. 5.

QVONIAM uero, ut angulus B D C, ad angulum F H G, ita est angulus B A C, ad angulum F E G, cum illi horum sint dupli; perspicuum est, ita esse quoque angulum B A C, ad angulum F E G, ut est arcus B C, ad arcum F G. Quod tamen eisdem argumentis demõstrari potest, quibus usi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducãtur rectæ I A, K E, L E. 15. quinti 20. tertij. 11. quinti.

CONSTITVANTVR iam in segmentis B C, C I, anguli B M C, C N I, qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus B A C, C B A I. Quare similia erunt segmenta B M C, C N I, atque adeo inter se æqualia, propterea quod sint super rectas B C, C I, quæ inter se sunt æquales. Additis igitur triangulis B D C, C D I, quæ æqualia quoque sunt, fient sectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector B D I, sectoris B D C, quã est multiplex arcus B C I, ipsius arcus B C. Similiter ostendemus, sectorem F H L, tam multiplicem esse sectoris F H G, quam multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G. Quoniã uero si arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, sector quoque B D I, sectori F H L, æqualis est; (ceu in sectoribus B D C, C D I, ostensum fuit.) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & sector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & sectore F H L, æque multiplicibus secundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; uel una æqualia erunt; uel una excedent; si ea sumantur, quæ 27. tertij. 24. tertij. 4. primi

6. defin. 5. quæ inter ſe reſpondent. Quamobrem quæ proportio eſt arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, ſecundam magnitudinem, ea erit ſectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad ſectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM. I.

11. quinti. HINC manifeſtum eſt, ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, ut eſt angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem eſt, proportioni arcus ad arcum. Quare & inter ſe eadem erunt.

COROLLARIVM. II.

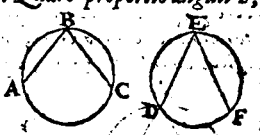
PERSPICVVM quoque eſt, vt eſt angulus ad centrum ad quatuor rectos, ita eſſe arcum ſubtenſum illi angulo ad totam circunferentiam. Et contra, ut ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ita eſſe totam circunferentiam ad arcum illi angulo ſubtenſum. Nam ut eſt angulus in centro ad angulum rectum in centro, ita eſt
33. ſexti. arcus illi angulo ſubtenſus ad quadrantem angulo recto ſubtenſum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circunferentiã, per ea, quæ ad 4. propos. lib. 5. demonſtrauimus. Quod eſt primum. Quoniam igitur eſt vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo ſubtenſus ad totam circunferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circunferentia ad arcũ angulo in centro ſubtenſum. Quod eſt ſecundum. Verum hoc etiam ita demonſtrabitur. Cum ſit, vt angulus rectus in centro ad
33. ſexti. angulum in centro, ita quadrans angulo recto ſubtenſus ad arcum illi angulo ſubtenſum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 4 lib. 5. oſtendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circunferentia, ad arcum illi angulo ſubtenſum. Quod eſt propoſitũ.

SCHOLION.

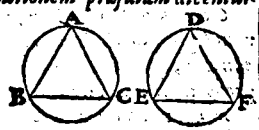
CAETERVM *ex theoremate hoc luce clarius colligit angulũ, qui circunferentiæ alicui inſiſtit, referendum eſſe ad arcũ, qui baſis eſt ipſius anguli, non autem ad arcum in quo exiſtit. Non enim eadem eſt proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, ſi ſumantur arcus, in quibus anguli exiſtunt, vt vult Euclides in propoſito hoc theoremate. Sint enim circuli*

æquales

æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentiam cõstituti sint B, E, maior quidem B, minor autem E. Quo posito erit arcus A C, maior arcu D F, ac propterea reliquus arcus A B C, minor reliquo arcu D E F. Quare proportio anguli B, ad angulũ E, est maioris inæqualitatis; proportio uero arcus A B C, ad arcum D E F, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderint, quales sunt arcus A C, D F, tum demũ erit angulus B, ad angulum E, ut arcus A C, ad arcum D F, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.



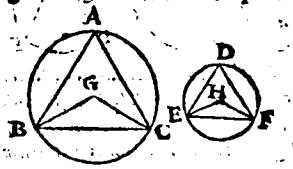
NON obscure quoque ex hoc theoremate deduci potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad integras circunferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea qualis pars est una circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit alia circunferentia similis totius suæ circunferentiæ; veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentias constituantur æquales B A C, E D F; Quo posito, segmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circunferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circunferentias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, arcus B C, E F, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circunferentias B A C, E D F, esse quoque æquales. Quare ad totas circunferentias, quæ æquales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt: Atque idcirco, quæ pars est arcus B A C, totius circũferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D.



26. tertij.

SINT secundo duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circunferentias constituantur æquales BAC, EDF. Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circunferentias: Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales, cum hi illorum dupli existant. Quare quatuor recti ad angulum G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum H. Atqui ut quatuor recti ad angulum G, ita est tota

20. tertij.



7. quinti.

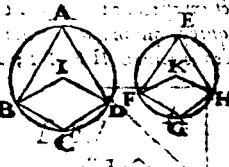
circunferentia ABCA, ad arcum BC. Et ut quatuor recti ad angulum H, ita est tota circunferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. Igitur ut tota circunferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circunferentia DEFD, ad arcum EF. Dividendo ergo erit, ut arcus BAC, ad arcũ BC, ita arcus EDF, ad arcum EF. Et convertendo rursus, ut arcus BC, ad arcũ BAC, ita arcus EF, ad arcũ EDF. Ac propterea componendo, ut circunferentia tota ABCA, ad arcum BAC, ita circunferentia tota DEFD, ad arcum EDF. Et rursus convertendo, ut arcus BAC, ad totam circunferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circunferentiam DEFD. Quocirca quæ pars est arcus BAC, totius circunferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circunferentiæ DEFD.

11. quinti.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales; quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

MANIFESTVM etiam est ex dictis, angulos insistentes arcubus circulorum similibus, sive ad centra, sive ad circunferentias insistant, æquales esse inter se. Sint enim in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, arcus similes BCD, FGH, quibus insistant, ad centra quidem anguli I, & K, ad circunferentias autem anguli A, & E. Dico tam illos, quam hos esse inter se æquales. Constituantur enim in dictis arcubus anguli BCD,

BCD, FGH, *qui æquales erunt, ex defin. segmentorum similium; Sunt autem tam anguli* C, *&* A, *quam* G, *&* E, *duobus rectis æquales: Ablatis igitur æqualibus* C, *&* G; *reliqui* A, *&* E; *ac proinde eorum dupli* I, *&* K, *æquales erunt.*



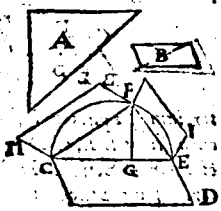
23. tertij.

VICISSIM *quoq; liquet, arcus, quibus insistunt siue ad centra, siue ad circumferentias, anguli æquales, similes esse. Nã si anguli* A *et* E, *fuerint æquales; erunt & reliqui duorũ rectorũ* C, *&* G, *æquales. Igiũ, p definitionẽ, arcus* BCD, FGH, *similes sunt, quibus dicti anguli* A, *&* E, *insistũt. Quod si* I, *&* K, *æquales sint, erũt et eorũ dimidij* A, *et* E, *æquales. Quare, et prius, arcus* BCD, FGH, *similes sunt.*

QVONIAM *vero Euclides multa duxit de inuentione linearũ proportionaliũ, nihil vero de superficierũ, vel planorum proportionaliũ inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorũ multa circa inuentionẽ superficierũ proportionaliũ versantur, scitu nõ iniucunda, loco appẽdicis, partim ex paritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam, quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur. Hinc autem exordium capiemus.*

A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum. I.

SIT ex rectilineo A, *auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterque posita rectilineo* B, *relinquatq; rectilineum eidem* B, *simile, & similiter positũ. Cõstituatur rectilineũ* CD, *æquale quidẽ ipsi* A, *simile vero ipsi* B, *superq; vnĩ eius latus* CE, *semicirculus describatur* CFE. *Deinde ablata parte tertia* GE, *imperata videlicet, ex* CE, *agatur* GF, *ad* CE, *ppendicularis, cõnectanturq; rectæ* CF, EF, *sup quas cõstituantur rectilineæ*



25. sexti.

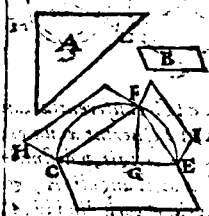
9. sexti.

I

18. sexti.

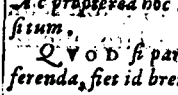
18. sexti. 31. tertij. 31. sexti.

F H, F I, similia similiterque posita ipsi C D. Dico igitur factum esse, quod iubetur. Cum enim angulus C F E, rectus sit, quippe qui in semicirculo existit; erit rectilineum C D, aequale rectilineis H F, F I; atque adeo si auferatur rectilineum F I, simile ipsi B, ex rectilineo C D, hoc est, ex sibi aequali A, relinquetur rectilineū H F, simile quoque ipsi B. Quod autem rectilineum ablatum F I, sit tertia pars rectilinei C D, ita ostendetur. Quoniam est ut recta C G, ad G F, ita recta C F, ad F E, eo quod triangula, C G F, C F E, sint similia: Habet autem C G, ad G E, proportionem duplicatam proportionis C G, ad G F, propterea quod proportionales sint tres rectae C G, G F, G F, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectilineum H F, ad rectilineum F I, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum C F, F E; Erit ut recta C G, ad G E, ita rectilineum H F, ad rectilineum F I; quandoquidem hae proportiones duarum aequalium proportionum duplicatae sunt. Componendo igitur erit, ut C E, ad G E, ita duo rectilinea H F, F I, simul; hoc est, rectilineum C D, quod est illis aequale, ad rectilineum F I. Est autem C E, ipsius G E, tripla, per constructionem; Igitur & rectilineum C D, triplum erit rectilinei F I. Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.



4. sexti. 8. sexti. 19. vel 20. sexti. 1

Quod si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammum B C, sibi aequale, & ex latere B D, auferatur D E, tertia pars imperata, & per E, agatur ipsi C D, parallela E F. Dico E C, tertiam esse partem ipsius B C, hoc est, rectilinei dati A. Cum enim sit ut D E, ad D B, ita E C, ad C B; sit autem per constructionem D E, ipsius D B, pars tertia; erit & E C, ipsius C B, tertia pars. Quod est propositum.



45. primi 1. sexti.

II.

Dvobvs datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

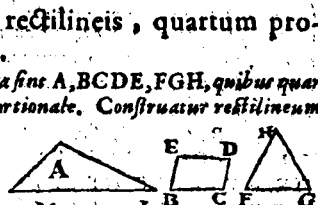
SINT

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inuenten-
dum sit tertium proportionale. Constituatur ipsi A, rectil i-
neum æquale EFG, simile vero similiterque positum ipsi BCD. 25. sexti.
Deinde lateribus homologis EF, BC,
inueniatur tertia linea proportionalis 11. sexti.
HI, super quam constituatur rectilineũ
HIK, simile similiterque positum ipsis 18. sexti.
EFG, BCD. Dico HIK, esse tertium
proportionale. Cum enim proportiona-
les sint rectæ EF, BC, HI; erunt & rectilinea EFG, BCD, 22. sexti.
HIK, ab illis descriptæ (cum sint similia, similiterque posita)
proportionalia. Conuerso EFG, per constructionem, æquale
sit ipsi A; erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia.



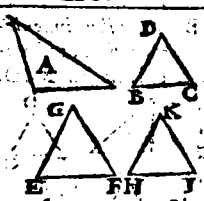
TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire. III.

TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quar-
tum sit inueniendum proportionale. Construatur rectilineum
IKLM, æquale quidem 25. sexti.
ipsi A, simile vero simili
terq; positum ipsi BC-
DE. Tribus deinde re-
ctis IK, BC, FG, inuen
ea quarta proportionali 12. sexti.
NO, constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, 18. sexti.
simile similiterque positum. Dico NOP, rectilineum esse quar-
tum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG,
NO, sint proportionales, erunt & rectilinea similia similiterq;
posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. 22. sexti.
Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & qua-
tuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia.



DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire. IIII.

SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inuenien-
dum est proportionale. Constituatur rectilineum EFG, æqua- 25. sexti.
le ipsi A, & simile similiterque positum ipsi BCD. Duabus
deinde rectis EF, BC, inuenta media proportionali HI, con- 13. sexti.
struatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterq; posi- 18. sexti.



tum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ EF, HI, BC, erunt quoque rectilineæ ab ipsis describptæ EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita, &c.

28. sexti.

ALITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. Constituatur ipsis A, æquale parallelogrammum quodcunque CDEF; Ipsi vero B, æquale parallelogrammum EGHI, simile vero similiterque positum ipsi CDEF. Connectanturque hæc parallelogramma ad angulos æquales, ut DE, EI, efficiant unam lineam, ac propterea, per ea, quæ ad 15. propos. 1. lib. demonstrauimus, una quoque linea componatur ex FE, EG; perficiaturque totum parallelogrammum KL. Dico vtrumlibet EK, vel EL, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint, similiterque posita DF, GI, erit vt DE, ad EF, ita EI, ad EG. Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG. Vt autem DE, ad EI, ita DF, ad EK; & vt FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI, &c.



45. primi

25. sexti.

1. sexti.

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DF, GI, similia sint, & similiterque posita, consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, æqualia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI, eo quod vtraque proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI.

26. sexti.

1. sexti.

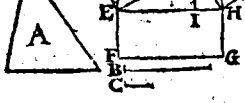
V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia cõstituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, datæque proportio rectæ B, ad C, oporteatque constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantque proportionem, quam B, & C, ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiuis D. Constituatur rectilineum EFGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi D. Diuiso deinde

25. sexti.

deinde latere eius E H, in I, secundum proportionem B, ad C, (quod facile fiet, si conficiatur una linea ex B, & C. Nam sumpta similiter secanda erit E H, &c.) describatur circa E H, semicirculus E K H, & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, connectanturq; rectæ E K, H K. Describantur iam ex E K, K H, rectilineæ E K D M, K H N O, ipsi E G, vel ipsi D, similia similiterq; posita; quæ dico æqualia etiã esse ipsi E G, seu ipsi A, habereq; ipsius proportionem datam B, ad C. Cum enim anguli E K H, in semicirculo existens rectus sit, erunt rectilineæ E L, H O, æqualia rectilineo E G, cũ sint similia inter se, similiterq; descripta. Quoniam uero est, ut E I, ad I K, ita E K, ad K H, cum triangula E I K, E K H, similia sint; Est autẽ E I, ad I H, in proportione duplicata proportionis E I, ad I K, quod tres E I, I K, I H, sint, ex corollario propos. 8. lib. huius, proportionales: Item E L, ad H O, in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum K H; erit ut E I, ad I H, hoc est, ut B, ad C, ita E L, ad H O. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo æqualia E L, H O, quæ similia sunt, similiterque posita dato rectilineo D, habentq; proportionem inter se datam B, ad C.



10. sexti. 18. sexti. 31. tertij. 31. sexti. 4. sexti. 20. sexti.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio rectæ B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorũ latera homologa proportionẽ habeãt, quã B, ad C. Inuẽta ipsis B, C, tertia proportionali E, fiat rectilineũ F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positũ ipsi D. Diuisoq; latere F H, in I, ẽm proportionẽ B, ad E; describãtur circa F H, semicirculus F K H; et ex I, ducãtur ad F H, perpẽdiculares I K,



IK, connectantúrque rectæ FK, HK. Describantur iam ex FK, HK, rectilineæ FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similes, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumque latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. Cum enim angulus FKH, in semicirculo rectus sit, erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoque & rectilineo A, æqualia. Quoniã vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH: Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK, (quod ex 1. 1. 1. proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) Ac propterea in proportione duplicata proportionis laterũ homologorũ FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex cõstructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad FK, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt.



31. tertij. 31. sexti. 4. sexti.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.

DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendũ, simile similiterq; positum ipsi C. Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autẽ similiterque positũ ipsi C. Itẽ ipsi B, æquale constituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positũ. Deinde rectilinea DEF, GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituant angulum EFH, rectũ, cui subtendatur recta EH, ex qua describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C. Perspicuum autem est EHI, æquale esse duobus DEF, GFH; atque idcirco duobus A, & B.



25. sexti. 18. sexti. 31. sexti.

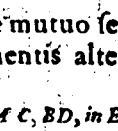
BREVIVS. *Constituatur parallelogrammũ æquale duobus*

bus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. Si enim huic parallelogrammo constituerimus æquale rectilineum E H I, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum E H I, æquale duob⁹ rectilineis A, B, & simile, similiterq; positū rectilineo C. 25. sexti.

VIII.

SI in circulo duæ rectæ lineę se se mutuo secuerint: Erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca.

IN circulo A B C D, se mutuo secent rectæ A C, B D, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmentis B E, E D. Hoc est, esse vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel ut A E, ad E D, ita B E, ad E C. Cum enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub B E, E D, contento; erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.

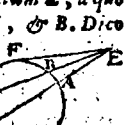


35. tertij. 14. sexti.

IX.

SI extra circulum sumatur punctū aliquod, ab eoque in circulum cadāt duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hęc media proportionalis inter quamlibet rectam, quę circulum secet & eius segmentum exterius.

EXTRA circulum A B C D, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ E C, E D, secantes circulum in A, & B. Dico rectas E C, E B, esse reciprocas rectis E D, E A: Hoc est, esse, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B: Vel ut E C, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, tangente circulum in F, erit rectangulum sub E C, E B, quadrato rectæ E F, æquale; Item rectangulum sub E D, E A, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula sub E C, E B, & sub E D, E A, æqualia erunt: Ac propterea latera eorū circa angulos æquales reciproca. Quoniā autē quadrato rectæ E F, æquale est rectangulū sub E C, E B: Item rectangulū sub E D, E A, erunt eæ rectæ E C, E F, E B. Itemq; tres

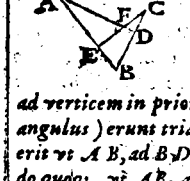


36. tertij. 14. sexti. 36. tertij.

tres E D, E F, E A, proportionales, atque adeo E F, media proportionalis inter quamlibet lineam quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

X. SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & a duobus eorum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum una inter terminū, & sectionē, altera uero inter eundē terminū, & suā perpendicularem interijcitur, alijs duab⁹ eodē modo inclusis reciprocę.

DVAE rectæ A B, C B, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares, A D, quidem ad C B, at uero C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas ultra B, si angulus A B C, fuerit obtusus; in ipsas uero introrsum, si idem angulus acutus fuerit, ut figura indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior uero inter sectionem B, & perpendicularē suam C E, quæ nimirum ad ipsam A B, ducitur) reciprocas esse duabus C B, B D, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt A B, ad B C, ita B D, ad B E. Vel vt A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cum enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales sint angulis C B E, C E B, trianguli C B E. (Nā A D B, C E B, recti sunt; & A B D, C B E, ad verticem in priori figura, in posteriori autem unus & idem angulus) erunt triangula A B D, C B E, æquiangula. Quare 4. sexti. *erit vt A B, ad B D, ita C B, ad B E. Ac propterea permutando quoq;, vt A B, ad B C, ita B D, ad B E. Quod est propositum.*



PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium A D, C E, in posteriori figura, se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula A F E, C F D, sint æquiangula; erit 4. sexti. *vt A F, ad F E, ita C F, ad F D: Et permutando quoque, vt A F, ad C F, ita F E, ad F D.*

XI. IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum

grammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

IN *parallelogrammo A B C D, duæ rectæ E F, G H, lateribus A D, D C, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma E G, G F, B I, I C, esse proportionalia. Cũ enim sit, vt E I, ad I F, ita E G, ad G F: Item vt E I, ad I F, ita B I, ad I C; Erit quoque vt E G, ad G F, ita B I, ad I C, quod est propositum.*



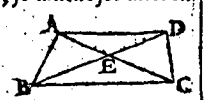
1. *sexti.*

11. *quinti.*

XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVIDANT *diametri A C, B D, se mutuo secantes in E, quadrilaterum A B C D. Dico quatuor triangula A E D, C E D, A E B, C E B, esse proportionalia. Erit enim vt A E, ad E C, ita triangulum A E D, ad triangulum C E D; & triangulum A E B, ad triangulum C E B. Quare vt triangulum A E D, ad triangulum C E D; ita triangulum A E B, ad triangulum C E B. Eademq; ratione ostendes esse vt B E A, ad D E A, ita B E C, ad D E C, cum veraq; proportio eadem sit proportioni B E, ad E D. Constat ergo propositum.*



1. *sexti.*

XIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

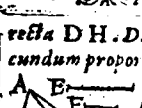
SIT *triangulum A B C, oporteatque a dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmẽta secundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur B C, in G, secundum proportionẽ E, ad F, eademq; primo punctum G, in datum punctum D, ducaturq; recta D A. Quoniam igitur est vt B D, ad D C, ita triangulum B D A, ad triangulum C D A, secabit recta D A, triangulum datum secundum proportionem datam B G, ad G C, hoc est, E, ad F.*



1. *sexti.*

CADAT *secundo punctum G, inter C, & D. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturq; recta*

recta D H. *Dico rectam* D H, *secare triangulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium* B D H A, *ad triangulum* C D H, *vt* E, *ad* F, *seu vt* B G, *ad* G C. *Ducta enim recta* G A, *erunt triangula* H G A, G H D, *æqualia, cum sint super eandem basin* G H, *& inter easdē parallelas* G H, D A. *Addito igitur communi triangulo* C G H, *fiēt æqualia triangula* C G A, C D H: *Ac proinde triangulum* A B C, *eandem habebit proportionem ad* C G A, *& ad* C D H, *Dividendo igitur, erit vt triangulum* B G A, *ad triangulum* C G A, *ita trapezium* B D H A, *ad triangulum* C D H. *Est autem* B G A, *ad* C G A, *vt* B G, *ad* G C. *Igitur erit & trapezium* B D H A, *ad triangulū* C D H, *vt* B G, *ad* G E, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod est propositum.*



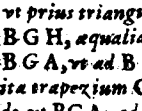
37. primi

2. quinti.

17. quinti.

1. sexti.

CADAT *tertio punctum* G, *inter* B, *& D, ducaturq; recta* D A, *cui rursus per* G, *agatur parallela* G H. *Dico igitur, rectam ductā* D H, *secare triangulum* A B C, *secundum proportionem datam* E, *ad* F, *hoc est, esse triāgulum* B D H, *ad trapezium* C D H A, *vt* E, *ad* F. *Ducta enim recta* G A, *erūt, vt prius triangula* H G A, G H D, *æqualia; additoq; communi* B G H, *æqualia fient* B G A, B D H. *Quare erit* A B C, *ad* B G A, *vt ad* B D H. *Dividendo ergo erit vt* C G A, *ad* B G A, *ita trapezium* C D H A, *ad triangulum* B D H; *& conuertendo, vt* B G A, *ad* C G A, *ita* B D H, *ad trapezium* C D H A. *Est autem* B G A, *ad* C G A, *vt* B G, *ad* G C. *Igitur & B D H, ad trapezium* C D H A, *erit ut* B G, *ad* G C, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod est propositum.*



37. primi

7. quinti.

17. quinti.

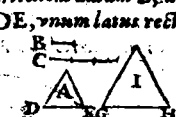
1. sexti.

HINC *perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ a quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato puncto ductam dividatur triangulum secundum proportionē multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit; quod iubetur, vt manifestiū est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis, cum priori denominatori proportionis multiplicis addatur unitas, qua ante deerat.*

DATO

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, uel minus, secundum proportionem datam. XIIII.

SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positũ sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, quam latus rectilinei dati quodcunque) inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, inueniatur media proportionalis GH, super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quã A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, ut DE, prima ad E, tertiam, hoc est, per constructionem B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundã, illi simile similiterq; positum.

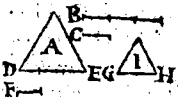


12. sexti.

13. sexti.

18. sexti.

NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterq; positũ, secundum proportionem datam B, ad C. Ceu in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.



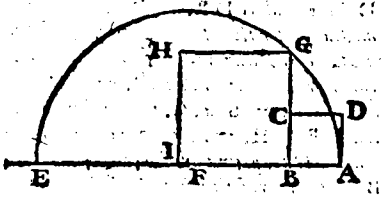
FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineũ duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, etc. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilinearum similitudine, quemadmodum & quadratorum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio B, ad C, sumatur ut 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item ut 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptũ, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertiæ pars, vel quartæ, &c. eius, quod proponitur.

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim construemus quoq; rectilineum simile, similiterque descriptum

cuicun-

cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio a præcedenti differt, vt mox ostendemus.

SIT igitur quadratum A B C D, quincuplicandum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi A B, æquales, a puncto B, incipiendo, usque ad E, vt sit B E, quincupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariã in F, describatur ex F, ad interuallum F A, vel F E, semicirculus A G E, produ-

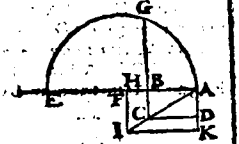


caturque latus B C, ad circunferentiam vsque in G. Dico quadratum B G H I, ex B G, descriptum, quincuplum esse quadrati A B C D. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. B G, media proportionalis inter E B, B A. Igitur erit vt E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum secundæ, ad A C, quadratũ tertiæ, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem E B, per constructionem, ipsius A B, quincupla. Igitur & quadratum B H, quadrati A C, quincuplum erit. Quod est propositum. Quod si recta B E, sumatur sexcupla lateris A B, erit & quadratum rectæ B G, quadrati A B C D, sexcuplum. Si autem B E, fuerit tertia pars ipsius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Denique in quacunque proportione sumatur B E, ad A B, eandẽ habebit quadratum B H, ad quadratũ A C.

SIT rursus rectangulum A B C D, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex laterc A B, producta sumatur B E, dupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariã in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur A H, æqualis ipsi B G, & per H, agatur ipsi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protractæ in I, perficiaturque parallelogrammum H K, erit H K, ipsi B D, simile similiterque positum, quod etiam ait duplum esse ipsius B D.

24. sexti.

B D. *Cum enim proportionales sint tres rectæ* E B, B G, B A, *ex corollario propos. 13. huius lib. Eris vt prius, sicut* E B, *prima ad* B A, *tertiam, ita rectangulũ* H K, *supra* A H, *secundã (sumpta enim fuit* A H, *ipsi* B G, *secundæ æqualis) ad rectangulum* B D, *supra tertiam* A B, *quod est simile similiterque descriptum.*



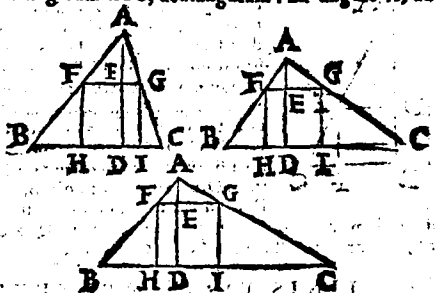
EODEM *modo, si supra* A B, *constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex* B G, *illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex* B G, *ad rectilineum simile ex* A B, *quam habere ponetur recta* E B, *ad rectã* B A, *ex constructione.*

PERSPICVVM *autem est, hanc operationem vna cũ eius demonstratione a nostra antea tradita nõ differre, nisi quod hac simul tradat inuentionem mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuũ lineas* E B, B A, *quæ proportionem habẽt datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.*

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

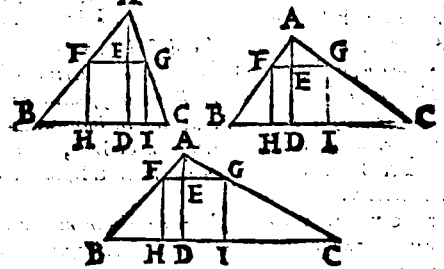
SIT datum triangulum A B C, acutangulum. Ex angulo A, ad BC, perpẽdicularis demittatur A D, quæ in E, ita secetur, per ea, quæ in Scholio propos. 10 huius libri docuimus, ut eadẽ sit proportio A E, ad E D, quæ A D, ad B C. Deinde per E, agatur F G, ipsi B C, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi D E, parallelæ ducantur F H, G I. Dico F G I H, rectilineum triangulo A B C, inscriptum, esse quadratũ. Cum enim F B G, ipsi C, sit parallela, erit ut B D, ad D C, ita F E, ad E G, ex scho



lio

lio propos. 4. huius lib. & componendo, ut B C, ad D C, ita F G, ad E G. Sed ut D C, ad A D, ita est E G, ad A E, ex per coroll. ppos. 4. huius lib. triangula A D C, A E G, sunt similia. Igitur erit ex æquo, ut B C, ad A D, ita F G, ad A E. Quia uero per constructionem est, ut A D, ad B C, ita A E, ad E D; erit rursus ex æquo, ut B C, ad B C, ita F G, ad E D. Est autem B C, ipsi B C, æqualis, immo eadem: Æqualis igitur est & F G, ipsi E D. Quare cui F G, ipsi H I; & E D, ipsis F H, G I, æqualis existit; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia inter se.

34. primi



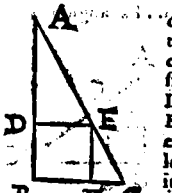
29. primi

Et quia anguli E D H, F H D, duobus rectis æquales sunt: Est autē E D H, per constructionem rectus: erit & F H D, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli H F G, F G I, G I H, recti sunt; Ac propterea F I, quadratū est. quod est propositum.

Non secus idē problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum uel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, uel obtuso perpendicularem demittamus, ceu in posterioribus duobus triangulis apparet.

Quod si in triangulo rectangulo quadratū describere libeat, ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulū rectū nitantur; diuidemus perpēdicularē A B, in D, ita ut eadē sit proportio A D, ad D B, quæ A B, ad B C, & per D, quidem ipsi B C, parallelā ducemus D E; per E, uero ipsi A B, aliā parallelā E F. Quoniā igitur est, ut B C, ad A B, ita D E, ad A D; quod triangula A B C, A D E, similia sint, per coroll. ppos. 4. huius lib. Est autē per cōstructionē, ut A B, ad B C, ita A D, ad D B: erit ex æquo, ut B C, ad B C, ita D E, ad D B: Est autem B C, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & D E, ipsi D B. Quare ut prius, D E F B, quadratum est. Quod est propositum.

4. sexti.



FINIS ELEMENTI SEXTI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM VII.

ΟΡΟΙ
DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quã unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.



ACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana uersatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearis requiratur, idque adeo, ut absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quàm solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque usum, neque exprimi queant, neque intelligi: Nam pleraque laterũ sunt illæ linea, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel certe, si non sunt Irrationales, longitudine inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, ac intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, ut absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorũ explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioque constaret, lineis

ponit. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur. Incipiens igitur more suo a principijs, definit initio unitatem, docetque eam esse, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum esse dicitur: Nam secundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum unitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex unitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerū quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes; Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nempe vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum quælibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos una eademque mensura, nimirū vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurimæ illarum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, ut clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON

NON *est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.*

OMNIS *autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodē modo.*

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem nō metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cū eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars est huius numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, nō autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM *partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita ut si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum cō-*

munis mensura, illum metiatur per 6. hunc uero per 10. Idem iudicium habeto & in reliquis.

QVOD *si roges, cur Euclides hoc in loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantum eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, ceu propos. 4. huius lib. ostenditur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes uero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cum ea persæpe sint incommensurabiles, ut aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides in quinto lib. partem dumtaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.*

V.

MVLTIPLEX uero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM *ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo ut numerus maior, cuius minor est pars, sit uicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si uero maiorem minor nō metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hāc definitionem. Et uicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem nō metietur. Nam si metietur minor maiorem, esset per hanc defin.*

maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR uero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui unitate differt a pari.

OMNES hi numeri 3. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia unitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. uel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse individuam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pari-

ter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM si recte dua proxime definitiones expendantur, perspicuum erit, fieri posse, ut unus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerum par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum; ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen haec omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis

clidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponit, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifestè omnem numerum parem, quem aliquis par par parem metitur, pariter parè appellat; illum vero, quem aliquis par metitum par imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habet impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; vtrosue eosdem dici recte pariter impares, quandoquidem nec solum pariter pares, nec solum pariter impares illi sint. Sed hæc planius in lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparē. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem unitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; imperiter impar posse dici appellatur numerus primus, quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tamquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis, illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem uero isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrunque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter se dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quinis numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: quia sola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quē numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes

nes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO, numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, mititur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & se ipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus nocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

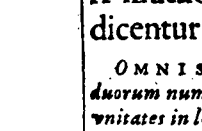
VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoque contra numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicemur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus

ptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. uel e contrario. Et sic de reliquis.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui uero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur,



ut latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latiũ dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum uero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CAETERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides solum definit planum quadrangulum

rem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte quadrato geometrico, & figuræ alterâ parte longiori, similes sint, et æquales, siue ambitum, siue aream, capacitatemue spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quoad ambitum: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

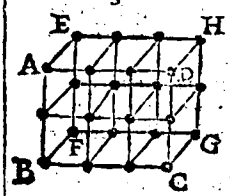
POTEST autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum; Quod vti in de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem ali quando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM uero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum diſpoſitæ referunt figurã quãdam ſolidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primum multiplicetur numerus 2. in 3. efficietur numerus 6. baſis ſolidi numeri longa tres vnitates, & lata duas: Et ſi hæc baſis in 4.



multiplicetur, hoc eſt, accipiatur quater, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens quatuor vnitatum. At ſi numerus 2. in 4. multiplicetur, habebitur baſis 8. vnitatum, quæ multiplicata in 3. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 3. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro baſe, quæ bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit A B C D, duodecim vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B A, latitudo, tres complectitur; ſuperponetur ei altera baſis ſimilis, & æqualis E F G H, vt totus numerus ſolidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo B F, vnitates duas. Similiter, ſi baſis ſit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor, & latitudo B F, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ duæ baſes ſimiles, & æquales; fictúque totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinem B A, habens trium vnitatum. Si denique baſis ſit A B F E, ſex vnitatum, cuius longitudo A B, tres continet, & latitudo B F, duas, ſuperponentur illi tres aliæ baſes ſimiles, & æquales, conſtabitque totus numerus ſolidus unitatibus 24. quarum quatuor, altitudinem dabunt B C. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cũ ex his mutuo multiplicatis producaĩ. Eodemq; modo de alijs numeris ſolidis iudicandũ erit.

DENIQVE

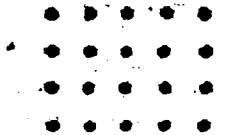
DENIQVE & vnitas aliquando solidus appellabitur numerus, & si non proprie, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earũ multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, continenturque sub tribus numeris, omissis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam, quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius unitates in formã planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in omnibus lateribus habens quinque vnitates ideoque æqualiter æqualis erit.



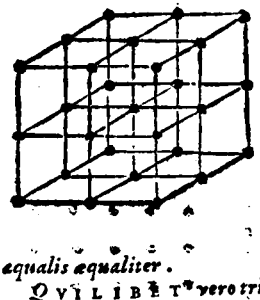
ALTER VTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati a Geometris, radix vero ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

XIX.

CVBVS uero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum uocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius unitates in longũ, latum, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita ut omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint. Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cũ ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



QVILIBET uero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, uel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; uel eadem pars, uel eædem

parte,

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, uel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Definitio etenim uulgata Euclidis, quã puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſub multiplicitate, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eædem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis: At uero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente; In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, nec æque multiplex eſt, nec eadem pars, nec eædem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex iis, quæ docuimus ad defin. 3. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nempe triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eædem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper

insuper eandem partem, nempe sextam; In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In ultimo eandem primus secundum, & tertius quartum, bis, et praeterea easdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, nō sit aeque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus secundum, & tertius quartum, non aequaliter contineat, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus cōferuntur, quod primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aequaliter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aequaliter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, faciendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et e contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaequalitatis habent. Nam si de proportione qualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aequalem debere esse, ut proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, aequales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra, eundē ad aequales eandem quoque habere proportionem; Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idē eundē habet proportionem, aequales esse. Cum enim aequales numeri sint eiusdem, vel aeque multiplices, vel eadem pars, vel eadē partes; Vel certe eundē aequaliter cōtineant, eandemq; insuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus aequalium sit vel aeque multiplex, vel eadem pars, vel eadē partes:

Vel

Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, uel partes; perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS *quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel æquemultiplices, uel eadem pars, uel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, uel partes: Item quia idē numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, uel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestum est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.*

PARI *ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionē, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.*

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

NON *necesse est, ut planus numerus plano numero sit similis, quælibet duo illius latera quibuslibet duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundū suas vnitates in formam planā redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniā illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. uel 12. 2.*

EODEM *modo, vt duo numeri solidi similes sint, nō requi-*

ritur, ut quæuis tria unius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia; quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. uel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, uel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, ut dictū est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua uia, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si uero minores, Diminutus.

His definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes uti uidentur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus secundum 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia uero ex propos. 16. huius lib. offendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, uel pars, partesue; uel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, uel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nempe quincuplus, dicetur

hac comparatio, habitudoue, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, aqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, tripli catam rationem habere dicitur eius, quā habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, ut ad magnitudines pertinet, copiose explicata fuit in quinto lib. Vnde cum omnia, quae ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertiũ, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita se habere, pluribus uerbis a nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones uersantur, demõstrabuntur quoque in hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, uel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad unitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem continuam unitatis.

iis. Quare quolibet numero propposito maior exhiberi potest, ille uidelicet, qui ex unius unitatis, uel etiam plurium additione consurgit.

AXIOMATA, SIVE FRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorũ, uel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex est, uel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualiũ numerorum, uel eiusdem, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, uel æquales, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per uni-

tates

tates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM unitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito unitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis unitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per unitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, vnumem numerum seipsum metiri per unitatẽ.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquẽ produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, unitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B ...
C .....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates,

hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per unitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. uel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quẽ metitur, uel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, uel multiplicatum a B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipſum C.

A.... B...
C.....

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos B C, C D; erit tam B C, quam C D, ipſius A, multi-

A, multiplex: Diuiſo ergo B C, in partes B E, E C, ipſi A, æquales, & ipſo C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

A . . . .
B .... E .... C .... F .... G .... D

XI.

NVMERVS quemcunque numerũ metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quẽ B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D; erit C D, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo C D, in partes C E, E D, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

A . . .
B . . . . . .
C ..... E ..... D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam E C, quam B D, ipſius

ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales; Eris reliquus numerus D C, uel una pars numeri B C, ipſi A, æqualis, uel plures, atque adeo D C, æqualis eris ipſi A, uel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C.



Quod eſt propoſitum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus unquã metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

SINT duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatẽ G B, quæ quidem præcedentẽ numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos; hoc eſt ſolam unitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter unitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerũ A E, (quod C D, uel pars ſit ipſius A E, uel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) metietur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum A B;



11. pron

A B; igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F; igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, metietur quoque reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; metietur etiã H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B; Reliquam igitur unitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt Quamobrẽ, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum. 12. *pron.* 11. *pron.* 12. *pron.* 11. *pron.* 12. *pron.*

SCHOLION.

CONVERTEMVS *facile cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.*

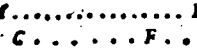
SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas.

SINT duo numeri inter ſe primi A B, C D, quorũ minor C D, ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatẽ detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B, præcedentem F D; ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerum F D, metitur; & F D, ipſum E G; metietur quoque G B, ipſum E G. Cum ergo G B, & ſe ipſum metiatur; metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compoſitum: Metitur autem E B, ipſum C F; Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atq; adeo cũ & ipſum F D, poſitus ſit metiri; metietur quoquè C D, ex C F, F D, compoſitum. At vero C D,

A ..... E . . G -- B
C . . . . . F . . D

21 *pron.* 10. *pron.* 11. *pron.* 10. *pron.*

11. pron. *C D, metitur ipsum A E: Igitur & eundem A E, numerus G B, metietur: Ac proinde cum & ipsum E B, metiatur,*



10. pron. *vt ostensum est; metietur & A B, ex vtroque A E, E B, compositum. Quare cum numerus G B, metiatur numeros A B, C D, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.*

EODEM *modo & hoc demonstrabimus.*

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM *si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.*

EX *his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquã reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, vt Euclides demonstrauit: Si uero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus utrunque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori. Ex eo enim, quod reliquus numerus G B, metiri dicebatur præcedentem numerum F D, ostensum fuit, eundem reliquũ G B, utrunque A B, & C D, metiri.*

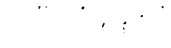
2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis

inter

inter se, maximam eorum cõmunem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B, quoties potest, relinquatq; E B, numerum, qui ex C D, subtractus relinquat F D, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidē peruenietur ad numerum, qui præcedentē metiatur. Nam si ad unitatē deueniretur, numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentū ergo iam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum A B, C D.



1. *septimi*

Quod enim utrunq; metiatur, ita ostendemus. Quia F D, metitur ipsum E B; & E B, ipsum C F; metietur quoque F D, ipsum C F; atq; adeo cū & seipsum metiatur, metietur & totū C D, ex C F, F D, compositum. At C D, ipsum A E, metitur; Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipsum E B; metietur etiā totum A B, ex utroque A E, E B, compositum. Metitur igitur F D, utrunquenumerum A B, C D. 11. *pron.* 10. *pron.* 11. *pron.* 10. *pron.*

QVOD autem F D, sit maxima mensura communis illorū, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrunque A B, C D; Et C D, metitur ipsum A E; metietur quoque G, ipsum A E. Igitur & residuum E B: At uero E B, metitur C F; Metietur ergo & G, eundem C F; Igitur & residuum F D; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quā F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F D, maxima est mensura numerorum A B, C D. 11. 12. & 11. *pron.* 12. *pron.*

QVOD si minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipse maxima

A . . . . . B
C . . . . . D

ma amborum mẽsura communis cum & se ipsum metiatur. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, quod numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorundem communem mensuram. Hoc elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit F D, esse maximam mensuram ipsorum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros A B, C D, metri quoque numerum F D, maximam eorum mensuram cõmunem. eademq; ratio est de cæteris.

SCHOLION.

Ex dictis facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint tres numeri A, B, C. Primum ergo experior,

A . . . . . *per ea, quæ ad propos. 1. docuimus,*
B . . . . . *an duo A, & B, sint inter se primi:*
C . . . . . *Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.*

2. septimi

Si vero A, & B, fuerint inter se compositi, sit eorum maxima mensura communis inuenta D; quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numerum D, communem mensuram.

A . . . . . .
B . . . . . .
C . . . . . .
D . . .

Quod si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; Erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita ut habeant numerum communem mensuram, metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam

ximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autē C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur F, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se sunt compositi. Quod est propositum.

A 1
B . . . . . D . . . . .
C . . . . . D . . . . .
. . . . . 2. *septimi*
. . . . . A . . . . . .
. . . . . B . . . . . 1. *pron.*
. . . . . C . . . . . .
. . . . . D . . . . E . .

Simili arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, & c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum cōmunem mensuram reperire.

Dentvr tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensurā cōmunem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur

A . . . . . .
B . . . . . D . . . .
C . . . . . E . . F ---- 2. *septimi*

quoque

quoque ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C. Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si uero D, nõ metiatur ipſum C; erũt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. Sit eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram cõmunem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorum menſura cõmunis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C. & D; at D, ipſos A, & B; metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . .
C . . . . . E . . F — —

2. ſeptimi

11. prom.

QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quam E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communẽ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, quod numerus metiens tres numeros, metitur quoque maximam eorum communem mẽſuram. Hoc etiã colligitur ex ultima parte demonſtrationis; Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum

merum E, maximam illorum mensuram communem: eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; eodemque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primo A, & B, inter se primi. A .....
Quia igitur quælibet unitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B. B .....

SINT deinde A, & B, nō primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito manifestum est A, partē esse numeri B. A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipsum B; inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. Quia igitur C, pars est ipsius B, cū ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F: Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

A .. D .. E .. F
B .....
C ..

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter

alterius eadem pars: Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico utrunque numerum A, & D, simul, utriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est uel A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F,



ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, uel C, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque A, & D, simul utriusque B C, & E F, simul, quę est A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

EODEM *modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.*

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera unitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas, uel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

Hoc autem perſpicuum in his appoſitis exẽplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A		*D*		*A*		*D*		
B	*G*	*C*	*E*	*H*	*F*	*B*	*G*	*C*

A		*D*		
E	*H*	*F*		

Poſſvmvs etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorũ, eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ unus unius.

Sint numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorũ eadẽ pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omniũ numerorum

DE,	*FG*,		*A*			*B*			*C*			
HI,	*ſimul*	*D*		*K*	*E*		*F*	*L*		*G*	*H*	*M*	*I*

eandem eſſe

partẽ, quæ eſt A, ipſius DE. Diuiſis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partiũ numeri DE, æqualis multitudini partiũ tam numeri FG, quã numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt; ſi illis addãtur æquales B, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM; erunt quoq; A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erũt A, B, C ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatũ numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, cõtinetur. Quamobrẽ eadẽ pars erũt A, B, C, ſimul ipſorũ DE, FG, HI, ſimul, quæ A, ipſius DE.

Idem ſequitur, ſi loco unius numerorũ A, B, C, ſumatur unitas, uel loco pluriũ, uel etiã omniũ, plures unitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

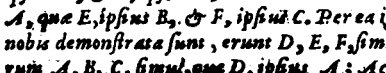
A,	*B*		*C*			*A*.	*B*.	*C*.
D	*K*	*E*	*F*	*L*	*G*	*H*	*M*	*I*

Theoremati quoque primo quinti lib. ſimile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcũque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, F, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

QVOD si loco unius numerorum D, E, F, assumatur unitas, uel etiam loco plurium, uel omnium, plures unitates, theorema eodem modo demonstrabitur, ut ex sequentibus figuris apparet.



6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit, quæ unus unius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus

merus D E, numeri F. Dico utrunque numerum A B, & D E, simul utriusque numeri C, & F, simul eosdem partes esse, quæ A B,

ipsius C, uel A ... G ... B D .... H .... E

D E, ipsius F. C ..... F .....

Diuisis. n. numeris A B, D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eædem partes est numerus A B, numeri C, quæ numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; erit uterque A G, D H, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, uel D H, ipsius F. Eadem ratione erit uterque G B, H E, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, uel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt tot aggregata partium in numeris A B, D E, cõtenta, partes eædem numerorum C, F, simul, quot partes eædem est numerus A B, ipsius C, uel D E, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit uterque numerus A B, D E, simul, utriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. 5. *septimi*

SCHOLION.

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros extendentes, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ unus unius.

Eadem enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; ut hic perspicuum est.

A .. K .. B C ... L ... D E ... M .... F

G ..... H ..... I .....

7.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

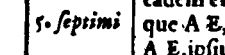
SIT numerus A B, eadem pars numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquum E B, eandem esse partẽ reliqui F D, quæ est totus A B, totius C D.



Ponatur enim E B, numeri G C, eadem pars, quæ est A E, ipsius C F, uel totus A B, totius C D. Quia igitur A E, eadem est pars ipsius C F, quæ E B, ipsius G C; erit uterque A E, E B, simul eadem pars utriusq; simul C F, G C, quę A E, ipsius C F, hoc est, quæ totus A B, totius C D; 5. septimi Ac propterea cum A B, eadem sit pars utriusque numeri F G, C D; erunt ipsi numeri F G, C D, inter se æquales. Dempto ergo communi C F, æquales remanebunt G C, F D. Eadem igitur pars erit E B, ipsius F D, quæ ipsius G C, hoc est, quæ totus A B, totius C D. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

IDEM hoc theorema uerum est, etiam si ablata sit unitas A E, uel reliqua fuerit unitas E B; uel denique & ablata, & reliqua sit unitas, ut ex his exemplis apparet.



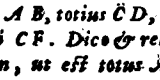
CAETERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita

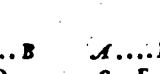
multi

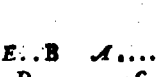
multiplex erit, ut totus totius.

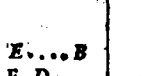
QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus: Sit totus A B, totius C D, aque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita eſſe multiplicem, ut eſt totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipſius C D, ſit æque multiplex, atque A E, ipſius C F; erit e contrario totus C D, totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E. Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; ac proinde e contrario F B, ita multiplex erit ipſius F D, ut A B, ipſius C D, eſt multiplex. 7. ſeptimi



SI aliquando ex C D, ablata fuerit unitas C F; uel reliqua ſit unitas F D: uel denique & ablata ſit unitas C F, & alia reliqua F D; idem demonſtrabitur, ut hæc exempla commonſtrant.



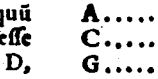




THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquũ E B, eaſdem eſſe partes reliqui F D, quæ totus A B, totius C D. Sumpto enim numero G H, æquali ipſi A B; erit



GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, hoc eſt, quæ AE, ipſius CF. Diuiſo ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partiũ AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quam IH, ipſius CD, quæ tam AK, quam KE, ipſius CF. Cum ergo CD, numerus maior ſit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipſius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipſius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM æqualibus ipſis AK, KE; erit GL, eadem pars ipſius CF, quæ AK, eiuſdem CF, hoc eſt, quæ GI, ipſius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, ſit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento oſtendemus MH, eandem eſſe partem ipſius FD, quæ eſt totus GI, uel IH, totius CD. Quoniã ergo tam GI, quam IH, eadem eſt pars ipſius CD, quæ eſt tam LI, quam MH, ipſius FD; erit uterque GI, IH, ſimul eædem partes ipſius CD, quæ uterque LI, MH, ipſius FD. Eſt autem GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & uterque LI, MH, ſimul eædem partes erit ipſius FD, quæ AB, ipſius CD. Quia uero ſi ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, ſimul æquales ſunt; Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nempe, quæ uterque LI, MH, ſimul erat eiuſdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

A..... K..... E.... B
C..... F..... D
G..... L.. I..... M.. H

7. ſeptimi

6. ſeptimi.

SCHOLION.

NON *demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentẽ, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabat hic, reliquum numeri EB, alicuius numeri eaſdem eſſe partes, quas eſt numerus AE, numeri CF; ibi uero perſpi-*

perſpicuum erat, reliquum E B, alicuius numeri eandem eſſe partem, quæ eſt A E, ipſius C F. Licet enim ipſius E B, duplũ aſſumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, ſit ita ſub multiplex numeri aſſumpti G C, ut A E, eſt ſubmultiplex ipſius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et uiciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadẽ pars erit, uel eædem partes & ſecundus quarti.

SIT numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, ſintque A, B C, minores ipſis D, E F, ſinguli ſingulis. Dico & uiciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D quales eſt, aut quales B C, ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quia uero B G, G C, inter ſe ſunt æquales, & minores quã E H, H F, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus B C, toto E F, minor ponitur; Erit B G, ipſius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipſius H F; ac propterea & utrumque B G, G C, ſimul, nempe B C, ſecundũs utriuſque E H, H F, ſimul, nimirum E F, quarti eadem pars, uel partes, quæ B G, ipſius E H, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . .
B .... G C
D . . . . .
E ..... H ..... F

5. uel 6. ſeptimi.

SCHOLION.

QVOD ſi loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars ſit, quæ alter numerus alterius: Erit uiciſſim unitas ad

unitas tertij numeri eadē pars, quæ secundus numerus quarti; id, quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demōstratione, ut ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D . . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et uicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

SIT numerus A B, eadem partes numeri C, quę numerus D E, numeri F, sintque A B, C, ipsis D E, F, minores, singuli singulis. Dico & uicissim, numerum A B, easdem partes esse, aut partem numeri D E, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris A B, D E, in partes

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . . . .

A G, GB, & D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partiū in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipsius C, quæ tam D H, quam H E, ipsius F. Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes A G, ipsius D H, & G B, ipsius H E, quæ C, ipsius F: Ac propterea eadē pars erit, uel partes A G, ipsius D H, quæ G B, ipsius H E. Igitur & uterque A G, GB, simul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes utriusque D H, H E, simul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipsius D H, hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonstrandum erat.

9. *septimi*

5. *uel* 5. *septimi.*

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

Si fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

SIT ut totus numerus A B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, esse, ut est totus A B, ad totum C D.

A.....E.....B
C.....F...D

Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita A E, ad C F; erit per defin. 20. A B, ipsius C D, & A E, ipsius C E, uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes: uel certe A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel eas ſdem partes. Sit primum A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, æque multiplex. Quo posito erit e contrario C D, totus totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipsorum C D, C F. Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea e contrario A B, ipsius C D, & E B, ipsius F D, æque multiplex erit. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. 7. *septimi*

SIT secundo A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, eadem pars, uel eædem partes. Quo posito, erit & reliquus E B, reliqui F D, eadē pars, uel partes, quæ totus A B, totius C D; Ac proinde, per defin. 20. erit ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

A...E..B
C.....F....D
A....E..B
C.....F...D

7. *uel* 8. *septimi*.

CONTINEAT tertio A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quo posito, erit e cōtrario C D, totus totius A B, eadē partes, quæ ablatus C F, ablati A E, ut mox demōstrabimus.

Reli-

8. *septimi* Reliquus igitur F D, reliqui E B, eædem quoque partes

A ..... E ... B A ..... E ..... B
C .... F .. D C ..... F ..... D

erit, quæ totus C D, totius A B: Ac propterea, e contrario A B, ipsum C D, & E B, ipsum F D, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes, ut mox ostendemus. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

QVOD si A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F; perspicuum est reliquum E B, quoque esse æqualem reliquo F D: Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... E ... B
C .... F ... D

LEMMA.

QVOD *autem, si A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius uel partes; e contrario C D, ipsius A B, & C F, ipsius A E, sit eædem partes: Et si C D, ipsius A B, & C F, ipsius A E, sit eadē partes: e contrario A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter contineat, eandemque illius partem uel partes; hoc modo demonstrabimus. Contineat primo A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, nempe semel, uel bis, uel ter, &c. eandemque insuper partem, G B, quidem*

A ... N ... O ... G ... B
C ... I ... K ... D
A ... P ... Q ... H ... E
C ... L ... M ... F

quidem ipsius C D, & H E, ipsius C F, ita ut numeri reliqui A G, A H, sint uel æquales ipsis C D, C F, uel eorum æque multiplices. . . Diuisis igitur numeris C D, C F, in partes C I, I E, K D; & C L, L M, M F, ipsis G B, H E, æquales; erit multitudo partiũ numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipsius C D, sit eadem pars, quæ H E, ipsius C F. Similiter diuisis numeris A G, A H, in partes A N, N O, O G; & A P, P Q, Q H, eisdem G B, H E, æquales; erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis: Cum enim A G, A H, uel æquales sint ipsis C D, C F, uel eorum æque multiplices; erunt uel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F; uel certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; propterea que multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars numeri C F, est numeri A E. Quare cum multitudo partiũ numeri C D, æqualis sit multitudini partium numeri C F; erit C D, eædem partes numeri A B, quæ C F, ipsius A E.

CONTINEAT secundo A B, ipsium C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, uidelicet semel, bis, ter, quaterue, &c. easdemque insuper partes illius, numerus quidem A B, partes G B, numeri C D, & numerus A E, partes H E, numeri C F, ita ut reliqui nume-

ri

ri AG, AH, sint rursum uel æquales ipsis CD, CF, uel eorú æquemultiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HE, KE, numerorum CD, CE, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, quod quælibet partium numeri GB, eadem pars sit numeri CD, quæ unaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, uel æquales sint ipsis CD, CF, uel eorum æquemultiplices; erunt uel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, uel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH: propterea; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis. Atqui adeo una pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ una

pars

pars numeri C F, *est numeri* A E. *Quare cum multitudo partium numeri* C D, *æqualis sit multitudini partium numeri* C F; *erit* C D, *eædem partes numeri* A B, *quæ* C F, *ipsius* A E. *Quod est primo propositum.*

IAM *uero sit* C D, *ipsius* A B, *&* C F, *ipsius* A E, *eadem partes. Dico e contrario* A B, *ipsum* C D, *&* A E, *ipsum* C F, *æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, uel partes. Diuisis enim numeris* C D, C F, *in partes, numerorum* A B, A E, *erunt, eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris* A B, A E, *in partes partibus numerorum* C D, C F, *æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri* C D, *in* A B, *supereritque eadem pars, uel partes ipsius* C D, *quoties omnes partes numeri* C F, *continentur in* A E, *& quæ pars, aut partes ipsius* C F, *superfunt, propter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *&* A B, A E. *Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum* A B, A E, *contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *& insuper in duobus illis numeris superfint partes numerorum* C D, C F, *multitudine æquales. Quam ob rem* A B, *ipsum* C D, *&* A E, *ipsum* C F, *æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quod secundo est propositum.*

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

SI sint quotcunque numeri proportionales,

nales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B, C, D, E, F; hoc est, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, ut est A, ad B. Sint enim primùm A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, eadem pars est, aut partes A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; erit quoque uterque A, C, simul utriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, uel E, ipsius F. Rursus quia uterque A, C, simul, tanquam unus, utriusque B, D, simul, tanquam unius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E, simul, amborum B, D, tanquam unius, & F, simul eadem pars, uel partes, quæ A, ipsius B. Quare, per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ est ipsius A, ad B.

A ..... C ..... E .....
B ..... D ..... F .....

5. uel 6. septimi.

5. uel 6. septimi.

SINT secundo A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo ut prius, erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & e contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. Quare per defin. 20. eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quę est A, ad B. Hoc idem uerum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, uel etiam omnes, sint numerorum ad unitatem. Est enim eadem semper demonstratio, ut hic apparet,

A ..... C .... E .....
B .... D .. F ...

5. septimi

paret, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A... C..... E..... A... C... E..... A... C... E...
B. D.. F... D. D. F.. B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C, ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque insuper partem, A..... C.... E..... uel partes; Erit B..... D... F..... per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, eædem partes. Igitur ut prius, erunt omnes B, D, F, omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ B, ipsius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario continebunt omnes numeri A, C, E, simul, omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. 6. septimi

SINT quarto & ultimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æquales ipsis B, A.... C..., E... D, simul, quibus si rursum addantur æquales B .... D ... F.... E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum utrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 14.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et uicissim proportionales erunt.

SINT A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim esse A, ad C,

ut B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D; & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, uel partes. Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadē pars erit, uel partes: Ac proinde per defin. 20 erit ut A, ad C, ita B, ad D.

9. vel 10. septimi.

A . . . . C . . . . .
B . . . . D . . . . . .

SINT secundo A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, uel partes. Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, uel partes: Atque adeo e contrario, uel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20 erit ut A ad C, ita B, ad D.

9. vel 10. septimi.

A . . . . C . . . . .
B . . . . D . . . . . .

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo posito, erit ob eandem proportionem, uel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; uel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemq; insuper partem, uel partes; Atq; adeo e contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, uel eadem pars, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, uel partes; Ac proinde, per defin. 20, eadem proportio erit B, ad D, quæ A ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . . C . . . . .
B . . . . . D . . . . . .

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, uel æque multiplex, uel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, uel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, uel eadem pars, uel certe, per

per lemma propos 11. huius lib. eædem partes. Vicissim er o & D, ipsius B, & C, ipsius A; eadem pars erit, uel partes; Ac propterea e contrario uel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, uel certe, per lemma adductum, B, ipsum D, & A, ipsum C. continebit æqualiter, eandemque insuper partem uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D. 9 *uel* 10. *septimi*.

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, uel eadem pars, uel eædem partes sunt; Erit, per defin. 10. ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C
B . . . D

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, uel æque multiplices sunt, uel certe illi hos æqualiter, continent, eandemque insuper partem, uel partes; erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . .
B . . . . D . . .

SINT septimo ac ultimo A, & C, inter se æquales, sive ij maiores sint quam B, & D, sive minores, sive æquales. Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, uel eadem pars, uel eædem partes; uel certe A, ipsam B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, uel partes; suntque A, & C, æquales, æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & uicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A . . . C
B . . . D

SCHOLION.

COACTI sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, nosque demonstrationibus certissimis confirmare, ita cum legimus proba-

tas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inaqualitatis, in quibus numerum antecedentes numeri partes sunt consequentium, ut perspicue ex eorundem auctorum demonstrationib⁹ apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, ut nonnulli concedunt, quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellaris numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metiatur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Satis luce clarius constat, ubi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, uel eadem pars, uel eadem partes, &c. Nam si existimaret maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, uel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, ut manifestum est: quare reliqua omnia uerba definitionis supernacanea essent.

15. THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque ut A, ad B, ita D, ad E; & ut B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse ut A, ad C, ita D, ad F.

13. *septimi* Quoniam est, ut A, ad B, ita D, ad E; erit uicissim, ut A, ad D, ita B, ad E:

A.....	D.....	Similiterque, eã-
B.....	E.....	dem ob causam,
C.....	F.....	cum sit, ut B, ad
G.....	H.....	C, ita E, ad F;

erit uicissim, ut B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit ut A, ad D, ita C, ad F; (Cũ enim utraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni

portioni B, ad F, ut demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, ut mox oſtendetur.) Ac proinde uiciſſim, ut A, ad C, ita D, ad F. 13. ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita ut ſit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe, ut A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autē ut C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit ut A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

IDEM *uerum eſt, ſi loco unius numeri unitas aſſumatur, uel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perſpicuum eſt.*

A . D ...
B .. E .....
C ... F .....
G . H ...

LEMMA.

QVOD *autem duæ proportiones numerorū, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint*

A..... B..... C....
D..... E..... F...

eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, uel eadem pars, uel

eadem partes; uel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. numeri A, D, C, F, proportionales ſunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod eſt propoſitum.

Hoc idem demonſtratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

16. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterũ quẽdam numerum metiatur: Et uiciſſim æque unitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR unitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æque. Dico uiciſſim unitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æque metiri. Diuiſo enim numero B C, in unitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipſi D, æquales; erit multitudo unitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æque unitas A, numerum D, & unitas B G, ipſum E I, atque unitas G H, ipſum I K, & unitas H C, ipſum K F: atque idcirco eadem pars erit unitas A, numeri D, & unitas B G, numeri E I, quæ unitas G H, numeri I K, & unitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, ſimul numerorum E I, I K, ſimul, quæ unitas B G, numeri E I, uel unitas H C, numeri K F. Itaque quia eadẽ pars eſt unitas H C, numeri K F, quæ numerus B H, numeri E K; erit, ut ibidẽ demõſtrauimus, unitas H C, & numerus B H, ſimul, utriuſque

A. D.
B. G. H. C E. I. K. F

quæ numeri K F, E K, simul, eadem pars, quæ unitas H C, numeri K F, hoc est, quæ unitas A, numerus D; Ac. proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, ex unitate H C, & numero B H, compositus, numerum E F, ex numeris K F, E K, compositum æque metietur. Si unitas igitur numerũ quempiam metiatur &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Illvd idem, quod Euclides demonstrauit de numeris, propos. 12. ostendit hoc in loco separatim de unitate, & tribus numeris, propterea quod unitas non est numerus. Quod quidem breuius ita nos demonstrabimus. Quia unitas A, numerum B C, æque metitur, atque numerus D, numerum E F; erit unitas A, eadẽ pars numeri E C, quæ numerus D, numeri E F. Perea igitur, quæ ad propos. 9. demonstrauimus, erit utpiam unitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æquè metietur.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri mutuo se se multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita ut A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim unitate E; cũ A, ipsum B, multiplicans faciat C; erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerũ A, & numerus B, numerum C, æque metietur. Vicissim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur

E.
A . . . B . . .
D . . . . . C . . . . . .

15. *defin.*

15. *septimi*

metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, unitates, æque adeo unitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autē & eadem unitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Aeque igitur numerus A, utrunque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

E .
A . . . B . . . .
D . . . . . C . . . . . .

SCHOLION.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur unus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam ut prius, cū A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At uero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerū factum, per defin. 15. æque metitur. Idē ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quando quidem ipsum numerus A, æque metitur, atque unitas E, ipsum B.

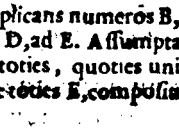
E .
A . . . B . . . .
C . . . . . .

18. **THEOR. 15. PROPOS. 17.**

SI numerus duos numeros multiplicans, fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem

tionem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, ut B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim unitate F; erit D, ex B, cõpositus toties, quoties unitas F, est in A, per defin. 15. similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem unitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; Ac proinde, per defin. 20. erit ut B, ad D, ita C, ad E; et permutando, ut B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

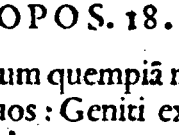


13. *septimi*

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiã multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cũ ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicãs ipsos A, & B, facit D, & E; erit, ut A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.



16. *septimi*

17. *septimi*

SCHO-

SCHOLION.

Hanc propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, uel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, uel multiplicantes.

Fiant enim E, F, G, ex A, in B, C, D, uel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quos numeri multiplicantes, uel multiplicati B, C, D: hoc est, esse, ut B, ad C, ita E, ad F; & ut C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, uel ex B, C, in A, fiant E, F; erit ut B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, uel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

A
B . . C . . .
E . . . . . F . . . . . G . . . . . D . . . .

17. uel 18. septimi.

20. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor numeri proportionales A, B, C, D, ut quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quar-

D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, hoc est, ut A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam uidelicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus. 17. *septimi* 18. *septimi*

A.
B.
C.
D.
E.
F.
G.

Sed iam sit E, ex A, primo in D, quartũ genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, ut quidẽ A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; erit ut C, ad D, ita G, ad E, uel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut A, ad B, ita idẽ G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, ut A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. 17. *septimi* 18. *septimi*

SCHOLION.

Poterat *huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum*.

Si duo numeri duos numeros eandem, quá illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

Ita *enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente,*

dente, in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

20. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidē A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, erit numerus factus ex A, in C,

A.....
B..... D.....
C....

19. *septimi* æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur.

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D,

19. *septimi* tertium; erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, uel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c.

Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor uero minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadē, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita ut sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem A B, ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita E, ad F, erit uicissim, ut A B, ad E, ita C D, ad F; Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E F; erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, uel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F, erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. Erit ergo, ut A G, ad E, ita C H, ad F; & uicissim, ut A G, ad C H, ita E, ad F, uel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandē cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . .
F . . . . . 13. *septimi*

20. *defin.*

SCHOLION.

PARI ratione, & hoc uerum est, quod Campanus docet.

QVOT-

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eisdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit

A . . K . . B C . . L . D E . . . M . . . . F
G . . . . . H . . . . . I . . . . . .

proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, siue non; ita ut non possint reperiri alij numeri ipsis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad secundum sit, ut A B, ad C D; & secundus ad tertium, ut C D ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. uel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio uero 20. ad 25. in 4. & 5, uel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, ut A B, ad C D; & H, ad I, ut C D, ad E F. Dico A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, metiri æque. Cum enim sit ut A B, ad
13. septimi *C D, ita G, ad H; erit uicissim ut A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum sit ut C D, ad E F, ita H, ad I, erit quoque uicissim, ut C D, ad H, ita E F, ad I. Quare A B, ipsius*
20. defin *G, & C D, ipsius H, & E F, ipsius I, erit uel eadem pars; uel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuisis enim, si fieri potest, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F; atque adeo A K, ipsius G, &*
20 defin. *C L, ipsius H, eadem pars. Erit ergo ut A K, ad G, ita*

C L,

C L, ad H; & uicissim ut A K, ad C L, ita G, ad H, uel A B, ad C D. Eodemque modo erit, ut C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quam A B, C D, E F. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, æque metietur. Quod est propositum. 13 septimi

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eosdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æque metiri. Nã per hãc propor. 21. A, B, cũ sint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsam D, & C, ipsum F, æquè metiatur, ac B, ipsum E; metientur æque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

A ..... B C
D ..... E ..... F

THEOR. 29. PROPOS. 22. 19.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadẽ ratione, sitque perturbata eorũ proportio, ut quidẽ A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse

A ..... H ...
B ..... D ...
C ..... E ...
G ..... F ...

.I

ut

ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim sit ut A, ad B, ita E, ad
19 *septimi* F; erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Rari ratione, cum sit etiam ut B, ad C, ita D, ad E, erit eidē numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atq; adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. Quare erit
19. *septimi* ut A, ad C, ita D, ad F.

A.....	H...	
B....	D....	
C.....	E.....	
G.....	F..	

Quod si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam C, ad G, ut H, ad D; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem, ut C, ad G, ita H, ad D. erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idē ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

Quoniam Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13 & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos in numeris, & alia quædam ostendere, octo sequentibus theorematibus.

I. Si quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo proportionales erunt.

Sit

SIT, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit C, ad D, ut A, ad B, erit uicissim C, ad A, ut D, ad B. Rursus quia est D, ad B, ut C, ad A, erit uicissim D, ad C, ut B, ad A, hoc est, ut B, ad A, ita D, ad C; Quod est propositum.

A ..... C ...
B .... D ..

13. *septimi*

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt. II.

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo esse, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, erit uicissim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, ut totus AB, ad totum DE, ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, ut CB, ad FE. Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, ut DF, ad FE. Quod est propositum.

A .....C... B
D ....F..E

13. *septimi*
11. *septimi*
13 *septimi*

SI diuisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt. III.

SIT ut AB, ad BC, ita DE ad EF. Dico & componendo, esse ut AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit uicissim, ut AB, ad DE, ita BC, ad EF; Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, ut BC, ad EF: Et uicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, ut DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

A .....B ... C
D .... E .. F

13. *septimi*
12. *septimi*
13. *septimi*

SI compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. IIII.

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuer-

fionem rationis esse quoque, ut A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F.

Cum enim sit, ut A B, *ad* C B, *ita* D E, *ad* F E, *erit vicissim, ut totus* A B, *ad totum* D E, *ita ablatus* C B, *ad ablatum* F E; *Ac proinde, ut totus* A B, *ad totum* D E, *ita erit reliquus* A C, *ad reliquum* D F,

13. *septimi* *Vicissim igitur, ut* A B, *ad* A C, *ita* D E, *ad* D F. *Quod est propositum.*

A . . . . C . . . B
D . . . . F . . E

RVRSVS *ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos.* 24. *lib.* 5. *Videlicet.*

V. SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eãdem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT ut A B, *primus ad* C, *secundum, ita* D E, *tertius ad* F, *quartum: Item ut* B G, *quintus ad* C, *secundum, ita* E H, *sextus ad* F, *quartum. Dico ita esse* A G, *compositum ex primo & quinto, ad* C, *secundum, ut est* D H, *compositus ex tertio & sexto, ad* F, *quartum. Cũ enim sit, ut* B G, *ad* C, *ita* E H, *ad* F; *erit conuertendo ut* C, *ad* B G, *ita* F, *ad* E H. *Quoniam igitur est ut* A B, *ad* C, *ita* D E, *ad* F; *& ut* C, *ad* B G, *ita* F, *ad* E H; *erit ex æqualitate, ut* A B, *ad* B G, *ita* D E, *ad* E H. *Componendo igitur, ut* A G, *ad* B G; *ita* D H, *ad* E H. *Itaque cum rursus sit, ut* A G, *ad* B G, *ita* D H, *ad* E H: *& ut* B G, *ad* C, *ita* E H, *ad* F; *erit ex æqualitate, ut* A G, *ad* C, *ita* D H *ad* F. *Quod est propositum.*

A . . . . . B . . G
C . . . .
D . . . . . E . . . H
F . . . . .

EODEM *modo & hoc Theorema ostendemus.*

VI. SI duo numeri ad duos numeros eandem

habeant

habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

Sit ut totus A B, ad C, ita totus D E, ad F; Item ut detractus A G, ad C, ita detractus D H, ad F. Dico & reliquum G B, esse ad C, ut est reliquus H E, ad F. Cum enim sit, ut A G, ad C, ita D H, ad F; erit con- *A ..... G .. B* *D ..... H .. E*
uertendo, ut C, *C ....* *F .....*
ad A G, ita F, ad D H. Quia igitur est, ut A B, ad C, ita D E, ad F; & ut C, ad A G, ita F, ad D H; erit ex æqualitate ut A B, ad A G, ita D E, ad D H. Diuidendo ergo ut G B, ad A G, ita H E, ad D H. Itaque cum rursus sit, ut G B, ad A G, ita H E, ad D H; & ut A G, ad C, ita D H, ad F; erit ex æqualitate, ut G B, ad C, ita H E, ad F. Quod est propositum.

Item & hoc demonstrabimus.

III.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

VII.

Sit ut primus A, ad secundum B C, ita tertius D, ad quartum E F; & ut primus A, ad quintum C G, ita tertius D, ad sextum F H. Dico ita esse A, primum ad B G, compositum ex secundo & quinto, *A ..... D .....*
ut est D, tertius ad *B .... C .. G* *E ..... F .... H*
E H, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, ut A, ad B C, ita D, ad E F; erit conuertendo ut B C, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur est ut B C, ad A, ita E F, ad D; & ut A, ad C G, ita D, ad F H; erit ex æqualitate ut B C, ad C G, ita E F, ad F H; & componendo, ut B G, ad C G, ita E H,

ad F H; *& conuertendo, ut* C G, *ad* BG, *ita* FH, *ad* E H. *Quoniam ergo eſt, ut* A, *ad* C G, *ita* D, *ad* F H; *& ut* CG, *ad* BG, *ita* FH, *ad* EH; *erit ex æqualitate, ut* A, *ad* BG, *ita* D, *ad* E H. *Quod eſt propoſitum.*

DENIQVE *ex his omnibus inferemus hoc theorema.*

VIII. SI quotcunque numeri ad eundem habuerint ꝓportiones, quas alij illis multitudine ęquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionē, quam omnes hi ſimul ad eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idē numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quā idem numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT *quotcunque numeri* A B, BC, CD, *ad eundem* E, *proportiones, quas totidem* F G, *G H, H I, habent ad eundem* K: *Hoc eſt, ſit ut* A B, *ad* E, *ita* F G, *ad* K; *& ut* B C,

A....B.....C.....D F..G...H....I
E..... K.....

ad E, *ita* G H, *ad* K; *& ut* CD, *ad* E, *ita* H I, *ad* K. *Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum* A D, *ad* E, *eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul, hoc eſt, ipſe* F I, *ad* K. *Cum enim ſit, ut* AB, *primus ad* E, *ſecundum, ita* FG, *tertius ad* K, *quartum: Item ut* B C, *quintus ad* E, *ſecundum, ita* G H, *ſextus ad* K, *quartum; erit quoque ut* A C, *primus cum quinto, ad* E, *ſecundum, ita* F H, *tertius cum ſexto, ad* K, *quartum. Rurſus quia eſt, ut* A C, *primus ad* E, *ſecundum, ita* F H, *tertius ad* K, *quartum: Item ut* C D, *quintus ad* E, *ſecundum, ita* H I, *ſextus ad* K, *quartum; erit etiam, ut* A D, *primus cum quinto, ad* E, *ſecundum, ita* F I, *tertius cum ſexto, ad* K, *quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.*

SED *habeat iam idem numerus* E, *ad numeros quotcunque*

A B,

A B, B C, C D, proportiones eaſdem, quas idem numerus K, ad totidem F G, G H, H I; Hoc eſt, ſit ut E, ad A B, ita K, ad F G; & ut E, ad B C, ita K, ad G H; & ut E, ad C D, ita K, ad H I. Dico eſſe, ut E, ad omnes illos ſimul, nempe ad A D, ita K, ad hos omnes ſimul, utpote ad F I. Cum enim ſit, ut E, primus ad A B, ſecundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item ut E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, ſextum; erit quoque, ut E, primus ad A C, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, ut E, primus ad A C, ſecundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item ut E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, ſextum; erit etiam, ut E, primus ad A D, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. ſint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minores ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque; atque adeo ſecundum eundem numerum, qui ſit E, ita ut C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties unitas eſt in E. Itaq; cũ unitas numerũ E, & numerus C, numerũ A, æque metiatur; metietur & uiciſſim æque unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; metietur quoque uiciſſim æque unitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem numerus

A ..... B ....
C ..... D ....
E ....

21. *ſeptimi*

15. *ſeptimi*

merus E, utrunque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B. Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos, hoc est, nullum numerū, præter unitatem, cōmuni mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habeant numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties unitas est in numero D; At uero ipsum B, toties, quoties unitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt unitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt unitates in E, producit ipsum B; fit, ut D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cū D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

A ..... B .....
C ——
D —— E ——

9. pron. 18. septimi

SCHO-

SCHOLION.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunque numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarũ proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim nõ sunt minimi, erunt aliqui alij minores

A..... B..... C....
D---- E---- F----
G----

ipsis, nempe D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi, sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æque, per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus; atque adeo secundũ unum eundem numerũ, qui sit G; ita ut D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties unitas est in G. Quoniam igitur unitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æque metitur; metietur quoque uicissim æque unitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æque atque unitas ipsos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; sed ipsi A, B, C, minimi sunt. 15. septimi

IAM uero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita

vt G, toties metiatur ipsum A, quoties unitas est in D; & ipsum B, toties, quoties unitas est in E; & ipsum C, toties quoties vnitas est in F. Quoniã igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D,

A..... B..... C.....
D —— E —— F ——
G ——

9. pron. *E, F, sit pt D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.*

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim nõ sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D.

A..... B.....
C.... D ——

11. pron. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipsum A; metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem, numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demõstrandum.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SINT uterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, uel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi, sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot unitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt unitates in F; fit ut F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D; & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autem idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; erit ut E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia uero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri, erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum sint inter se primi, in sua proportione minimi erunt. Aequa igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur utrunque B, & C; non erit B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A
B
C
D
E F

25.

9. *prop.*
16. *septimi*
19. *septimi*
25. *septimi*
23. *septimi*
21. *septimi*

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

26.

SINT

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nempe C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse: Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

26. *septimi*

A .... B .....
C .....
D ....

27. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrunque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT uterque A, & B, ad utrunque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim uterque A, & B, primus sit ad C; erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum uterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus est ad E; erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat ostendendum

26. *septimi*

A ..... B ...
E .....
C ... D ..
F .....

26 *septimi.*

28. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erũt:

Et

Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſus fiat

E, ex A, in	A . . .	B . .
C; & F, ex	C	D . . . .
B, in D;	E	F . . . . .
Dico E, F,	G, 81.	H, 16.

quoq; eſſe inter ſe primos. Cum enim A, B, ſint inter ſe primi, erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus. 27. *ſeptimi*

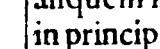
RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, erit & C, factus ex A, in ſe, ad B, & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Erat autem & C, ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrunque B, D, primus erit; Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi ſint ad B, erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur uterque A, E, ad utrunque B, F, primus eſt; erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus; necnon & H, ad A; Quare & genitus ex A, in G, ad genitum ex B, in H, primus erit: cum uterque A, G, ad utrunque B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat. 27. *ſeptimi* 28. *ſeptimi* 26. *ſeptimi* 28. *ſeptimi* 26. *ſeptimi* 28. *ſeptimi*

THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam

Etiam uterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & utrunque simul A C, primũ esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur



12. *prop.* D, metitur totum A C, & ablatum A B, metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad B C, ostendemus eundem esse primum.

SED iam uterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, uidelicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, &

10. *prop.* B C; metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, cõpositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eodemq; argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unũ illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiusdem, quod est propositum.

32. ## THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem

nem numerum, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter unitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerũ A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

A..... B.....
C------

THEOR. 30. PROPOS. 32. 33.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiã unum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſal tem unum ipſorum A, & B, ſi non utrunque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur uero ipſum C, toties, quot sũt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quarum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; erit ut D, primus ad A, ſecundũ, ita B, tertius ad E, quartũ. Quia uero primꝰ D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; erunt D, & A, in ſua proportione minimi. Quare æque metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum

A.... B.....
C.....
D... E.....

19. *ſeptimi*
31. *ſeptimi*
23 *ſeptimi*
21. *ſeptimi*

ſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquē, &c Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

Si duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipſum ſit compoſitus: is ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compoſitus ad eum ſit. Dico D, quoque ad unum ipſorum A, B, compoſitū eſſe. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit uterque A, & B, ad D, primus. Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur uel metiri ipſum C, uel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, uel ad B, cum non ſit primus ad utrunque.

A . . . .
B . . . .
C . . . . . .
D . . . . . .

26. ſeptimi

30. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerū primum eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si uero compoſitus, metiatur eum numerus C, qui uel primus erit, uel compoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus

11. pron.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia uero numerus non diminuitur infinite, uenietur tandem ad aliquē numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum, qui cum metiatur omnes præcedentes, metietur quoque compositum A. Omnem ergo compositum numerum, aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . .
B . . . . . C . . .

11. *pron.*

ALITER. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, uel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus.

A . . . . . .
B . . . C –

11. *pron.*

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum uel esse primū, uel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus uel primus sit, uel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si uero compositus; metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A . . . . . .

33. *septimi*

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem

nem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habētes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C. siue non; oporteatque eosdem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi. Si primi inter se sunt; ei ut ipsi in continuatione suarum proportionū minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si uero non sunt inter se primi, inuenta

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H---- I---- K----
L-----

3. *septim.* sit maxima earum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorū A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per

9. *pron.* E, F, G; fit, ut D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

QVOD uero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, ut ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per nume-

9. *pron.* rum L. Quo posito L, multiplicans numeros H, I, K, pro-

8. *pron.* ducet numeros A, B, C; & uicissim L, ipsos A, B, C, metietur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans

19. *septimi* D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertiū facit eundem A; erit, ut E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H: Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionū A, ad B, & B, ad C,

sed

sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLION.

Ex his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D,

E, sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non, reperiemus

A, 16. B, 24. C, 36. D, 14. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F & G, minimos in proportione duorum A, & B, nempe illos, per quos I, maxima eorum cõmunis mensura eos metitur.

CAETERVM *aliquando contingit unum numerorum E, F, G, inventorum esse unitatem, quando scilicet D, maxima mensura uni ipsorum A, B, C, æqualis est, ut ex his exemplis*

A ... B ..... C ..... A .... B .. C .....
D ... D ..
E . F .. G ... E .. F . G ... ;

apparet. Manifestum est autem, inventos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam unitas.

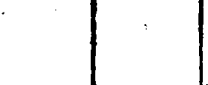
PROBL. 4. PROPOS. 36.

36.

DVOBVS numeris datis, reperire,

quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quē A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C, ex A, in B, uel ex B, in A; metietur A, ipsum C, per B; & B, eundem C, per A.

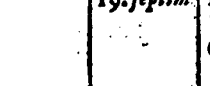


Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omniū, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus. Si C, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, tam ex A, in E, quam ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, & ob id, in sua proportione minimi sint) æque metientur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam uero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; erit C, ad D, ut B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, ut ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C; atque adeo C, minimus est omnium, quos metiuntur.

7. *prop.*
9. *prop.*
19 *septimi*
23. *septimi*
21. *septimi*
17. *septimi*

SINT secundo dati numeri A, & B, non primi inter se. Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, ut sint quatuor numeri proportionales, nempe A, ad B, ut C, ad D. Quo posito, fiet idem numerus, ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. factus ergo sit E. Dico E, hac uia procreatū esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur

35. *septimi*
19. *septimi*



7. *prop.*

tiantur, manifeſtum eſt. Nam cum tã A, multiplicatus a D, quam B, multiplicatus a C, ipſum E, producat; metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod uero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium; erit, ut A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, uel H, ad G, metientur ipſos H, & G, æque; nimirum C, ipſum H; & D, ipſum G. Quia uero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; erit E, ad F, ut D, ad G; Ac propterea cũ D, metiatur ipſum G, ut oſtenſum eſt; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem; atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat. 7. pron. 9. pron. 19. ſeptimi 17. ſeptimi

COROLLARIVM.

HINC fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerũ E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, eſſe minimum, quem A, & B, metiantur.

SCHOLION.

HOC autem corollarium apud Campanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiã me-

tiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, ſitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum C D, metiri. Si enim E, ipſum C D, non metitur; ablato E, ex C D, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties poteſt, numerū, ſi fieri poteſt, F D, minorem ſe, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur, & E, ipſum C F; metietur quoque tam A, quam B, ipſum C F. Itaque A, & B, cum metiantur totum C D, & ablatum C F; metientur & reliquum F D. Eſt autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim; Quare E, ipſum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . B . . .
C . . . . . F —— D
E . . . . .

11. *pron.*
12. *pron.*

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quē illi minimum metiantur, numerum.

36. ſeptimi

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primo C, ipſum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipſum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiantur, minimum quoque eſſe, quē tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur,

A . . . B . . . . C . . . . . .
D . . . . . .
E ——

tiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E, & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. 37. *septimi*

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundē E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiantur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdū. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum. 36. *septimi*

A.. B... C....
D.....
E.....
F———

11. *pron.*

37. *septimi*

37. *septimi*

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiuri. Nā in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiuri.

SCHOLION.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitque F, minimus, quem idem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partē D G, relinquatque numerum G E, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur, & F, ipsum D G; metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cum & totum D F, ponantur metiri; metientur & reliquum G F, ipsi F, minorē. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiantur. Quod est absurdū, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum D E.

A . . . B . . . C . . . .
D . . . . . G — E
F . . . . . .

11. pron.
12. pron.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur? Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquā a B, denominatam.

A . . . . . Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot
B . . . . C . . . unitates sunt in numero G. Quia igitur unitas ipsum C, & B, ipsum A, æque me

15. septimi

titur; & uicissim unitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur; atque adeo eadem pars erit unitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autem unitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, ut ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit

erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendū erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nā cū B, pars denominetur a C; ſit autē & unitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur unitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. Viciſſim ergo & unitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandū erat.

A .....
B ... C .....

15. *ſeptimi*

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, hoc eſt, qui ipſas denominent, D, E, F; minimusque, quem D, E, F, metiantur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Gū D, E, F, ipſum G, metiantur, habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod uero G, ſit minimus illas partes habens, perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt, H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus

D .. A. Secunda
E ... B. Tertia
F .... C. Quarta
G .....
H ———

38. *ſeptimi*

39. *ſeptimi*

40. *ſeptimi*

bus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Quod si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet a D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L; metientur aque unitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G. Vicissim ergo metietur quoque aque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G; atque adeo unitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo unitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ a D, E, F.

A. Secunda D.. I..... B. Tertia E... K..... C. Quarta F.... L... G.....

15. septimi

Ex his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes a numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

Iam vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H, triplus uero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimũ, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, &

H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet a D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ip-

G ..... *A D* ..
H ..... *B E* ...
I ..... *C F* ....
K ——— *M* ——— *L*
N ——— *P* ——— *O*

ſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius G; metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos multiplices ipſius G. Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. 11. pron.

Quod autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus dictas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius K L, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipſo G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus dictis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundē K L. Metitur autem & G, ablatum K M, ſibi æqualem: Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt, huiuſmodi partes habens. 39. ſeptimi. 12. pron.

Non aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, nempe N O, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autē H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipſo G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C; metientur ipſum numeri D, F, F, a partibus illis denominati. Ac idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum N P, ablatum ipſi H, duplo æqualem. Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, ter- 40. ſeptimi. 12. pron.

I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quimus, &c.

HVC quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM repetire, qui minimus cũ sit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex F, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cũ ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties unitas in D: Est autẽ unitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nempe numerum G, a D, denominatã. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nempe numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nempe unitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus dictas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, eadem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, a D, denominata; erit K, toties in I, quoties

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D. . . E. . . F. . . .
G . . . . . .
H . . . . . .
Vnitas
I ———————
K ———————
L ———————
M ———

quoties vnitas in D; Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex H, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & I, fiant G, & K; erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et tum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & ut G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit, per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M. Ponitur autē H, numerus numero I, maior; vnitas igit maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quā H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod erat propositum. 15. defin. 17. septimi

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus erit via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam a 5. & hac denique partem a 6. denominatam, vt manifestum est.

Quod si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, nempe secundum, tertium, quartum, &c. qui eadem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM VIII.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi uero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationẽ habentiũ.



VMERORVM deinceps proportionaliũ quotcunque A,B,C, D. extremi A,& D, inter ſe primi ſint. Dico A, B,C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunq; numeri ſunt A,B,C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, q bini ſumuntur, & in eadẽ ratione; erit, ex æqualitate, ut A,ad D,ita E,ad H: Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. Igitur A, ipſum E,& D, ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri dein-

A .....
B .....
C .....
D .....

E ---
F ----
G -----
H ------

14. *ſeptimi*
23. *ſeptimi*
21. *ſeptimi*

ri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandū.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continue proportionales, ut vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in priori eadem semper proportio reperitur.

A.... E——
B..... F——
C..... G——
D..... H——

PROBL. 1. PROPOS. 2. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B; hoc est, esse ut C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiāt C, & D; erit ut A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; erit quoque, ut A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod uero in eadē ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi

A.. B..
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

17. septimi

mi C,& E,procreati sunt ex A,& B, in se ipsos; sunt autem
24. *septimi* A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportio-
29. *septimi* ne; Erunt & C, E, extremi, inter se primi. Quare C, D,
1. *octaui.* E,minimi sunt in ratione A, ad B.

IAM uero ex A,in tres inuentos C, D, E, fiant F, G,H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F,G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt ex ijs,quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus,numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E,hoc est,quam habet A,ad B. Rursus quia A, & B, ipsum
18. *septimi* E,multiplicantes,fecerunt H, & I; erit quoque, ut A, ad B, ita H,ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A,ad B. Quod autem in data ratione minimi sint,ita perspicuum fiet. Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C,
24. *septimi* & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nempe F, ex A, in C, & I,ex B, in E; erunt
29. *septimi* & F, I,extremi, inter se primi. Quare F, G, H, I, in sua
1. *octaui.* proportione,quæ est A, ad B, minimi sunt.

NON aliter,si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos,&c. Quod faciendum erat.

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36 N, 54. O, 81.

SCHOLION.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D,
18. *septimi* *C: & F, ex A, in C. Quo peracto, numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, ipsos*

fos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipſos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B Quod vero minimi ſint, oſtendetur, vt prius.

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, &c. Itaque ſiue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in I, H, G, & ex A, in C.

COROLLARIVM. I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continue proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos, ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A, & B, hoc eſt, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea uterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multoplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROL-

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, uel ex B, in C, & D; item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, uel ex B, in F, G, H; ut ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLION.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorũ quidẽ proportiones a numero A, horũ vero a B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo uides C, & E, extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, nempe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi constituuntur. Nam vltimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi

minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores reseruantur. Eademque in reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant. Sumantur tot numeri continue ab unitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirum denominãtur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erũt quinque numeri ab unitate quincupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet; 625. 750 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri plures numeri continue proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. alius numerus inuenietur, qui hãbeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exẽplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionẽ sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, ut ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad aliũm quempiam numerum, ut primus ad secundum, vt propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cũ eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inueniantur

niantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, uel B, ad C, uel C, ad D. Deinde iuxta uiam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F. 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18, N, 27.

Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi: Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Hæc propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunq; continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt

ex

ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, ut manifestum est in exemplo nuper adducto 6. 10. 15. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. Quare erit ut A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G, erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione, ipsi æque metiuntur I, & K, in eadem proportione existentes, nempe B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I —— K —— L ——

36. *septimi*

9. *prop.* 18. *septimi*

21. *septimi*

cedentem. Quare cum B, & C, ipſum K, metiantur, metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum Non igitur erunt alij numeri minores ipſis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipſi F, E, G, minimi ſunt in datis rationibus.

37. *ſeptimi*

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique ſint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. Inuento rurſum numero G, minimo, quem metiantur B, ſecundus, & C, tertius; quoties B, ipſum G, metitur, toties metiatur A, ipſum H; & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non. Metiatur primũ;

36. *ſeptimi*

A, 6.	B, 5.	C, 4	D, 3.	E, 5.	F, 7.
H, 24.	G, 20.	I, 15.	K, 21.		
L —	M —	N —	O —		

Et quoties E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G ad I: & ut E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipſos G, & I, quam E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O.

21. *ſeptimi*

Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nempe B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M metiantur;

37. *ſeptimi*

metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior Quod eſt abſurdũ. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

SED iam E, non metiatur ipſum I. Inuento ergo numero

mero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L, & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K, æque metiantur; erit ut ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & ut G, ad I, ita L, ad K; Eſt autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad B; & ut G, ad I, ita C, ad D; quod & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur ut A, ad B, ita M, ad L; & ut C, ad D, ita L, ad K. Atqui ut E, ad F, ita quoque eſt K, ad N, cum E, F, æque ipſos K, N, metiantur: Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si nãque non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, ipſi æque metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P; Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æque, uidelicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cum B, & C, ipſum P, metiantur, metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia uero oſtenſum eſt, eſſe ut G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, ut G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, metiente G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q, (quod E, F, in ſua proportione minimi æque metiantur Q; R, eiuſdem rationis, nempe antecedens E, antecedentem Q.) Ergo metientibus I, E, ipſum Q; metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O —— P —— Q —— R ——

36. *ſeptimi.*

21. *ſeptimi*

37. *ſeptimi*

21. *ſeptimi*

37. *ſeptimi*

QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, ut

super cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inuenerimus primũ M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F: Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si uero S, ipsum N, non metiatur; sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiat K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties uero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demõstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, uel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

36. *septimi*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 1050.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

SCHOLION.

Si omnes rationes, uel aliquæ datæ fuerint in numeris nõ minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestũ est.

Differt autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens; licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

Porro *inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus*

libus in data ratione, si singuli multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eadem ratione deinceps proportionales, ut constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quælibet C, D; posterioris uero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; uel ex proportionibus C, ad F; & D, ad E; ita ut latera unius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur

D, multiplicans C, & E, fecit A, 24. B, 48.
A, & G; erit A, ad G, ut C, ad G, 48. 17. *septimi*
E. Eodemque modo, quia E, C, 4. D, 6. E, 8. F, 16.
multiplicans D, & F, fecit G, &
B; erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps
proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad
F. Componitur autem proportio A, ad B, ex proportioni- 27. *defin.*
bus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex
proportionibus laterum C ad E, & D, ad F, componitur.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, cõpositã esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim

D, multiplicans C, & F, faciat A, 24. B, 48.
A, & G; erit A, ad G, ut C, ad G, 96. 17. *septimi*
F. Similiter cum F, multipli- C, 4. D, 6. F, 16. E, 8.
cans D, & E, faciat G, & B;
erit G, ad B, ut D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex pro-

27. *defin.* portionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquã illorũ ullum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, uero ipsum B, non metiatur; neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod uero nec alius quisquam illorum ullum metiatur, sic demonstrabimus. Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, ut A, ad C, ita F, ad H. Quia uero est ut A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non non erit unitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum unitas omnem numerum metiatur. Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit unitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, ut F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demõstrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

2. *ostani.*

3. *ostani.*

SCHO-

SCHOLION.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam ullius multiplex erit.

SINT enim continuæ proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequentis multiplex sit, constat. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C, ipsius D; neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum ullius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipsius E, non est multiplex: non metietur e contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, ut C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, ut D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; neque alius quisquam illorum ullum metietur. Quare e contrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum ullius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. docuimus. 6. octani

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus uero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT

SINT *deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quæque illorum quemlibet sequentium metiri: Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur.*

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

11. prop. *Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; metietur quoque*

11. prop. *B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.*

SED *iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex; erit & B, ipsius C; & C, ipsius D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur e contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.*

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

CONVERTEMVS *etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.*

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, uel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT *deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel*

A, vel alius quisque nullum a secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam ullum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 1. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quispiam nullius a secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quispiam ullius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primũ metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri; neque alius quispiam ullus metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur. Atque idcirco, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

5. octaui.

SCHOLION.

VT theorema, quod secũdo loco in scholio præcedentis ppos. demõstrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc ppos. hoc modo.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, uel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1 theoremate scholij precedentis.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; sitque ut A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B, erit ex æquo, ut A, ad B, atque adeo ut E, ad F, ita G, ad K. Quare cum G, & K, inter se primi sint, nempe extremi minimorum numerorum, ac propterea

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H 9. I, 3. K, 1.
E, 108 L, 36. M, 12. F, 4.

3. octaui.

pterea in ſua proportione minimi; æque metientur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita ut numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos. Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producunt, ex 9. pronunciato; in eiſdem rationibus erunt E L, M, F, in quibus G, H, I, K, ut ad propos. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat. 23. & 21. ſeptimi

SCHOLION.

NON *ſolum ex demonſtratione cõſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadẽ eſſe proportione, in qua G H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.*

EADEM *hæc propoſitio uera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur uel E, uel F, unitas. Item ſi uel A, uel B, fuerit unitas, exiſtentibus E, & F, numeris; ut in exemplis apparet.*

CONSTAT *etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, uel ſuperparticularis cuiuſuis, uel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalem. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & unitatem; ſuperparticularis uero inter numeros ſola unitate differentes; ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros duplæ proportionis, uel ſuperparticularis, uel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis*

inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, uel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam nec inter binarium & vnitatem, nec inter duos numeros ſola vnitate differentes, ullus numerus interponitur, tantum abeſt, ut aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interijcitur ſolum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quam A B, maior uero quam C D, vnitate quoque. Dico E F, non eſſe medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur eſſe A B, ad E F, ut E F, ad C D; ablato ex A B, numero A G, ipſi E F, equali, ut reliqua ſit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipſi C D, equali, ut relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque ut A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum, cum A G, E H, ipſis E F, C D, equales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo E F, medius proportionalis eſt inter A B, & C D.

A . . . . . G . B
E . . . . . H . F
C . . . . . D

11. ſeptimi

Ex quibus fit, nec illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; nec illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu uulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit. Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo, 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuiſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperparticularis, qualis eſt ſeſquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum, bifariam ſecari non poſſe. Vnde

Diapaſon

Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapente, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc uero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inaequales. Ita quoque Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura in Muſicis.

RVRSVM *ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiuſuis quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea, quae ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus, quadratum diametri duplum ſit quadrati ex latere deſcripti; quadratorum uero proportio ſit duplicata proportionis laterum; ſit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplae proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam ſecet, vt oſtendimus; manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt, diametrum eſſe lateri incõmenſurabilem. quae de re plura ſcribemus in 9. & ultima propoſ. lib. 10.*

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrunque eorum, ac unitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere conti-

nue

nue proportionales inter unitatem, & A, nec non inter unitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt, erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, ut K, ipsi A; & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia uero, ut constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans uero ipsum G, fecit K; metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: Metitur autem & unitas ipsum E, per E. Aeque igitur metietur unitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. Per defin. ergo 20. proportionales sunt deinceps, unitas & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit, ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans uero ipsum I, faciat N; metietur F, ipsum I, per F; & I, ipsum N, per eundem F: Metitur autem & unitas ipsum F, per F. Aeque igitur metietur unitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. Per definitionem igitur 20. proportionales sunt continue, unitas & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, una cum unitate æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij continue proportionales numeri inter unitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter unitatem, & numerū N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

2. octani.

1. octani.

7. pron.
5. pron.

7. pron.
5. pron.

SCHO-

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est, numeros, qui continua proportione cadunt inter numeros A, & B, ac unitatem, habere proportiones denominatas a minimis numeris proportionis A, aut C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad unitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. asseruimus.

CONSTAT quoque ex demonstratione hac, si numerus se ipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplices productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab unitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab unitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & unitatē deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter utrunque numerorum A, B, & unitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales, inter A, quidem & unitatem, numeri C, D, E: At vero inter B, & unitatē, numeri F, G, H, iisdem multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter utrunque A, B, & unitatem. Multiplicantes se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idē C, multiplicans K, L, & H, faciat

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. F, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
Vnitas.

faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot ſunt inter utrunque A, B, & unitatem. Quoniam igitur eſt, ut unitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur unitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum
5. *prom.* A: Metitur autem unitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, *ipſũ*

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296. E, & E, ipſum A,
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216. per C, metietur.
D, 9. I, 18. G, 36. Quare C, ſeipſũ
9. *prom.* C, 3. F, 6. multiplicans fecit
Vnitas. D; multiplicans autem D, fecit E,

& multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G; & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, &
17. *ſeptimi* I; erit, ut C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicãs C, & F, fecit I, & G, erit ut C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L, habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam quam D, I, G, hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt
18. *ſeptimi* L, & H, erit ut C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, N, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O; habebunt, ex ijs, quæ a nobis ſunt demonſtrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cũ
18. *ſeptimi* C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, erit, ut C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, uel B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C, D, E, uel F, G, H.

Quocirca ſi inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c.

Quod erat demonſtrandum.

SCHO-

SCHOLION.

Ex his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales sunt C, & F.

Patet etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, secundum ab unitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, existentibus C, D, E, A, continue proportionalibus ab unitate D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

Libet hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium sumentes.

Si sint ab unitate duo ordines numerorum continue proportionaliũ, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab unitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab unitate; quarti uero eiusdẽ triplicatã; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius. I. II

Sint numeri A, B, C, D, continue ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H: Dico proportionẽ B, tertij ab unitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam inter utrunque numerorum B, F, & unitatem cadit medius unus proportionalis; inter B, quidem & unitatem, numerus A:

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
Vnitas

At inter F, & unitatem numerus E; cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem mo- 10. octaui.

do cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter utrunque C, G, & unitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales.

D, 81. M, 108. N, 144 O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
Vni-tas

Quoniã igitur ex defin. B, ad F, proportionẽ habet duplicatam eius, quã habet B, ad I: Est autem ut B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est ut C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II. Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti uero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, et ab eodem tot idem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab unitate, ut constat ex scholio propos. 9. huius lib.

Eademq;

Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab unitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est, rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate, est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex aequo C, ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, ut L, ad R, quod utraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F. Est ergo ex aequo D, ad H, vt O, ad R; sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Nō secus demōstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atq; ita deinceps.

E, 81.		I, 1.
D, 54.	Vnitas.	H, 2.
C, 36.		G, 4.
B, 24		F, 8.
A, 16.		
N, 575.	K, 256.	Q, 64.
O, 13824.	L, 4096.	R, 512.
P, 331776.	M, 65536.	S, 4096.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri unius ordinis desinat in unitatem, ut ex hac subiecta figura est manifestū, in qua I, est unitas.

E, 162.		I, 512.
D, 54.	Vnitas.	H, 128.
C, 18.		G, 32.
B, 6.		F, 8.
A, 2.		
N, 36.	K, 4.	Q, 64.
O, 216.	L, 8.	R, 512.
P, 1296.	M, 16.	S, 4096.

CAETERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quascunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc

modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III. **SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.**

CADANT inter utrunque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem

A, 162. *Q,* 216. *R,* 288. *S,* 384. *B,* 512. *& C, numeri D,*
F, 54. *O,* 72. *P,* 96. *I,* 128. *E, F; inter B, ve-*
E, 18. *N,* 24. *H,* 32. *ro & C, totidem*
D, 6. *G,* 8. *numeri G, H, I.*
C, 2. *Dico tot quoque*
K, 9. *L,* 12. *M,* 16. *medios continue proportionales ca-*

dere inter A, & B, quos inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot ter E, & C, & inter H, & C. Sumptis .n. tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est D, ad G. Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdē rationis D, ad G. Igitur est ut K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L,
8. octaui. *cadet quoque vnus medius, nempe N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt; si sumantur quatuor minimi numeri in ratione D, ad G. Eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.*

HOC etiam uerum est, si loco alterius numeri, nempe B, unitas assumatur, veluti perspicuum est in hac subiecta figura,

in

in qua numer⁹ B, vnitas est, cadunt quæ tã inter A, et C, quam inter B, & C, tres numeri

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

cõtinue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt & cæ

Ex his etiam appares, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, proinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 11.

DVORVM quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatã habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, unum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes se mutuo C & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratũ, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicans fecit E, ex constructione; erit ut C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione; & multiplicans seipsum ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; erit quoque, ut C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia uero, existentibus A, E, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, duplicatam rationẽ

A, 9 E, 21. B, 49.
C, 3 D, 7.

17. *septimi*

habet

habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandū erat.

SCHOLION.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadrates numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, que lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

A,9. E,12. B,16. C,3. D,4.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & utrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A; Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

11. THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus

cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans C, seipsum faciat E, & D, seipsum multiplicãs faciat F; At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes uero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; erit, ut C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; erit quoque ut C, ad D, ita G, ad F; propter eaq; E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H; erit ut E, ad G, hoc est, ut C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicãs uero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; erit quoque, ut G, ad F, hoc est, ut C, ad D, ita I, ad B: Est autem & H, ad I, ut C, ad D; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam uero, existentibus A, H, I, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus; cũ sit C, ad D, ut A, ad H. Quã ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

17. *septimi*

17. *septimi*

18. *septimi*

SCHOLION.

Hinc quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros

numeros medios proportionales in continua proportione latitis ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad D.

EODEM modo conſtat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo et ipſum H, quod H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem. Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum vero triū H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9 G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

12. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT

SINT continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & ruſum multiplicantes ipſos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue eſſe proportionales. Multiplicantes A, & B, ſe mutuo faciant N; & B, C, ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q, Item B, multiplicans O, F, faciat R, S. Simili

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. &, 2048. M, 4096.

modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, &. Quoniam igitur A, multiplicans ſeipſum, & B, fecit D, & N; erit ut A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & ſeipſum, fecit N, & E; erit etiam, ut A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; erit ut B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit, ut B, ad C, ita O, ad F; propterea que & E, O, F, continue proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione ſint continue proportionales, in qua E, O, F, erit ex æquo D, ad E, ut E, ad F; atque adeo D, E, F, continue proportionales ſunt. 17. ſeptimi 17. ſeptimi

DEINDE, quia A, multiplicãs D, N, E, fecit G, P, Q, erunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; erit quoque, ut A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; erit ut B, ad C, hoc eſt, ut A, ad B, ita S, ad I; propterea q; & H, 17. ſeptimi 18. ſeptimi

& H, R, S, I, proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quo circa, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem con

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. &, 2048. M, 4096.

tinuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, ut H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales.

NON diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

SVNT autem, ut ex demonſtratione liquet, numeri primo producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri ſecundo geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio procreati, in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionem totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos

A, 2.	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 16.	F, 64.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

ex eiſdem numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M. Dico D, F, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K; quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue ſunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, uel B, ad C. Sed eiuſdem rationis F, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad

A, ad B, & B, ad C. Eodem modo oſtendemus G, H, I eſſe proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

Ex qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primum productos eſſe in duplicata ratione datorum numerorum; ſecundo vero procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius elicitur ex 1. theor. ſcholij propos. 10. huius lib.

Quamvis autem in vtraque demonſtratione huius propos. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eandem tamen propoſitionem demõſtrabimus, etiãſi plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quã tres A, B, C, D, continue proportionales; quiſe ipſos multiplicantes faciãt E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonſtratis, proportionales ſunt in ratione A, ad B: Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc eſt, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſe ipſos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in ſe ipſos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodẽ modo producti.

A, 2.	*B*, 4.	*C*, 8.	*D*, 16.	
E, 4.	*F*, 16.	*G*, 64.	*H*, 256.	
I, 8.	*K*, 64.	*L*, 512.	*M*, 4096.	

THEOR. 12. PROPOS. 14. 13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratũ B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, ut

vt liquet ex demonſtratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; me

7. octaui. A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6. tietur quoque A, primus ſecundũ E. Quare cum ſit ut A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, ut C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D, ut demonſtratum eſt propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, ſecundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. ſcholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerũ metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

14. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque C, & D, ſe ipſum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem ſe mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonſtratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, ſecundum. Cum ergo ſit, ut A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216. E, 4. G, 12. F, 36. C, 2. D, 6.

7. octaui

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubũ metiri

metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter metiente C, latere latus D, metietur & A, ipsum H; ac idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neq; latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D. Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metietur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

14. octaui

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; metietur quoque C, latus illius D, latus huius. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

14. octaui

THEOR.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

I

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

15. octaui.

A,8. B,27. C,2. D,3.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

15. octaui.

SCHOLION.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiã modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et si unius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si uero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus

dratus quadrati, nec cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus ad cubum B, sit multiplex; metietur B quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. Igitur & latus D, latus C, metietur; ad proinde latus C, lateris D, multiplex erit. 14. & 15. octaui.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit; metietur latus D, latus C. Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum; & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex. 14. & 15. octaui.

A 36. B 9.
C 6. D 3.
A 648. B 81.
C 216. D 27.

AT uero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex; nec metietur B, ipsum A, quadratus quadrati; nec cubus cubum. Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex. 16. & 17. octaui.

A 450. B 50.
C 150. D 10.
A 1215. B 135.
C 405. D 45.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus latus C. Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit. 16 & 17. octaui.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 16.

DVORVM similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius uero illis proportionalia E, F, ita ut C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque ut C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere unum numerum medium proportionalem, &

proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterũ homologorum C, F, uel D, F. Multiplicantes se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, ut B, ad F; erit permutando C, ad B, ut D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, erit A, ad G, ut C, ad E, hoc est, ut D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit quoque G, ad B, ut D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, uel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.
17. sexti

QVIA uero, existentibus A, G, B, continue proportionalibus, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, uel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, uel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, uel D, F, assumptorum.

CONSTAT *etiam ex dictis, medium proportionalem G, & utrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, ut C, ad E, uel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, uel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, ut C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, ut C, ad E, uel D, ad F: metiantur autem C, D, latera ipsum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Que-*

re

rorum & E, F, latera sumum planum B, quæsitum, habebunt G, B, communem mensuram tam E, quam F, ideoque eruntinter se compositi.

Ex. quæ demonstrationis etiã manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse F, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera æquiposteriorisB.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

DVORVM similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, E; huius uero illis proportionalia F, G, H, ita ut sit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, sicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios pro A, 30. M, 60. N, 120. B, 240, portionales, & propor L, 6. L, 12. K, 24, tionem A, ad B, esse tri C, 2. D, 3 E, 5. F, 4. G, 6. H, 10. plicatam eius, quam

habent latera homologa C, F, uel D, G, uel E, H. Multiplicantes se mutuo C, D, faciant I; & F, G, se mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, se mutuo multiplicantes faciant L. Postremo E, H, ipsum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipsis F, G, H, proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum ut C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam uero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; erit ut C, ad F, ita I, ad L. Simili 17. *septimi* modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K, erit quo que ut D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione G, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H. Et quoniam A, solidus factus est ex mutua multiplicatione la-

terum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione numerorum C, D, sit ut E, multiplicans F, faciat K. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & L, factus ex mutua multiplicatione F, G, numerus M, ipsum H multiplicans facit B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fe-

A, 30. M, 60. N, 120. D, 240. cerit A, & M, erunt

17 *septimi* I, 6. L, 12. K, 24. A, ad M, ut I, ad L,

C, 2. D, 4. E, 8. F, 16. G, 10. H, 19. hoc est, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E,

ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N; & B, ex H, ad N, ut L, ad K, hoc est, ut C, ad F, uel D,

18. *septimi* ad G, uel E, ad N. Est autem & M, ad N, ut E, ad H; quod E, H, multiplicantes I, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H. Atque ideo inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

QVONIAM uero, existentibus A, M, N, B, proportionalibus continue, proportio A, ad B, triplicata est eius, quam habet A, ad M, & similium A, ad M, ut C, ad E, uel D, ad G, uel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, solidum, ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet latus ad latus homologum. Quod erat, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

Cvm demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; aliquos inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, uel D, G, uel E, H, assumptorum.

Et ij, quæ dicta sunt, perspicuum est, esse duos medios proportionales M, N, & utrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, sint proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; metiantur autem F, G, H, utrumlibet solidorum B, consequentes

quentes consequentium; sic de proportionibus N, ad B, & C, ad E, vel D, ad G, vel E, ad H, (quadruplæ) metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentium: quod sit N, ad E, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur; (cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L,) metiuntur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt, ipse L, I, K, metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metientur quoque I, ipsum M, (Metiuntur autem & C, D, latera planum summi I. Igitur & C, D, ex præmissa) metientur ipsum M, atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur. Nec non & ipsum A, verum latera sunum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram eam C, quam D, quam B. Idcoque compositi intense sunt. Rursus quia est A, ad M, ut C, ad B, vel D, ad G, vel F, ad H, metiuntur autem L, D, H, numeros solidum sunum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M, consequentes consequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipsum N, (cum enim N, factus sit ex H, in I,) per constructionem; metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, (positi I, I, K, proportionales sunt: mensitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E;) metietur etiam E, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K, metientur quoque E, G, ipsum N, atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Nec non & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram hanc E, quam G, quam H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, B.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

Cadat inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi ra-

nales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Numerum enim inter A, & B, qui sit D, & inter B, & C, cadat medius proportionalis; erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

20. octavi

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C; erit A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

21. octavi

A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, ille similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Hæc est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum; quam qui diligenter examinare velit, inveniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 22. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus unius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus unius proportionalia sint quædam alterius; Iure optimo

quis

quos inficiari poterit, ſi duorum planorum ſimilium unus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum eſſe, & ſi duorum ſimilium ſolidorum unus cubus fuerit, alterum etiam eſſe cubum: quod tamen in demonſtratione pro conceſſo, atque omnibus perſpicuo aſſumebatur. Nam poſitis duobus numeris planis 36. & 64. ſimilibus, ſatis eſt, ut duobus lateribus prioris, qualia ſunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera poſterioris, numerum 4. & 16. proportionalia. Unde etiamſi prior ſit quadratus, habere duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis poſſet, immo omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera hic propoſitionalia, hoc eſt, inter ſe quoque æqualia, atque adeo eſſe quadratam? quemadmodum etiam manifeſtum eſt, hiſce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18 non reſpondere alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quanquam ipſi numeri ſint ſimiles, cur ſine demonſtratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, nempe & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter vtramque propoſitionem Euclidis aliter, demonſtrabimus, ad hunc, qui ſequitur modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in ſe faciat A; erunt D, & A, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo tum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadent medij proportionales multitudine æquales, nempe vnus; cadent quoque iidem, ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. inter vnitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui ſit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri ſunt continue proportionales, producetur C, ex E, in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

A, 36. B, 48. C, 64. D, 6. E, 8. Vnitas.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipſum A, & F, ipſum

ſum C, eque ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll. 1. propoſ. 25. huius lib. ſunt quadrati: Eſt autem & A, quadratus, ex hypotheſi; cadet inter A, et D, quadratos medius unus proportionalis, ut G. Quia vero eſt, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; cadet quoque inter C, & F, vnius proportionalis medius, nempe H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; metietur idem & ſecundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerũ K, quoties F, ipſum H, ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipſius K. Itaque quia ratio I, ad F; quadrati ad quadratum, duplicata eſt rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc eſt, H, ad F: Eſt autem & ratio C, ad F, eiuſdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quod conuertendo ſint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ut C, ad F; ac proinde I, & C, æquales ſunt. Exiſtente ergo L, quadrato, ex conſtructione, & C, quadratus erit.

11. octaui.
8. octaui.
7. octaui.
11. octaui
20. octaui

ALITER. Quoniam A, & C, ſimiles plani ſunt; ſint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipſius A; at F, G, ipſius C, ita vt ſit D, ad E, ſicut F, ad G: aſſumatuſque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in ſe; erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo ſit

A, 36.	*B*, 48.	*C*, 64.		*F*, ad *G*, vt *D*, ad *E*, cadatque
H, 6.		*I*, 8.		*inter D, & E, medius proportionalis H*; cadet quoque inter
D, 3.	*E*, 12.	*F*, 4.	*G*, 16.	*F, & G, unus medius proportionalis, qui ſit I. Quare cum F, I, G, ſint continue proportionales; idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in ſe ipſum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in ſe ipſum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione.*

20. ſeptimi
8. octaui
20. ſeptimi

SINT rurſum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, ſit cubus. Dico & D, quartum, cubum eſſe. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in ſeipſum

sum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continuè proportionales ab vnitate; atque idcirco connexum proportionales quoq; erũt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum inter numerum D, & vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè sunt proportionales; fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
Vnitas.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D; metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorũ, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem E, 8. & A, cubus, ex hypothesi; cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L; ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem nationis E, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H. Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16. L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.

12. octani
9. octani
7. octani
12. octani

cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT A, ad B, ut C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D; cadat autem inter C, & D, quadratos unus medius proportionalis, nempe E; cadet quoque inter A, & B, medius unus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

11. octavi — A, 36. F, 48. B, 64. C, 9. E, 12. D, 16.

8. octavi

22. octavi

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusvis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cū primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadrati ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, esset & 8. quadratus; Igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum.

2. corollar.

24. octavi

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum,

merum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

SIT A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum: sicque A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D; cadant autem
inter C, & D, cubos A, 8. G, 12. H, 18. B, 27.
duo medij proportio- C, 64. E, 96. F, 144. D, 216. 12. octavi
nales, nimirum E, F;
cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus; erit & B, quartus cubus. Quod erat, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat. 8. octavi 23. octavi

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cujusvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus non cubus. 25. octavi

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum
ad alium quendam quadratū. A, 20. C, 30. B, 45.
Cum enim A, & B, sint plani D, 44. E, 66. F, 99.
similes, cadet inter eos unus me
dius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione communi A, C, B; erunt extremi 18. octavi

trum D, & F, quadratū, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, ut D ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, ut eſt quadratus aliquis, nempe D, ad quadratum alium, ut ad F. Ergo ſimiles plani numeri rationē inter ſe habent, &c. Quod demonſtrandum erat.

A,20. C,30. B,45.
D,4. E,6. F,9.

SCHOLION.

FACILE etiam demonſtrabimus conuerſum huius, videlicet,

NVMERI, qui proportionem habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, ſimiles plani ſunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter ſe, quā quadrati C, D. Dico A, B, eſſe planos ſimiles. Quoniam inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et eſt, vt C, ad D, ita A, ad B; cadet quoque medius proportionalis inter A, & B. Quare A, & B, plani ſimiles ſunt.

11. octaui

A,8. B,18.
C,16. D,36.

8. octaui
20. octaui

EX hoc perſpicuum eſt, planos numeros, qui ſimiles non ſunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratū. Si enim haberent; eſſent, vt modo demonſtratum eſt, plani ſimiles. quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

25.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT ſimiles ſolidi A, B. Dico eſſe, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia A, B, ſunt ſolidi ſimiles, cadent inter eos duo medij propor-

19. octaui

proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H,
ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H, constat ita esse A, ad B, ut est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, nempe ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27.

SCHOLION.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet,

NVMERI, qui proportionem habent, quã cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; A, 16. B, 54. C, 64. D, 216. cadant autem inter C, D, cubos duo media proportionales; cadent quoque inter A, B duo media. Sunt ergo A, & B, solidi similes. 12. octani 8. octani 27. octani

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel sesquialteram, vel superbipartiẽtem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri nõ posse iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadẽ ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo media proportionales; Nam alias caderent quoque duo media inter minimos eorundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in schõlio prædicto traditum est; inter quos certum est non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales. 18. octani 8. octani

SIMILITER nec duo quivis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus pri-

mus

mus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quinis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas unitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est eas non posse esse proportionalia.

VNDE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel sesquialteram, vel superbipartientem, vel certe duo numeri primi; eorum illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter vero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, esset & 20. quadratus. quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.

26. octaui
24. octaui

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. 40. Si enim essent solidi similes, haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.

27. octaui
25. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM IX.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.



DVo numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, ut sint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

I. 17. *septimi*. 18. *octavi*. 8. *octavi*. II. A,6. B,54. D,36. E,108. C,324. 12. *octavi*.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

2. III.

Dvo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratū.

A,6. B,54. D,36. C 324.

17. *septimi* Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter D, & C, quadratos unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter A, & B, unus medius proportionalis cadet; Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

11. *octaui* 8. *octaui.* 20. *octaui*

SCHOLION.

Ex his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I. **Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.**

Dvo quadrati A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nempe quadrati; erit C, ex eis productus, quadratus.

A,4. B,25. C,100.

1. *noni.*

II. **Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.**

Dvo *numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; erunt A, & B, similes plani: atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis, nempe D. Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.*

A,9. D,12. B,16. C,144.

2. *noni.* 18. *octaui* 22. *octaui*

III. **Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant**

ciant non quadratum; alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus.
Dico B non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20. C, 80.

IIII. Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicãs procreet aliquem; Productus cubus erit.

Faciat cubus A, se ipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D; metietur C, ipsum D, per C: Metitur autem & unitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est unitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nempe denominata a C; Ac proinde

A, 8. E, 16. D, 42. F, 32. C, 2. B, 64. Vnitas. 7. pron. 5. pron.

20. *defin.* proinde ut unitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multi-
7. *pron.* plicans D, fecit A; metietur D, ipsum A, per C: Metiebatur
autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ
A, 8.
20. *defin.* E, 16. D, 4. D, ipsius A; ideoque ut C, ad D,
F, 32. C, 2. ita D, ad A: sed ut C, ad D, ita erat
B, 64. Vni-. tas. unitas ad C. Igitur ut unitas ad
C, ita C, ad D, & D, ad A; Atq; adeo inter unitatem & numerum A, duo medij proportiona-
7. *pron.* les cadunt numeri C, D. At quia A, ipsum B, metitur per A,
quod A, se ipsum multiplicans fecerit B; metitur uero & uni-
5. *pron.* tas ipsum A, per A: Eadem erit pars unitas ipsius A, quæ
20. *defin.* A, ipsius B; Ac propterea erit ut unitas ad A, ita A, ad B.
Quare cum inter unitatem & numerū A, cadant duo me-
8. *octaui* dij proportionales C, & D; cadent totidem inter A, & B,
nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B,
sint continue proportionales; & A, primus sit cubus; erit
23. *octaui.* quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum
multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; sitq;
8. *noni.* D, cubus. Quoniam uero A, multi-
A, 8. B, 27. plicans A, & B, fecit D, & C; erit ut
17. *septimi* D, 64. C, 216. A, ad B, ita D ad C. At inter A, & B,
12. *octaui.* cubos duo medij proportionales ca-
8. *octaui* dunt. Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales
23. *octaui* cadent; Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quo circa si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c.
Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C; At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. Totidem igitur & inter A, & B, cadent; Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. B, 27. C, 216.

3. noni. 17. septimi 12. octaui. 8. octaui. 23. octaui

SCHOLION.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit. I.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.

A, 8. B, 20. C, 160.

5. noni.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. II.

FIAT ex cubo A, nnumerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus; & factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.

A, 8. B, 17. C, 136.

4. noni.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus se ipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS se ipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se fecerit B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, ut perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 64. C, 512.

5. noni.

SCHOLION.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales; Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, ut perspicuum est.

12. octaui
17. septimi
8. octaui
23. octaui

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit

A, sit compositus, metietur eum, praeter unitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A per E. Quo posito, multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C, procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum. 13 *defin.* A,6. B,11. C,66. D,2. E,3: *9. pron.*

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus uero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate esse quadratum, & unũ intermittentes

Vnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. K,59049. L,177147. M,531441.

omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum uero F, cubũ simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam est unitas ad A, ut A, ad B, æque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B; Metitur autem unitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, *5. pron.* *9. pron.*

quadratus est. Quia uero tres deinceps proportionales sunt
22. octaui B, C, D; & est B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem
ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F,
cum D, sit quadratus, & F, quadratus erit; Nec non & om-
nes unum intermittentes.

RVRSVS quia est unitas ad A, ut B, ad C; atque me-
tietur unitas numerum A, & numerus B, numerum C: Me

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.
H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

5. prop. tietur autem unitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C,
9. prop. per A, metietur; atque adeo B, ipsum A, multiplicans pro-
creabit numerum C. Quare cum A, se ipsum multiplicās
faciat B, multiplicans uero B, faciat C, ac est ostensum; erit
C, cubus. Quia uero quatuor deinceps proportionales
23. octaui sunt C, D, E, F, & est C, cubus; erit & F, cubus. Eodem ar
gumento assumptis quatuor deinceps proportionalibus F,
G, H, I, cum F, sit cubus; & I, cubus erit; atque omnes
semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab unitate ostensus
est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadra
tus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis ni-
mirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadra-
tus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur
ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fue
rint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunque numeri ab unitate con
tinue proportionales, omnes positi in locis im
paribus, nimirum in tertio, quinto, septimo,
nono, undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes
autē, qui sequuntur proxime numeros positos
in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, deci-

mo-

moquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimus ſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes uero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimo octauo, uigeſimo quarto, & alijs, quæ meritur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, uigeſimusquintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper unum intermittunt poſt tertium ab unitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab unitate. Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero poſt vnitatem ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus unita-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ti quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittẽtes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, iam demonſtratũ eſt. Quod uero 8. noni.

8. *noni.* uero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuū fiet. Cum tres continue proportionales sint A, B, C; sitque

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

22. *octaui* A. quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales.

SIT iam A, proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768, F, 262144.

8. *noni.* intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit unitas ad A, ut A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur, & A, ipsum B, per se ipsum metietur; Atque adeo cubus A, se ipsum multiplicans numerum B, procreabit. Quare B, cubus est. Quoniam uero quatuor continue proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus; & D, cubus erit. Eademq; ratione assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit, & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

5. *pron.* 9. *pron.* 3. *noni.* 23. *octaui*

SCHOLION.

NON *demonstrauit Geometra, si numerus, qui post unitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua uero parte est quadratus, ea ratione & reliqui*

reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatẽ, non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatẽ, non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I; & primum A, proximus unitati non sit quadratus. Dico nec alium ullum esse quadratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, nempe præter B, D, F, H. Si enim præter hos alius

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16 E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

est quadratus, sit quadratus E. Cum ergo & D, sit quadratus, sitque ut D, ad E, uel E, ad F, ita A, ad B; & conuertendo ut E, ad D, uel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, uel quadratus F, ad quadratum E: sed B, tertius ab unitate est quadratus. Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus nullum alium, præter dictos, quadratum esse. 8. noni. 8. noni. 24. octaui

SED iam A, proximus unitati non sit cubus. Dico nec alium ullum esse cubum, præter quartũ ab unitate, & duos intermittentes omnes, uidelicet præter C, F, I. Nam si præter hos alius poterit esse cubus, sit D, cubus. Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo ut D, ad F, ita A, ad C, (quod tres 8. noni.

D, E,

D,E,F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo ut F, ad D, ita C, ad A ; habebit C, ad A, ratio-
8. noni. nem, quam cubus F, ad cubum D : Sed C, est cubus, nempe

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

25. octaui quartus ab unitate. Igitur & A, primus ab unitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est.
8. noni. Quod si E, credatur esse cubus ; cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, ut C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuerten
do ut cubus E, ad cubum C, ita C, ad A ; existente C, cubo,
25 octaui erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratio ne ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque ullos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab unita te quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

NON est autem necesse, si numerus, qui post unitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab unitate, & quinque intermittentes omnes ; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab unitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post unitatem, cubus quidem, nō autem simul & quadratus. Di
Vnitas. A, 8. B, 64. co B, tertium esse cubum simul & quadratum ; cubum quidem,
9. noni. quod primo existente cubo, omnes cubi sunt ;
8. noni. quadratum uero, quod tertius sit ab unitate.

SIT. deinde A, post unitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Di-
Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. co quartum C, esse cubum simul & quadratum ; Cu-
8. noni. bum quidem, quod quartus sit ab unitate ;
9. noni. quadratum uero, quod primo existente quadrato, omnes sunt quadrati.

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus.

dratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratū, praeter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

enim primo non existente quadrato, nullus alius quadratus sit, 10. noni.
praeter tertium ab unitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, nullus alius sit cubus praeter quar- 10. noni.
tum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, ut ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimusextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de caeteris. Nam in haec locasola incidunt quadratus, & cubus simul, ut liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorē, ut

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

C, quemlibet maiorem, ut G, metiri per aliquem numerorū A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo ut C, ad G, ita unitas ad D; (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem cum unitate & numeris A, B, C, D,) æque metietur unitas numerum D, atque numerus C, numerum 10. *defi*

5. pron. merum G: Sed unitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit ut E, ad F, ita unitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo ut A, ad G, ita unitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus a minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nempe per ſe ipſum, &c.

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſe ipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiã multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore diſtat, quantum minor ab vnitate; propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, producatur ille, quem metitur. Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

9. pron.

11. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, quicunque primorum

morum numerorum ultimum metiuntur, ijdem & eum, qui unitati proximus eſt, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A. Si namque non metitur ipſum A; erit E, cum primus ſit, ad A, primus. 31. *ſeptimi*

Metiatur autem E, ipſum D, per Vnitas. A,10. B,100. C,1000. D,10000. E,5. H,20. G,200. F,2000.

F, atque adeo E, multiplicans E, faciat D. Quia uero & A, ipſum D, metitur per C, ac proinde A, multiplicans C, facit D, ut in ſcholio præcedentis propos. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium. Quare erit ut A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint inter ſe primi; metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia uero & A, ex ſcholio eodem, metitur C, per B, atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. Erit igitur ut A, primus ad E, ſecundum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cũ A, & E; ſint inter ſe primi; metietur æque A, ipſum G, & E, ipſum B. Metiatur E, ipſum B, per H, ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipſum B, per A, ac idcirco A, ſe ipſum multiplicans facit B, ut ex eodem ſcholio apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex A, medio in ſe, & ex E, primo in H, tertium. Quare erit ut E, primus ad A, ſecundum, ita A, ſecundus ad H, tertium; atque adeo, cũ E, & A, inter ſe primi ſint, æque metietur E, ipſũ A, & A, ipſum H. Quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, ipſum A, non metiri. Quare falſum eſt E, ipſum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum

9. *pron.* 19. *ſeptimi* 21. *ſeptimi* 9. *pron.* 19. *ſeptimi* 21. *ſeptimi* 9. *pron.* 20. *ſeptimi* 21. *ſeptimi*

sum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri: Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus, quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes, metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, uel B, ultimus numerus statuatur. Si igitur ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

ALITER. Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico, & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; erit
31. *septimi* E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, se ipsū multiplicans facit B, ut apparet ex scholio propos. præceden-
Vnitas. A, 6. B, 36 C, 216. D, 1296. E, 3.
27. *septimi* tis; erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt, fit autem C, ex A, in B, per idem scholion; erit C, ad
26. *septimi* E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt, & fit D, ex A, in C, per idem scholiō; erit D, ad
26. *septimi* E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est cōtra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A.

SCHOLION.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod uidetur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium uideatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5o de propor. propos. 201, gloriaturque se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse; Quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius uim huius demonstrationis expēdisset; uel certe, si expendit, eam in memoriam reuocasset; quā doquidem ipso longe prior Euclides usus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum.

CAETERVM ex demonstratis perspicuum est, quemcunque

cumque numerũ primũ, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes, quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris; manifestum est, quod & ille omnes metiatur. 12. noni 11. noni

THEOR. 13. PROPOS. 13. 13.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit; Maximũ nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab unitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum ergo est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; metietur quoque ipsum A, unitati proximum, qui primus ponitur. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625. E —— H —— G —— F ——

Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; metietur quoque ille alius primus eundem D, atque adeo & ipsum A, primum existentem, nimirum unitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; & uicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nempe is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D,

12. noni

33. septimi 11. prom. 12. noni

8. prom.

11. noni per E. Cum ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipſorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipſorum A, B, C, quod eſt contra hypotheſim: ponitur enim E, nõ idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus: Quoniam uero E, metitur D, per

8. quon. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E —— H —— G —— F ——

F; metietur uiciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus. Si enim ſit primus, & metiatur D, ultimũ;

12. noni metietur, & A, proximum unitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus;

33. ſeptimi atque adeo cum aliquis numerus primus metietur. quem rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F; cum F, metiatur

11. pron. D, extremum; metietur quoque ille alius primus eun-

12. noni dem D, atque adeo & ipſum A, proximum unitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quã A, ipſum F, metitur. Iam uero quoniam E, metitur D, per

9. pron. F; fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in ſcholio propoſ. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, ter

19. ſeptimi tium; Ac proinde erit ut A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Metitur autem A, ipſum E, ut oſtẽ ſum eſt: Ergo & F, ipſum C, metietur: Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuerſus ab A, B, metitur C, ultimum, (relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus ſimiliter G, diuerſum eſſe ab A, B, & non primum, ſed compoſitum, quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.

Sit enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metiaturq; F, ipſum C, per G; metietur utique F, ipſum C, per

8. pron. aliquẽ ipſorum A, B; & uiciſſim aliquis ipſorum A, B, (nempe is, per quem F, ipſum C, metitur) metietur C, per F. Cũ

11. noni ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorũ A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B: quod eſt abſurdum. oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, qui aliquis ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſo-

rum

rum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; metietur uicissim G, ipsum C, per F. Non erit autē G, primus. Si enim primus sit, metiaturque ultimum C; metietur quoque numerum primum A, unitati proximū. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur. quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quā A, metiatur G; cum G, metiatur C, ultimum; metietur quoque ille alius primus eundem C; atque adeo & ipsum A, unitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metitur. Iam uero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. Quare erit ut A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, ut demonstratum est: Igitur & G, ipsum B, metietur: metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, ultimum (sēlinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum ad ostensum est de numeris F, & G. Nam si H, idem sit qui A; metiaturque G, ipsum B, per H; metietur utique G, ipsum B, per A; Et uicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, ut constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem qui A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. Iam uero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, ut in scholio dicto docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiū, & ex A, medio in se ipsum. Quare erit ut H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium. At A, metitur ipsum G, ut est demonstratum: Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare existente A, primo, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C: Ac proinde si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

8. pron.
12. noni
23. septimi
11. pron.
12. noni
9. pron.
19. septimi
8. pron.
9. pron.
20. septimi

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim, si fieri potest, primus numerus E, diuersus a B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per

A.....
B.. C... D....
E—— F——

9. pron. 32. septimi. F; multiplicans E, ipsum F, faciet A. Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur; non quidem ipsum E, primum existentem, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

ADDIT *hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.*

15. SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, compositus erit ad alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi.

SINT *quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D,*

C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nempe A. Dico H, compositum esse vel ad F, vel ad G. Sumantur enim in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & sic deinceps, donec habeantur tot vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. A, fit ex F, in M; metitur autem H, ipsum A; erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt constat ex demonstratione propos. 2 lib. 8. erit, ex scholio dicto, rursus H, compositus vel ad F, vel ad I. si ad F, habetur propositum; si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum; erit H, compositus ad F, ex dicto scholio.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. 2. octani
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H —— F, 2. G, 3.

DEINDE metiatur H, secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. si ad F, habetur propositum; si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem modo compositus vel ad F, vel ad K. si ad F, habetur propositum; si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G.

RVRSVS metiatur H, tertium C, qui cum fiat ex F, in O; eris H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum; si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compositus vel ad F, vel ad L. si ad F, habetur propositum; si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se; compositus quoque erit H, ad G.

PRAETEREA metiatur H, quartum D, qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. si ad G, habetur propositum; si vero ad L, cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus.

EODEM modo si H, metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE ſi H, metiatur primum A; erit H, compoſitus ad F: Si vero ſecundum B, metiatur; erit compoſitus vel ad F, vel ad G: Si denique metiatur tertium C, vel quartū D, vel quē cunque alium inſequentem; compoſitus erit H, ad G. Id quod perſpicuo ex demonſtratione apparet.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis ſecundo libro Euclides demonſtrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM in theoremate ſequente demõſtrando theon quadam aſſumit in numeris, quæ demonſtrata ſunt de lineis libro ſecundo, tanquam ſi eadem de numeris eſſent oſtenſa; non alienum inſtituto noſtro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonſtrata ſunt de lineis, hoc loco de numeris demonſtrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe a nonnullis eſt traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in ſecundo libro tenuiſſe conſpicimus.

I. **SI fuerint duo numeri, ſeceturque ipſorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehenſus ſub illis duobus numeris æqualis eſt numeris, qui ſub numero indiuiſo, & qualibet parte numeri diuiſi continentur.**

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem eſſe numeris G H, H I, I K, hoc eſt, toti numero G K, ex G H, H I, I K, compoſito. Quoniam C, multiplicans A B, fecit F;

A . . . D . . E . B . C . .
F . . . . . .
G . . . . . H . . . . I . . K

7. pron. metietur A B, ipſum F, per C, hoc eſt, A B, pars erit ipſius F, denominata a C. Eadem ratione A D, ipſius G H; nec non

DE

D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit A C, denominatæ, nempe eadem quæ A B, ipsius F. Quia uero, per ea quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum. 4. pron.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur. II.

NVMERVS A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per

D . . . . .
A . . . C . . B

sheor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B; nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur, uel ex appositæ secundæ figuræ apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nempe quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

E . . . . . .
A . . . C . . D . . B

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, & quadrato, quia prædicta parte efficitur. III.

SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem esse & ei, qui sub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C.

Sumpto enim numero D, qui dicta parti A C, æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex A C, in C B, & ex D, hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A G. Quod est propositum.

D . . . . .
A . . . . C . . . . . B

IIII. SI numerus in duas partes dividatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

SIT numerus A B, divisus in A C, C B. Dico numerum quadratum ex A B, factum æqualem esse quadratis partium A C, C B, una cum numero, qui fit bis ex parte A C, in partem C B. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius A B, æqualis est numeris, qui fiunt ex A B, in A C, & in C B. Est autem numerus, qui fit ex A B, in A C, per 3. theorema, æqualis numero genito ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius A C: Item numerus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium A C, C B, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . B

V. SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS A B, secetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerum sub partibus inæqualibus A D, D B, contentum, una cum quadrato numeri inter-

medij

medij C D, esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius C B, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, una cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B; numero vero comprehenso sub C D, D B, una cum quadrato ipsius D B, æqualis sit, per 3. theorema, numeris factus ex C B, in D B; erit numerus quadratus ipsius C B, æqualis etiam reliquo quadrato ipsius C D, una cum reliquo numero facto ex C D, in D B, & numero ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numerus, qui fit ex A D, in D B. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius C D, una cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc est, numerus factus ex A D, in D B, una cum quadrato ipsius C D, æqualis est quadrato ipsius C B. Quod est propositum.

A . . . . C . . . D . . B

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS *A B, secetur in partes æquales* A C, C B, *eique adijciatur numerus* B D. *Dico numerum factum ex toto* A B, *& adiecto* B D, *tanquam vno, in adiectum* B D, *una cum quadrato dimidij numeri* C B, *æqualem esse quadrato, qui fit ex* C B, *dimidio & adiecto* B D, *tanquam vno. Cum enim quadratus ipsius* C D, *per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium* C B, B D, *una cum numero bis comprehenso sub* C B, B D, *hoc est, una cum numeris sub* C B, B D, *& sub* A C, B D, *comprehensis; numeris autem contentis sub* C B, B D, *& sub* A C, B D, *& sub* B D, B D, *hoc est, quadrato ipsius* B D, *æqualis sit, ex 1. theorem. numerus factus ex* A D, *in* B D; *erit quadratus ipsius* C D, *æqualis reliquo quadrato ipsius* C B, *una cum numero facto ex* A D, *in* B D; *hoc est, numerus factus*

A . . . . C . . . B . . D

ex

ex A D, *in* B D, *una cum quadrato ipsius* C B, *æqualis est quadrato ipsius* C D. *Quod est propositum.*

VII. SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico quadratum totius* A B, *vna cum quadrato partis* C B, *æqualem esse numero bis, qui fit ex toto* A B, *in dictam partem* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C.

A . . . . . C . . . B

Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius A B, *æqualis sit quadratis partium* A C, C B, *una cum numero, qui fit bis ex* A C, *in* C B; *si quadratus ipsius* C B, *addatur communis; erunt quadrati numerorum* A B, C B *simul, æquales quadratis numerorum* A C, C B, C B, *vna cum numero qui fit bis ex* A C, *in* C B. *Atqui ei, qui fit ex* A C, *in* C B, *una cum quadrato ipsius* C B, *æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex* A B, *in* C B; *Ac proinde is, qui fit bis ex* A C, *in* C B, *vna cum quadrato ipsius* C B, *bis, æqualis est, qui fit bis ex* A B *in* C B. *Igitur quadrati numerorum* A B, C B, *simul, æquales sunt numero, qui fit bis ex* A B, *in* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod est propositum.*

VIII. SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico numerum, qui fit quater ex toto* A B, *in partem* C B, *vna cum quadrato reliquæ partis* A C, *æqualem esse quadrato numeri, qui ex toto* A B, *& prædicta parte* C B, *componitur. Addito enim numero* B D, *qui æqualis sit dictæ*

A . . . . C . . . B . . . D

Hæ parti C B; *cum quadratus totius* A D, *compositi ex* A B, *&* B D, *siue dicta parte* C B, *sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum* A B, B D, *vna cum numero qui fit bis ex* A B, *in* B D, *hoc est, quadratis numerorum* A B, CB, *una cum eo, qui fit bis ex* A B, *in* CB; *Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum* A B, C B, *simul æquales numero his comprehenso sub* A B, C B, *vna cum quadrato numeri* A C; *Erit quadratus factus ex* A D, *æqualis numero, qui fit quater ex* A B, *in* C B, *vnacum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod est propositum.*

S I numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur. IX.

DIVERSVS sit numerus A B, *in partes æquales* A C, C B, *& non æquales* A D, DB. *Dico quadratos partium inæqualium* A D, D B, *duplos esse quadratorum, qui ex* A C, *dimidio, & ex* C D, *numero intermedio efficiuntur. Cum enim* A . . . . . C . . . D . . B *quadratus numeri* A D, *æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum* A C, C D, *una cum numero bis, qui fit ex* A C, *in* C D; *Si communis apponatur quadratus partis* DB; *erunt quadrati partium* A D, DB, *æquales quadratis partium* A C, C D, D B, *vna cum numero bis, qui fit ex* A C, *hoc est, ex* C B, *in* C D. *Atqui quadrato ipsius* DB, *vna cum numero bis, qui fit ex* CB, *in* CD, *æquales sunt, ex 7. theorem. quadrati, qui fiunt ex* C B, *hoc est, ex* AC, *&* C D. *Igitur quadrati partium* A D, D B, *æquales sunt quadratis partium* AC, CD, *bis; & propterea quadrati partium* A D, D B, *dupli sunt quadratorum, qui ex partibus* A C, C D, *fiunt. Quod est propositum.*

S I numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul du- X.

pli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus A B, diuisus in partes duas aequales A C, C B, eique adiiciatur numerus B D. Dico quadratum numeri A D, compositi ex toto A B, & adiecto B D, & quadratũ adiecti numeri B D, vtrosque simul, duplos esse quadratorum, qui fiunt ex A C, dimidio, & ex CD, composito ex C B, dimidio, & adiecto B D. Cum enim quadratus ipsius A D, aequalis sit, ex 4 theorem. quadratis partium A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex C B, in C D; si communis addatur quadratus partis B D; erunt quadrati numerorum A D, B D, aequales quadratis partium A C, C D, B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D. Sed per 7. theorema, quadrato ipsius B D, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, aequales sunt quadrati numerorũ C B, C D; & quadrato ipsius C B, aequalis est quadratus ipsius A C. Igitur quadrati numerorum A D, B D, aequales sunt quadratis numerorum A C, C D, bis; Ac propterea quadrati numerorum A D, B D, dupli sunt quadratorum, qui ex A C, C D, efficiuntur. Quod erat propositum.

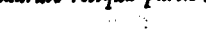
A — D — E — C — B

IAM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, aequalis sit quadrato reliquae partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus A B, in C, ita vt numerus factus ex toto A B, in partem C B, aequalis sit quadrato reliquae partis A C. Quia igitur numerus contentus sub extremis A B, C B, aequalis est quadrato numeri medij A C, 20. septimi erit vt A B, ad A C, ita A C, ad C B: Est autem A B, maior quam A C. Igitur & A C, maior est quam C B. Ablato ita CD, qui ipsi CB, sit aequalis, erit quoque vt A B, ad A C, ita A C, ad CD. Quoniam ergo totus A B, ad totum AC, est vt A C, ex toto A B, detractus ad C D, ex toto A C, detractum; 11. septimi erit quoque vt totus AB, ad totum A C, vel vt detractus A C, ad

ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, illi æqualis, ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit æqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, ut totus AC, ad totū CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum; erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel ut detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est DE, illi æqualis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad AC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, æqualis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum; cum numerus non possit diuidi infinite. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, ut planus numerus ex toto in vnam partium factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum. 11. septimi

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB,



in CB, vna cum quadrato ipsius AC, quincuplus erit quadrati partis AC. Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (minimum is qui quater continetur sub AB, CB, una cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quã 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex AB, in CB, æqualis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis

ipsis rationem habentium ; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A; multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, se ipsum multiplicantem facere C. Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; erit & uterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit; erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam uno in D; ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam uno in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E; Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

A, 9 B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

24. *septimi* 30. *septimi* 26. *septimi* 27. *septimi*

DEINDE quia, ut prius, uterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E; efficitur (cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) numerum factum ex D, E, tanquam uno in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam uno in E, æqualis est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt; atque adeo ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

30. *septimi* 26. *septimi* 27. *septimi*

POSTREMO quia, ut prius, uterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est; atque adeo e contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E; erit quoque qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus; Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E,

ex D, E, tanquā uno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in se, æqualis est, per 4. theorema antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, una cum eo qui ex D, in E, bis: Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

Quoniam ergo duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorū, ut ad eum, qui fit ex D, in E, ut ostensum est; Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E; atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque *is, qui fit ex D, in* E, ad aliquem *ipsorum, ut* ad eum, qui fit ex D in E, primi sunt, ut ostensum est; erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erūt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

30. *septimi*

30. *septimi*

SCHOLION.

CAMPANVS hoc theorema aliter demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandē cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorū reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos. Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad

ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum nempe D; erit E, compositus ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius lib. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur mesiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib 8. metietur quoque H, medios B, C; ac propterea, & compositum ex B, C. Itaque cũ H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, ut demonstrauimus; metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur cõpositi inter se sunt, cõpositus ex A, B, C, & numerus D. ergo inter se primi.

11. pron.
11. pron.
10. pron.
12. pron.
3. octaui

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D; metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C; metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositũ ex A, B, D, & detractum E; metietur quoque H, compositum ex A, B, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt conflat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi

11. pron.
11. pron.
12. pron.
3. octaui

positi sunt. ergo primi. Quod est propositum.

NON aliter ostendemus A, C, D, compositos, esse ad B, primos; nec non, & B, C, D, simul ad A.

THEOR. 16. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri, primi inter se fuerint; Non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse ut A, ad B, ita B, ad alium numerum. si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita B, ad alium, nempe ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se,

A .....
B ..... 23. septimi
C ..... 21. septimi

atq; adeo in sua proportione minimi; ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C. Metitur autem & A, se ipsum: Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se existentes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. I

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorū primi inter se sint: Non erit ut primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi A, 8, B, 12, C, 18, D, 27, sint. Dico non esse, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit

Si ut

ut A, ad B, ita D, ad alium, nidelicet ad E. Erit igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi, minimi in
23. septimi
A, 8. B, 12. C, 18. D, 27 E —— sua proportione. Igitur
21. septimi
æque metientur ipsos B, & E; nempe A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est ut A, ad B, ita B, ad C: Ergo cũ A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C,
11. pron.
metietur; atq; ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est ut B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipsum C; metietur &
11. pron.
C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, metietur quoque ipsum D. Metitur uero & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos existentes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B; ita D, ad alium numerũ E. Eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est,
1
an sit B, ad alium quempiam numerũ, ut
A, 4. B, 7. A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi;
16. noni
perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si uero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C,
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.
per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, immo ipsum D, esse tertiũ proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D; fiet C,
9. pron.
ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqua-

lis

lis est ei, qui ex medio B, describitur; Ac proinde erit ut A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B. 20. *septimi*

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D; ita ut

sit A, ad B; quemadmodū A,6. B,4. D --- C,16.
B, ad D. Quoniam igitur

est, ut A, ad B, ita B, ad D; erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C: Quare cum C, fiat ex A, in D; metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C; productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem uia considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, ut B, ad A. Duobus ergo numeris datis, consideraui mus, &c. Quod faciendum erat. 20. *septimi* 7. *pron.*

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem aliū numerum, ut A, ad

B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut ipsitur A, ipsum D, A,8. B,12. C,18. E,27. D,216.
A,4. B,8. C,9. E,18. D,72.

metiatur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, immo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & ter- 9. *pron.*

19. septimi tio continetur; Ac propterea erit ut A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; itaut sit quemadmodũ A, ad B, ita C, ad E. Quare ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt; erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur nõ metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nõ metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, ut C, ad B. Quocirca tribus numeris datis cõsideratimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.

A B C
4. 6. 9.
4. 8. 12.

19. septimi

7. pron.

A B C E D
4. 6. 9. 13½. 20¼.
4. 8. 12. 16. 24.

SCHOLION.

Ex his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, ea posse ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, *& qui illum sequuntur, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut nõ deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati nõ sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi,*

non

non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Idē videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita ut sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: sed sunt A, C, inter se primi, & ob id minimi. Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At uero & A, ie ipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se existentes. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E.

23. & 12. septimi

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, uidelicet ad E; quod quidem fieri posse nusquam demonstrarunt; Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus hic inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse ostendant; liquido constat, eos petere principium (ut cum dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus,

ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquã conceſſum, atque probatum aſſumunt; quandoquidem ſine probatione ulla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, vt B, ſecundus ad C, tertium. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi utuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nõ tamen deinceps ſintque A, & C, primus, & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, vt ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, ſi poteſt fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Eſt ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipſi oſtenderũt, metietur A, duas A, & C, primes inter ſe. Quod eſt abſurdũ. Non ergo fieri poteſt, vt D, ad E, ſit, quemadmodum B, ad C. Quare apertiſſime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E ——

PRIMVM vero membrum perſpicue & aperte oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; manifeſtum eſt, ex demonſtratis, 17. noni. *non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus.*

21. THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorũ.

SINT propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros. Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiantur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus eſt, aut non primus. ſit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures, ppoſita multitudine A, B, C.

38. ſeptimi

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D ———— E . F

SED iam non ſit primus D F. Metietur ergo eum aliquis

quis numerus primus, nempe G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui unus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundē D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, metietur quoque E F, reliquum, numerus uniratē. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui unus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq; uia plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D ---------- E. F
53
G ----

33. *septimi*

SCHOLION.

Poterat idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

Nam si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, nempe D F, si primus est, uel certe G. Atque eodem modo quatuor primis alium quintū, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotcunq; quis uolet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

SI pares numeri quotcunque componā tur: totus par erit.

Componantvr quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cū enim

enim AB, BC, CD, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius AB; & F, ipsius BC; & G, ipsius CD. Quoniam igitur est ut AB, ad E, ita BC, ad F; & CD, ad G; (quod semper sit proportio dupla.) erit quoque ut AB, ad E, ita AD, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus AD, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....B.....C.....D
E.....F.....G.....

12. *septimi*

23. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositum AE, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, DE, sint impares; differet quilibet unitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo unitatum detractarum par: Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A...B...C.....D.....E

21. *noni.*

21. *noni.*

24. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOT-

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totũ A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat unitate a pari, ex definitione; ablata unitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par: Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . B . . . C . . . . . E . D

22. noni. 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24. 29.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quã dimidia pars, uel minor. Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A . . . . . C . . . . . B

SED iam C B, par detractus maior sit, uel minor, dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit ut A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando ut A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo ut A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, ut A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detraha-

A . . . . . C . . D . . . E . . . . . B

A . . . . . D . . . C . . E . . B

trahatur, &c. Quod erat oſtendendum.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim unitate C D, ex C B, reliquus ſit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit & reliquus A D, par. Dempta ergo unitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A ..... C. D .... B

24. noni.

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem eſſe. Detracta enim D B, unitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; erit & reliquus A C, par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A .... C ..... D. B

24. noni.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim A D, unitate ex impare

A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus D C, par quoque erit; Ac proinde addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergò ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat. 24. noni.

A . D . . . . C . . . . . B

THEOR. 26. PROPOS. 28. 29.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt unitates. Quare cum B, sit par, cõponetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A; Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat. 21 noni.

A . . . . B . . . .
C . . . . . .

SCHOLION.

EADEM *demonstratione ostendemus & hoc.*

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM *rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, equalibus, quot in A, continentur unitates, &c.*

A . . . . B . . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparẽ numerũ multiplicans fecerit aliquẽ. Factus impar erit.

Ex impari A, in impare B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nempe æqualis multitudini unitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerū multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A... B.....
C.....

23. noni.

EX CAMPANO.

31. NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cū ponatur par. Est ergo C, par.

A... C....
B.....

29. noni.

32. NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparē esse. Si enim sit par; erit B, factus ex A, impari in C, parē par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

A... C....
B.....

28. noni.

33. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parem numerū metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiū quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstra-

monstrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A metiatur B, per C; metietur quoque C, ipsum B; per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A; ut ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam uero est ut C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando ut C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B: Est autē C, pars ipsius B, denominata ab A, ut ostensum est; erit & dimidiū ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodē A, denominata; Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem, numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

A.... C....
B.....

8. pron.

40. septimi

THEOR. 29. PROPOS. 31. 34.

S I impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoque primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit D; qui necessario impar erit. Nam si sit par, cū A..... B..... metiatur imparem A; erit C..... D---- A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum, ponitur enim A, impar. Quare D, impar est. Quia igitur D, impar parem C, metitur; (est enim C par, cum dimidiū habeat B;) metietur quoque numerum B, eius dimidium. Metitur autem & A: Igitur D, ipsos A, B, primos inter se existentes metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est: Ergo primus.

28. noni.

30. noni.

Quapropter si impar numerus ad aliquē numerū primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR.

35. THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM a binario duplorũ unusquisque pariter par est tantum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita unitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli, erunt A, B, C, D, E, ab unitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, utpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

11. noni.

QVOD autem ijdem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab unitate continue proportionales, sitque A, proximus unitati numerus primus, nempe binarius; nullus alius quemlibet ipsorum metietur, praeter ipsos A, B, C, D, E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

13. noni

SCHOLION. I.

HINC cum Arithmeticis facile colligimus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128. I — H — G —

A, B, C, D, E, a binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, praeter eos, qui in hoc ordine continentur;

nentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum. ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia partis dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita ut sit I, binarius. Igitur H, G, sunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, praeter eos, qui a binario sunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33. 36.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem; metietur binarius, numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem

A . . . . . .

rem

9. pron. rem E. Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

19. septim

A . . . . . .
B . . . . . C . .
D ——— E ———

SCHOLION.

Itaqve si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tãtum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec a binario sint dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, praeter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, praeter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed uel esse pariter parem tantum, uel certe pariter parem & pariter imparem.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR.

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat A ..... parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur eum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo uicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neq; a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat. 29. noni.

SCHOLION.

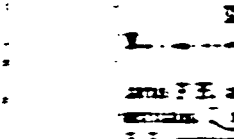
FACILE *ex dictis inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habens impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.*

PORRO *ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.*

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secun





quus secundi ad primum, ita reliquus ultimi ad alium: Exis hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui ultimum antecedunt.

Si igitur adjiciatur ultimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum ultimi, & productus dimidetur in excessum secundi. Id quod ex regula proportionum apud Arithmeticos manifestum est. Vt in exemplo appositio, si primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. ultimo 3 erunt reliqui excessus 2.2186. Quoniam igitur debet esse ut 2. ad 2 ita 2186. ad summam omnium, excepto ultimo; si 1. multiplicetur per 2186. fiet numerus 2186. qui si dimidetur in 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, exclusio ultimo 2187. qui si addatur summae inuentae 1093. procreabitur summa omnium 3280. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nempe E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ---- 62. H, 124. I, 248. F ---- 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ---- P ----

Tt 2

do, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, ultimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse ut B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul.



Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniã igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia uero est ut A, ad B C, ita B C, ad D; & D, ad E F; conuertendoque ut E F, ad D, ita D, ad B C; & B G, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque ut E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur ut E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) ut I H, ad H F, hoc est, ut B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

12. *septimi*

SCHOLION.

Ex hoc theoremate venimus in notitiam summæ quotcunque numerorum continue proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo detrahatur, fiatque vt reliquus

quus secundi ad primum, ita reliquus ultimi ad alium: Exit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui ultimum antecedunt.

Si igitur adjiciatur ultimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum ultimi, & productus diuidatur in excessum secundi. Id quod ex regula proportionum apud Arithmeticos manifestum est. Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. ultimo 3 erunt reliqui excessus 2.2186. Quoniam igitur debet esse ut 2. ad 1. ita 2186. ad summam omnium, exceptо ultimo; si 1. multiplicetur per 2186, fiet numerus 2186. qui si diuidatur in 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, exclusо ultimo 2187. qui si addatur summae inuentae 1093. procreabitur summa omnium 3280. 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerum perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nempe E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem

Vnitas . A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ——, 62. H, 124. I, 248. F ——, 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O —— P ——.

Tt 2

dem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, ut A, ad D, ita E, ad I; Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E: Igitur idem F, fiet ex A, in I; ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F,

19. septimi

7. pron.

Vnitas . A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ------ 62. H, 124. I, 248. F ------ 496
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ------ P ------

ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt: Detrahantur ex G, secundo, & ex F, ultimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. Erit igitur ut M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatus què sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nempe numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex unitate, & A, B, C, D numeris; (qui compositus eidem E, est æqualis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, æqualis unitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cū unitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (cum enim F, factus sit ex E, in D, metietur D, ipsum F; atque adeo eundem F, metietur unitas, & numeri A, B, C, ipsum D, metientes. Rursus cum I, ipsum F, metiatur, ut ostensum est; metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, ipsum I, propter proportionem duplam, metientes) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, ut mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

35. noni.

7. pron.

11. pron.

Q V O D autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur si fieri potest, aliis numerus O, præter illos, ipsum F, per P; atque adeo E, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus sit ex E, primo in D, quartum; & ex P, secundo in O, tertium; ac propterea est

9. pron.

ut

ut E, ad P, ita O, ad D. Quoniam uero, cum A, B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus unitati, primus; ultimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; Neque igitur E, ipsum P, metietur. Existente ergo E, primo, erunt E, & P, inter se primi; ideoque in sua proportione minimi: Ac proinde æque metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. Nullus uero alius præter A, B, C, ipsum D, metitur: Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, ut B, ad D, ita E, ad H; Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H; atque adeo erit, ut P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quã ob rem, si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

19. *septimi*

13. *octaui*

21. *septimi*

23. & 21. *septimi*

19. *septimi*

19. *septimi*

SCHOLION.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab unitate dupli in unam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur toti continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab unitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab unitate dupli, una cum ipsa unitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit proptereà numerus 6. qui fit ex 3 in 2.

ultimus duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. *Item, quia compositus ex his* 1. 2. 4. *nimirum* 7. *primus est: idcirco* 28. *factus ex* 7. *in* 4. *est perfectus habens has partes aliquotas* 1. 2. 4. 7. 14. *At uero quia compositus ex his* 1. 2. 4. 8. *hoc est,* 15. *non est primus; non erit* 120. *factus ex* 15. *in* 8. *perfectus.*

DENIQVE *quia compositus ex his* 1. 2. 4. 8. 16. *nimirum* 31. *primus est; erit* 496. *factus ex* 31. *in* 16. *numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt* 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. *Eodem modo & reliquos perfectos numeros inuenietis.*

FINIS ELEMENTI NONI.

UNIVERSIDAD CENTRAL
BIBLIOTECA