

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.

ACCESSIT XVI. DE SO-
lidorum Regularium com-
paratione.

OMNES PERSPICVIS DE-
monstrationibus, accuratisq; scho-
lijs illustrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO
BAMBERGENSI.
SOCIETATIS IESV.

R O M A E,
Apud Vincentium Accoltum . 1574.

BIBLIOTHECA

THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

PHOTODUPLICATION
SERIES
OF THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

PHOTODUPLICATION
SERIES
OF THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

PHOTODUPLICATION
SERIES
OF THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

PHOTODUPLICATION
SERIES
OF THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

PHOTODUPLICATION
SERIES
OF THE
LIBRARY OF THE
CONGRESS

SERENISSIMO

PRINCIPAL

AC D.D. EMANVELI

PHILIBERTO

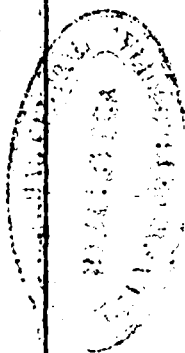
Sabaudiae Duci.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS
SOCIETATIS IESV S. P. D.



ST profecto (quod
te non fugit) Prin-
ceps Sereniss. præ-
clara quædã res, ac
plane diuina, rerum
cognitio, quæ meri-
to in optimo quoq;
incredibile sui desi-
deriũ excitat, quo fa-
cilius t. æc hominũ brevis, & calamitosa uita,

a 2 igno-



ignorantia quasi tenebris disiectis, & ad exitum ipsa suum perueniat, & omnia quæ accidere possunt, incommoda leuiora ducat. Ac si ea quæ sunt a summis philosophiæ principibus de liberalium artium dignitate vere ac sapienter scripta, falsa esse non credimus; nemini dubium esse potest, quin & rerum obscuritate, & incerta cognitione, mirum in modum minuatur illa siue uoluptas, siue animi iucunditas appellanda est, quæ ex ipsa alioqui rerum contemplatione percipi solet. Equidem fateor (quod summo uir ingenio dixit Aristoteles) eximiam quandam esse in naturæ peruestigatione positam delectationem, rerumque naturalium scientiam, multis philosophiæ partibus nobilitate præcellere: Sed quis non uideat in tanta opinionum uarietate, quarum (cum sit unica veritas) aut non plus una ueram, aut omnes falsas esse necesse est, multum uel inconstantia, uel errori relictum esse loci; quo quidem nihil esse potest a scientia magis alienum? Quod si (ut est apud eundem peripateticæ disciplinæ principem) doctrinarum nobilitas tum ex rerum dignitate, tum ex elaborata probandi ratione perdet; quid de mathematicis disciplinis existiman-

stimandū est, quæ ut de rerū præstantia nihil dicam, tantam habent suis in rationibus firmitatem; ut non tam persuadere, quam uim quodammodo afferre uideantur. Quotus enim quisque est, qui Archimedis, & Apollonij, cæterorumque Mathematicorum libros legens acutissimorum hominum non admiretur ingenia, & menti suæ firmissimas quasdam quasi machinas admoueri non sentiat, ut ijs quæ illi tradunt, uel inuitus assentiri cogatur? Quæ quidem ex re dici uix potest, quantam animus noster capiat voluptatem, dum ita in sententia perstat, reinque omnem plane percipit, ac tenet, ut neutram in partem dubius inclinet, nusquam fluctuet, nedum falsis opinionibus imbuatur. Cuius sane tam certæ tamque accuratæ scientiæ, cum solum ac fundamentum Euclidis, quæ dicuntur, elementa communi omnium Mathematicorum consensu existimentur; Tantam profecto summus ille vir apud posteros laudem meretur, quanta optimo in primis diligentissimoque magistro, atque ipsi etiam primo artis inuentori iure debetur. Quo magis eorum probanda uidetur industria, qui in his ipsis elementis aut explicandis, aut illustrandis

strandis studium, atque operam collocant, ut quanto hæc mathematicarum disciplinarum initia aut faciliora, aut firmiora fuerint, tanto quæ consequuntur omnia planius cognoscantur. Quæ cum ego multos annos partim publice docendo, partim priuatim commentando, & cum alijs viris doctis communicando diligentius pertractassem, collegissemque (ut fere fit) in meum priuatum usum nonnulla, quæ ad eorum cognitionem facere uiderentur; faciendum mihi necessario existimaui, præsertim auditorum, amicorumque meorum precibus fatigatus, præterea Laurentij Castellani ciuis Romani liberalitate inuitatus, qui oēs ad id necessarios sumpt⁹ benigne admodum suppeditauit, ad publicam studiosorum utilitatem, in lucem manusque hominum exire permitterem. Tibi uero potissimum Princeps Sereniss. has meas lucubrationes dicaui, primum quod tibi Mathematicorum omnium eximio patrono hæc nostra maxime studia cordi esse intelligebam; deinde quod pro tua in nostrum ordinem uniuersum singulari beneuolentia, atque promeritis aliquod tibi grati animi indicium extare societas nostra uehementer optabat. Huc accedebat priuatum etiam
studium

studium in te meum, quod ab humanitate tua singulari, oratorisque tui Vincentij Parpaleæ viri amplissimi beneuolentia prouocatus, nihilo tibi minus ego sum priuatim obstrictus, quam publice Societas nostra vniuersa. Accipe igitur hoc tenuitatis nostræ munusculū, si rem species, exiguum illud quidem, & meritis tuis longe impar; sin animum intuearis, amoris & obseruantiaē plenissimum. Quod si tibi gratum iucundumq; accidisse cognouero, cum satis amplam laboris mei mercedem ac præmium me tulisse existimabo, tum vero ad alia eiusdem generis commentanda, & elucubranda, si otium & occasio se offeret, efficiar alacrior. Vale.

ROMAE, KALENDIS FEBR.

M. D. LXXIIII.



LECTORI. S.



SI quis forte miratur, cur post
tot præclarissimos in Euclidis ele-
menta Geometrica commentarios
ab egregijs, & in primis Mathe-
maticarum rerum peritis scripto-
ribus editos, novas adhuc ipsi cõ-
mentationes conscripserimus, is facile sibi persuade-
bit, non temere id a nobis esse factum, si consilij no-
stri rationem cognouerit. Cum enim longa, diutur-
naque experientia nobis esset perspectum, atque ex-
ploratum, eam esse utilitatem, atque adeo necessitatẽ
horum elementorum, ut frustra quisquam se speret ip-
sorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archi-
medis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolomæi, cæ-
terorumque illustrium Mathematicorum demonstra-
tiones posse percipere; uehementer dolebamus, tam
insignem, & illustrem auctorem a plerisque omnino
negligi, a perpaucis uero pro dignitate tractari, ita ut
uix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulã operã, ac
studium in perdiscendis his elementis ponant, ob eam po-
tissimum, ut arbitror causam, quod difficultate rerum,
quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullũq;
habeant hac in re ducẽ, quem sibi citra erroris pericu-
lum sequendum proponant. Extant quidem commen-
tarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros
sane eruditi, qui satis esse possint cuius ad facile con-
sequen-

sequendam horum elementorum doctrinam : Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum , qui magna ex parte Euclidis ordinem , ac methodum peruerterunt , uerbaque propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt , ut uerus , germanusque auctoris sensus perdifficile possit intelligi ; id quod maxime in decimo libro perspicitur : Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis , uitiisque incuria librorum ita est deprauatus , & propter notas græcas , quæ in eius demonstrationibus adhibentur , obscuras illas , ac male expressas adeo impeditus , ut magnam difficultatem inexercitatis ingenij , perplexitatemque gignat . Quo fit , ut Euclidem sine maximo labore , ac studio nemo percipiat . Iam si alij ad nostram usque memoriam maius aliquod studium , operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt , hi uel sex priores tantum libros exposuerunt , uel si qui in uniuersum Euclidem commentarios ediderunt , hi persæpe , relictis antiquorum demonstrationibus certissimis , (Federicum tamen Commandinum Urbinatem Geometram peritissimum excipio , cuius opera , atque diligentia Euclides latine redditus , & in pristinum nitorem , iuxta ueterum interpretum sensum , ac traditionem , restitutus , nunc denuo prodijt in lucem ,) proprias alias , ac nouas confixerunt , quæ plerunque non tam firmæ sunt , neque rem ipsam simpliciter , & absolute conficiunt ; præsertim quod modo e propositionibus uoces quasdam perperam detrahunt , modo alias inepte apponunt , modo denique nonnullas temere immutant , ut merito de uero , proprioque Euclidis sensu dubitare quis possit . Quæ cum ita sint ,

relique

resque ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt post diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, ut lucubrationes nostras, ac uigilias studio sis harum rerum nonnihil (nisi fallimur,) subsidij attaturas, in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides, propter singularem utilitatem, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque unquam deponi ab his, qui fructum aliquem serium ex hoc suauis Matheſeos studio capere uolunt, in eoque progredi; id uero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdum factum uideamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sûnt enim hi nostri commentarij in uniuersum Euclidem conscripti commodiore nunc forma, quam uulgo ceteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) uolumineq; editi, ut facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, uia, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præstitum sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti quidam asseuerant, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatam licuit, uel certe planiores, quando illud non potuimus, delucidioresque reddere conati sumus. Non enim illas nude, ac totidem uerbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, ut illud accadat, quod ab elegant-

elegantissimo poeta dictum est. Brevis esse laboro,
obscurus fio. Interdum etiam, cum brevius, atq; suc-
cinctius efferi possint, magna, ob longiorem, quam
satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Qua-
re utrumque nitentes, eas, velut *παρὰ πρὸς*, atq;
ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice
Euclidem interpretaremur, observavimus; hac etiam
re auditorum desiderio, & voluntati, quantum est in
nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra senten-
tia, Euclidis facilius a studiosis, is præsertim, qui cen-
tyrones, hac Mathematica studia nunc primum au-
spicantur, ac maiore voluptate, utilitateque cogno-
scetur. Præter hac adiunximus multis in locis varia
problemata, ac theoremata, scitu non iniuncunda,
neque a scopo Geometriae aliena, quæ partim ex Pro-
clo, Campano, aliisque auctoribus decerpimus, par-
tim proprio (ut aiunt) Marte, assiduisque medita-
tionibus ipsi consecimus. Data insuper in hoc diligēs
opera, ut definitiones Euclidis, præsertim obscurio-
res, & quæ aliquid vise sunt habere difficultatis, (in
quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam, inciden-
tes, a recto cursu deflexerunt, & in errores varios,
atque absurdos, prorsumque ab instituto disciplinae
abhorrentes, dilapsi sunt.) dilucide, atque perspicue,
quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod ha-
rian artium studiosi facile indicabunt. Quæ res cum
in ampliorē magnitudinē excreverent, quam ut unius
libri spatij, hac præsertim forma, commode includi
possent, in duas partes totam tractationem diuisimus.
Altera nonem prioribus libris continetur: altera sex
reliquos, una cum decimosexto ad comparationes
quinque



quinq; corporũ regulariũ pertinente, quem ex Francisco Flussate Candalla adijcere uoluimus, cõplectitur. Nunc, quia hæc Euclidis elementa ostiũ; atque aditum ad omnes alias scientias Mathematicas reserant ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, unde nam Mathematica disciplina hoc nomen acceperint; qua sit earum diuifio; a quibus primum orta, & per quos dein de singula fuerint exculta; quanta sit illarum præstantia, atque utilitas, & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.



MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ

CVR SIC DICTAE SINT.



DISCIPLINAE Mathematica, quae quidē circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione græca μαθημα, sine μαθητης, quae significat disciplinam, seu doctrinam. Cuius autem hæ artes de quantitate agentis nomen discipline, vel doctrina inter reli-

quas omnes sola sint adepta, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrina, sine discipline obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminisceniamque illius scientiæ, quæ anima nostra (ut eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, ubi Socratem introducitis puerum quandam interrogantem Geometrica quadam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, ut puer, gradatim tamen ascendens eo deductus est, ut responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diuissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, et doctrina sibi vindicare, quod sola modum, rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est mathematicæ, atque officium doctrinae, sine disciplina, ut et Aristoteles testatur; neque unquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocumque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concessio, et probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasque non solum per observare videmus, cum plerumque in confirmationem eorum, quæ ostendere volumus, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstrant, adducant.

i. poster.

DISCI-

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM diuifio.

PYTHAGORÆ, quos deinde fecuti sunt omnes prope modum Mathematici, atq; Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas uniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmetica, Musica, Geometriam, ac Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam uersantur, sit uel discreta, sub qua omnes numeri, uel cōtinua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & utraque tam secundum se, quam comparatione aliterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum, quatuor prædictas facultates instituere, quarumque quantitatē, pro duplici consideratione diligenter cōtemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eandem quantitatē discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniā. Geometria de magnitudine siue quantitate cōtinua, secundū se quoq; ut immobilis existit, disputat. Astronomia deniq; eandē magnitudinē, ut est mobilis, considerat; qualis sunt celestia corpora, prout continuo motu ciuntur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarū Arithmetica, & Geometria puræ, Musica uero, atq; Astronomiæ mixtæ dicunt, oēs alia quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & ceteræ huiusmodi, uel facile, ut ad capita, a quibus dependens, reduci possunt.

ALTA rōne a Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, ut auctor est Proclus in cōmētarijs, quos in primū Euclidis librū edidit, Mathematicæ discipline diuidunt. Quāquidē diuisionē, quoniā eleganter, copioseq; docet, ad quenā sese extēdāt Mathematicæ disciplinæ, ferme ad uerbū ex Proclo iuxta interpretationē Francisci Barocij Patricij Veneti excerptā hic subijcere statui. Volū itaq; prædicti auctores, scientiarū Mathematicarū quasdam in intellectuibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam uero in sensibilibus, ita ut attingant materiam sensibus obnoxiam, uersari. Prioris generis statuum duas longe primas, præcipuasq; scientias, Arithmetica, & Geometriam: In posteriori uero genere constitutum sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodesiam, Canonicā siue Muscam, Supputatricē, atq; Mecha-

Mechanicam. Afthalogiam dicunt esse eam facultatem, quae de mundanis differet motibus, de corporum caelestium magnitudinibus, figuris, & illuminationibus, a terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursus tres constituuntur partes; Gnomonica, quae in horarum dimensione, positi gnomoni, exercetur: Mesheoroscopica, quae elevationum differentias, syderumque repetit distantias, nec non multa alia, & varia Afthologica praedocet theorematia: & Dioptrica, quae planetarum, caeterarumque stellarum distantias huiusmodi dioptriciis dignosci infirmamentis. Perspectivam autem a Geometria gigni, atque uti radijs visorij, tanquam lineis, et angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Dividitur autem in eam, quae proprio nomine dicitur Perspectiva, quae quidem reddit causam earum apparentiarum, quae aliter, quam sunt, se se nobis offerre solent, ob eorum, quae sub visum cadunt, alios situm, & distantias, ut parallelarum coincidentiam, vel quadratorum, tanquam circulatorum, aspectionis: Et in univarsam speculariam, quae circa varias, multiplicesque versatur, refractiones: Nec non in eam, quae Sciographice, hoc est, umbrarum designatrix appellatur, quae ostendit, quae ratione fieri possit, ut ea, quae in imaginibus apparent, haud incantata, vel deformata ob distantiarum, altitudinesque videamur. Geodasiam appellant eam scientiam, quae res quantas metitur, ut materiarum rerum aceruos, anquam conos, & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectibilibus rectis lineis, ut Geometria, sed sensibilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, ut radijs Solaribus, interdum vero crassioribus, ut spatij, & perpendicularo. Dividitur haec in Geometricam, in eam partem, quae planis, & in eam, quae solida dimetitur. Canonica, siue diastica, vocant eam scientiam, quae apparentes concentuum considerat rationes, sensusque ubique versatur adminiculo: & quae (ut Platonem inquit) talis existit, ut mensi aures ipsas praeposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quae apud nos Arithmetica practica. Haec enim numeros considerat, non ut in intellectibilibus, sed ut sumi in sensibilibus ipsis. Mechanica denique, quae in cognitione rerum sensibilibus, materiaeque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quaedam enim est instrumentorum effectrix, quae opus operumque vocant, eorum, inquam, quae gerendis summa bellis ido-

neq, qualia sane Archimedes etiam ferunt construxisse. Syri-
cus terra, mariq, obdicensibus resistentia; Quadam mirabi-
lium prorsus rerum effectrix, quæ *HAUATO TANTIKH* dicitur,
quippe quæ alia quidem sphaeris maximo cum artificio con-
struit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur;
alia autem ponderibus, quorum motus quidem inequilibrium,
statis vero æquilibrum esse causam censendum est, ut *Timar*
etiam determinans; alia vero nervis, sparsisque animas con-
volatione, ac motus imitantibus: Quadam est æquilibrum
omnium, & eorum, quæ centroponderantia vocantur, co-
gnitio: Quadam denique sphaerarum effectrix, quæ *σφαρο-
τορσά* appellatur, ad celestium circumvolutionum imita-
tionem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atque ne
vno verbo dicam, omnis, quæ materialimovendi vim habet. Ha-
igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem
autem artem, eam inquam, quæ ad instruendum, coordinandasq,
pertinet acies, quam Græci *ΤΑΚΤΙΚΗ* vocant, unam aliquam
ex Mathematicis partibus dicendam esse non censent, ut quidd
alii voluere, sed vi eam volunt modo quidem arte supputandi,
ut in enumerandis legionibus; modo vero Geodesia, ut in di-
videndis, dimeiendi quæ castrometationi spatij in campo. Quem
admodum neque Historicam, neque medendi artem Mathema-
tices partem ullam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici,
tum etiam Medici Mathematicis utantur theorematibus; Re-
rum quidem gestarum scriptores, vel climasum situs referen-
do, vel verborum magnitudines, & diametros, vel ambitus, cir-
cuitusve colligendo: Medici vero, quamplurimas res in arte
sua huiusmodi viis dilucidando. Nam utilitatem, quæ in Me-
dicinâ ab Astirolugia peruenis, ipse etiam Hippocrati osen-
dit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis tēporibus,
locisque dixerunt. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus in-
struendis operam accommodat, Mathematicis quidem uter-
etur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quam-
vis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, paucissi-
mam ostendere multitudinem, castra, suosq, exercitus ad figu-
ram circuli formet; interdum vero ad figuram quadranguli,
vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, ubi plu-
rimum ad parere cupit. Hac igitur fere sunt, quæ nobis anti-
qui Mathematici de harum scientiarū partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHE-
maticarum disciplinarum.

OMNES disciplinas Mathematicas a varijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historia testantur: Immo nero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoria quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phanices, propter frequentes mercaturas, atque commercia, ut auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusque successores, nec non Aegyptij, Graci denique ac Arabes amplificauerunt, varijsque problematis, atque theorematibus illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multis scriptores tradunt; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus vero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos praclaro ad nostra usque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum mensura. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, iustitiaeque, ut nemo agrum dignoscere posset suum, ceperunt Aegyptij animas ad rationem mensurandorum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quae quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρία enim, siue γεωμετρίω idem significat, quod, terram metior. Ceterum paulatim deinde Geometria capta est expoliri, & non contenta suis finibus, sese ad corpora etiam caelestia dimetienda conuertit, tradiditque principia uniuersae Astronomiae, Perspectivae, Cosmographiae, & alijs disciplinis quam plurimis, quae ex ipsa, veluti radices dependens. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Graciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimi, acutissimisque demonstrationibus locupletauerunt, atque exornauerunt: Inter quas hi sunt praecipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Claxomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Briso, Antipho, Theodorus,

dorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolitæ, Miles Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemaeus, Emocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij penè innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales praeitus erat, Astronomia cognitionem, exortam esse uolunt fabulam, illum suis humeris calum sustinere; Alij putant, Chaldaeos diuturnâ observatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) syderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientia faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonij esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, ut est præstantissima, ita quoque maxime illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterum, præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliqua omnes de quantitate quouis modo agentes, facilo ex ipsis, tanquam riuuli ex fonte, derivata sunt, atque deducta.

NOBILITAS, ATQUE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QUONIAM disciplina Mathematica de rebus agunt, quæ absque ulla materia sensibili considerantur, quamvis re ipsa materia sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, ut recte a Proclo probatur. Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiae sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamvis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si uero nobilitas, atque præstantia scientia ex certitudine demonstrationum, quibus utitur, sit iudicanda, haud dubie Mathematica disciplina inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque

firmantque, ita ut vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant; Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis saepenumero intellectus multitudinem opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hereat, atque incertus. Huius rei fidem aperte facimus tot Peripateticorum secta, (ut alios interim philosophos silentio inuoluam) quae ab Aristotele, veluti rami et trunco aliquo, exorta, adeo & inter se, & nonnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, ut prorsus ignores, quid nam sibi velis Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituas. Hinc fit, ut pars interpretes Graecos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductiores sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, ceterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, verum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse digniorem, praestantiusque, quae magis synceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplina Mathematica veritatem adeo expetant, adamant, excolantque, ut non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirmant, corroborantque, dubium esse non potest, quin eis primas locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

UTILITATES VARIAE MATHE- maticarum disciplinarum.

NON solum viles, verum etiam necessaria admodum censeri debens disciplina Mathematica cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicam, ut eleganter ostendit Proclus, ulli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, se iunctasque, quas contempletur Metaphysicus, vires, aciemque

Cap. 16.

Cap. 37.

Cap. 16.

Cap. 19.

nostri intellectus astollere absque ullo medio tentemus, nosmet-
ipso exacabimus, non secus, ac ei contingit, qui e carcere ali-
quo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam
emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus physicis, quae ma-
teria sensibus obnoxia sunt coniuncta, ad res metaphysicas, quae
sunt ab eadem maxime auulsa, intellectus ascendat, necesse est,
ne harum claritate offundatur, prius eum assuescere rebus mi-
nus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, ut faci-
lius illas possit comprehendere. Quocirca recte Divinus Plato
Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad divinarum
rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quan-
tum vero emolumenti haec disciplina ad sacras literas recte per-
cipiendas, interpretandasque conferant, multis verbis pulcherrime
nobis exponit B. August. lib. 2. de Doctrina Christ. demon-
strans, numerorum incerta multa non intelligi a multis, quae
translatæ, ac mystice posita sunt in scripturis: Cuius rei exem-
pla non pauca in medium adducit; eandemque sententiam lon-
ge post pluribus verbis repetit eodem lib. Hoc idem docet D.
Hieron. tom. 1. Epist. 1. asserens, magnam inesse numeris vim
ad multa mysteria in scripturis intelligenda: Quo item loco,
Geometriam magnam asserre Theologis utilitatem, perhibet.
Rursum B. August. loco, quem paulo ante retuli, testatur,
Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subingens
paulo post, Theologos debere etiam Geographia diligenter esse
instructos. Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus,
summis laudibus D. Basilium preceptorem suum extollit, quod
in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque
scientiis Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non
parum etiam conducunt hæc artes ad philosophiam naturalem,
moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, ar-
tesque perfecte acquirendas, ut perspicue docet Proclus. His
adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maxi-
me Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos
ad bene recteque philosophandum proponimus, eorumque fere
omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis
Mathematicis sunt repleta, ea potissimum de causa, ut ea, quae
alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse, per
exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent; quae
proculdubio nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathe-
matica-

maticarum omnino est expertus. Quid? quod olim nemo ausus
 esset celeberrimum Divini Platonis gymnasium frequentare,
 qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exorna-
 tus? Unde pro foribus Academia hoc symbolum dicitur pin-
 xisse, ἀγνοῦντας οὐδεὶς τὸν ἄνθρωπον. Immo vero idem Plato in
 Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non du-
 bitavit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. precipit, Mathe-
 maticas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter va-
 rias, ac multiplices earum utilitates, (ut copiose scribit non
 solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad
 temp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum
 praeerit temporis, tum nostrae aetatis, si id necesse foret, in me-
 dium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, pra-
 cipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, ido-
 neosque, adeo, ut etiam si nullam aliam nobis haec scientia affer-
 rent utilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia com-
 moda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas
 esse statuatur, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes om-
 nes capeffendas aptiorem reddant, & acutior: Quod quidem
 experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim
 eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis
 accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere:
 Contra vero, eos qui ad hasce facultates idonei minime reperiri-
 unt, prorsus ad ceteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato
 tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum di-
 sciplinarum utilitatem nobis inculcat, atque commendat; pra-
 ferim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Tymaeo,
 ubi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenue viam
 appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis
 brevitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes uti-
 litates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusq;
 animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt
 enim haec praecipua ex septem artibus liberalibus, in quibus non
 solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, prin-
 ces, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeque libera-
 lem oblectationem animi, quam summa etiam cum utilitate
 coniunctam pariunt, diu multumque versari solebant: Quo-
 rum exemplum multos adhuc nostra hac aetate imitari conspici-
 mus. Testatur magnam animi voluptatem ex his artibus per-

cipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. ubi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum anima, qui ab alijs studijs excacatur, defoditurque, a Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum philosophorum, quibus harum disciplinarum utilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque praestantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS, ATQVE GEOMETRIÆ commendatio.

QUANTAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq; Geometria uniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, ut testatur uulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illam Megaris natum, quod oppidum Istmo adiacet, Socratisque auditorum, qui sectam instituit a se dictam Megaricam, qua alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq; (quod proprium est manus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de uitijs philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quest. Acad. lib. 2. ubi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, a quo ydem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset unum, & simile, & idem, & semper. Faueret his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores ara sacra de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iustos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemai primi, qui Aegypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cepit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidem uerius esse crediderim, hoc maxime adductus argumentum, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius

Megarici



Megarici diligentissime enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparavit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis philosophorum exercitissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse praeferire, vel ab Euclide suo esse compositum, ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo philosopho longe alius est, qui, cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicavit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facile elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capeffendam pertinentes, Phenomena, atque Datorum liber, opus de Divisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de superficierum divisionibus, Machomero Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item conica elementa, auctore Proclo, quae tamen ad nos nondum pervenerunt, & alia id genus opuscula. Maxime vero hoc volumen elementorum Geometricorum nunquam omnium consensione satis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione contextuit, ut nullus unquam eorum, qui similia conscripserunt elementa (conscripserunt autem, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, ut summum ingenij acumen demonstravit, ita non omnia, quae ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea duntaxat, quae visa sunt esse necessaria, atque utilia, ad communem omnium utilitatem, argumentis, & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Caeterum, quantas sit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde uniuersa Geometria, praestantia, ac utilitas, partim ex ijs, quae ante scripsimus, partim ex ijs, quae nunc dicemus, non obscure perspicitur. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes siquidem Mathematicarum re-

rum scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus usurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perfecta, atque demonstrata: Quamobrem sicut is, qui legere uult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis utitur in uocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, necesse est. Ex his etenim elementis, ueluti fonte aberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in celo per instrumenta siderum observatio, omnis horologiorum sciopticorum compositio, omnis machinarum uis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum uariarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere marie illuminato, diuersitas manat: Ex his, inquam, elementis machina totius huius mundana est inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur, atque demonstratur unius huius scientiæ uel cali uniuersi, syderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei at noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, uarietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque uarij tam expedite cognoscuntur, ut & loca illorum in celo, & eclipses, seu Solis, ac Luna defectiones certissime, ante quem fiant, in omne posterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & nature opus, mundum, inquam, totum, mentis nostra oculis manere, ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurimam, quæ penitus incredibilia esse uident, omniumque fide superant, perspicua facere, credibiliaque esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historie. Cum enim Hieron Syracusarum rex nauem, quam Ptolemaus Aegyptiorum regi mittere statuerat, tanta esset molis fabricatus, ut eam omnes una Syracusi a loco dimouere minime ualerent, Archimedes Geometra peritissimus uirius Geometriæ uiribus fretus regi promisit, se effecturum, ut ipsam solus rex absque ulla labore subduceret: Quod cum præstitisset, in conspectu omnium rex stupescens exclamasse perhibetur;

hibetur; Ab hac die, quicquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometria gessit Syracusis, quando coronâ ex auro, argenti que confecta, quam rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri, & argenti pondera, qua inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime offendis. Neque silentio præteriri debet, eandem Archimedem robori, ac efficacia demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumero, iactitasse, si haberet tertiam aliam, in qua pedem figeres, hanc nostram, quam incolimus, & loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere: Et alia id genus non solum ab Archimede, uerum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris parata esse memoria prodit est. Tantum denique nomen una hac Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam urbem defenderat Archimedes machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnata urbis direptione, ac cæde ciuium unius Archimedis saluti publico edicto caneretur: quem ubi contra imperium suum, & uoluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, uehementer doluit, eamque honorem mortuo habuit, quem uiuo habere non potuit. Cuius sepulchrum Cicero a se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repperit esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam, utilitatemq; Geometria, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit uis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus eris artifex methodi. Quod quidem ingenne fatetur Galenus insignis philosophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimis rebus Dialecticis, cum scholæ Peripateticorum, ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore, studioque arripuisset, nihil fere ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem persisteret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiâ naturali rationi pugnantia repperisse: Ita ut ad Pyrrhonorum fere

fere (erant Pyrrhonij philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hesitantiam deuenturus fuerit, nisi *Arithmetica*, *Geometria*, *Dialectica*q; (quibus artibus ab anis, & parte fuerat institutus) esset cognitione, scientiaque renouatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos *Arithmeticos*, & lineares demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit utilis, ut alia artes facilius, & rectius percipiantur. Postremo est hac summa laus Geometriae, omnibusque modis pradicanda, quod non habet in exiguis, & inferioribus hisce machinis, a quibus originem traxit, sed euolat in cælum usque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus caelestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, qua generali uocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria uniuersae sibi hunc scopum proponit, ut plana, aut solida uel constituat, uel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque uero mirum alicui uideri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propriae contemplationes, ut diximus, non autem de lineis, uel etiam punctis: Non, inquam, debet uideri mirum, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras uersatur, quae in planis duntaxat, uel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, uel linea figuram ullam constituunt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus uero, siue planis, & corporibus, solidisque maxime conueniebat, ut proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus

tribus vero quinque de solidis acutissime disputat, eorumque proprietates maxime illustres peruestigat. Quoniam vero cum re omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absque linearum commensurabilium, atque incommensurabilium notitia; Immo vero quam plurima magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absque earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpe numero sine ratione, ut ea communis, & nota mensura data metiri nequeat, ut liquido constat his, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus consulerunt, atque usum; idcirco ut hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimensionemque requisita, Stereometria sua præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis differis. Intelligens rursus Euclides, neque hanc tractationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorum passionibus, easque copiose, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persequutus. Quamobrem totum hoc volumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehensum, (quorum quidam priores tredecim sine ulla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus, posteriores vero duo a nonnullis Hypsiclis Alexandri ni esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita ut prima pars contineat sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes complectens, passionem numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque disputet; Quarta de nique reliquis quinque libris absoluta scientiam solidorum, sine corporum complectatur. Prima pars rursus triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, in uesigando eorum aequalitatem, & inaequalitatem; In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur; In sexto denique proportionum figurarum planarum discutuntur. Quid vero Euclides in singulis alijs libris pertractet, pro prijs in locis exponemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA,
ma, quid Propositio, & quid Lemma apud
Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema uocant eam demonstrationem, qua iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum aequilaterum constitui, appellabitur huiusmodi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum aequilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Differt autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur questio illa, cuius utraque pars contradictionis (ut ipsi loquuntur,) est probabilis, qualis haec est questio, An totum distinctum realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiam questum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent constituere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum aequilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non aequilaterum, nempe Isosceles, uel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bisariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non aequales. Est tamen discrimen non paruum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico utramque pars contradictionis suscepta confirmatur tantum probabiliter, ita ut intellectus cuiusque ambigat, utramque illius pars uera sit: In Mathematico uero, quamcumque quis partem elegerit, eam firma demonstratione, ita ut nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineam recte proposita lineae perpendiculararem educere, efficiet utique hoc ipsum ratione constanti, & euidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto uelis educere lineam non perpendiculararem. Theorema autem appellat eam demonstrationem, qua solam passionem aliquam, proprietatem unius, uel plurium simul quantitatium perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse aequales

quales duobus rectis, vocabunt talē demōstrationē Theorema, quia nō inbet, aut docet triangulū, aut quippiā aliud cōstruere, sed cōtemplatur tantūmodo triāguli cuius libet cōstituti passōne hanc, quod anguli illius duobus sint rectis aequales. Vnde a cōtemplatione ipsa, hęc demōstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratiōe potest, cōtradictionis utraque pars vera ut sit. Si enim quis demōstret, omnes angulos triāguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis aequales, nullo poteris modo fieri, ut inaequales quoq; sint duobus rectis. Eadem ratiō in alijs theorematibus est intelligenda. Itaque ut uno verbo dicā, quæsitū illud Mathematicum cōstruere aliquid docēs, cuius etiā oppositū potest effici, Problema: Illud uero, quod nihil docet cōstruere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo uelle angulum rectū cōstituere, irridendus omnino esset, & Geometria prorsus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo cōstituti sunt recti, ut demōstrabitur in lib. 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendū erit. Ceterū tā problema, quā theorema dici consuevit apud Mathematicos Propositionio, propterea quod utrumque aliquid nobis proponat, ut in exemplis adductis constet. Hęc ideo dixerim, ut studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & ceteris Mathematicis, propositionum alias dici problema, alias theorema. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut aliorum interitū nolumenta taceam,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demōstrationes problematum semper concluduntur, his fere uerbis: Quod faciendum erat: Theorematum uero hisca: Quod ostendendum uel demōstrandum erat; habita nimirum ratione finis utriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demōstrationes continentur & non una tantum, quamuis ultimus syllogismus demōstratiuus solum concludat id, quod in initio demōstrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propositione, nec non in ceteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM uero ad demōstrationes problematum, atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quedam theoremata, uel problemata minus principalia, & quæ facili-

le e.

le ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inferuntur interdum a Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, ut brevius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quod solum assumantur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematibus, vel problematibus principalis assumitur, ut demonstratio expeditior fiat, ac brevior.

QUAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CUM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente gignatur cognitione, ut auctor est Aristoteles, atque ex assumptis, & concessis quibusdā principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eisdem Aristotelis, aliorumque philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt utique & Mathematica disciplina sua principia, ex quibus possit, & concessis sua problemata, ac theoremata confirmari. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In prima reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, ut vult Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumventi in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, ut nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne ulla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ non solum in scientia propositæ, sed etiam in omnibus alijs ita manifesta sunt, & evidenter, ut ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi videtur accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles. A ianua quis aberrabit? Ut præclare a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellantur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum elementorum præmisit ante demonstra-

monstrationes suarum conclusionum omnia hac principia, ut ex ipsis, quae quidem facile a quovis intelliguntur, deducas admittenda theoremata, quibus nemo unquam assensum praeberet nisi certa, ac evidenti ratione confirmarentur. Unde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusque seculis prae dicanda, quod ex tam exiguis initijs, cuilibet quantumvis rudi & ignaro notissimus, & quidem per facilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quae tamen omnia miris ordine, ac methodo facili, demonstrationibusque certissimis ita confirmas, ut nihil omnino dubij in eis relinquatur Porro in huiusce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide servatur, ut in ipso quidem introitu scientiae proponat principia toti Geometriae communia, in alijs autem deinde libris, ubi res postulat, ea exponat principia, quae proprie, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque vero omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquis lectori disquirenda, quae tamen ex istis, quae tradidit sine magno labore ac studio percipi possunt & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adiungimus haurijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse.



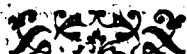
ERRATA PRIMI TOMI SIC CORRIGITO.

<i>Folium.</i>	<i>Linea.</i>	<i>Errata.</i>	<i>Correcta.</i>
39. a.	11.	PROPOS. 18. 18.	PROPOS. 18. 19.
40. a.	30.	AEC.	ABC.
52. a.	33.	duo arcus duo arcus.	duo arcus
62. b.	9.	ACDF	BCDF
67. a.	37.	AD	BC
72. a.	37.	4. primi	14. primi
74. a.	9.	proponitur	proponitur
79. a.	23.	33. primi	30. primi
88. a.	24.	FGE	EFG
131. b.	8.	AF	DF
133. a.	15.	eadem	eadem
185. a.	22.	figuras	figuras
229. b.	5.	eorum	eorum

INDEX PROBLEMATVM, AC

THEOREMATVM, QVAE

præter ea, quæ continentur in Euclidis propositionibus, in his elementorum libris demonstrantur.



IN PRIMO LIBRO.



IRCVLVS bisariam secatur a diametro.

fol. 2. b.

Omnes anguli recti sunt inter se æquales. 17. a

Dua recta linea spaciū non cōprehendunt. 18. a

Dua linea recta non habens unum & idem segmentum commune. 18. b

Super data recta linea terminata triangulum isosceles, & Scalenum constituere. 22. b

Omne triangulum æquilaterum est æquiangulum. 27. a

Omne triangulum æquiangulum est æquilaterum. 27. b

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa equalia inter se erunt. 28. a

Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrumque utriusque equalia, habuerint uero & basim basi equaliam; æquiangula inter se erunt, & equalia. 30. b

Dua linea recta se mutuo secantes efficiunt ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales. 36. b

Quotlibet anguli circa unum & idem punctum constituti, quatuor rectis sunt æquales. 36. b

Si ad aliquam rectam lineam, ad eiusque punctum, dua recta linea non ad easdem partes sumpta, angulos ad vertex æquales fecerint; ipsa recta linea in directum sibi inuicem erunt. 27. A

Si

- 13 Si quatuor recte lineae ab uno puncto exierint, quatuor angulos oppositos inter se aequales fecerint; erunt qualibet duae lineae aduersae in rectam sibi, & continuam coniunctae. 37.a
- 14 Ab uno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineae rectae, quam duae, inter se aequales. 38.a
- 15 Ab uno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineae perpendiculares, quam una. 38.b
- 16 In omni triangulo, cuius unus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliqui sunt acuti. 39.a
- 17 Omnes tres anguli scaleni sunt inaequales. 39.a
- 18 Si trianguli angulus bisariam sectus fuerit, secansq; angulum recta linea ad basin ducta in partes inaequales ipsam dividat; latera illius angulum continentia inaequalia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basi segmento convenit, minus vero, quod cum minori. 39.b
- 19 Si trianguli duo latera inaequalia fuerint, linea recta bisariam dividens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inaequales; maiusque segmentum erit prope maius latus. folio 40.b
- 20 Si trianguli angulum recta linea bisariam dividens, basin bisariam quoque secet; erunt duo latera angulum continentia inter se aequalia. Quod si latera aequalia fuerint, basin etiam bisariam secabit linea recta, qua angulum bisariam dividit. folio 41.a
- 21 Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quadam recta linea, reliquam quoque productam secabit. folio 49.b
- 22 Si in duas rectas lineas altera recta incidens internas, ad eandemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; duae illae rectae lineae infinite productae inter se convenient ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores. 49.b
- 23 Duae rectae lineae, quae eidem sunt parallelae, inter se coequentes, sunt in directum constitutae. 51.b
- 24 Parallelogrammum constituere, cuius unus angulorum aequalis sit dato angulo rectilineo, lateraque angulum illum comprehendentia datis duobus rectis lineis aequalia. 52.a
- 25 Si ab uno angulo trianguli linea recta ducatur faciens exterrum angulum aequalem duobus internis & oppositis; illa linea erit in directum ipsi lateri constituta. 53.b

Omnes anguli figura rectilinea cuiusvis sunt aequales bis tot rectis angulis, quoniam ipsa est inter figuras rectilineas.	33.b	26
Omnes anguli figura rectilinea cuiusvis aequales sunt bis tot rectis angulis, dumque quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.	54.b	27
Si singula latera figura cuiusvis rectilinea producantur versus eandem partem, omnes anguli externi aequales sunt qua- tuor rectis.	54.b	28
Si pentagoni singula latera producantur in utranque par- tem, ita ut qualibet duo extra coeant, efficiuntur quinque anguli extrinsecus coeantibus aequales duobus rectis.	55.a	29
Angulum rectum in tres angulos aequales dividere.	55.b	30
Omne quadrilaterum habens latera opposita aequalia, est pa- rallelogrammum.	57.a	31
Omne quadrilaterum habens angulos oppositos aequales, est parallelogrammum.	57.a	32
Omne quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est pa- rallelogrammum.	57.b	33
In quadrato, & Rhombo anguli oppositi bisariam secantur a diametro.	58.a	34
In altera parte longiori, & Rhomboide anguli oppositi non bisariam secantur a diametro.	58.a	35
In quadrato, & altera parte longiori dua diametri inter se sunt aequales.	58.a	36
In Rhombo, & Rhomboide dua diametri sunt inter se aequa- les.	58.b	37
In omni parallelogrammo diametri se mutuo bisariam di- vidunt.	58.b	38
Recta linea secans diametrum parallelogrammi bisariam quo- modocunque, dividit parallelogrammum bisariam quoque. Ea recta linea dividens parallelogrammum bisariam quoniam mo- do, secat quoque diametrum bisariam.	49.a	39
A quovis dato puncto lineam rectam ducere, quae parallelo- grammum datum secet bisariam.	59.b	40
Inter duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam data linea aequalem collocare, quae cum altera illarum faciat angulum cuiusvis angulo dato aequalem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, mi- norem esse duobus rectis.	59.b	41

- 42 In omni figura rectilinea latera habere numero paria, si quidem fueris equilatera & equiangulara; erunt duo qualibet latera opposita, parallela inter sese. 60.a
- 43 Parallelogramma aequalia super eandem basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas. 61.a
- 44 Parallelogramma aequalia super bases aequales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas. Et parallelogramma aequalia inter easdem parallelas, si non habuerint eandem basin, super aequales bases, sunt constituta. 62.a
- 45 Triangula, quorum duo latera unius aequalia sint duobus lateribus alterius, utrumque utrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, si quidem ambo simul duobus sint rectis, aequales, aequalis sunt: Si vero duobus sint rectis maiore, minus illud est, quod maiorem habet angulum: Si denique sint minores duobus rectis, minus illud est, quod maiorem angulum habet. 62.b
- 46 Si a quouis angulo trianguli linea recta ducatur dividens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secatur. 64.a
- 47 A puncto quouis dato in uno latere trianguli propositi linea rectam ducere, quae bifariam fecerit triangulum datum. 64.b
- 48 Linea recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela. 65.a
- 49 Omne quadrilaterum, quod ab utraque diametro bifariam dividitur, parallelogrammum est. 65.b
- 50 Triangula aequalia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super aequales bases erunt constituta. 66.a
- 51 Si triangulum duplam habuerit basin, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo; triangulum parallelogrammo aequale est. 66.b
- 52 Si parallelogrammum & triangulum aequales habuerint bases, in eisdemque fuerint parallelis; duplum erit parallelogrammum trianguli. 66.b
- 53 Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel aequales, & ad easdem partes constituta; erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis; erunt bases aequales, si non sit eadem. 66.b
- 54 Si triangulum & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint

- fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezj fit ba-
fis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero
minor linea parallela trapezj basi fit trianguli, erit trapezium
maius duplo trianguli. 67. a
- Trapezium habens duo latera opposita parallela, duplum
est trianguli, quod basem habes quam latus trapezj contin-
gens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris op-
positi. 67. b
- Dato parallelogrammo equale triangulum constituere, in
dato angulo retilineo. 68. a
- Si parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelō-
gramma, ita ut ex illis duo aduersa sint equalia, consistunt re-
liqua duo circa diametrum. 69. a
- Ad datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere
equale triangulum, in dato angulo retilineo. 70. a
- Datis duobus retilineis inaequalibus, excessum maioris su-
pra minus inquirere. 71. a
- Linearum equalium equalia sunt quadrata: Et quadrato-
rum equalium equalis sunt linea. 71. b
- Si in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a dia-
metro descriptum duplum erit praedicti quadrati. 73. b
- Quadratum diametri figura altera parte longioris equale
est duobus quadratis laterum inaequalium. 73. b
- Si fuerint duo triangula retilinea, quorum latera retilis
angulis opposita sint equalia, erunt duo quadrata reliquorum
duorum laterum unius trianguli equalia duobus quadratis re-
liquorum duorum laterum alterius. 73. b
- Duobus quadratis inaequalibus propositis, inuenire alia duo
quadrata, quae & equalia sint inter se, & simul sumpta aqua-
lia duobus inaequalibus propositis simul sumptis. 74. a
- Propositis duabus lineis inaequalibus, inuenire id, quo plus
potest maior, quam minor. 74. a
- Propositis quocunque quadratis, siue equalibus, siue inaequa-
libus inuenire quadratum omnibus illis equale. 74. b
- Propositis duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum
adiungere figuram, quae reliquo quadrato sit equalis, ita ut to-
ta figura composita sit etiam quadrata. 75. a
- Cognitis duobus lateribus quibuscunque trianguli retilangu-
li, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 75. a

33

36

37

38

39

60

61

62

63

64

65

66

67

68

69

In omni triangulo, parallelogramma quacunq; super duobus lateribus descripta, equalia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus aequale sit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conveniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, sed ad partes anguli distincti producantur. 75.b

IN SECUNDO LIBRO.

1

In omni parallelogrammo, cuius unus datus sit angulus de iur rectus; erunt & reliqui tres necessario recti. 77.a

2

Si fuerint duae rectae lineae, secanturque ambae in quocunque segmento: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, aequale est eis, quae sub singulis segmentis unius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis. 79.b

3

Si sint duae rectae lineae, secanturque ambae utcumque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo sub una parte unius, & una parte alterius comprehenso, aequale est eis, quae sub totis lineis, & distinctis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso. 80.a

4

Si linea recta secetur in quocunque segmento, quadratum, quod a tota sit, aequale est eis, quae sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. 81.a

5

Parallelogramma circa diametrum quadrati sunt quadrata. 82.a

6

Si linea recta fuerit dupla lineae rectae, quadratum ex illa descriptum quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius. 83.b 208.a

7

Si tres lineae habeant proportionalitatem Arithmeticam; rectangulum sub extremis contentum, una cum quadrato excessus, aequale est quadrato lineae mediae. 85.b

8

Si recta linea in partes inaequales secetur, earum partium quadrata equalia sunt rectangulo, quod bis distinctis partibus continetur una cum quadrato eius lineae, quae maior pars superat minorem. 86.b

9

In omni triangulo obtusangulo, linea perpendicularis ducta ex

ex quovis acuternm angulorum ad latus oppositum cadit in ip-
sum latus ad partes anguli obtusi protractum. 91.a

Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur,
maius sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur,
quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trian-
guli lateribus, obtusus est. 91.b

Linea perpendicularis ducta a quovis angulo triaguli acutæ
guli, vel ab angulo recto triaguli rectanguli, vel ab obtuso tria-
guli obtusanguli ad latus oppositum, cadit intra triangulum. 92.b

Si quadratum, quod ab uno laterum trianguli describitur,
minus sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur,
quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trian-
guli lateribus, acutus est. 93.a

Area cuiusque triaguli latera habentis nota invenire. 93.b

Dato excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdẽ,
invenire latus ipsius quadrati. 95.a

IN TERTIO LIBRO.

SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam
bisariam, & ad angulos rectos fecer; in secante est centrũ
circuli. 100.a

Linea recta, quæ circulum tangit, ita ut eum non fecer, in
uno tantum puncto ipsum tangit. 100.b

Si intra circulum punctum sumatur, ab eoque punctum in
circulum rectarum linearum cadentium una quidem maxima
sit, una vero minima; & reliquarum alia sint inæquales, alia
æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima ve-
ro erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem
erunt centro propinquiore, æquales autem ab eo æqualiter
distabunt. 103.a

Recta linea a diametri circuli extremitate ad angulos rectos
ducta ipsum circulum tangit. 109.b

Quotlibet anguli contactus æquales simul sumpti minores
sunt quovis angulo acuto rectilineo. 114.b

Aliqua quantitas potest continere, & infinitè augeri, altera
vero infinitè minui; & tamen augmentum illius, quantumcum-
que sit, minus semper erit decremento huius. 115.b

Transitur a minori ad maius, vel contra, & per omnia

- media, & tamen non per aequale. Item reperitur maius hoc, & minus eodem, & tamen non aequale. 115. b. & 126. b
8. A dato puncto in circumferentia circuli rectam lineam ducere, quae circumulum tangat. 116. b
9. Linea recta, quae circumulum secet, lineam parallelam ducere, quae eundem circumulum tangat. 116. b
10. Propositis duobus circulis, quorum neuter alteri includat, rectam lineam ducere, quae utranque tangat circumulum. 116. b
11. In circulo spatium ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis spatii & anguli. 118. b
12. Si in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint aequales, circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum anulum; atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi poterit. 120. a
13. Segmenta circularum aequalia super aequales lineas, vel super eandem constituta, sunt similia. 121. a
14. In aequalibus circulis, inaequales anguli inaequalibus peripheriis insistant, maior maiori, & minor minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant. 121. b
15. In aequalibus circulis anguli, qui inaequalibus peripheriis insistant, sunt inter se inaequales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant. 123. a
16. Duae rectae lineae, quae in eodem circulo aequales arcus intercipiant, se mutuo non secantes, sunt parallelae. 123. b
17. Linea recta, quae ex medio puncto peripheriae alicuius ducitur tangens circumulum, parallelae est rectae lineae, quae peripheriam illam subtendit. 129. b
18. In aequalibus circulis inaequales rectae lineae inaequales peripherias auferunt, maior quidem maiorem, & minor minorem, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo; At vero si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior minorem, & minor maiorem. 124. a
19. In aequalibus circulis, inaequales peripheriae inaequales rectae lineae subtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo; At vero si de segmentis semicirculo maioribus loquamur, minorem maiorem, & maiorem minor. 124. b
20. Angulus trianguli, qui reliquis duobus aequalis existit, rectus est. 126. b
- Segment-

Segmentum circuli, in quo angulus conspicuus est rectus, semicirculus est.	126.b.	21
Si angulo recto recta subtenfa bisariam fecerit, & ex puncto divisionis circulus describatur ad intervallum dimidia subtenfa, circulus transit per angulum rectum.	127.a.	22
Si linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos aequales, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulus; Linea ducta circulum tanget.	127.b.	23
Si dua recta ita se fecerit, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum aequale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema. circulus.	129.b.	24
Si a puncto quovis extra circulum assumpto plurima linea recta circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub tota linea, & partibus exterioribus, inter se sunt æqualia.	130.b.	25
Due recte lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant; inter se sunt æquales.	131.a.	26
Ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum possunt due lineæ, quæ circulum tangant.	131.a.	27

IN QVARTO LIBRO.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.	133.b.	1
Si circulo circa triangulum descripto, centrum intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si vero in unum latus trianguli, rectangulum: si denique extra triangulum, obtusangulum.	135.b.	2
Centrum circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: circa rectangulum vero, in latus recto angulo oppositum: circa obtusangulum denique, extra triangulum.	135.b.	3
Per data tria puncta non in una recta linea existentia circulum describere.	135.b.	4
Si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo quadratum inscribatur; erit quadratum circumscriptum		5

- scriptum quadrati inscripti duplum. 137.a.
- 6 Super data recta linea terminata pentagonum aequilaterum, & equiangulum conscribere. 138.b.
- 7 Latus hexagoni aequale est semidiametro circuli, in quadescribitur. 140.b.
- 8 Si in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarum aequilaterarum; continebis etiam inter dicta latera inclusus tot latera alterius figurae inscribendo in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; Continebis autem figurae inscribenda tot latera, angulosque aequales; quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur. 141.b.
- 9 Omnis figura aequilatera circulo inscripta, aut circumscripta, est quoque equiangula. 142.a.
- 10 In circulo una eadem opera facilius, quam ab Euclide dictum est, pentagonum, & Decagonum aequilaterum, & equiangulum describere. 143.a.
- 11 Si bisaria sectione laterum figura aequilatera & equiangula rectis coniungantur lineis; inscripta eris figura aequilatera quoque & equiangula in dicta figura, idem centrum habens. 143.a.

IN QUINTO LIBRO.

- 1 **A**NGULVS curvilineus rectilineo aequalis esse potest. 154.a.
- 2 Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conver- tendo proportionales erunt. 166.a.
- 3 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam aequemultiples primae & tertiae ad secundam, & quartam magnitudines eandem habebunt rationem: Nec non aequemultiples secunda & quarta ad primam & tertiam magnitudines. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad aequemultiples primae & tertiae; Nec non prima & tertia ad aequemultiples secundae & quartae. 166.b.
- 4 A Equales magnitudines ad aequales eandem habent rationem. 169.a.
- 5 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam minorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam minorem

minorem rationem habebis, quam quinta ad sextam. 172. a.

Si prima ad secundam maiorem habueris rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habueris, quam quinta ad sextam; Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebis, quam quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam minorem habueris rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habueris, quam quinta ad sextam: Prima quodque ad secundam minorem rationem habebis, quam quinta ad sextam. 172. a.

Si prima ad secundam eandem habueris rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si equalis, equalis; & si minor, minor. 174. a.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & per conversionem rationis proportionales erunt. 175. b.

Si duae magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detrahae quaedam habeant ad easdem eandem proportionem; & reliquae ad easdem eandem proportionem habebunt. 178. b.

Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam dupla reliqua. 179. b.

Si prima ad secundam habueris maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebis convertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 179. b.

Si prima ad secundam habueris minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebis convertendo secunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 180. a.

Si prima ad secundam habueris maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebis quoque uicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam. 180. a.

Si prima ad secundam habueris minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebis quoque uicissim prima ad tertiam minorem proportionem, quam secunda ad quartam. 180. b.

Si prima ad secundam habueris maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebis quoque composita prima cum secunda ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam. 180. b.

Si prima ad secundam habueris minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebis quoque composita prima cum secunda ad secundam minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam. 180. b.

- ad secundam minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam. 181.a.
- 17 Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habueris proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebis quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam. 181.a.
- 18 Si composita prima cum secunda ad secundam minorem habueris proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebis quoque diuidendo prima ad secundam minorem proportionem, quam tertia ad quartam. 181.b.
- 19 Si composita prima cum secunda ad secundam habueris maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebis per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam. 181.b.
- 20 Si composita prima cum secunda ad secundam habueris minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebis per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam maiorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam. 182.a.
- 21 Si sint tres magnitudines, & alia ipsis aequales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex aequalitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam. 182.a.
- 22 Si sint tres magnitudines, & alia ipsis aequales numero, sitque minor proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; Item secunda priorum ad tertiam minor, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex aequalitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam. 182.b.
- 23 Si sint tres magnitudines, & alia ipsis aequales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam prima posteriorum ad secundam: Erit quoque ex aequalitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam. 183.a.
- 24 Si sint tres magnitudines, & alia ipsis aequales numero, sitque

INDEX.

- fisque minor proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam ; Item secunda priorum ad tertiam minor, quam prima posteriorum ad secundam : Erit quoque ex aequalitate, minor proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam . 183.a.
- Si fueris maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum ; Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum . 183.b.
- Si fueris minor proportio totius ad totum, quā ablati ad ablatum ; Erit & reliqui ad reliquum minor proportio, quam totius ad totum . 183.b.
- Si sint quoscunque magnitudines, & alie ipsiſ equalēs numero, siſque maior proportio prima priorum ad primam posteriorum, quam secunde ad secundam ; & hac maior, quam tertia ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam ultimas priorum ad ultimam posteriorum ; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima ; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum . 184.a.

IN SEXTO LIBRO.

- P**ROPOSITIS quoscunque quantitatibus, proportio prima ad ultimam componitur ex proportionibus omnibus intermedijs, ut ex proportionē prima ad secundam, secunda ad tertiam, &c. 188.a.
- Triangula & parallelogramma, que ita se habent inter se, ut bases, eandem habent altitudinem, aequales ſue . 190.b.
- Triangula & parallelogramma, quorum aequales ſunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines. 191.a.
- Triangula & parallelogramma, que ita se habent inter se ut altitudines, aequales habent bases. 191.a.
- Linea recta, que parallela ducitur uni lateri in triangulo auferit triangulum toti triangulo ſimile . 193.b.
- Si ex duobus punctis cuiusvis recte, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineam, dua parallele inter ſe ad eandem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandē, quam recta inter ipſas, & alterum extremum incluſa : Recta

contin.

- coniungens extremum unius earum cum extremo prioris linea
transibit per extremum alterius linea. 193.b.
- 7 Si in triangulo quonvis uni lateri parallela recta agatur, &
ex quocunque puncto illius lateris ad angulū oppositum recta
educatur linea; diuidentur linea parallela, & latus dictum
in easdem rationes. 194.a.
- 8 Recta perpendicularis, qua in rectangulo triangulo ab an-
gulo recto in basim demittitur, est media proportionalis inter
duo basis segmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum
ambiens, medium proportionale est inter totam basim, & illud
segmentum basis, quod dicto lateri adiacet. 197.a.
- 9 Datam rectam lineam in partes quocunque aequales diui-
dere. 198.a.
- 10 Datam rectam lineam secare in duas partes, quae habeant
proportionem quamcunque datam. 199.a.
- 11 Si dua recta linea ficiantur in binis partibus proportionaliter:
Erunt quoque intermedia sectiones in eadem proportione cum
quibuslibet segmentis duobus. 199.b.
- 12 Datis duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis pro-
portione reperire. 200.b.
- 13 Tribus datis rectis lineis, quartam inuenire, quae sit ad ter-
tiam, ut prima ad secundam. 201.a.
- 14 Recta linea, qua in circulo a quouis puncto diametri ipsi
diametro perpendicularis ducitur ad circumsferentiam usque,
media est proportionalis inter duo diametri segmenta, quae a
perpendiculari facta sunt. 201.a.
- 15 Data recta linea, aliam rectam, (quae minor non sit, quā
dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis
inter segmenta huius. 201.b.
- 16 Recta linea media proportionalis est inter alias duas rectas
lineas, quae comprehēdūt rectū angulū quadrato illius aequale. 204.a.
- 17 Si tres recta linea proportionales fuerint; ut est prima ad
tertiam, ita est triangulum super primam descriptum ad trian-
gulum super secundam simile, similiterque descriptum; Item
triangulum super secundam ad triangulum super tertiam si-
mile similiterque descriptum. 206.a.
- 18 Polygona similia, aequaliter & equiangula diuiduntur in
similia triangula, & numero aequalia, ductis e centrīs circulo-
rū ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. 207.b.
- Si fue-

Si fuerint tres recte lineae proportionales; ut est prima ad secundam, ita est polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum. 208.a.

Aequalia rectilinea similia, similiterque descripta, consistunt suae superaequales rectas lineas. 209.b.

Si fuerint tres rectae lineae proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia. Et si a tribus rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint; ipsae etiam recte proportionales erunt. 210.a.

Triangula, quae omnes anguli uno angulo aequales habent, proportionem habent ex lateribus aequalem angulum comprehendens compositam. 211.a.

Proportionem ex duabus proportionibus, vel pluribus componere. 211.b.

Proportionem minorem ex maiori auferre. 211.b.

Triangula, quae unum angulum uni angulo aequalem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quae sub lateribus aequalem angulum comprehendentibus continentur. 212.a.

Parallelogramma inter se aequiangula eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum aequalem angulum continentibus comprehensa. 212.a.

Triangula & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportionibus basium, & proportionibus altitudinum. 212.b.

Datis duobus parallelogrammis aequiangulis, sed non similibus; ex quocumque istorum alteri simile reficere. Item quodvis ipsorum augere, ut fiat simile alteri. 214.b.

Dato parallelogrammo; describere aliud maius aut minus simile illi, similiterque descriptum. 219.a.

Si ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiente quadrato; ipsum applicatum aequale est rectangulo, quod sub segmentis lineae per applicationem factis continetur. 219.b.

Si figura, quae ab uno laterum trianguli describitur, aequalis sit eis, quae a reliquis trianguli lateribus describuntur, figurae similes, similiterque positis. Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est. 222.a.

Sector ad sectorem est, ut angulus ad angulum. 224.b.

Angulus ad centrum circuli ita est ad quatuor rectos; 224.b.

19

20

21

22

22

23

24

25

26

27

28

27

28

28

29

29

30

31

31

32

33

- ut arcus illi subiensus ad totam circumferentiam, & contra, ita se habens quatuor recti ad angulum in centro, ut tota circumferentia ad arcum illi angulo subensum. 224.b.
- 35 Similia segmenta circulatorum eandem proportionem habent ad integras circumferentias circulatorum, ac propterea qualis pars est una circumferentia totius suae circumferentiae, talis quoque est alia circumferentia similis totius suae circumferentiae. 225.a.
- 36 Anguli insistentes arcibus circulatorum similibus, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant, aequales sunt inter se. Et arcus, quibus insistant siue ad centra, siue ad circumferentias, anguli aequales, similes sunt. 225.b.
- 37 A dato rectilineo imperatam partem auferre, siue tangere, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuius rectilineo dato, similiterque positum. 226.a.
- 38 Duobus datis rectilineis, tertium proportionale invenire. 227.a.
- 39 Tribus datis rectilineis, quantum proportionale invenire. 227.a.
- 40 Duobus datis rectilineis, medium proportionale invenire. 227.a.
- 41 Dato rectilineo, duo rectilinea aequalia constituere, quae similia sint, similiterque descripta cuicumque rectilineo, habeantque inter se proportionem quamcumque. 227.b.
- 42 Dato rectilineo, duo rectilinea aequalia exhibere, quae cuicumque rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam. 228.a.
- 43 Duobus datis rectilineis, aequale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuius rectilineo dato. 228.b.
- 44 Si in circulo dua rectae lineae sese mutuo secuerint, & erunt segmenta unius segmenti alterius reciproca. 229.a.
- 45 Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duae rectae lineae circulum secantes, & erunt totae, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quae circulum tangat, & erit haec media proportionalis inter quatuorlibet rectam, quae circulum fecerit, & eius segmentum exterius. 229.a.
- 46 Si dua rectae lineae sese mutuo secuerint, & a duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur, & erunt duae

dua linea, quarum una inter terminum & sectionē, altera vero inter eundem terminum et suam perpendicularitatem interijciuntur, alijs duabus eodem modo inclusis reciproca.	229.b
In parallelogrammo due recte lateribus parallele se mutuo secantes, dividunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.	230.a
Omnis quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus dividitur in quatuor triangula proportionalia.	230.a
A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, que triangulum dividat in duo segmenta secundum proportionem datam.	230.a
Imperatam partem ex triangulo auferre per lineam rectam, qua a quovis dato puncto lateris ducitur.	230.b
Dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere maius, vel minus, secundum proportionem datam; Atque adeo quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum multiplicare, triplicare, quadruplicare, &c. Et aliud constituere, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, &c. servata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine.	231.a
In dato triangulo quocunque quadratum describere.	232.a

IN SEPTIMO LIBRO.

Si duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadā detractione, nunquam reliquus metietur precedentē, quoad assumpta sit unitas.	246.a
Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractione ad unitatem usque non perveniet, sed ad numerum, qui precedentem detractum metiatur.	246.b
An duo numeri propositi sint inter se primi, nec ne, considerare.	246.b
Numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorum communem mensuram.	247.b
An quotlibet numeri propositi, sint inter se primi, nec ne, considerare.	247.b
Numerus metiens tres numeros, vel etiam plures, metitur & maximam eorum communem mensuram.	248.b
Si unitas numeri pars fuerit, & altera unitas, vel numerus alterius	d

- alterius numeri eadem pars ; Et simul utraque vnitas, uel vnitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit que vnitas numeri. 249.b
- 8 Si sint quocunque numeri quocunque numerorum aequalium numero, singuli singulorum, eadem pars ; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, qua unus unus. Idemque sequitur, si loco unius numerorum priorum sumantur vnitas, uel loco plurium, uel etiam omnium, plures unitates. 250.a
- 9 Si sint quocunque numeri quocunque numerorum aequalium numero, singuli singulorum, aequimultiplices ; quam multiplex est vnus unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Idemque sequitur, si loco vni⁹ numerorum posteriorum assumantur vnitas, uel loco plurium, uel etiam omnium, plures unitates. 250.b
- 10 Si sint quocunque numeri quocunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes ; Et omnes omnium simul eadem partes erunt, qua unus unus. 251.a
- 11 Si numerus numeri aequ fueris multiplex, atque ablatum ablatum ; Etiam reliquus reliquus ita multiplex erit ut totus totius. 252.a
- 12 Si primus secundum aequaliter contineat, atque tertius quartum, eandemque insuper partem, uel partes ; Erit & contrario secundus primi eadem partes, qua quartus tertij. Et si fueris primus secundi eadem partes, qua tertius quartus ; continebit & contrario secundus primum aequaliter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem, uel partes. 254.b
- 13 Quae proportionales numerorum eadem proportioni eadem sunt, inter se quoque sunt eadem. 259.a
- 14 Si numerus quocunque numeros multiplices, uel quocunque numeri numerum quempiam multiplicens ; habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, uel multiplicantes. 261.b
- 15 Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicens, antecedens nimirum illorum consequens horum, & consequens antecedensom ; geniti ex ipsis aequales inter se erunt. 262.a
- 16 Quolibet numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sint, siue diuersa proportionales, metiuntur aequales alios numeros, qui easdem cum eis proportionales habent, primus primum, secundus secundum, &c. 263.b
- 17 Si quatuor numeri proportionales sint ; Et conuertendo proportionales

personales erunt.	264.b	
Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque dimisi proportionales erunt.	265.a	18
Si dimisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt.	265.a	19
Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per con- uersionem rationis proportionales erunt.	265.a	20
Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quā ter- tius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum ean- dem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus pri- mus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.	265.b	21
Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Es reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.	266.a	22
Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositū secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.	266.a	23
Si quoscunque numeri ad eundem habuerint proportionem, quas alij illis multisitudine aequales ad quendam aliū eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem proportionem, quam omnes hi simul ad eundem. Et si idem numerus ad quos- cunque numeros proportionem habuerit, quas idem numerus ad alios multisitudine illis aequales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem numerus ad hos omnes simul.	266.b	24
Quoscunque numeri inter se primi, minimi sunt in cōtinua- tione suarū proportionū. Et quoscunque numeri in cōtinuatio- ne suarū proportionū minimi sunt inter se primi.	268.a	25
Numerus, qui ex duobus compositus ad unum illorum pri- mus est, ad reliquum quoque est primus.	270.b	26
Si duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitus autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit, compositus; Is ad unum eorum, qui in principio, compositus erit.	271.b	27
Maxima mēsurā quolibet numerorū metitur ipse p nume- ros, qui minimi sunt eandē proportionē cū ipsis habentium.	273.a	28
d 2	Duos	

- 29 Duos minimos numeros inuenire , qui eandem habeant proportionem , quam quoscunque numeri dati continent proportionales . 273.a
- 30 Si duo numeri multiplicentur minimos eandem rationem habentes , maior minorem , & minor maiorem , producitur numerus minimus , quem illi metiantur . 274.a
- 31 Si tres numeri numerum quempiam metiantur ; metietur & eundem minimus numerus , quem illi metiuntur . 275.a
- 32 Minimus numerus , quem quolibet numeri metiuntur , minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas . 276.b
- 33 Numerum reperire , qui minimus cum sit , habeat datas partes , hac lego , ut qualibet pars subsequens partem contineat . 277.b

IN OCTAVO LIBRO.

- 1 SI tres numeri minimi sint continui proportionales , erunt extremi eorum quadrati : Si autem fuerint quatuor , cubi . folio . 280.a
- 2 Extremi numeri proportionalium quocunque secundum doctrinam propof. 1. inuentorum , in data ratione minimorum , inter se primi sunt . 280.a
- 3 Duo numeri minimi in data ratione metiuntur eundem medios quocunque minimorum in eadem ratione . 280.b
- 4 Si sint quocunque numeri deinceps proportionales , primus autem secundi non sit multiplex ; neque alius quisquam ullius multiplex erit . 285.a
- 5 Si sint quocunque numeri deinceps proportionales , primus vero secundum metiatur ; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur . Si primus autem secundi sit multiplex ; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit . folio . 285.a
- 6 Si sint quocunque numeri deinceps proportionales , primus autem , vel alius quisquam nullum a secundo metiatur ; neque primus secundum metietur . Et si primus , vel alius quisquam nullus a secundo sit multiplex ; neque primus secundi multiplex erit . 285.b
- 7 Si sint quocunque numeri deinceps proportionales , primus autem ,

autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit. 286.b

Inter numeros dupte proportionis, vel superparticularis, vel superhypergentis, non potest cadere numerus medius proportionalis. 287.a

Si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicat productum, & sic deinceps; erunt omnes producti continue proportionales ab unitate. 289.a

Si quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, secundum ab unitate in se multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc sit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic deinceps. 290.a

Si sint ab unitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine equalium; habebunt tertij ab unitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab unitate; quartij vero eiusdem triplicatam; & quintij quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius. 290.a

Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine equalium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quartij vero eiusdem triplicatam; & quintij quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius. folio. 290.b

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utramque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportionem cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportionem cadent. 291.b

Inter duos quadratos numeros cadit numerus medius proportionalis in continua proportionem lateris ad latus. 292.b

Numerus medius proportionalis inter duos quadratos, & quilibet ipsorum quadratorum, compositi inter se sunt. 292.b

Inter duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in continua proportionem lateris ad latus. 293.b

Duo numeri medij proportionales inter duos cubos, & quilibet ipsorum cuborum, inter se compositi sunt. 293.b

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi sit

d 3 multi-

- multiplex; & vnus latus lateris alterius multiplex eris. Et si vnus quadratus, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex eris. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris eris multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi eris multiplex.* 290.b
- 19** *Inter duos similes planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, quorum officio medius proportionalis inquiritur.* 297.b
- 20** *Numerus medius proportionalis inter duos planos similes, & quilibet ipsorum planorum sunt inter se compositi.* 297.b
- 21** *Inter duos similes solidos cadunt duo medij proportionales in ratione laterum homologorum, quorum officio medij proportionales inuestigantur.* 298.b
- 22** *Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & quilibet ipsorum solidorum, inter se sunt compositi.* folio. 298.b
- 23** *Proportio cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo potest in duobus numeris quadratis.* 302.b
- 24** *Numeri in dupla proportionem, proportionem non habent; quam quadratus ad quadratum.* 302.b
- 25** *Proportio cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis.* folio. 303.a
- 26** *Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.* 303.b
- 27** *Plani numeri non similes proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* 303.b
- 28** *Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.* 304.a
- 29** *Nulli numeri habentes duplicem proportionem, vel sesquialteram, vel superbipartiensem, sunt similes plani, vel solidi.* folio. 304.a
- 30** *Nulli numeri primi sunt plani similes, vel solidi.* folio. 304.a
- 31** *Duos numeros planos, vel solidos non similes inuenire.* folio. 304.b

IN NONO LIBRO.

SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit. 305.b

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit. folio. 305.b

Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit. 306.a

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; productus non quadratus erit. folio. 306.b

Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus non cubus erit. 307.a

Si cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; & multiplicatus non cubus erit. 307.a

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint; tantum distabis quilibet maior numerus acceptus ab assumpto quoniam minor, quantum ab unitate abest numerus, per quem minor maiorem metitur. 308.b

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint; quilibet illorum seipsum multiplicans producat numerum, qui tantum ab eo distat in numeris proportionalibus, quantum ipse ab unitate. Minor vero quoniam maiorem quempiam multiplicans producat numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab unitate. 308.b

Si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint; quocunque numerus primus ultimum metiens, metietur etiam omnes alios ante ultimum. 313.a

Si quocunque numeri deinceps proportionales fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis; Numerus aliquem eorum metiens compositus erit ad alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi. 314.b

Si fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quocunque partes; Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris equalis est numeris, qui sub numero indiviso, & quolibet parte numeri divisi constituitur. 315.b

Si numerus in duas partes dividatur. Numeri plani
d 4 sub

8:
2
3
4
5:
6
7
8
9
10.
11
12

- sub toto, & singulis partibus comprehensi aequales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur. 316.a
- 13 Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus aequalis est & illi, qui sub partibus continetur, & quadrato, qui a praedicta parte efficitur. 316.a
- 14 Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus aequalis est quadrato, qui a partibus efficitur, una cum numero plano, qui his sub partibus continetur. 316.b
- 15 Si numerus secetur in duas partes aequales, & non aequales: Numerus planus sub partibus inequalibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, aequalis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur. 316.b
- 16 Si numerus in duas partes aequales diuidatur, & illi aliquid numerus adiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in additionem, una cum quadrato dimidij numeri, aequalis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio, & adiecto componitur. 317.a
- 17 Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato vnius partis, aequalis est numero, qui fit his ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliqua partis. folio. 317.b
- 18 Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, una cum quadrato reliqua partis, aequalis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte. folio. 317.b
- 19 Si numerus secetur in duas partes aequales, & non aequales: Quadrati qui a partibus inequalibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur. 318.a
- 20 Si numerus in duas partes aequales diuidatur, adiciatur autem illi alius quilibet numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio & adiecto. 318.b
- 21 Fieri non potest, ut numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita ut numerus planus, qui ex toto in vnam partem fit, aequalis sit quadrato reliqua partis. 318.b
- 22 Si quoscunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi

INDEX.

nimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium : Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.	folio.	320.a	
Propositis quocunque numeris cōsinne proportionalibus, an possis ipsis alius proportionalis adiungi, considerare.		322.b	23
Si sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps, quorū primus & tertius, primi inter se sint, fieri non potest, ut detur alius, ad quē ita se habeas quartus, sicut secundus ad tertium.		323.b	24
Primis numeris quocunque propoſitis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.		324.a	
Si par numerus parem multiplicans feceris aliquem, factus par erit.		326.a	26
Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metiatur.		326.b	27
Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.		326.b	28
Omnes numeros pariter pares tantum inuenire.		327.b	29
Omnes numeros pariter impares tantum inuenire.		328.b	30
Omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares, inuenire.		329.a	31
Quocunque numerorum continue proportionalium, quorum primus, secundus, & ultimus fuerint noti, summam inuenire.		329.b	32
Omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, inuenire.	folio.	331.a	33

IN DECIMO LIBRO.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propoſitis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe : Nunquam reliqua præcedentem metietur.	folio.	3.b	1
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propoſitis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractiōe, Metietur quadam reliqua præcedentem.		9.a	2
Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.		9.b	3
An quolibet magnitudines propoſite sint commensurabiles, nec			4

- nec, considerare. 10.a
- 5 Magnitudo metiens quoslibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. 11.a
- 6 Si sint quocumq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua bina magnitudines: Et ex aequalitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 11.a
- 7 Commensurabiles magnitudines proportionem habens eandem, quam numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur. 12.b
- 8 Lineam rectam inuenire, ad quam ita se habeas quavis alia data recta linea, ut numerus ad numerum. 13.b
- 9 Lineam rectam inuenire, ad cuius quadratum ita se habeas quadratum alterius data recta, ut numerus ad numerum. 13.b
- 10 Si sint quotvis quantitates continue proportionales, & alia totidem continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad ultimam, ita prima harum ad ultimam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. 14.b
- 11 Recta linea, qua longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: Quae uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et qua longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quae uero potentia incommensurabiles, omnia & longitudine incommensurabiles sunt. 16.b
- 12 Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 20.a
- 13 Quoslibet numeros inuenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. 20.a
- 14 Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, utrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia. 21.b
- 15 Si sint duae magnitudines commensurabiles, altera uero sit uni cuiuspiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis. 22.b
- 16 Quae incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se in-

se incommensurabiles erant.	23.b.	17
Duabus datis rectis lineis inaequalibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.	24.a.	18
Duabus datis rectis lineis sine equalibus, siue inaequalibus, inuenire rectam, qua illas potest.	24.b.	19
Si recta magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliqua commensurabilis est.	25.b.	20
Si recta magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum, eadem & reliqua incommensurabilis est.	26.a.	21
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammū deficiens figura quadrata, Parallelogrammum applicatum aequale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectae lineae ex applicatione factis continetur.	26.b.	22
Duabus datis rectis lineis inaequalibus, quantam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata.	27.a.	23
Datam rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, aequale sit dato rectilineo, quod tamen minus non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.	27.b.	24
Si sint duae rectae inaequales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; non erunt segmenta, quae ex applicatione fiunt, aequalia.	28.a.	25
Quotcumque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles inuenire.	32.a.	26
Rationales linea non solum expositae Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles.	32.a.	27
Si sint duae rectae lineae, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur. Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.	32.b.	28
Spacium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.	32.b.	29
Recta linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.	33.a.	
Quotcumque		

- 30 Quotcumque lineas Rationales potentia tantum inter se com-
mensurabiles inuenire. 34.b.
- 31 Propositis quocumque Rationalibus lineis potentia solum
commensurabilibus; inuenire adhuc aliam, qua omnibus illis
commensurabilis sit potentia tantum. 35.a.
- 32 Linea media proportionalis inter duas Rationales potentia
tantum commensurabiles, Media est. 36.a.
- 33 Omne spatium Medium aequale est cuidam alteri rectangu-
lo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum com-
mensurabilibus, si ipsum sub talibus iam non continetur. 37.b.
- 34 Spatium Medio spatio commensurabile, Medium est. 38.b.
- 35 Duas rectas Medias longitudine commensurabiles; Item
duas potentia tantum commensurabiles inuenire. 39.a.
- 36 Rectangulum sub duabus Medijs longitudine & potentia
incommensurabilibus contentum, neque Rationale est, neque
Medium, sed aequale alteri cuipiam rectangulo, quod contine-
tur sub linea Rationali, & Irrationali, qua Media appel-
latur. 40.b.
- 37 Rationale superat Rationale Rationali. 42.a.
- 38 Duos numeros planos similes inuenire. 43.a.
- 39 Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ip-
sis quadratus etiam sit. 43.a.
- 40 Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus sit etiā
numerus quadratus. 43.b.
- 41 Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit
numerus quadratus. 44.a.
- 42 Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ip-
sis non sit quadratus. 44.a.
- 43 Duos numeros inuenire, ita ut ex illis compositus ad neutrum
ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadra-
tum. 46.a.
- 44 Si sint duae rectae lineae inaequales, erit ut maior ad minorem,
ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris. Et
ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum
maioris. 47.b.
- 45 Si sint tres lineae rectae, erit ut prima ad tertiam, ita rectan-
gulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub se-
cunda & tertia continetur. 48.b.
- 46 Si recta linea secetur in duas partes inaequales, erit ut ma-
ior pars

ior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.	50.a.
Si sint dua recta linea inaequales, minor autem secetur bifariam; eris rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea & dimidia parte minoris continetur. Et si maior bifariam secetur; eris rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub minori linea, & dimidia parte maioris continetur.	47 50.b.
Fieri potest, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale.	48 51.b.
Duo spatia Rationalia Rationale spatium componunt.	52.a.
Invenire duas Medias longitudine & potentia incommensurabiles.	50 53.a.
Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.	51 54.b.
Si recta linea non bifariam secetur, eris compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius linea, qua maior pars minorem superat: Ac propterea quadrata partium inaequalium simpliciter sunt maiora rectangulis, quod bis sub partibus inaequalibus continetur.	52 56.a.
Si recta linea in partes inaequales secetur, & rursus in alias partes inaequales; erunt quadrata partium magis inaequalium simul maiora quadratis partium minus inaequalium simul.	53 57.b.
Si recta linea secta sit utcumque; eris rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius linea, & quadratum dictae partis.	54 67.a.
Ei, qua est ex binis nominibus, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, sed non semper ordine eadem.	55 77.a.
Ei, qua est ex binis Medijs, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem.	56 78.b.
Recta linea, qua ex binis nominibus, & relique Irrationales ipsam subsequentes, neque ipsi Media, neque inter se eadem sunt.	81.b.
Recta linea media proportionalis secundum Analogiam Arithme-	57

- Arithmetica, inter duo nomina cuiusvis lineæ Irrationalis, quæ per compositionem fit, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit. 82. b.
- 59 Si a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome. 83. b.
- 60 Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima. 84. a.
- 61 Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda. 85. a.
- 62 Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 85. b.
- 63 Si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. 86. b.
- 64 Si a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens. 87. a.
- 65 Si idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & uicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam. 87. b.
- 66 Quatuor magnitudines Arithmetica Analogiam habentes, habent quoque uicissim Arithmetica Analogiam. 87. b.
- 67 Recta linea Apotoma potentia tantum commensurabilis, & ipsa Apotome est, sed non semper ordine eadem. 105. a.
- 68 Apotome, & ceteræ ipsam consequens Irrationales lineæ, neque ipsi Media, neque inter se sunt eadem. 110. a.
- 69 Fieri potest, ut spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. 114. a.
- 70 Non solum lineæ, sed magnitudines etiam planas, atque solidas incommensurabiles esse. 116. a.

IN VNDECIMO LIBRO.

APUNCTO in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittuntur. 136. a.

Si fuerint

I N D E X.

<i>Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.</i>	2
<i>Daso plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.</i>	3
<i>Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.</i>	4
<i>Duo plana alteri plano parallela, quæ inter se conveniunt, unum planum efficiunt.</i>	5
<i>Si prisma quodcumque plano secetur aduersis planis parallelo, erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.</i>	6
<i>Si prisma quodcumque secetur plano oppositis planis parallelo, sectio est figura aqualis, & similis planis oppositis.</i>	7
<i>Solida parallelepipeda aqualia super eandem basim, siue infestentes linea in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.</i>	8
<i>Solida parallelepipeda aqualia super aequales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda aqualia in eadem altitudine, super aequales sunt bases, si non habuerint eandem basim.</i>	9
<i>Si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine.</i>	10
<i>Si fuerint quatuor linea rectæ continue proportionales, ut est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam.</i>	11
<i>Prismata, quorum bases sunt triangula super eandem basim, vel aequales, & in eadẽ altitudine, sunt inter se aqualia.</i>	12
<i>Prismata, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases.</i>	13
<i>Similia prismata, quorum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.</i>	14
<i>Æqualium prismaticum, quorũ bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismaticum triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt aqualia.</i>	15
<i>Si fuerint duo anguli plani aequales, quorum uerticibus sublimes rectæ linea aequales insistant, quæ cum lineis</i>	16

- lineis primo positis angulos contineant aequales, utrunque viri
que erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana
angulorum primo positorum demissa perpendiculares inter se
aequales. 158.b
17. Si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum aequa
lo fuerit parallelepipedo sibi aequiangulo a media linea de-
scripto; erunt tres rectae lineae continue proportionales.
folio. 159.a
18. Si fuerint tres rectae proportionales, erunt & parallelepipedum
similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia. Et si tria so-
lida parallelepipeda, quae & similia, & similiter describuntur,
fuerint proportionalia; & ipsae tres rectae lineae proportionales
erunt. 160.b
19. Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint; & prisma-
ta triangulares bases habentia, quae ab ipsis & similia & si-
militer describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata
triangulares bases habentia, quae & similia similiterque descri-
buntur, fuerint proportionalia; & ipsae rectae lineae proportio-
nales erunt. 160. b
20. Si fuerint tres rectae proportionales, erunt & prismata trian-
gulares bases habentia, quae ab ipsis & similia, & similiter
describuntur, proportionalia. Et si tria prismata triangula-
res bases habentia, quae & similia & similiter describuntur,
fuerint proportionalia; & ipsae tres rectae lineae proportionales
erunt. 160. b
21. In omni parallelepipedo diametri se mutuo bisariam secant
in uno puncto. 161. a
22. Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum:
bisariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum pa-
rallelepipedum plano secetur bisariam: per centrum transibit
ipsum planum. 162. a

IN DVODECIMO LIBRO.

1. CIRCULVS ad circulum est, ut polygonum in illa de-
scriptum ad polygonum simile in hoc descripto. 166. b
2. Si pyramides triangulares inter se sint ut bases, ipsae erunt
sub eadem altitudine. 170. a
3. Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales
bases

bases triangulares confimunt, sunt inter se aequales. 170.b

Pyramides triangulares aequales super eandem, vel aequales bases, eandem habent altitudinem. Es pyramides triangulares aequales, eandemque habentes altitudinem, bases habent aequales, si non eandem. 170.b

Pyramides quatuorlibet basium, quae inter se sunt, ut bases, eandem habent altitudinem. 171.a

Pyramides eiusdem altitudinis super aequales bases multangulas, vel eandem constituta, sunt inter se aequales. 172.a

Pyramides multangulae aequales, & super aequales bases, vel super eandem constructa, eandem habent altitudinem. Es pyramides multangulae aequales, eandemque habentes altitudinem, aequales habent bases, si non habuerint eandem. 172.a

Pyramis quaecunque tertia pars est prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Sine prisma quoddam quo triplum est pyramidis, quae eandem cum ipso habet & basim, & altitudinem. 172.b

Sub eadem altitudine existensia prismata, quaecunque habeant bases, inter se sunt, ut bases. 173.b

Si prismata quorumcunque basium inter se sunt, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. 174.a

Prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases quaecunque, inter se sunt aequalia. 174.a

Prismata aequalia super aequales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Es prismata aequalia eiusdem altitudinis, bases habent aequales, si non habuerint eandem. 174.a

Similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habent proportionem homologorum laterum triplicatam. 175.a

Prismata similia habent triplicatam proportionem homologorum laterum. 175.b

Pyramides multangulae similes dividuntur in pyramides triangulares similes, & numero aequales, & homologae totius folio. 176.a

Prismata multangula similia dividuntur in prismata similia triangulares bases habentia, & numero aequalia, & homologa totis. 176.a

Aequalium pyramidum, quarum bases non sunt triangulae, reciprocantur bases, atque altitudines. Ex quarum pyrami- dum

177. a
 18. Aequalium prismatum quorumlibet reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum prismatum bases, atque altitudines reciprocantur, illa sunt aequalia. 177. b
 19. Omnis conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri, siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basem & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni, & cylindri. 180. a
 20. Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue unus rectus, & alter scalenus, inter se proportionem habent, quam bases. 181. a
 21. Si coni & cylindri inter se sint, ut bases, ipsi sub eadem altitudine erunt. 181. b
 22. Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases constituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue unus rectus, & alter scalenus, sunt inter se aequales. 181. b
 23. Coni et cylindri aequales super eandem, vel aequales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni & cylindri aequales in eadem altitudine, super aequales bases sunt, si non habuerint eandem. 181. b
 24. Similes coni & cylindri scaleni, in triplicata ratione sunt diametrorum, quae in basibus. 183. a
 25. Super aequalibus basibus existentes coni, & cylindri scaleni, vel etiam si unus conorum, vel cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, inter se sunt, ut altitudines. 185. a
 26. Super aequalibus basibus existentia prismata, parallelepipeda, & pyramides, inter se sunt, ut altitudines. 185. b
 27. Coni & cylindri tam recti, quam scaleni, item prismata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habent aequales. 185. b
 28. Aequalium conorum, & cylindrorum, siue ambo, tam coni, quam cylindri scaleni sint, siue unus rectus, & alter scalenus, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, siue ambo tam coni, quam cylindri sint scaleni, siue unus rectus, & alter scalenus, bases & altitudines reciprocantur, illi sunt aequales. 187. b
 29. Si duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum aequilaterum, & parium laterum inscribitur unamquemque circulum non tangens, & ab extremitate unius lateris

Latus polygoni inscripti, quod cum diametro coniungis, ad diametrum perpendicularis ducatur: hac nullo modo circulum minorem tangis, sed extra ipsum vadis.

Duo polyedra similia in duabus sphaeris descriptis proportionem habens triplicatam eius, quam habens sphaerarum diametri: 191.a

Sphaera ad sphaeram est, ac polyedronum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. 193.b

IN TERTIO DECIMO LIBRO.

Si recta inaequaliter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quinquuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati: Recta illa linea secuta erit extrema & media ratione. 197.a

Si recta linea inaequaliter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti: Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur. 198.a

Si recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus, erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum erit illa linea, quae prioris linea minus segmentum erans folio. 199.a

Si linea recta secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineae. 199.b

Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis, erit minus segmentum Apotome. 200.a

Si latus hexagoni in quopiam circulo descripti secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum est latus decagoni in eodem circulo descripti. 201.b

Si linea diuisa extrema ac media ratione minus segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli, erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli, erit maius

- segmentum latus hexagoni eiusdem circuli. 202.b
8. Linea recta, quæ ex centro circuli ducta dividit arcum quæpiam bifariam, dividit quoque rectam illi arcui subtensam. bifariam, & ad angulos rectos. 204.b
9. Diameter circuli ex angulo quocunque pentagoni in eo descripti ducta dividit & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum, bifariam, & ad angulos rectos. 204.b
10. In dato circulo pentagonum, & decagonum una eademque opera describere. 204.b
11. Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex uno angulo ducta dividit & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque rursus bifariam, & ad angulos rectos secabitur a latere opposito. 207.a
12. Si ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit mediæ proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 208.b
13. Diameter sphaerae potentia est quadrupla sesquialtera semidiæmetri circuli circa basem pyramidis descripti. 209.a
14. Linea perpendicularis ex centro sphaerae ad planum bases pyramidis demissa, sensa pars est diæmetri sphaerae, & tertia pars semidiæmetri. 209.a
15. In octaedro tres diæmetri se mutuo ad angulos rectos secant in centro sphaerae; nec non & tria quadrata ex lateribus octaedri composita se mutuo ad angulos rectos secant. 210.b
16. Octaedrum dividitur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum ex octaedri lateribus compositum. 210.b
17. Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphaera describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitercium lateris octaedri. folio 210.b
18. Bases octaedri oppositæ sunt parallelæ. 211.a
19. Omnes diæmetri cubi inter se sunt æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphaerae secant; nec non & recta lineæ, quæ eorum basium cubi oppositarum coniungunt, bifariam dividuntur in eodem centro. 212.a
20. Potentia diæmetri sphaerae, seu cubi, æqualis est potentia laterum

etiam tetraedri, & cubi sunt sumptis. 210.b

Sphaera diametris potentia est quinquiespla semidiametri, tri- 21
culi quinq[ue] latera Icosaedri p[er]ipolygonum constituta am-
bientis. 214.b

Sphaera dicitur composita esse ex latere hexagoni, hoc est, ex 22
semita diametri, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli;
qui circa quinq[ue] Icosaedri latera describitur. 215. b

Latere Icosaedri opposita sunt paralia. 216.b

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius seg- 23
mentum est latus Dodecaedri in eadem sphaera cum cubo descri- 24
pti. 219.a

Latus cubi aequale est latus rectae subeandem angulum pen- 25
tagoni Dodecaedri eadem sphaera comprehensi. 219. a

Si recta linea fecerit extrema ac media ratione, cuius minor 26
segmentum est latus dodecaedri, maius segmentum est latus cu-
bi eiusdem sphaera. 219.b

In Dodecaedro sunt sex latera, quorum binis opposita sunt pa- 27
rallela, bisariam quoque faciunt, & ad angulos rectos a tribus li-
neis rectis aequalibus se se in eodem dodecaedro bisariam quique,
& ad angulos rectos secantibus. 219. a

Si recta dividens opposita latera Dodecaedri bisariam, & 28
ad angulos rectos, faciat extrema ac media ratione, maius seg-
mentum est latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eandem sphaera
comprehensi. 219. a

Præter quinque corpora regularia, quæ Euclides hoc lib[ro] con- 29
struxit, nullum aliud dari potest. 220. b

IN QUARTODECIMO LIBRO.

LINEA perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineam 3
rectam in eodem circulo apertam, facit arcum, quem ducta
hæc linea subtendit, bisariam. 226. a

Perpendicularis linea ex centro ad latus pentagoni ducta 3
aqualis est vtrique lineæ simul, & ei, quæ ex cetro ad latus trian-
guli æquilat[er]i eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari- 11
ri, & dimidia lateris decagoni. 226. b

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentago- 3
ni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media
ratione, maius segmentum aequale est perpendiculari ex co-
dem

1. *Ad idem ad latus trianguli aequilateri ducta, eritque vero aequalis*
est dimidio lateris decagoni eodem circulo inscriptorum. 227. a
4. *Si inscriptum eadem auctoritas, et dodecaedrum inscribatur, quod*
duorum lateris cubi, et quadratum lateris dodecaedri, utraque
similiter, qui quinquies sunt quadratum semidiametri circuli pentago-
ni ad dodecaedri circumscribendum. 228. a
5. *Si latus hexagoni alicuius circuli secatur extrema ac media*
ratione, maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem
circuli. 228. a
6. *Superficies cuiuslibet dodecaedri ad superficiem cuiuscum-*
que Icosaedri, etiamsi non describantur amba figure in eadem
sphaera, oppositum rectangulum continentur sub latere dodecaedri,
et perpendiculari ducta ex centro pentagoni dodecaedri in la-
tus dictum, ad rectangulum continentur sub latere Icosaedri, et
perpendiculari ducta ex centro, triangulum Icosaedri in dictum
latus. 229. a
7. *Si ad eodem circuli triangulum tetraedri circumscriben-*
ti perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli, erit
quod sub dicto latere et perpendiculari continetur rectangu-
lum sexies sumptum, superficiei tetraedri aequale. 231. a
8. *Si ex centro circuli triangulum octaedri circumscriben-*
ti perpendicularis ducatur ad unum latus trianguli, erit
quod sub dicto latere et perpendiculari continetur rectangu-
lum duodecies sumptum, superficiei Octaedri aequale
folio. 231. a
9. *Si ex centro circuli quadratum cubi circumscribens perpendicularis*
ducatur ad unum latus quadrati, erit quod sub di-
cto latere et perpendiculari continetur rectangulum duode-
cies sumptum, superficiei cubi aequale. 231. a
10. *Rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo*
trianguli Icosaedri ad unum eius latus ducta, et sub quinque
sexus partibus lateris cubi eidem sphaera, in qua Icosaedrum
inscriptum, aequale pentagono dodecaedri in eadem sphaera con-
stitutum. 232. b
11. *Quam proportionem habent latera cubi, et Icosaedri eiusdem*
sphaera, eandem habent latera cubi, et Icosaedri in quavis alia
sphaera descriptorum. 234. b
12. *Superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum*
habet eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosae-
dri

tri in eadem sphaera cum ipsis, ut uide propof. quibus lib. fed
etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icofaedri in quatuor.
que alia sphaera. 233.a

Si sphaera plano quopiam fecitur, communis sectio circuli
erit. 235.a

Si planum fecimus. transferis per centrum sphaera, efficitur
circulus idem omnino habens, quod sphaera. Si uero planum
fecimus per sphaera centrum non transferis, efficitur circulus
habens aliud centrum, quam sphaera; illud uidelicet punctum
Estum, in quod cadi perpendicularis ex centro sphaera ad planum
fecans ducta. 235.b

Circuli in sphaera aequales, aequaliter distant a centro sphae-
ra: & circuli aequaliter distantes a centro sphaera, aequales
sunt. 236.a

Eadem proportio est lateris cubi ad latus Icofaedri & su-
perficieis dodecaedri ad superficiem Icofaedri; & linea poten-
tis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, et eius
segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmen-
tum illius; & Dodecaedri ad Icofaedrum eiusdem sphaera. 237.a

Latus trianguli aequilateri potentia sesquitergium effi-
linea perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum dode-
caedri. 237.b

Linea perpendicularis ex uno angulo trianguli aequilateri
ad latus oppositum demissa secat & angulum, & latus bise-
ctam. 238.a

Si sphaera diameter fuerit Rationalis, erit etiam superficies
tetraedri, quam octaedri in ea sphaera; Media. 238.a

Omne triangulum aequilaterum, cuius latus sit Rationale, est
superficieis Media. 239.a

Si tetraedrum, atque octaedrum in eadem sphaera inscribuntur
erit basis tetraedri sesquitergia basis octaedri: Superficieis au-
tem octaedri sesquialtera superficieis tetraedri. 239.b

Recta linea ex angulo quouis tetraedri, in sphaera descripti
per centrum sphaera ducta, cadi in centrum basis opposita, estq;
perpendicularis ad dictam basim. 239.b

Octaedrum in sphaera descriptum diuiditur in duas pyramides
aequales, & similes aequalium altitudinum; basis uero unus-
que est quadratum subduplum quadrati diametri sphaera. 239.b

Tetraedrum sphaera inpositum ad octaedrum in eadem sphaera descri-
bitur. 240

- primū se habet, ut rectangulum sub linea potentie trigintaseptem
 sexagesimaquadrata partes quadrati lateris tetraedri, & sub li-
 nea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehen-
 sum, ad quadratum diametri sphaera. 241. a
21. Tetraedrum sphaerae impositum ad octaedrum in eadem sphae-
 ra describuntur se habet, ut rectangulum sub linea, quae potentia
 est sub sesquicertia trium quarciarum partium lateris tetraedri, &
 sub linea superquintupartiente triginta sexagesima, partes ca-
 viorum trium quarciarum partium lateris tetraedri, continet,
 ad quadratum diametri sphaera. 241. a
22. Linea perpendicularis ex quolibet angulo trianguli aequila-
 teri ad basin oppositam demissa, tripla est eius perpendicularis,
 quae ex centro trianguli ad eandem basin deducitur. 242. a
23. Linea perpendicularis ex quolibet angulo trianguli aequilate-
 ri ad basin oppositam ducta, sesquialtera est eius, quae inter cen-
 trum trianguli, & dictum angulum interiecitur: Haec autē inter cē-
 trum trianguli, & dictum angulum interiecta, dupla est eius perpendi-
 cularis, quae ex centro trianguli ad basin eiusdem ducitur. 242. a
24. Si octaedrum sphaerae inscribatur, erit semidiameter sphae-
 ra potentia tripla eius perpendicularis, quae ex centro sphaerae
 in basin quamcumque octaedri deducitur. 243. b
25. Duplum quadrati ex diametro cuiuslibet sphaerae descripti,
 aequale est superficie cubi in illa sphaera collocati: perpendicularis
 autem a centro sphaerae in aliquam basin cubi demissa
 aequalis est dimidio lateris cubi. 244. a
26. Solidū, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes
 quadrati diametri sphaerae dicti cubi comprehendit, aequale est
 cubo. Vel solidū, quod fit ex latere cubi in tertiam partem qua-
 drati diametri sphaerae, aequale est cubo. 244. b
27. Solidū, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuscumque cor-
 poris regularis ad aliquā eius basim ducta, in tertiam partē sup-
 ficiei ipsius corporis, aequale est posito corpori regulari. 244. b
28. Idem circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri
 triangulum eiusdem sphaerae. 245. a
29. Lineae perpendiculares contingentes centra circulorum, qui
 bases oppositas tam cubi, quam octaedri in eadem sphaera cir-
 cumscribunt, aequales sunt. 245. b
30. Si octaedrum, atque tetraedrum eidem sphaerae inscriban-
 tur

<i>ut; erit octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri.</i> <i>Alciendo octaedri ad alcindinem tetraedri eiusdem sphaera est, ut latus octaedri ad latus tetraedri.</i> <i>Diameter sphaera ad latus tetraedri est, ut latus octaedri ad latus cubi eiusdem sphaera.</i> <i>Si recta linea proposita potuerit totam aliquam lineam scilicet extrema ac media ratione, & maius eius segmentum, item totam aliam similiter scilicet, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineae latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineae, latus Dodicaedri eius sphaera, cuius recta linea proposita diameter existit.</i> <i>Si latus octaedri potuerit maius & minus segmentum rectae lineae extrema ac media ratione scilicet; poterit latus Icosaedri in eadem sphaera describi duplum minoris segmenti.</i> <i>Si recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta substatueretur recta linea, quae potentia sit subdupla ipsius rectae subiectae, latus octaedri eius sphaera, in qua dictum minus segmentum latus existit dodicaedri.</i> <i>Si linea quaevis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus octaedri, maius segmentum est latus Dodicaedri eiusdem sphaerae, in qua octaedrum describitur.</i> <i>Si latus tetraedri possit maius & minus segmentum lineae rectae extrema ac media ratione scilicet; latus Icosaedri eidem sphaerae inscripti sesquialterum est minoris segmenti.</i> <i>Cubus ad octaedrum in eadem eum ipso sphaera descriptum, est ut superficies cubi ad octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphaerae.</i> <i>Si sint quatuor lineae rectae continue proportionales, nec non & aliae quatuor, ita ut sit eadem antecedens eorum; erit proportio tertia ad quartam proportionis secunda ad secundam duplicata; & proportio quarta ad quartam eiusdem proportionis secunda ad secundam triplicata.</i> <i>Quadratum lateris trianguli aequilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius</i>	246.a. 246.b. 246.b. 247.a. 248.a. 248.b. 249.a. 249.a. 249.b. 251.b.	34 35 36 37 38 39 40 42 43 43

- 44 Si in triangulo aquilatero perpendicularis ducatur ex uno
45 angulo ad latus oppositum; quadratum recte, quae medio loco
46 proportionalis est inter distam perpendicularem; & dimidium
47 lateris, æquale est ipsi triangulo. 253.a.
48 Si cubus & tetraedrum in eadem sphaera describantur; ut
49 quadratum cubi ad triangulum tetraedri, ut latus tetraedri
50 ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli te-
51 traedri ad latus oppositum deducitur. 253.b.
52 Latus tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudi-
53 nis ipsius. Axis vero, sine altitudo tetraedri potentia sesquiter-
54 tia est lateris cubi in eadem sphaera descripti. 253.b.
55 Diameter sphaerae potentia est dupla sesquiquarta axis tetrae-
56 dri; atque adeo diameter longitudinis est sesquialtera axis te-
57 traedri. 254.a.
58 Axis, seu altitudo tetraedri ad latus cubi eidem sphaera in-
59 scripti est, ut latus tetraedri ad perpendicularem ex uno an-
60 gulo basis ad latus oppositum distans. 254.b.
61 Cubus triplus est tetraedri eidem sphaerae inscripti. 254.a.
62 Prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Te-
63 traedro, æquale est cubo in eadem sphaera, in qua Tetraedrum,
64 descripto. 254.b.

IN QUINTODECIMO LIBRO.

- 1 Si in Tetraedro octaedrum inscribatur, dimidetur Tetrae-
2 drum bisariam tribus quadratis equalibus, quæ octae-
3 drum bisariam quoque, & sese ad angulos rectos interse-
4 cant. 256.a.
5 Recta linea centra basium cubi oppositarum connexiones se-
6 musuo & bisariam, & ad angulos rectos secans. 256.b.
7 Idem est centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecae-
8 dri. 258.b.
9 In dato octaedro pyramidem describere. 258.b.
10 Si tetraedrum octaedro inscribatur, erunt quatuor bases te-
11 traedri octo basibus octaedri parallela, singula videlicet binis
12 oppositis. 259.b.
13 Si in octaedro tetraedrum inscribatur, recta, quæ centra ba-
14 sium octaedri oppositarum coniungit, sesquialtera est axis te-
15 traedri.

<i>Prædri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basim oppositam, describitur.</i>	259.b.	7
<i>In dato Dodecaedro Icosaedrum describere.</i>	259.b.	8
<i>In dato Dodecaedro cubum describere.</i>	260.b.	9
<i>Recta, quæ subiendis unum angulum pentagoni æquilatæ, & æquianguli, parallela est opposito lateri.</i>	261.a.	10
<i>In dato Dodecaedro octaedrum describere.</i>	261.a.	11
<i>In dato Dodecaedro Pyramidem describere.</i>	261.b.	12
<i>In dato Icosaedro cubum describere.</i>	262.a.	13
<i>In dato Icosaedro pyramidem describere.</i>	262.a.	14
<i>In dato cubo Dodecaedrum describere.</i>	262.b.	15
<i>Diameter Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum describitur.</i>	263.b.	16
<i>Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti; Ad alius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.</i>	263.b.	17
<i>Latus cubi æquale est duobus lateris, dodecaedri videlicet in ipso descripti, & dodecaedri circa quendam cubum descripti.</i>	266.a.	18
<i>Rectæ duos angulos pentagonorum dodecaedri communibus, & oppositos, connectens est æqualis lateri cubi, cui dodecaedrum inscribitur.</i>	266.a.	19
<i>In dato cubo Icosaedrum describere.</i>	266.a.	20
<i>Diameter Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambiens.</i>	267.a.	21
<i>Bisaria sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bisariam, & ad angulos rectos secantibus.</i>	267.a.	22
<i>Si latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.</i>	267.b.	23
<i>Icosædri eam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.</i>	267.b.	24
<i>In dato Icosaedro octaedrum describere.</i>	267.b.	25
<i>Idem est centrum Icosaedri, & octaedri in eo descripti.</i>	268.a.	26
<i>In dato octaedro Icosaedrum describere.</i>	268.a.	27
<i>Si duo latera trianguli æquilateri secantur extrema ac media ratione, ita ut unius maius segmentum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsa comprehensum; Rectæ connectionis dictas sectiones duplum potest minoris segmenti.</i>	270.a.	
<i>Si in</i>		

28	Si in octaedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri, idemque erit centrum basium octaedri, & Icosaedri.	170.a.
29	Idem centrum est octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri.	170.a.
30	In dato octaedro dodecaedrum describere.	170.b.
31	In data pyramide cubum describere.	170.b.
32	Idem est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti.	172.a.
33	Recta, qua coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transit per centrum pyramidis, triplaque est lateris cubi in pyramide descripti.	172.a.
34	Idem est centrum pyramidis, & octaedri in ea descripti.	172.b.
35	In data pyramide Icosaedrum describere.	173.a.
36	In data pyramide Dodecaedrum describere.	173.b.
37	In dato solido regulari sphaeram describere.	173.b.

IN SEXTO DECIMO LIBRO.

1	Si in dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud dodecaedrum peris proportio Dodecaedri exterioris ad dodecaedrum interius proportionis, quam habet maior segmentum ad minus recta linea diuisa extrema ac media ratione, triplata.	177.a.
2	Linea perpendicularis ex quouis angulo pentagoni aequilateri, & aequianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.	176.a.
3	Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectae opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita ut prope quonuis angulum sit maius segmentum unius lateris, & minus alterius; Ha sectionibus suis in medio producent basim Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo aequilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basium Icosaedri.	176.a.
4	Latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectae diuisae extrema ac media ratione, quae ab uno angulo basium octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione.	177.a.

INDEX.

<i>Minus segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secta, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.</i>	277.b.	5.
<i>Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome.</i>	278.a.	6.
<i>Latus cubi potentia dimidiū est lateris pyramidis in eo descripta; Latus vero pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti; Latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.</i>	278.a.	7.
<i>Latus dodecaedri maius segmentum est recta, qua potentia est dimidia lateris pyramidis sibi inscripta.</i>	278.b.	8.
<i>Si in cubo describatur & Icosaedrum, & dodecaedrum; Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & dodecaedri.</i>	278.b.	9.
<i>Latus pyramidis potentia octoduplum est lateris cubi in ea descripti.</i>	279.a.	10.
<i>Latus pyramidis potentia octoduplum est recta extrema ac media ratione secta, cuius maius segmentum latus est dodecaedri in pyramide descripti.</i>	279.a.	11.
<i>Si in octaedro Icosaedrum describatur, erit Latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione divisi.</i>	279.b.	12.
<i>Latus octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.</i>	279.b.	13.
<i>Octaedri latus est potentia quadruplum sesquialterum eius recta extrema ac media ratione divisa, cuius maius segmentum latus est dodecaedri octaedro inscripti.</i>	280.a.	14.
<i>Latus Icosaedri maius segmentum est eius recta extrema ac media ratione secta, qua potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.</i>	280.a.	15.
<i>Latus cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus recta linea divisa extrema ac media ratione. Latus vero dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem recta linea.</i>	280.b.	16.
<i>Latus octaedri sesquialterum est lateris sibi inscripti pyramidis.</i>	281.a.	17.
<i>Si ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitercium quadrati lateris Icosaedri.</i>	281.b.	18.

Diameter

- 19 Diameter Icoſaedri binas rectas poſeſt, diametrum ſcilicet
cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triſingulum Ico-
ſaedri ambiens. 281.a.
- 20 Latus dodecaedri minus ſegmentum eſt rectae lineae utrumque
ac media ratione diſiſſe, quae duplum poſſeſt lateris octaedri in
eo deſcripti. 282.b.
- 21 Diameter Icoſaedri poſeſt & ſui ipſius lateris ſeſquitercium,
& lateris pyramidis in eo deſcriptae ſeſquialterum. 282.b.
- 22 Latus dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latum ſe habet,
ut minus ſegmentum linea perpendiculari ab uno angulo pen-
tagoni ad latum oppoſitum ducta, atque extrema ac media ra-
tione diſiſſe, ad partem eiſdem lineae inter conſtantem pentago-
ni, & laſus eiſdem poſita. 283.a.
- 23 Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſe-
cium fueris, minusque eius ſegmentum a toto latore Icoſaedri
ſublatum, & reliqua quoque recta pars reliſum tertium detra-
cia: Relinquetur latus dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. 283.b.
- 24 Cubus ſibi inſcriptae pyramidis triplus eſt. 284.a.
- 25 Pyramis ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. 285.b.
- 26 Cubus ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt. 285.b.
- 27 Octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum
eſt. 286.a.
- 28 Idem centrum eſt octaedri, atque cubi ſibi inſcripti. 287.a.
- 29 Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habet ratio-
nem, quam eorum laterum quadrata habent. 287.a.
- 30 Octaedrum ſibi inſcriptae pyramidis tredecuplum ſeſquialte-
rum eſt. 287.a.
- 31 Pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. 287.b.
- 32 Octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem ha-
bet, quam duae baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. 288.a.
- 33 Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum dodecaedrum proportionem
habet compoſitam ex proportionem lateris Icoſaedri ad latum cubi
in eadem cum Icoſaedro ſphaera deſcripti, & ex proportionem tri-
plitae eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra
baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem. 289.b.
- 34 Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo,
cuius quidem baſis & quadrato cubi deſicit rectangulo con-
ſento ſub latere cubi: At uero altitudo ab altitudine ſive latere
cubi,

cubi, minore segmento eius lineae, qua dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 290.a

Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelipipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est aequalis, latitudo autem tertia parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineae, qua dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Alterius vero & longitudo & latitudo lateri cubi aequalis est, altitudo autem minus segmentum eius lineae, qua dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, sine lateri cubi sint aequales. 292.a

Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportionibus triplicata eius, quam habet diametra basium dodecaedri ad rectam centra basium dodecaedri oppositarum copulantem, & proportionem lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphaeracum cubi descripi. 292.b.

Dodecaedrum Pyramidis, in qua inscribitur, duos nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti aequalis est, latitudo vero tertia parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineae, qua dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit. Aliarum autem & longitudo, & latitudo lateri cubi praedicti est aequalis, altitudo vero minus segmentum eius lineae, qua dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, sine lateri eiusdem cubi sint aequales. 293.b.

Octaedrum excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione secta. 294.a

Pyramis excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifariae sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. 295.a.

Angulum inclinationis duarum basium pyramidis, unius ad alteram, invenire. 295.a.

Omnes inclinationes basium pyramidis aequales inter se sunt. 295.a.

Angulum

42	<i>Angulum inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.</i>	296.a.
43	<i>Obs inclinatio nes basiu octaedri aequales inter se sunt.</i>	296.b.
44	<i>Angulum inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.</i>	296.b.
45	<i>Omnes inclinationes basiu cubi aequales inter se sunt.</i>	297.a.
46	<i>Angulum inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.</i>	298.a.
47	<i>Omnes basium Icosaedri inclinationes inter se aequales sunt.</i>	298.a.
48	<i>Angulum inclinationis duarum basium dodecaedri, unius ad alteram, reperire.</i>	298.a.
49	<i>Omnes inclinationes basium dodecaedri aequales sunt inter se.</i>	299.b.

F I N I S.



E V C L I D I S

ELEMENTVM PRIMVM.



DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.



PUNCTVM hic primus liber in eo positus est, ut nobis tradat ortus, proprietatesq; triangulorum tum iuxta angulos, tum iuxta latera, quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnūquodq; per se inspicis, & contempletur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex

angulis latera secundum æqualitatem, atq; inæqualitatem, rimatur. Idemq; varijs rationibus inquiris in duobus quādoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperis nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, ut cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Ut autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq; ut vno rebo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorū rem propositam exoritur a principijs, in isto facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac

A

facilius

faciliter percipitur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, unas secundum longitudinem, alias secundum latitudinem, & secundum profunditatem, alitudinemque alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quaedam unicas tantum secundum longitudinem; quaedam duplices, ita ut illis adicias partes etiam latitudinis; quaedam denique praeter duplices has partes, tertias quoque altitudinis, siue profunditatis capit. Quantitas enim omnis continua aut longa solum est, aut longa simul & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neque aliam dimensionem habere potest res ulla quanta, ut recte demonstravit Ptolemaeus in libello de Analomiae, opera Federici Commandini Urbinae nuper in pristinam dignitatem restituito, necnon, ut ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui eundem, quod sciam, hactenus nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturque sine omni parte, ita ut neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitur, id appellatur ab Euclide, & a Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissime, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Denique in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero unitas, quodque in tempore instans. Sunt enim & hac concipienda indiuidua.

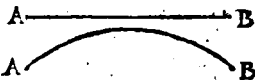
punctum

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam. A qua enim quantitas exclusi dicitur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absque latitudine, non absurde concipere, intelligereque possumus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati.

obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & umbre extensa, carens omni latitudine, cum sit limes utriusq;. Mathematici quoq;, ut nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moveri. Cum enim punctum sit prorsus individuum, relinquetur ex isto motu imaginatio vestigiæ quoddam longum omnis expertæ latitudinis. Ut si punctum *A*, fluere intelligamus ex *A*. in *B*, vestigiæ effectum *A B*, lineæ appellabitur, cum vere intervallo inter duo puncta *A*, & *B*, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine. propterea quod punctum *A*, omni præcæritæ dimensione eam efficere nulla ratione poterit. Hinc factum est, ut alij dixerint lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alii vero, magnitudinem uno contentam intervallo. Potest enim lineæ unico tantum modo, utpote secundum longitudinem, secari, atq; dividi.



III.

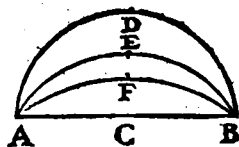
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCT, quænam sint extrema lineæ cuiusvis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi utrinq; punctis; Non quod omnis lineæ terminos habeat; quomodo enim lineæ insinisa terminos assignare poterimus? quæ etiam ratione in lineæ circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod lineæ qualibet habens extrema, in suis extremisatibus puncta recipiat. Ut superior lineæ *A B*, extrema habet puncta *A*, & *B*. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita ut earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IIII.

RECTA lineæ est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curvam dicunt, & mixta, siue composita ex utraq; Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ equaliter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc deflectendo subsultat; in qua deniq; nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenui: summa vi extensum: In eo enim omnes partes media cum extremis æqualem obtinent situm, neque ulla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æqualiter inter extremos fines posita progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam



ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spacium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, diceretur recta, quoniam tantum occupat præcise spacium, quanta est distantia puncti A, a puncto B: Linea vero A D B,

A E B, A F B, non dicuntur rectæ, cum maiora obineant spacia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta linea A C B, inter quæ est punctum C, equaliter inter extrema A & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quodvis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum, virtutem illuminandi, impedimento utique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur. Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C, quod quidem non contingit in lineis non rectis, ut perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ mi-

nor di

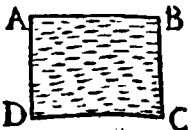
nor diceretur, quam *A C B*. Campanus describens rectam lineam, vocat eam brevissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Lineas non rectas, quæ omnes oblique dici possunt, non definit hoc loco *Euclides*, sed circularem expones definitione decimaquinta. mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat usum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quedam enim sunt uniformes, quedam diffformes. Uniformium rursus alie sunt in plano, alie in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipses, de quibus egit copiosissime *Apollonius* in conicis elementis, linea Conchoideos, de qua *Nicomedes*, linea Helica, de qua *Archimedes* in libro de lineis spirallibus tractationem instituit, & alie huiusmodi. In solido, seu superficie curva sunt alterius generis linea helica, quam ea ab *Archimede* descripta qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem convolvitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphaeram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas sol describit ab ortu in occasum, ut in sphaera docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcumque sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Unde ingeniose concludit *Aristoteles* in libris de celo iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mixtum, siue ex illis duobus compositum.

lib. 1. sex. 5.

V.

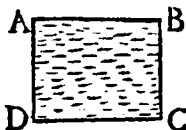
SUPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemque tantum habet.

Post lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, & unicamque habet dimensionem, definit superficiem quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additque primæ dimensionis secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, ut in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Ut quantitas *A B C D*, inter lineas *A B*,



A 3

B C.



BC, CD, DA, composita considerataq; secundum longitudinem AB, vel DC, & secundum latitudinem AD, vel BC, omnis exposita profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis referi latitudo extrema cuiusq; corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, ut ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiem nobis exhibent umbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terra partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, ut nobis eam ob oculos ponant, movent, ut intelligamus lineam aliquam in transversam moveri: Effigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoq; propter motum, cui in transversum est factus; nulla vero ratione profunditatis effigietur, cum lineæ ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicitur. Ut si lineæ AB, fluat versus DC, efficitur superficies ABCD. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem internallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, uno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

V I.

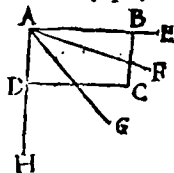
SUPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

NON dissimilis est hac definitio superiori, quæ termini lineæ suæ explicati. Vult enim extremitates superficiem esse lineas, quemadmodum lineæ fines extiterint puncta. Vt superioris superficiem ABCD, extrema sunt lineæ AB, BC, CD, DA; Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam spherica, quæ corpus sphericum circumdat. Potest etiam superficies aliqua claudî, & terminari unica tantum lineæ, qualis est circularis superficies, ut dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

Hæc quoque definitio similitudinem quãdam descriptionis linea recta gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita ut mediæ partes ab extremis sursum, deorsumque subsistendo, non recedant, appellabitur plana. qualis est superficies perpolitæ alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita ut nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermedie cum extremis æqualem adæpta sunt finem, nec ulla est alia sublimior, humiliorque, sed omnes æqualiter protruduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue brevissimam omnium, quæ eadem habens extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, ut places Heroni antiquo Geometra. Ut superficies **A B C D**, nunc demum plana dici debet, quando linea recta **A E**, circa punctum **A**, immobile circumducta, ita ut nunc eadem sit, quæ **A B**, nunc eadem, quæ **A F**, nunc eadẽ, quæ **A G**, & nunc eadem, quæ **A H**, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaque ut sit plana, requiritur ut omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, ut ei applicari possit recta linea secundum **A B**, & **A F**, & denique secundum omnes partes. Hac autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu linea rectæ in transversum, qui super duas alias lineas rectas conficitur: Ut si linea recta **A B**, per duas rectas **A D**, **B C**, feratur, efficietur superficies



ficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones; Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita ut quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cetera omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior



alicuius globi, columnæ rotundæ, vel etiam coni &c. appellantur curvæ, & non plana. Quamvis enim superficiei columna rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest: Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curvæ duplex est, convexa videlicet, ut exterior superficies sphaera, vel cylindri; & concava, ut interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicavit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

VIII.

PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quid nam sit angulus planus, dicens: Quandoquq; duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione unius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituitur



superficie. Verbi gratia, quæ duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicuntur autem duæ lineæ

non in directum iacere, quando altera earum versus concurrunt protensa non coincidunt cum altera, sed vel eam secas, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo se iungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamvis eam non fecerit. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactus qualem de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si dua linea se mutuo tangant iacentes in directum, ita ut alterutra producta congruat toti alteri, non fiet ullus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed amba vnam integram lineam constituent. Vt quia recta $A B$, producta conuenit cum recta $B C$, non efficietur



angulus in B . Sic etiam, non fiet angulus in B , ex lineis curuis $A B$, $B C$, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum dum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicuntur iacere. Itaque ut linea recta efficiant angulum, necesse est, ut post concursum producta se mutuo secant: Curua autem linea, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiam si non se mutuo interfecerint; sufficit enim, quod se contingant, ita ut statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Constitit autem anguli cuiusvis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides differit in Stereometria, quique in corporibus existunt; Posterius vero sphaeræ, qui in superficie sphaerae constituentur ex circulorum maximorum circumferentijs, & de quibus copiose agitur in sphaericis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum a nobis rejicitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

I X.

CVM autem, quæ angulum continent
lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angu-
lus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis dua-
bus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum
hic agit Euclides; aut ex duobus curuis, quem curvilineum
vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta qui non ine-
pte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curvili-



nei anguli tribus va-
riari modis, & mix-
ti duobus, pro varia
inclinatione, seu habi-

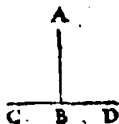
tudine linearum curvarum, utpote secundum conuexum, &
concauū, seu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur.
Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habi-
tudinis linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem
variā velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum
hac modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut dimina-
tur, quod & alijs commune est, non autem ita varietur, ut
aliud constituat genus.

X.

CVM vero recta linea super rectam
consistens lineam eos, qui sunt deinceps,
angulos æquales inter se fecerit, rectus est
vterq; æqualium angulorum: Et quæ insi-
stet recta linea, perpendicularis vocatur, eius,
cui insistit.

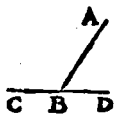
Vsvs frequensissimus reperitur in Geometria anguli
recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acu-
ti, pro-

ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & qua nam linea perpendicularis: Insequentibus autem duabus definitionibus explicabitur angulum obtusum, & acutum. Non enim aliud daretur potest angulus rectilineus, prater rectum, obtusum & acutum. Igitur si recta linea AB , recta CD , insisteret efficiens duos angulos prope punctum B , (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadē linea CD , protracta, prope idem punctum B , efficiat) inter se aequales, quod unum demum fiet, quando recta AB , non magis in C , quam in D , inclinabit, sed aequaliter recta CD , insisteret, vocabitur uterque angulus B , rectus, & recta AB , perpendicularis rectae CD , cui insisteret. Eadem ratione nominabitur recta CB , perpendicularis rectae AB : quamvis enim CB , tantum faciat cum AB unum angulum, tamen si AB , extendereetur in rectum & continuum versus punctum B , efficeretur alter angulus aequalis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos aequales, docebit Euclides propositione 11, & 12. huius primi libri. Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quae ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, qui est ei deinceps, aequalem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quae ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps aequalem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se aequales, nuncupatur uterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint aequales, non dicitur quisquam illorum rectus, ut constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hec dixerim, ut videas, quid nam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quem nam usum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore, hac quae diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



X I.

OBTUSVS angulus est , qui recto maior est.

 QVANDO recta AB , recta CD , insistent non fecerit angulos ad punctum B , *equales*, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B , ad punctum C , vergens, qui continetur rectis lineis AB , BC .

X II.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in precedenti figura, minor angulus B , ad punctum D , vergens, qui continetur rectis lineis AB , BD , vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue deus, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in altera: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate linea perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniã vero ad quemvis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solens Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ consciunt angulum, extrema vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia. In superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum ABC , acutum vero, per angulum ABD ; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

XII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. **Punctum** enim terminus est. seu extremum linea: **Linea** superficiei: & **superficies** corporis. **Corpus** autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiasur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. **Omne** siquidem terminatum superas terminum suum una dimensione, ut perspicuum est ex adductis exemplis.

XIII.

FIGURA est, quae sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

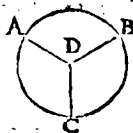
NON omnis quantitas terminos possidens **Figura** dici potest, ne lineam finitam **Figuram** appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quae latitudinem habent, nempe superficies terminata; & quae profunditatem adepta quoque sunt, ut solida finita, **Figura** nomine appellabuntur. **Superficies** quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, **Figura** vocari nulla ratione potest. **Figura** unico comprehensa termino sunt. **Circulus**, **Ellipsis**, **sphaera**, **sphaeroides**, & alia huiusmodi: **Pluribus** vero terminis inclusa figurae sunt, **Triangulum**, **Quadratum**, **Cubus**, **Pyramis**, &c. **Superficies** terminata nuncupantur figurae plana: solida autem circumscripta, figura solida, siue corporea. Porro quia formas seu typos variarum figurarum inspicies quam plurimas in sequentibus. planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub

vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spaciū concludatur vnica



linea ABC , habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto inius suscepto, vtose a D , omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum ABC , quales sunt DA , DB , DC , inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertij lib. Adiungit quoq; Euclides, lineam extremam circuli, qualis est ABC , appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circumsferentiam. Potest circulus etiā hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremū quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri caperat. Quæ quidem descriptio persimilis est ei, quæ ab Euclide sphaera describitur lib. xi. Vt si intelligatur recta AD , circa punctum D , quiescens moueri. donec ad eundem redeat locum, a quo dimoueri cepit, describet ipsa recta totum spaciū circulare; punctum vero alterum extremum A , delineabit peripheriam ABC : Erit quoq; punctum quiescens D , illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta AD , circumducta, omnes lineas, quæ ex D , possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis si-
gura sit plana vna linea circumscripta, tamen quia
in ea non datur punctum, a quo ad ipsam li-
neam terminantem omnes rectæ lineæ
sint æquales, circulus di-
ci nequit.

XVI.

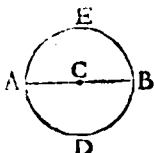
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, a quo omnes linea recta ad circumferentiam ducta, sunt aequales, appellari centrum circuli; quale est precedentis figura punctum D. Unde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphaera, a quo omnes recta ad peripheriam circuli cadentes sunt aequales, ut ait Theodorus in sphaericis elementis non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphaera, non autem in superficie circuli; qua tamen est necessario requisita conditio, ut punctum aliquod centrum vocetur. Caterum, ut punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, ut ab eo tres duntaxat linea cadentes in peripheriam sint aequales inter se, ut demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, ut omnes alia ab eodem puncto emissae inter se sint aequales.

XVII.

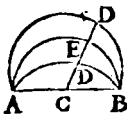
DIAMETER autem circuli, est recta quaedam linea per centrum ducta, & ex utraq; parte in circuli peripheriam terminata, qua circulum bifariam secat.

SI in circulo ducatur recta linea AB, per centrum C, sita ut extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicitur; sed ea solummodo, qua per centrum usq; ad peripheriam utrinq; extenditur. Unde plures assignari poterunt in circulo diametri, unum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum



bifariam

bisariam secari a diametro. perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, utpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, ut propter directum diametri per centrum transitum, utrinque aequales circumferentia abscondantur. Quod



tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem ADB , accommodari, & coaptari porzioni reliqua AEB . ita ut diameter AB , communis sit utrique porzioni:

Si igitur circumferentia ADB congrua: penitus circumferentia AEB , manifestum est duas illas porciones a diametro factas, esse inter se aequales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circumferentia ADB , non omni ex parte cadere dicatur super circumferentiam AEB , sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro C , secans circumferentiam ADB , in D , & circumferentiam AEB , in E , erunt duae rectae CD , CE , ductae ex centro ad circumferentiam eiusdem circuli aequales, per circuli definitionem, cum tamen una sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet una circumferentia extra aliam; vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambae inter se aptabuntur, ideoque aequales erunt, quod demonstrandum proponebatur.

XVIII.

SEMICIRCULVS vero est figura, quae continetur sub diametro, & sub ea linea, quae de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in superiori circulo figura ADB , contenta sub diametro AB , & peripheria ADB , dicitur semicirculus, quia, ut in precedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura AEB , semicirculus. Idem autem punctum C , diametrum secans bisariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

HABENT nonnulla exemplaria hoc in loco definitionem egredienti circuli: Verum, quia ea reperitur in 3. lib. ubi pro-

prius est locus, & Preclus illā non inuenit in antiquis exemplaribus, malimus hic illam subicere, eiusq; explicationem in 3. libro, ante quem nulla sit mentio segmentorum circuli, disserre.

XIX.

RECTILINEAE figurae sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quæ nam figura dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figure planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curvilineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc generum figurarum rectilinearum ab Euclide describuntur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS. Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quo nam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QUADRILATERAE vero, quæ sub quatuor.

E A D E M ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius varia species mox subsequuntur.

XXII.

MULTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

Q U O N I A M species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam component speciem; sex quartam, atq; ita deinceps infinite. Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, sorte eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum ceteræ omnes a quolibet defini possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atq; reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterū est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

D E S C E N D I T iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula dinidi possunt vel habita ratione laterum,

rum, vel angulorum, declaras prius species prioris divisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis se se possint habere. Aut enim omnia aequalia sunt, aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore, aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se aequalia sunt, dicitur triangulum *Æquilaterum*. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri inferitur, omnes tres eius angulos æquales quoque esse, cetera ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.



XXIII.

ISOSCELES, autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

Ex hac rursus æqualitate duorum laterum trianguli *Isoscelis* efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, ut demonstrabit *Euclides* propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula *Isoscelia*, quorum primus habet tertium latus utronus æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet.



XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

Hic denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli *Scaleni* colligitur omnium angulorum inæqualitas, ut ostendatur propos. 18. huius lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse dividere triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales, aut duo tantum, tertio maiore,



vel minores existentes aut omnes tres inaequales 3 erit omne trian-
gulum vel equiangulum, habens tres omnes angulos aequales 3
vel duorum tantum angulorum aequalium 3 vel omnium angu-
lorum inaequalium 3 quorum primum quidem *A Equilatero*,
secundum vero *Isofceli*, tertium deniq; *Scaleno* respondet tri-
gulo. Ceterum quanam arte construenda sunt triangu-
la partitionis super quavis data recta linea finita, trademus
propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD haec etiam 3 trilaterarum figura-
rum, Rectangulum quidem triangulum est,
quod rectum angulum habet.

Nunc exponit triangulorum species iuxta posteriorem
divisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia tri-
angula tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diver-
sa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtu-
sus, vel acutus, ut supra diximus.) sic uteres quoq; species
triangulorum sub hac consideratione reperiuntur. Nam aut
unus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem, reliqui acu-
ti, ut ex 17. propos. 1. lib. constabit 3 aut obtusus, & ob ean-
dem causam reliqui acuti, aut deniq; nullus rectus, nullusq;
obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod
habet angulum unum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs



Geometris Rectangulum. Potest au-
tem triangulum huiusmodi esse vel
Isofcetes, vel scalenum, ut haec figu-
rae indicant 3 A Equilaterum autem

nulla ratione. Propter aequalitatem enim laterum essent per
ea, quae propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli aequales, ideoq;
cum unus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat
cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod
obtusum

obtusum angulum habet.

TRIANGULUM amblygonium, siue obtusangulum esse, potest vel Isosceles, vel scalenum, ut in his figuris cernitur, non autem aequilaterum, alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quae propos. 5. ostendemus, aequales, ideoq; cum unus obtusus esset, omnes tres obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.



XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxigonium, siue acutangulum, potest esse vel aequilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, ut cernere licet in triangulis, quae in speciebus prioris divisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur patet, siue triangulum quodcumq; aequilaterum, esse necessario Oxigonium: At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel rectangulum, vel amblygonium, vel Oxigonium; Et unica sit species trianguli aequilateri tres vero tam Isoscelis, quam Scaleni: atq; in uniuersum septem triangulorum genera, aequilaterum, quod perpetuo Oxigonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles amblygonium, Isosceles oxigonium, scalenum rectangulum, scalenum amblygonium, & scalenum oxigonium. Quae etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxigonium aequilaterum, Oxigonium Isosceles, & Oxigonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. In omni porro triangulo, cuius duo quaecumq; latera expresse nominantur, soles reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum &c. Hoc te breuiter

monere volui, ne putares aliqd latere mysterij in base triangu-
li, intelligere scilicet quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis
nomine posse nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autē
figurarum, Quadratum quidem est, quod
& æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam sin-
gulas quadrilateras figuras, recensendo quinque tantummo-
do earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, po-
sterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadri-



latera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia
quatuor latera inter se equalia existunt, omnesq;
anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum,
& non rectangulum, vel contra, rectangulum,
& non æquilaterum, nequaquam Quadratum
appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib.
quonam modo construendum sit quadratum super recta linea
proposita finita.

XXX.

ALTERA vero parte longior figura
est, quæ rectangula quidem, at æquilatera
non est.



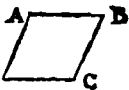
SECUNDA figura quadrilatera ap-
pellatur Altera parte longior, in qua qui-
dem anguli sunt recti, at latera non sunt in-
ter se equalia, quamvis bina opposita inter
se equalia existant. Ut in altera parte lon-
giori $ABCD$, latera AB, DC , inter se, & AD, BC , inter se
quoque equalia sunt, cum $ABCD$, propter angulorum rectitudinē,
parallelogrammū sit, ut in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

R H O M

XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.

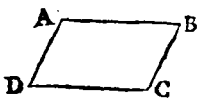
H A E C figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo $A B C D$, anguli A , & C , inter se, & B , & D , quoque inter se æquales sunt, cum $A B C D$, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, cum ad eandem propof. 34. huius libri demonstrabitur.



XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.

E S T hac figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neque eius latera omnia æqualia sunt, neque ullus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt $A B$, $D C$, & $A D$, $B C$, in Rhomboide $A B C D$, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A , C , & B , D , inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcumque sunt, irregulares.



XXXIII.

P R A E T E R has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellantur.

RELIQVAS Omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita ut neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera binæ opposita, neq; angulos binos oppositos habeant inter se se æquales,



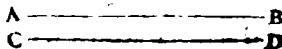
generali vocabulo Trapezia nominantur: quia cum infinitis modis variari queant recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel unus tantum, vel etiam nullus, si d vel unus obtusus; & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri esse æquale. &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

XXXIII.

PARALLELÆ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraq; parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incident.

UT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallela, siue æquidistantes, non satis est, ut in quacumq; partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad unum punctum coeant; sed necesse quoq; est, ut in una plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in unum conueniunt, & tamen non sunt parallela dicenda; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transversum posita in medio aere, & non se tangentes; Haec etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana uni earum accommodata, ita ut omnia puncta illius tangat, alteræ quoq; accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Ut propositis duabus rectis lineis *AB, CD*, si superficies aliqua plana rectæ *AB*, applicetur,

centur, omnia eius tangens puncta, ita ut circa illam circum
ducta tangat quosq; omnia
puncta alterius rectæ CD;
dicuntur huiusmodi rectæ

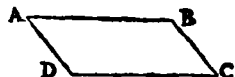


duæ lineæ in eadem superficie planæ existere, alias non. Si igitur hæc duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiam si infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelae, siue æquidistantes. Ceterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quomodo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eodem dicantur superficie existere: Satis sit hic loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide utramq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in utramvis partem nunquam in unum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquot spatium extensa non cernantur coire, coniectamen, eas tamen ex una parte longius protractas in unum punctum conueniatur, quamvis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellante erunt parallelae. Quotiescunq; ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelae, in necesse est concedat, illas in una, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstrari prius oportet, eas in eodem existere plano. & in neutram partem productas coniungi posse. Quæ in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo dumtaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiam si infinite producantur. nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

Hic finem imponis Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem in libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, ut facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.



VT figura quadrilatera $ABCD$, siquidem latus AB , æquidistat lateri DC , & latus AD , late-

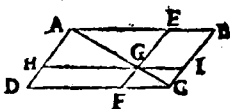
ri BC , nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Caterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendimus ad propof. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometra) dividere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud primo vel habet duo illa latera, quæ nō sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus
parallela

parallelæ secantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.

SIT parallelogrammum $ABCD$, in quo diameter AC ; & linea EF , secans diametrum in G , & parallela existens lateribus AD , BC ; Item linea HI , secans diametrum in eodem puncto G , parallelaq; lateribus AB , DC , existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum divisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidæ duo $EBIG$, $GFDH$, per quæ diameter AC , non transit, vocantur a Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum $AEGL$, $GICF$, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsentî figurâ.



PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt a quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

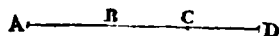
PRIMUM hoc postulatum planum admodum est, si recte consideretur ea, quæ paulo ante de lineâ scripsimus. Nam cum lineâ sit fluxus quidam puncti imaginarij, atq; adeo lineâ rectâ fluxus directio omnino inire progrediens, sit vt si

punctum quodpiam ad aliud directo moveri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea : Id quod pri-
 B ma hac petitione exposulat Euclides, nō
 C admodum hic vides a puncto A, ductam
 D esse rectam lineam ad punctum B ; ab eo-
 demq; aliam ad punctum C ; Item aliam
 ad punctum D ; & sic innumera alia ab eodem puncto educi
 possunt ad alia atq; alia puncta.

II.

ET rectam lineam terminatam in con-
 tinuum recta producere.

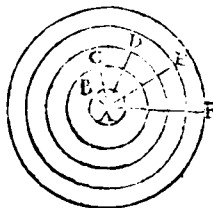
Q V O D si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus mo-
 tu directo, & qui omnis inclinationis sit expert, pro ducta erit
 ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius pro-
 ductionis, cum punctum illud intelligere possimus moveri ad
 infinitam distantiam. Sic



linea recta A B. producta
 est primo in continuum ad
 punctum C, Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo cir-
 culum describere.



I AM vero, si terminatam rectam
 lineam cuiusvisq; quantitatis men-
 te conceperimus applicatam sic se-
 cundum alterum extremū ad quod-
 vis punctum, ipsamq; circa hoc pun-
 ctum fixum circumduci, donec ad
 eum reuertatur locum, a quo dimo-
 ueri cœvit; descriptus erit circulus,
 effectumq; quod tertia petitio iubet.

Exemplum habes in his quinq; lineis

AB, AC, AD, AE, AF, quæ singula circa centrum A,
 circum-

circumcludunt singulos circulos descripserunt iuxta quantitatē, seu intervallum ipsarum.

P R A E T E R hac tria postulata quibus Euclides cōtēntus fuit, sunt multa alia aequae facilitatis, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriae. Reliqua enim prudens lector ex se vel facili intelliget.

III.

ITEM quaecumque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per divisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parva, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem unitatis augeri potest infinite: quāvis in eius diminutione ad unitatem individuum deveniatur.

COMMUNES NOTIONES,
sive Axiomata, quae & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QV A E eidem aequalia, & inter se sunt aequalia.

F I E R I nulla ratione potest, ut duae quantitates inaequales aequales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositae quantitati aequalis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior aequalis fuerit propositae quantitati, su-

ti, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

S i enim quantitates conflata, siue composita, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitarum ad quantitates æquales, conficiuntur quantitates quoque æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

N A M si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia.

Q U I N & si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita uni æqualium, maiorem constituit quantitatē, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adiciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

Sic etiam, Si ab equalibus inaequalia ablata sint, reliqua erunt inaequalia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum maioris maius est residuo minoris, si equalia auferantur ab inaequalibus. Ceterum Euclides non docet, quidnam gignatur ex additione quantitatum inaequalium ad quantitates inaequales, vel quid relinquantur post subtractionem inaequalium quantitatum ab inaequalibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest. Possunt enim compositae quantitates, vel residua, esse & inaequales, & aequales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficiuntur 11. & 8. quae sunt inaequalia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquantur 5. & 4. quae sunt inaequalia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. efficiuntur 11. & 11. quae equalia sunt. Item si detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quae equalia quoque existunt.

Porro in his omnibus pronuntiatis, primo exceptio, nomine equalium quantitatum intelligenda est etiam una & eadem multis communis. Si enim equalibus idem commune adijciatur, tota fiens equalia: Et si ab equalibus idem commune detrahatur; residua equalia erunt: Et si inaequalibus idem commune adijciatur; vel eidem communi addantur inaequalia, tota fiens inaequalia: & si ab inaequalibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inaequalia auferantur, residua existens inaequalia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt equalia.

SIMILITER, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt equalia. Si enim inaequalia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c. alicuius quantitatis, deficeret vice; minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axioma comprobari

2. pron.

2. pron.

bari potest, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ; & viriq; tertiæ illæ addantur erunt compositæ duplices illius tertiæ; sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositæ eadem tertiæ adiciatur, erunt conflata triplices eiusdem tertiæ; Cum igitur & æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademq; sit ratio in cæteris multiplicibus. perspicuum erit. Axioma propositum.

VII.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

PARI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ equalium duplicia sunt, vel triplicia &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ equalium sunt dimidia, vel tertiæ, vel quartæ, &c. & inter se æqualia necessario existunt.

VIII.

ET quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum una superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambe inter se congruunt, æquales erunt. Ut una linea recta dicentur esse æquales, quando una alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita ut eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando uno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamvis lineæ interdum inter se inæquales existant.

ECON-

ECONTRARIO, *Que inter se sunt aequalia, sibi mutuo congruant. si alterum alteri superponatur. Intelligentum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse aequales secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruunt autem longitudo longitudini tantum, superficies superficier, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum &c.*

IX.

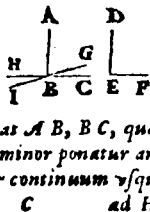
ET totum sua parte maius est.

Cum pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

X.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

Hoc axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minui nequeat, sed prorsus sit immutabilis: Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, que quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, ut faciat utrobique angulos æquales, neque magis in unam partem, quam in alteram inclinet: Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamvis lineæ sint inæquales inter se. Constat tamē Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione. Sins duo anguli recti ABC , DEF . quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales. sitq; ABC , maior. Si igitur mente concipiamus punctum E , applicari puncto B , & rectā DE . recta AB , cadet recta EF , inter rectas AB , BC , quia est BG , propterea quod angulus DEF , minor ponatur angulo ABC . Producatnr CB , in rectum & continuum usque ad H ;



2. peris.

10. def.
1. petis.
10. def.

ad H; Cui igitur angulus ABC fit rectus, erit angulus ABH , illi deinceps equalis, & rectus quoque, quare maior etiam angulo ABG . Producta autem GB , in rectum & continuū usque ad I , cum angulus ABG , ponatur rectus, fiet angulus ABI , illi deinceps, equalis. Quapropter angulus ABH , maior quoque, erit angulo ABI , pars toto, quod est absurdum. Non ergo inaequales sunt duo anguli recti propositi, sed aequales. Quod est propositum: eademque est ratio in ceteris.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuertere; non enim omnis angulus recto angulo equalis, rectus est, cum & curvilineus recto equalis esse queas, ut in 5. lib. discemus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectiliniens. Solus igitur angulus rectiliniens equalis angulo recto, rectus nuncupabitur: Es omnes anguli recti inter se aequales erunt, sine ulla exceptione.

XI.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duae illae rectae lineae in infinitum productae sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.



VT si in duas lineas rectas AB , CD , incidens alia recta EF , faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF , DFE , minores duobus rectis, vult Eucli-

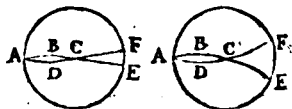
des, illas tandem conueniuntur esse ad aliquod punctū unū, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, ut appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quādo duo anguli interni, & ex eadem parte aequales sunt duobus rectis, duae rectae lineae in neutram partē coire possunt, sed aequali semper spatio protenduntur, ut propos. 28. huius lib. demonstrabitur: Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte di-

se dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatarı; ideoq; eas conuenturas tandem esse aliquādo in vnū punctum. Verum quia hoc axioma a numero principiorū omnino reijcitur secundū Geminū Geometrā, Proclum, & alios, diciq; debet potius Theorema, quam principiū, cū nō facile quinis ei assensum prebeat, propterea quod reperiantur & alie lineæ, quarū spatii licet semper magis, ac magis coangustetur, nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiam si infinite producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonii: Idcirco illud post 28. proposi. & ante 29. huius libri, vbi primum eius vsus incipit apparere, Geometrice demonstrabimus ex sententia Procli, vt sine vlla dubitatione ad theorema sum, atq; problematum demonstrationes possit assumi.

XII.

DVAE rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

NVLAM prorsus habet difficultatem hoc principium; Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulū, necessario ex altera parte semper magis ac magis disjungētur si producātur, vt in exemplo proposito perspicuū est. Quare vt superficies, spatiumue quodpiam rectilineū ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quedam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarū rectilinearū prima. Proclus tamen demonstrat hoc principiū, hoc modo. Si fieri pōs vt duæ lineæ rectæ claudāt superficiē, cōprehendāt duæ rectæ ABC , ADC , superficiem $ABC D$, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis A , & C . Facto deinde centro C , describatur circulus interno CA , & producantur rectæ ABC , ADC , in rectū, & cōtinuū vsq; ad circūferētiā, nempe adpūcta E , & F . Itaq; quia rectæ ACE , ACF , trāsseunt per centrū C , erūt semicirculi AE , AF , inter se æquales, & idcirco circūferētia quoq; AE , circūferētia AEF , æqua-



3. pet.

2. pet.

17. def.

lis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spacium comprehendunt. Quod est propositum.

H V I C duodenario numero Axiomatum ab Euclide positorum adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decepta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cum Euclidis, tum ceterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XIII.

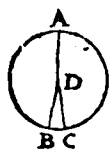
D V A E lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

NON est difficile illud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim lineæ rectæ directio semper itinere, nullam in partem deflectendo, producat, fieri nulla variatione potest, ut duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamvis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo interfecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ AB ,

AC , partem communem AD . Ex centro autem D , & intervallo DA , describatur circulus secans duæ rectas propositas in punctis B , & C ; Erunt igitur duæ circumferentiæ AB , AC , inter se æquales, (Sunt enim circumferentiæ semicirculorum æqualium, cum ADB , ADC ,

ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

POSSUNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituent. Ut in subsequenti figura, rectæ AG , EB , commune habent segmentum BG ; quia ambæ vnam rectam constituunt lineam AE . At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere AB , AC , in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, ut rectæ a Proclo fuit demonstratum.



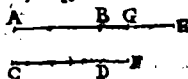
3. per.

17. def.

XIII.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.

Hoc, & sequens pronuntiatur desumpsit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaq; quantitatibus AB, CD , addantur inæquales BE, DF , sitq; BE , maior quam DF . Es ex BE , auferatur BG , æqualis ipsi DF , ut sit GE , excessus, quo quantitas addita BE , superat quantitatem additam DF . Quoniam igitur æqualibus AB, CD , addita sunt æqualia BG, DF , erunt tota AG, CF , æqualia. Quare confus, totam quantitatem AE , superare totam CF , eodem excessu GE , quo magnitudo DF , adiuncta a magnitudine adiuncta BE , superatur. Quod est propositum.



2. pron.

XV.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

In eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, DF , addantur æquales AB, CD . Es ex maiore BE , auferatur BG , æqualis ipsi DF , ut GE , sit excessus, quo quantitas BE , quantitatem DF , superat. Quoniam igitur æqualibus BG, DF , addita sunt æqualia AB, CD , erunt tota AG, CF , æqualia. Quamobrem tota quantitas AE , superabit totam CF , eodem excessu GE , quo maior quantitas proposita BE , minorem DF , superat. Quod est propositum.

2. pron.

XVI.

SI ab æqualibus inæqualia demantur,

C 3 eris

erit residuorum excessus, excessui ablato-
rum æqualis.

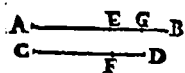
AB aequalibus *AB, CD*, auferantur inæqualia *BE, DF*.
Sicq; *EG*, excessus, quo quantitas *BE*, superat quantitatem
DF. ita ut *BG*, æqualis sit ipsi *DF*. Quia igitur ab æquali-

3. *pron.*

A — *EG* — *B* *AB, CD*, ablata sunt æqualia *BG*,
C — *F* — *D* *DF*, remanebunt *AG, CF*, æqualia.
Perspicuum ergo est, residuum *AE*, su-
perari a residuo *CF*, eodem excessu *EG*, quo magnitudo abla-
ta *BE*, ablata magnitudine *DF*, superat. Quod est propositum.

XVII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur,
erit residuorum excessus, excessui toto-
rum æqualis.



AB inæqualibus *AB, CD*, anse-
rantur æqualia *AE, CF*. Sicq; *BG*, ex-
cessus, quo tota quantitas *AB*, superat
totam quantitatem *CD*, ita ut *AG*, æ-
qualis sit ipsi *CD*. Quoniam igitur ab æqualibus *AG, CD*,
ablata sunt æqualia *AE, CF*, remanebunt *EG, FD*, æqualia.
Quare residuum *EB*, superabit residuum *FD*, eodem excessu
BG, quo tota quantitas *AB*, superat totam quantitatem *CD*.
Quod est propositum.

3. *pron.*

I N his quoq; quatuor proxime positis pronuntiatis, nomine
quantitatum æqualium intelligenda est una etiam sola quan-
titas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia ad-
ciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.
Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum ex-
cessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et si ab
eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus,
excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commu-
ne dematur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis.
Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. sunt 11. & 9. quorum
excessus

Excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. sumis 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XVIII.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QUONIAM omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.

XIX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

UT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Es ablati ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus est reliqui huius 7. In uniuersum autem hoc demonstratur propositio. scilicet. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablata, ut decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliqua æque multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discriminē inter postulata, & Axiomata, quod cum utraq; sint per se nota, & indemonstrabilia illa naturā sapiens Problematū, propterea quod aliquid fieri exposcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solū sententiā aliquā notissimā proponant. Differt autem Postulatū a problemate, quod constructio postulati non indiget ulla demonstratione, problematis autem constructionē concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquid nobis exhibeas construendum. Idē discriminē inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud. n. demonstrari non debet, hoc vero concedendum nulla est ratio, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationē, vel etiā probationē requirit.

Qua eidem aequalia, inter se quoque aequalia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabis quis. Omnis trianguli tres anguli interni aequales sunt duobus rectis. Idem iudicium habero de reliquis axiomatis, atque Theorematis, nec non de postulis, problematisque.

CONSTAT quoque, Postulorum alia propria esse Geometria, qualia sunt illa tria, qua Euclides nobis proposuit; quadam vero communia & Geometria, & Arithmetica, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita ut nunquam huius incrementi finis reperitur. Idem dices de Axiomatibus, siue pronuntiatis. Nam octauum, decimum, undecimum, duodecimum, & tertiumdecimum, soli Geometriae conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines aequales ablatae a magnitudinibus aequalibus, relinquunt magnitudines aequales, siue haec magnitudines lineae sint siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri, quales detracti e numeris aequalibus relinquunt numeros aequales, &c.

HAE C dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusque principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, ut plane non intelligantur, nisi prius eorum usus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQUAM porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum esse secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus graecis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam cum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeque interdum duo hi interpretes inter se discrepent, quoad ordinem propositionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. libris perspicitur; necessarium esse duximus, ut

varijsq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, ut si aliquando numerus propositionum a Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conveniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumpatur, citamus principia, & propositiones Euclidis in margine, quæ quidem citationes intelligenda sunt modo infra scripto.

1. def. Prima definitio, & sic de alijs numeris, ut 4. def. 23. def. &c.

1. pet. Prima petitio,

1. pron. Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, ut prius.

1. primi, Prima propositio primi libri,

23. vndec, Vigesima tertia propositio undecimi libri,

6. tertid, Sexta tertijdecimi libri.

9. sextid, Nona sextidecimi libri. &c.

13. duod, Decima tertia libri duodecimi.

7. quind, Septima libri quindecimi.

5. quartid, Quinta libri quattidecimi.

Ex his alia citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.



PROBLEMA I.

I.

PROPOSITIO. I.

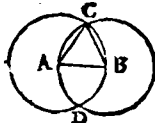


SUPER data recta linea terminata triangulum AEquilaterum constituere.



IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunq; , ita ut linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) ideo primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematis perspicui potest. Hæc etiam duo reperiuntur ferre in omni Theoremate. Sæpenumero enim ut demonstretur id, quod proponitur, construendum est, ac efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca vero admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant demonstrationem.

Si igitur proposita recta linea terminata AB , super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A , & intervallo rectæ AB , describatur circulus CB D : Itē centro B , & intervallo eiusdē rectæ BA , alius circulus describatur CA D , secans priorem in punctis C , & D . Ex quorum



3. pet.

1. pet.
20. def.

virosis, nempe ex C , ducantur duæ rectæ lineæ CA , CB , ad puncta A , & B ; Eritq; super rectam AB , constitutū triangulum ABC , hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse

rio esse æquilaterum. Quoniam rectæ AB , AC , ducuntur ex centro A , ad circumferentiam circuli BCD , erit recta AC , rectæ AB , æqualis: Rursus quia rectæ BC , BA , ducuntur ex centro B , ad circumferentiam circuli CAD , erit recta BC , rectæ BA , æqualis. Tam igitur AC , quam BC , æqualis est rectæ AB . Quare & AC , BC , inter se æquales erunt, atq; idcirco triangulum ABC , erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

13. def.

1. prop.

S C H O L I O N.

UT autem videas, plures demonstraciones in una propositione contineri, placuit primâ, hanc propositionem, resolvere in primâ sua principis, inisio facta ab ultimo syllogismo demonstratio. Si quis igitur probare velis, triangulum ABC , constructum methode prædicta, esse æquilaterum, resur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, est æquilaterum.

23. def.

Triangulum ABC , tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur ABC , est æquilaterum.

Minorem confirmabis hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, inter se quoq; sunt æqualia.

1. prop.

Duo latera AC , BC , æqualia sunt eidem lateri AB .

Igitur & duo latera AC , BC , inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera AB , BC , AC , æqualia existant.

Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Linea rectæ a centro ducta ad circumferentiam circuli, inter se sunt æquales.

15. def.

Linea AB , AC , sunt ductæ a centro A , ad circumferentiam BCD .

Sunt igitur linea AB , AC , æquales inter se.

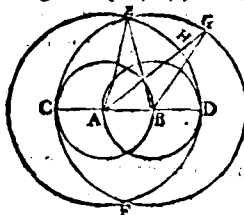
Eademq; ratione erunt linea AB , BC , æquales, cum ducantur a centro B , ad circumferentiam CAD . Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolvi poterunt omnes alia propositiones non solum Euclidis, verum etiam casetorum Mathematicorum.

Nexigunt

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrare id, quod proponitur, ut perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SI QVIS autem super data recta, desideret construere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficit. Sis recta



linea AB , circa quam ex centr^{is} A , & B , describantur duo circuli, uti prius. Deinde producat^{ur} AB , in utramque partem ad circumsferentias usque ad puncta C , & D . Atque centro A , intervallo vero AD , describatur circulus EDF . Item

centro B , intervallo vero BC , circumscribit^{ur} ECF , secans priorem in punctis E , & F . Ex quorum utrolibet, nempe ex E , ducantur ad puncta A , & B , due rectae EA , EB . Factumque erit super recta AB , triangulum ABE ; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera AE , BE , esse & equalia inter se, & maiora latere AB . Cum enim recta AE , AD , ducantur e centro A , ad circumsferentiam EDF , erit AE , equalis recta AD . Item cum recta BE , BC , ducantur e centro B , ad circumsferentiam ECF , erit BE , equalis recta BC : Sunt autem recta AD , BC , aequales inter se, (utraq; enim AC , & BD , equalis est recta AB ; cum AB , AC , ex eodem centro A , ad circumsferentiam ducantur; Item BA , BD , ex eodem centro B , ad circumsferentiam quoque egrediantur: Quare AC , BD , aequales inter se erunt. Ad dito igitur cum recta AB , erit tota AD , tota BC , equalis.) Igitur AE , BE aequales quoque inter se erunt. Quod vero utraq; AE , BE maior sit quam AB , perspicuum est, cum AD , equalis ostensa sit AE , maior sit, quam AB ; Itē BC , equalis demonstrata ipsi BE , maior quoque sit, quam AB . Constat igitur super recta AB , Isosceles ABE , habens duo latera AE , BE aequalia inter se, & maiora latere AB quod faciendum erat. Atque hac est demonstratio Procli, aliorumque interpretum Euclidis.

ERGO VIS tunc videtur mihi posse demonstrari, triangulum ABE , esse Isosceles, hac ratione. Quoniam AL , equalis est recta

2. per.

3. per.

1. per.

20. def.

15. def.

15. def.

1. pron.

12. pron.

1. pron.

9. pron.

9. pron.

15. def.

recta AD , & recta AD est dupla recta AB propterea quod B , D aequales inter se sunt, erit & AE , dupla recta AB . Rursus quia BE , aequalis est recta BC , & BC , dupla est ipsius AB , propterea quod A , B , C aequales sunt inter se, erit & BE , dupla ipsi AB . Cum igitur utraq; AE , BE , dupla sit eiusdem AB , sunt AE , BE , inter se aequales, maioresq; propterea recta AB . Isosceles ergo est triangulum ABE .

15. def.

15. def.

6. pron.

1. pet.

1. pet.

20. def.

9. pron.

15. def.

Item vero, si ex puncto A , ducatur linea recta AG , ad circumferentiam EFG , quae non sit eadem qua AE , vel AD , secans circumferentiam EHD , in puncto H , & ex G , ad B , ducatur alia recta GB ; constitutus erit triangulus ABG . Super recta AB , quod dico esse scalenum. Quoniam AG , maior est quam AH : Sunt autem AH , AE , ex centro A , ductae, inter se aequales; erit & AG , maior quam AE , hoc est, quam BE qua ostensa est aequalis ipsi AE ; igitur & maior erit AG , quam BG , cum BG , sit aequalis ipsi BE . Est autem & BG , maior quam AB , propterea quod tota BC , aequalis ipsi BG , maior sit qua AB , pars. Omnia ergo tria latera trianguli ABG , inaequalia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod eras faciendum.

15. def.

9. pron.

PROBLEMA X

2.

CONABIMUR in singulis fere problematibus Euclidis iradere praxin quamdam facile, & brevis, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis contendit confirmare; Idq; in iis praesertim observabimus, quae frequentius vsum habens apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium ali quod secum videtur asferre.

ITAEQUE triangulum aequilaterum ipsa facili constructur super data recta AB . Ex centrīs A , & B , intervallo vero data recta AB , describantur duo arcus circularium se interfecantes in puncto C , sine hoc infra lineam cūingat sine supra. Post hac ducantur duae rectae AC , BC , ex puncto C , ad puncta A , & B ; factūq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transfere enim necessario per puncta A , & B .



ISOSCELES ita conficietur. Ex centrīs A , & B , intervallo vero maiore quam AB , si dasim rectam esse velimus minus latius; vel minore, si eandem in latius maius eligamus.

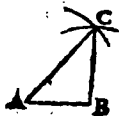
mus



mus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ AC, & BC; constri-
tumq; erit Isosceles: quoniam
AC, BC, æquales erunt pro-
pter æquale intervallum as-

sumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta AB.

SCALENUM deniq; hoc modo fabricabitur super da-
ta recta AB. Ex centro B, intervallo recto ma-
iore, quam BA, describatur arcus aliquis:
Item ex centro A, intervallo recto adhuc maio-
re, quam prius assumptum, describatur aliter
arcus priorem secans in C. Deinde ducantur re-
ctæ AC, BC; constitutumq; erit Scalenum, ut



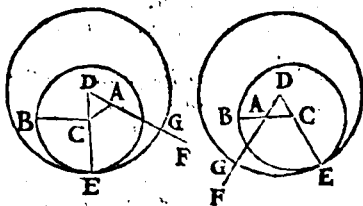
constat ex inæqualitate intervallorum, quæ assumpta fuerunt
in constructione.

CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeas
habens tria latera æqualia tribus datæ lineis quibuscunq;
singula singulis, latius explicabimus propof. 22. huius libri.

2.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ
æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctū da-
tum A, & data
recta linea BC;
cui aliam rectam
æqualem ponere
oportet ad pun-
ctum A. Facto al-
terutro extremo
lineæ BC, nempe

C, centro, describatur circulus BE, intervallo rectæ BC.
Et ex A, ad centrū C, recta ducatur AC; (nisi punctum
A, intra rectam BC, fuerit: Tunc enim pro linea ducta su-
metur AC, ut secūda figura indicat.) Super recta vero AC,
cōstruatur triangulum æquilaterum ACD, sursum, aut
deorsum

3. per.

1. per.

1. primi.

deorsum versus, ut libuerit; cuius duo latera modo constituta DA, DC , versus rectam AC , extendantur; DC , quidem opposita puncto dato A , usque ad circumferentiā in E ; DA , vero opposita centro C , quantumlibet in F . Deinde e centro D , interuallo vero rectæ DE , per C , centrū trāscuntis, alter circulus describatur EG , secās rectā DF , in G . Dico rectam AG , quæ posita est ad punctū datū A , æqualē esse datæ rectæ BC . Quoniam DE, DG , ductæ sunt ex centro D , ad circumferentiā EG , ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur DA, DC , æquibus lateribus trianguli æquilateri ACD , remanebit AG , æqualis rectæ CE . Sed eisdē CE , æqualis est recta BC . (cum ambæ rectæ CB, CE , cadāt e centro C , ad circumferentiā BE .) Igitur rectæ $AG, & BC$, quādoquidē utraq; æqualis est ostēsa rectæ CE , inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctū, &c. quod erat faciendū.

QUOD, si punctū datū fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C , facile absoluetur problema. Si enim centro C , & interuallo CB , describatur circulus, ad cuius circumferentiā recta ducatur utcumq; CE , erit hæc posita ad punctū datū C , æqualis datæ rectæ BC , cum utraq; & BC , & CE , ex eodem centro egrediantur ad circumferentiā BE .

SCHOLIUM.

HUIC problematis varij esse possunt casus, ut ait Proclus. Aut. n. datū punctū in ipsa data recta est positū, aut extra ipsā: Si in ipsa, erit vel alterū extremorū eius, vel inter utrūq; interius extremū. Si vero extra ipsam, erit vel e directo data lineæ, ita ut pducta in rectū, & cōtinuū p ipsum pūctū trāseat; vel nō e directo, ita ut ab ipso ad data lineæ extremorū quoduis recta linea ducta cū data recta angulū efficiat; Quo modo vel supra datā lineā eris cōstitutū, vel infra, ut manifestū est. In omnibus aut istis casibus semper eadē est cōstructio, & demonstratio. Quod si in cōstructione fiat triagulū ACD , sup recta AC , isosceles, eodem modo ostendemus, rectam AG , recta BC , æqualem esse.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus,

2. per.

3. per.

15. def.

3. pron.

15. def.

1. pron.

3. per.

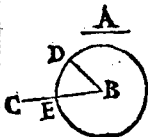
4. per.

15. def.

3.

libus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

S I N T duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior,



oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineâ æqualem minori A. Ad alterutrum extremorū lineæ maioris B C, nempe ad punctū B, ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus describatur secans B C,

2. primi.

3. per.

15. def.

1. prom.

in E. Dico B E, detractam esse æquale ipsi A. Quoniā B E, æqualis est rectæ B D, & eidē B D, æqualis est recta A, per constructionem; erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.

Q U O D si duæ rectæ datæ cōiungātur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, cōiunctæ in extremo vtriusq; B; describendus erit circulus ex B, ad interuallū minoris B D. Hic. n. auferet B E, æquale ipsi B D, vt cōstat ex definitione circuli.

SCHOLION.

V A R I O S etiam p̄ se casus esse in hoc problemate, nemō ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se discent, ita vt neutra alterā cōtingat; vel nō. sed vel coniungātur ad vñū extremū, vel se mutuo secent; vel certe altera alterā suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4.

THEOREMA I. PROPOS. 4.

S I duo triāgula duo latera duobus lateribus æqualia habeāt, vtrūq; vtriq; ; habeāt vero & angulū angulo æquale sub æqualib⁹ rectis lineis cōtentū : Et basim basi æquale habebūt; eritq; triāgulū triāgulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterq; vtriq; ; sub quibus æqualia latera subtenduntur.

S I N T

S I N T duo triangula ABC, DEF ,
 & unius utrumque latus AB, AC ,
 æquale sit alterius utrique lateri DE ,
 DF , hoc est, AB , ipsi DE , & AC ,
 ipsi DF ; angulusque A , contentus la-
 teribus AB, AC , æqualis angulo D , contento lateribus
 DE, DF . Dico basim BC , æqualem quoque esse basi EF ;
 & triangulum ABC , triangulo DEF ; & utrumque an-
 gulum B , & C , utrique angulo E , & F , id est, angulos B ,
 & E , qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF , inter
 se; & angulos C , & F , qui opponuntur æqualibus lateribus
 AB, DE , inter se quoque esse æquales. Quoniam angu-
 lus A , æqualis ponitur angulo D , fit, ut si alter alteri intelli-
 gatur superponi, neuter alterum excedat, sed linea AB , con-
 gruat lineæ DE , & linea AC , lineæ DF . Cum igitur AB ,
 & DE , ponantur esse æquales, neutra etiam alteram exced-
 det, sed punctum B , cadet in punctum E ; Eademque ratio-
 ne punctum C , in punctum F , propter æqualitatem linea-
 rum AC , & DF , ex hypothesi. Itaque cum punctum B ,
 congruat puncto E , & punctum C , puncto F , necessario &
 basis BC , congruet basi EF , (ut mox demonstrabitur) ac
 propterea illa hinc æqualis erit, cum neutra alteram ex-
 cedat; & triangulum ABC , triangulo DEF , & angu-
 lus B , angulo E , & angulus C , angulo F , æqualis ob eandem
 causam existeret.

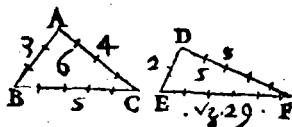
Q U O D autē basis BC , cōgruat basi EF , si punctū B , pun-
 ctō E , & punctū C , punctō F , cōgruit; facile demonstrabitur. Si
 nō cōgruere dicat' basis BC , basi EF , cadet uel supra, ut effi-
 ciat rectam $E G F$, uel infra, ut cōstituat rectā $E H F$. Vtrū
 uis horum concedatur, claudent duæ lineæ rectæ $E F, E G F$,
 uel $E F, E H F$, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam
 $E G F$, quam $E H F$, rectam esse, cum utraque ponatur ea-
 dem esse, quæ recta BC) Quod est absurdum. Duæ enim
 rectæ superficiē claudere non possunt. Non ergo basis BC ,
 cadit supra, uel intra basem $E F$, sed illicongruet. Quare ip-
 sæ inter se æquales sunt, &c. Quocirca, si duo trian-
 gula duo latera duobus lateribus æqua-
 lia habeant, &c. quod demon-
 strandum erat.

D SCHO.

8. *prop.*8. *prop.*8. *prop.*13. *prop.*

S C H O L I O N .

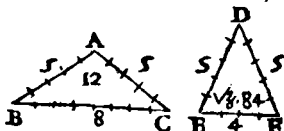
R E C T E Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematism, quarum prima est, ut duo latera unius cuiusvis anguli aequalia sint duobus lateribus alterius trianguli, utrumque utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus aequalis sit angulo alterius contento lateribus, quae istis sunt aequalia; Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt unquam esse aequales, triangula vero admodum raro aequalia existunt, ut probe hoc loco a Proclo demonstratur. Sint enim triangulorum $A B C$, $D E F$, anguli A , D , aequales, nempe recti, & latera $A B$, $A C$, aequalia lateribus $D E$, $D F$, non quidem utrumque utri-



que sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque $A B$, 3. $A C$, 4. ut ambo simul efficiant 7. At vero $D E$, sit 2. & $D F$, 5. ut ambo quoque simul 7. con-

stituunt. Quibus positis, erit basis $B C$, 5, & basis $E F$, radix quadrata huius numeri 29, quae maior quidem est quam 5, minor autem, quam 6. Item area trianguli $A B C$, erit 6. area vero trianguli $D E F$, 5. Anguli denique super basim $B C$, inaequales erunt angulis super basim $E F$. Quae quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requireretur multa, quae nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inaequalia esse, propterea quod non utrumque latus utriusque lateri aequale existat in dictis triangulis $A B C$, $D E F$.

R V R S V S triangulorum $A B C$, $D E F$, latera $A B$, $A C$, aequalia sint lateribus $D E$, $D F$, utrumque utrique, sitque



unumquodque 5; anguli vero A , & D , contenti dictis lateribus inaequales, sitque A , maior, quam D . Quibus

concessis, erit basis $B C$ maior base $E F$ ut propos. 24. huius libri ostenditur. Quod si basim $B C$ ponamus esse 8. basim autem $E F$, 4. erit area trianguli $A B C$, 12. area vero trianguli $D E F$, radix quadrata huius numeri 84. quae maior quidem est quam 9. minor vero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vides

ieiur

igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non tri-
gula ipsa aequalia inter se sunt, necesse est, ut utrumque laterus
minus aequalis sit utriq; lateri alterius, & anguli quoque dictis
lateralibus contenti aequales existant, ut optime dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

5.

ISOSCELIUM triangulorum, qui
ad basim sunt, anguli inter se sunt aequales.
Et productis aequalibus rectis lineis, qui sub
basi sunt, anguli inter se aequales erunt.

SIT triangulum Isosceles ABC , in
quo duo latera AB , AC , inter se sint aequa-
lia: Dico angulos ABC , ACB , super ba-
sim BC , aequales inter se esse: Item si la-
tera aequalia AB , AC , producantur quā-
tum libuerit, usque ad puncta D , & E ,
angulos quoque DBC , ECB , infra ba-
sim eandem BC , esse aequales. Ex linea
enim AE , producta infinite abscindatur AF , aequalis ipsi
 AD , & ducantur rectae BF , CD . Considerentur deinde
duo triangula ABF , ACD . Quia ergo duo latera AB
 AF , trianguli ABF , aequalia sunt duobus lateribus AC ,
 AD , trianguli ACD , utrumque utrique, nempe AB ipsi
 AC , ex hypotbesi, & AF ipsi AD ex constructione; an-
gulusque A , contentus lateribus AB , AF aequalis est an-
gulo A , contento lateribus AC , AD , immo angulus A
communis est utrique triangulo: Erit basis BF aequalis basi
 CD ; & angulus F , angulo D ; & angulus ABF , angulo
 ACD ; cum & priores duo, & posteriores; opponantur
aequalibus lateribus in dictis triangulis ut patet. Rursus co-
siderentur duo triangula BDC , CEB . Quoniam uero er-
unt AD , AF , aequales sunt per constructionem, sit ut, si
auferantur ex ipsis aequales AB , AC , & reliquae BD , &
 CE , sint aequales. Quare duo latera BD , DC , trianguli
 BDC , aequalia sunt duobus lateribus CE , EB , trianguli
 CEB , utrumque utrique, uidelicet BD , ipsi CE , & DC
ipsi EB , ut probatum est: Sunt autem & anguli D , & E , co-



3. primi.

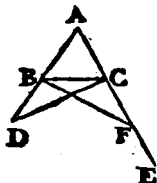
2. per.

4. primi.

3. pron.

+ primi

reanti dictis lateribus æqualibus æquales, ut ostensum etiam fuit. Igitur erit angulus DBC , angulo FCB , æqualis; & angulus BCD angulo CBF . Tam enim priores duo, quã posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntq; supra communem basim BC , utriusque trianguli BDC , CFB . Quod si ex totis angulis æqualibus ABF , ACD , (quos æquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales CBF , BCD , (quos iudem in posterioribus triangulis modo probauimus esse æquales) remanebunt anguli ABC , ACB ,



3. prem.

supra basim BC , æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos DBC , FCB , qui quidem sunt infra eandem basim BC , esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & infra eandem inter se quoque sunt æquales; Ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hæc propositio uera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis uideatur accommodasse. Existentiibus enim duobus lateribus AB , AC , trianguli ABC , æqualibus, siue reliquum latus BC , ipsis quoque sit æquale, ut contingit in triangulo æquilatere, siue inæquale, ut in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, ut constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tironibus subdificile, & obscuriusculum uideri, propter multitudine linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Veruntamen, si diligenter theorematibus præcedentibus ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præmanibus habemus, a qualibet percipietur, si modo memoris, illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, ut confusa esse uideatur, & subobscura eius demonstratio.

CORO-

COROLLARIUM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum equilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres anguli osculiabes trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum ABC . Quoniam igitur duo latera AB, AC , sunt æqualia, erunt duo anguli $B, \& C$, æquales. Item quia duo latera AB, BC , sunt æqualia, erunt $\&$ anguli $C, \& A$, æquales. Quare omnes tres $A, B, \& C$, æquales erunt. Quod ostendendum erat.



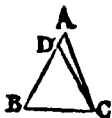
5. primi

THEOR. 3. PROPOS. 6.

6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: $\&$ sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo ABC , sint duo anguli ABC, ACB super latus BC , æquales. Dico duo latera illis opposita AB, AC , esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur AB , maius quam AC , si fieri potest: Et ex AB , abscindatur in D , recta BD , æqualis rectæ AC . (quæ minor dicitur esse quam AB), ducaturque recta CD . Considerentur iam duo triangula ACB, DBC in quibus cum duo latera $AC CB$, trianguli ACB , æqualia sint duobus lateribus DB, BC , trianguli DBC , utrumque utrique, nempe AC , ipsi DB , (abscidimus enim ex AB , ipsi AC , concessu aduersarii, æqualem DB), $\& CB$, ipsi BC , cum sit unum $\&$ idem; Sint autem $\&$ anguli ACB, DBC , contenti dictis lateribus æquales, per hypothefin: Erunt tria angula ACB, DBC , æqualia, totum, $\&$ pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera AB, AC , inæqualia, si anguli $B, \& C$, super latus BC , æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus:



3. primi

4. primi

sed æqualia existent. Quare si
trianguli duo anguli, $\&c.$
quod demonstran-
dum erat.

SCHOLIION

CONVERTIT hoc theorema primam partem precedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se equalia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque equalis: Hic vero si anguli ad basim sint equalis, latera quoque angulis illis opposita esse equalia. Non autem mirum alicui debet uideri, si Mathematici aliquando conuertunt propositiones, ita ut nunc ex antecedente quopiam concessio colligant per demonstrationem consequens aliquod, nunc vero rursus ex consequente hoc concessio inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspiciamus: Non debet, inquam, uideri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis recipiatur antecedens & consequens; Cuius ego rei unum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusvis unum latere producat, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur, si figura cuiusvis rectilinea uno latere producta, angulus externus maior sit singulis internis oppositis figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, ut ad propos. 16. huius lib. ostendimus. Eodemque modo multae aliae propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, ut prius demonstraret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concessio colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quae conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, ut fere omnes illas conuertamus, quae aliquam uidebuntur asserere utilitatem.

COROLLARIUM.

C **S** **Q** **U** **I** **T** **V** **R** ex hac propositione, omne triangulum aequiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt equalis, esse aequilaterum. Quod quidem conuersum est corollarii quintae propositionis, ut hanc. Sint enim trianguli **A B C**, tres anguli equalis. Dico ipsum esse aequilaterum. cum enim duo anguli **B**, & **C**, sint equalis, erunt latera



A B

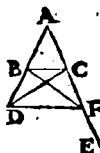
A B, AC, æqualis. Rurſus cum duo anguli A, & B, ſint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & ideo omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod oftendendum erat.

EX PROCLIO.

LET SIT nobis etiam convertere ſecundam partem quintæ propoſitionis, hoc modo :

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra baſim ſiant æquales, & duo latera illa æqualia inter ſe erunt.

Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, ſiant anguli D B C, & E C B, infra baſim B C, æquales. Dico latera A B, A C, eſſe quoque inter ſe æqualia. Ex C B, quantumlibet producta abſcindatur C F, æqualis ipſi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Conſiderentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia ſint lateribus F C, C B, utrumque utrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B C, ipſi C B, quod ſit unum & idem : ſint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypotheſin : erunt & baſes C D, B F, æquales, & anguli B C D, C B F, ſuper has baſes, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Abſcis igitur hiſce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypotheſin æqualibus, remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Conſiderentur rurſus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia ſunt lateribus F C, C D, utrumque utrique, nempe D B, ipſi F C, per conſtructionem, & B F, ipſi C D, ut modo oftentum eſt ; ſunt autem & anguli contenti dictis lateribus, D B F, F C D, æquales, ut etiam fuit nuper demonſtratum : Erit angulus B D F, ſuper baſim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, ſuper eandem baſim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, ſint æquales, ut nunc oftendimus, erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus ſi rectæ B D, C F, æquales, per conſtructionem, demantur, remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat oftendendum.



6. primi.

3. primi.

4. primi.

3. pron.

4. primi

6. primi

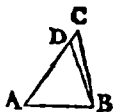
3. pron.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non conſtituentur, ac

aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SUPER recta AB, constituentur ad punctum quodvis C, duae rectae lineae AC, BC. Dico super eandem rectam AB, uersus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, ut ad D, constitui duas alias rectas lineas, quae sint aequales lineis AC, BC, utraque utrique, nempe AC, ipsi AD, quae eundem habent finem A; & BC, ipsi BD, quae eundem etiam terminum possident B. Sint enim,



si fieri potest, rectae AC, AD, inter se, & rectae BC, BD, inter se etiam aequales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum AC, BC, ita ut recta AD, in ipsam rectam AC, uel BD in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum

ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum AC, BC, nempe in AC, ut AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectae AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur aequales; Erit pars AD, toti AC, aequalis. Quod fieri non potest. Sit secundo punctum D, intra triangulum ABC, & ducta recta CD, producantur rectae BC, BD,



usque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, aequalia, erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, aequales; Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE: Quare angulus CDF, pars ipsius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur aequalia, erunt anguli CDF, DCE, sub basi CD, aequales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo sit minor angulo DCE. Idē ergo angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem equalis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea super alteram cadat, ut in priori figura, dum

modo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus

3. primi
9. prop.

8. primi

sus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum: Aut in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C; Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulū DCF, & minorem esse angulo CDE, & eidem æqualem, ut perspicuum est: Aut denique punctum D, ita erit extra triangulū ABC, ut altera linearū posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum, ut ipsam BC. Duæ igitur rectæ CD, cū in triângulo ACD, latera AC, AD, ponantur æqualia, erunt anguli ACD, ADC, supra basim CD, æquales: Ac proinde cum angulus ADC, minor sit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rursus, cum in triangulo BDC, latera BC, BD, ponantur æqualia, erunt anguli BCD, BDC, super basim CD, æquales: Est autem iam ostensum, angulum BCD, multo esse minorem angulo BDC: Idem igitur angulus BCD, & minor est angulo BDC, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se AC, AD, & inter se quoque BC, BD. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM

FIGURÆ possit, ut duæ lineæ AD, BD, æquales sint duabus AC, BC, utraque utrique, ut AD, ipsi BC, & BD, ipsi AC, ut ultima figura indicat; Verrum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, ut constet. Sola enim AC, AD, eundem limitem possident A; Itē BC, BD, eundem B; optimeq; demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, ut AC, AD, inter se sint æquales, ita ut BC, BD, quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione opposita sunt hæc verba: eosdemq; terminos cum duabus

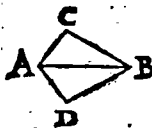


5. primi
9. prop.

7. primi

duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus posuimus esse duas lineas simul sumptas $A D$, $B D$, æquales duabus lineis $A C$, $B C$, simul sumptis ut in eadem figura perspicui potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse utramque utrique esse æqualem &c.

Eadem ratione possunt ex A , & B , infra $A B$, basim trianguli $A B C$, hoc est ad contrarias partes, duci duas lineas rectas $A D$, $B D$, convenientes ad aliquod punctum, ita ut $A D$, exiens e puncto A , æqualis sit ipsi $A C$; & $B D$, egrediens ex B , æqualis ipsi $B C$, ut perspicuum est in appposita figura. Non igitur sine



causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Denique esse poterunt due lineæ $A C$, $A D$, æquales inter se, eundem terminum A , possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, ut reli-



quæ due $B C$, $B D$, terminum habentes eundem B , inter se quoque finis æquales, ut in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratū. Apposita igitur dictū est in propositione: duabus eisdem rectis lineis alia due rectæ lineæ æquales, utraque utrique, &c. Quare ut plane scopus Euclidi in hac propositione propositus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

8.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrumque utrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebūt.

SINT duo latera $A B$, $A C$, trianguli $A B C$, duobus lateribus $D E$, $D F$, trianguli $D E F$, æqualia, utrumque utrique, nempe $A B$, ipsi $D E$, & $A C$, ipsi $D F$; sit autem & basis $B C$, basi $E F$, æqualis. Dico angulum A , æqualem esse angulo D , quorum uidelicet uterque dictis lateribus continetur.

inetur. Nam si mente intelligatur basis BC, superponi basi EF, neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæc bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum ABC, cog tetur



cadere super triangulum DEF, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D,

aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cū ponantur æqualia; Ac propterea angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterū excedat. Quod si punctū A, alio dicatur cadere, ut ad G, quomodocūq; id cōtingat, hoc est, siue in latus ED, siue intra triangulum EDF, siue extra, vt in figuris appareat; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, quæ BA) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA) æqualis ipsi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius: Hoc autem fieri non posse, iam dudum demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, terminū eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem litem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet alio quam in punctū D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triagula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

8. prop.

8. prop.

7. primi.

SCHOLIUM.

¶ Tides, hæc propositio conuersit primam propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta suis basium æqualitas hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita ut theorema proponatur in hanc formam.

S i duo triangula bases habuerint æquales, & angulos

angulos super bases constitutos æquales, utrunque utrique : Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrunque utrique, quæ uidelicet æqualibus lateribus subtenduntur, angulosq; reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

S i t enim basis B C æqualis basi E F. & angulus B, angulo E, angulusq; C, angulo D F E; Dico latera quoque A B, lateri D E, &



latus A C, lateri D F, æquale esse, angulumq; A, angulo D. Nā

8. prom.

si basis basi superponatur, congruent sibi mutuo extrema eorum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea q; omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie convertere uidetur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26, ut eo loco monebimus.

COROLLARIUM.

P o s t e o ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, uerum etiam reliquos angulos, qui ad bases cōstituntur, utrumq; utrique, ut angulum B, angulum E, & angulum C, angulum F; immo totū triangulum toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum; Nam sibi mutuo congruent & disici anguli, & tota triangula, ut perspicuū est. Quod etiā ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cū latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, ut in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLQ.

P r i m o n i s familiares conātur hoc idē theorema ostendere demonstratione affirmatiua hac ratione. Posito. n. eodē antecedēte, supponi intelligatur basis B C, basi E F ita ut triangulum A B C, cadat in diuersas partes, & non super triangulum D E F, quale est triangulū A E F. Aut igitur duo latera, nēpe D F, F A, constituunt unā lineā

rectam

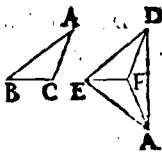
rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si cōstruant unam lineam rectam, ueluti D A, ita propōitum cōcludetur. Quoniam in triangulo A B D, duo latera A B, D E, ponuntur equalia (est enim nunc A E, recta eadem quæ A B, quæ per hypothēsīm rectæ D E, æqualis est) erunt anguli A, & D, super basim AD, æquales, quod erat ostendendum. Si uero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam cōficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ uel cadet intra triangula, uel extra. Cadat primo intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo A B D, duo latera A B, D E, æqualia ponuntur, erunt duo anguli E A D, E D A, æquales ad basim D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, æqualia sint per hypothēsīm, erunt duo anguli F A D, F D A, super basim D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, fient toti anguli E A F, & D E F, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat secundo recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A B D, duo latera A B, D E, ponuntur equalia, erunt anguli E A D, E D A, æquales super basim D A. Eadem ratione, cum duo latera A E, D F, in triangulo A F D, sint per hypothēsīm equalia, erunt anguli F A D, F D A, super basim D A, æquales. His ergo a prioribus ablatis, remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.



5. primi.



5. primi.



5. primi.

3. primi.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

S i t diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ A D, secetur ex A C, recta A E, æqualis, ducaturque recta D E. Deinde super D E, constituitur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos



3. primi

1. primi

augnois

8. primi

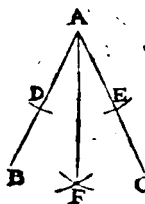
angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA , AF , trianguli DAF , æqualia sint lateribus EA , AF , trianguli EAF , utrumque utrumque, quod DA , ipsi EA , per constructionem sit æquale, & AF , commune; Sit autē & basi DF , basi EF , æqualis, propterea quod triangulum DFE , constructum sit æquilaterum. Erit angulus DAF , angulo EAF , æqualis, deoque angulus BAC , diuisus bisariam, quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Quod si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilo minus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

P R A X I S.

Dicto cuius angulus quilibet rectilineus, ut BAC , bisaria secabitur, hoc modo. Ex centro A , circumscribo aliquo abscondantur rectæ æquales AD ,



AE cuiuscunque magnitudinis. Et circulo non uariato (posset tamen ipsam uariare, si velles) ex centris D , & E , describuntur duo arcus secantes sese in F . Recta igitur ducta AF , secabit angulum BAC , bisariam. Si enim ducerentur rectæ DF , EF , essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum

æqualium. Unde ut prius demonstrabitur, angulum $D-A-F$, æqualem esse angulo $E-A-F$. Non descripsimus autem distas lineas, ut nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, observabimus ne linearum multitudine tenebras nobis offundas pariatq; confusionem.

SCHOLIUM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemvis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum uterque iterum bisariam fecerit, habebit

habebimus 4. angulos aequales; Quod si singuli rursus diuidantur bisariam, obtinebimus 8. angulos aequales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides usquam, neque ab ullo habentis fuit demonstratum, quam ratione angulus rectilineus in quotvis partes aequales possit diuidi. Si quis tamen id desideret, uti eum necesse eris circino, ut quasi attentando, & sepius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum peruenias; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus BAC , diuidendus in 5. angulos aequales. Ex A , centro describatur arcus circuli BC , ad quodcumque intervallum, secans rectas AB , AC , in B & C . Deinde hic arcus officio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam; quoniam huius rei demonstratio adhuc desideratur) diuidatur in tot partes aequales in quos angulus propositus est diuidendus, ut iuxta exemplum propositum in quinque, in punctis scilicet D , E , F , G . Si namque ad hec puncta ex A rectae ducantur lineae diuisus erit angulus BAC , in quinque aequales angulos. Cum enim circino sumpta sint aequalia intervalla BD , DE , &c. si ducantur rectae BD , DE , &c. erunt haec omnes inter se aequales. Quare erunt duo latera BA , AD , trianguli BAD , aequalia duobus lateribus EA , AD trianguli EAD , utrumque utriusque, cum omnia ex centro egrediantur ad eam distantiam usque; Bisi autem BD basi quoque DE , ut dictum fuit, aequalis est: Angulus igitur BAD , angulo EAD aequalis erit; Eademque ratione demonstrabitur, angulum EAD , angulo EAF , aequalem esse, & sic de ceteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A , esse inter se aequales, ex 27. proposit. et lib. propterea quod circumfereantia BD , DE , &c. accepta sine omnes aequales inter se. Nemo vero miretur, quod praeter exhibeamus interdum quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus dependent. Hoc enim eo consilio facimus, ut singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusvis in quotlibet partes aequales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes aequales; Et diuisio lineae rectae in quotvis partes aequales, ubi eandem diuisionem Euclides bisariam, & ita de singulis. Neque enim ad praeter huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstra-



15. def.

8. primi

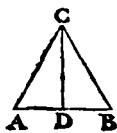
iones, sed solum, ut probetur recte esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstratione requirit, poteris regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perciperis. Nam semper propositiones illas, quae ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum et in proxima praxi citavimus propositionem 27. tertij libri.

10.

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

1. primi
9. primi



4. primi

SIT recta finita AB , diuidenda bifariam, idest, in duas partes aequales. Describatur super AB , triangulum aequilaterum ABC , cuius angulus C , per rectam CD , diuidatur bifariam in D . Dico rectam AB , bifariam esse diuisam in D . Quoniam duo latera AC , CD , trianguli ACD , aequalia sunt duobus lateribus BC , CD , trianguli BCD , utrumque utrique, nempe AC , ipsi BC , cum sint ambo latera trianguli aequilateri, & CD , est commune; Est autem & angulus ACD , angulo BCD , aequalis, per constructionem: Erit basis AD , basi BD , aequalis. Datam ergo rectam AB , bifariam secimus in D , quod facere oportebat.

P R A X I S.

Ex centro A , ad quodvis intervallū, quod tamen dimidiū linea AB , excedat, describuntur duo arcus, unus superne, alter inferne. Et ex centro B , ad idē intervallū omnino alij duo arcus delineantur, q. priores secēs in C , & D . Recta igitur ducta CD , secabit rectā AB in E , bifariā. Si. n. ex A , & B , ad C , & D , ducantur quatuor rectae, erūt hae oēs inter se aequales, cū ex ceteris ad circūferentias equaliū circulorū cadāt; Nā arcus circulorū descripti suis eodē intervallō. Quoniā igitur latera AC , CD , aequalia sunt lateribus

teribus $B C, C D$, utrumque utriusq; & basis $A D$, basi $B D$, erit
angulus $A C D$, angulo $B C D$, equalis. Rursus quia latera
 $A C, C E$, & angulus $B C E$, utrumque utriusq; &
angulus $A C E$ angulo $B C E$, ut ostensum fuit; erit basis $A E$,
basi $B E$, equalis.

3. primi.

4. primi.

SCHOLIUM.

PERSPICUUM est, eodem modo dividi posse eandem
lineam rectam $A B$, in 4. partes aequales, & in 8. in 16. in 32. &c.
sicut in propositione precedenti diximus de divisione anguli
rectilini. Quia vero ratione quavis recta linea proposita di-
videnda sit in quaecunque partes aequales, vberissime trade-
mus ad propof. 10. lib. 6. ubi varias, et non iniundas praxes in
medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huc rei lo-
cus, cum huiusmodi praxes fere omnes linearum proportionales
exposant. Neque vero indigebimus unquam divisione lineae in
quolibet partes aequales, ad eam locum usque.

PROBL. 6. PROPOS. II.

II.

DATA recta linea, a puncto in ea da-
to, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit $A B$, & in ea
puncto C , a quo iubemur erigere super
 $A B$, lineam ad angulos rectos, seu per-
pendicularem. A puncto C , sumatur rec-
ta $C D$, cui aequalis auferatur $C E$. De-
inde super $D E$, constituantur triangulum aequilaterum
 $D E F$, atque ex F , ad C , ducatur recta $F C$, quam dico esse
perpendicularem ad $A B$. Quoniam latera $D C$, $C F$,
trianguli $D C F$, aequalia sunt lateribus $E C$, $C F$, trianguli
 $E C F$, utrumque utriusq; nempè $D C$, ipsi $E C$, per constru-
ctionem, & $C F$, commune; Est vero & basis $D F$, basi $E F$,
aequalis, ob triangulum aequilaterum: Erunt anguli ad C ,
contenti dictis lateribus, aequales. Quare dicitur uterque re-
ctus, atque adeo $F C$, recta, ad $A B$, perpendicularis. Data



3. primi.

1. primi.

3. primi.

10. de f.

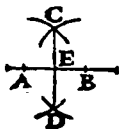
E igitur

igitur recta linea a pūcto in ea dato &c. quod faciendū erat.

P R A X I S.



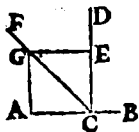
Ex puncto C, abscindantur vtriusque linea aequales CD, CE. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes se in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis: Demonstratio eadem est, quae Euclidis, si modo ducantur rectae DF, EF, quae aequales erunt, propter aequales circulos ex D, & E, descriptis, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuam, ad partes puncti dati, ut ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum, protrahenda erit AC, in B, & sumenda aequales CD, CE, &c. Si vero ad aliquam lineam confirmanda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vicinumque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis



EX PRO CLO.

Si punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea com-
mode produci nequiverit, poterimus ex puncto dato educere line-
eam perpendicularem, linea non producta.
hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C,
puncto quolibet intra lineam, educatur perpen-
dicularis C D, vt docuit Euclides; & absinda-
tur C E, æqualis ipsi A C: Deinde dividatur an-
gulus C, bifariam, ducta recta C F; Et ex E, rur-
sus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpen-
dicularis

3. primi.
9. primi.



dicularis ad CD , secans rectā CF , in G . Ducta igitur recta GA , perpendicularis erit ad AB . Quoniam cum latera AC , CG , trianguli ACG , æqualia sint lateribus BC , CG , trianguli BCG , verumque utrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: Erunt anguli A , & E , oppositi communi lateri CG , æquales; Sed B , est rectus per constructionem; igitur & A , rectus erit, ideoque; AG , ad AB , perpendicularis.

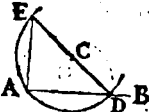
4. primi.

10. def.

SCHOLIUM

BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea AB , punctumque in ea A . Ex centro C , extra lineā assumptio, ubi libueris, (dummodo recta AB producta cum ipso non conveniat) intervallo vero accepto usque ad A , describatur arcus circuli secans AB , in D .

Et ex D , per C , recta ducatur secans arcum in E . Recta igitur ducta EA , erit perpendicularis ad AB . Nam angulus A , est rectus, cum sit in semicirculo DAE , ut ostendimus propositione 3. lib. 3.



PROBL. 7. PROPOS. 12.

12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIT recta AB , interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C , a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB . Centro C , intervallo vero quolibet circulus describatur secans AB , in D , & E . (quoniam intervallum assumptum tantum esse debet, ut transcendat rectam AB ; alias eam non secaret.) Divisa autem recta DE , bisariam in F , ducatur recta CF , quam dico perpendicularē esse ad AB . Si enim ducantur CD , CE , erunt duo latera DF , FE , trianguli DFC , æqualia duobus lateribus EF , FC ,



10. primi.

E 2 FC,

3. primi.

F, G , trianguli, E, F, C , utrumq; utriq; , per constructionem; est autem & basis CD , basi CE , æqualis, cum hæ sint ex centro C , ad circumferentiam : Quare erit angulus DFC , angulo EFC , æqualis, & propterea utriq; rectus. Ducta est igitur CF , perpendicularis, quod faciendum erat.

S C H O L I O N.

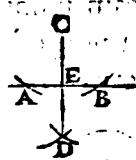
PROPT apposis Euclides hæc particulam : infinitam. Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita est



set BE , & punctum C , non posset ex C , describi circulus secans BE , in duobus punctis, quare neq; ex C , perpendicularis duci ad BE . Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse

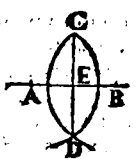
se infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, ut saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si BE , producat, donec circulus ex C , descriptus secet totam BA , productam in D , & E , & c.

P R A X I S.



CENTRO C , & intervallo quovis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A , & B . Deinde ex A , & B , eodẽq; intervallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D . Nam ducta recta CD , secans AB , in F , erit perpendicularis ad AB . Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tractata in praxi propositionis 10. Nam anguli ad E , erunt recti, nempe inter se æquales.

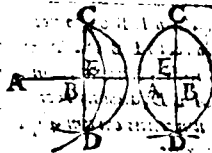
4. primi.



I D E M efficiemus hoc modo. Ex quovis puncto A , in linea data & intervallo vsq; ad C , assumpto, arcus circuli describatur; Deinde ex quolibet alio puncto B , intervalloq; vsq; ad idem C , alius arcus, describatur priorem secans in C , & D ; Erig; ducta recta CD , secans AB , in E , perpendicularis ad AB .

Demus.

*Demonstratio eadem est qua prior.
Non est autem necesse, ut inter-
uallum BC, acuale sit interval-
lo AC, ut in hac figura apparet:
Facilior tamen eris, & breuior ope-
ratio si idem semper intervalum ac-
cipiatur.*



THEOR. 6. PROPOS. 13.

13.

CVM recta linea super rectam confi-
stens lineæ angulos facit; Aut duos rectos,
aut duobus rectis æquales efficit.

RECTA AB, consistens super rectam CD,
faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur
AB, fuerit perpendicularis ad CD, erunt
anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit per-
pendicularis, faciet unum quidem angulum
obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus
esse rectos æquales. Educatur enim BE, ex B, perpendicu-
laris ad CD, ut sint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam
vero duo anguli DBA, ABE, æquales sunt angulo recto
EBD; appposito communi angulo recto EBC, erunt trius
angulis DBA, ABE, EBC, æquales duo recti EBD, EBC;
Rursus quia duo anguli ABE, EBC, æquales sunt angulo
ABD; appposito communi angulo ABD, erunt trius an-
gulis DBA, ABE, EBC, æquales duo anguli ABC, ABD;
sed illis tribus ostensum fuit esse etiam æquales duos rectos
EBD, EBC; quæ autem eidem æqualia, inter se sunt æ-
qualia: Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales sunt duo-
bus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea super rectam
consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

10. def.

11. primi.

8. pron.

2. pron.

8. pron.

2. pron.

1. pron.

SCHOLION.

VIDETUR hac propositio pendere ex communi quadam
animi notione. Quo enim angulus ABC, superat rectum an-

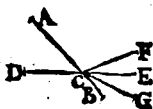
gulum EBC , eo reliquitur angulus ABD , superatur ab angulo recto EED . Nam sicut ibi excessus est angulus ABE , ita hic defectus est idem angulus ABE . Quocirca anguli ABC , ABD , duobus rectis æquales esse conuincuntur, siquidem sanctum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

14.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eandem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

Ad punctum C , lineæ rectæ AB , in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ CD , CE , facientes cum AC , duos angulos ACD , ACE , vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD , CE , inter se esse constitutas in directum, ita ut DCE , sit vna linea recta. Si enim nō est recta DCE ; producta DC , ad partes C ,



3. primi.

3. prom.

in directum, & continuum cadet aut supra CE , ut sit recta DCF , aut infra CE , ut sit recta DCG . Si cadit supra, cum AC , consistat super rectam DCF , sicut duo anguli ACD , ACF , duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo angulo ACD , ACE , æquales duobus rectis; & omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD , ACF , duobus angulis ACD , ACE , erunt æquales. Ablato igitur communi angulo ACD , remanebunt anguli ACF , ACE , inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta DC , producta cadet supra CE ; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE , ACG , æquales. Igitur DC , producta eadem efficietur, quæ CE , proptereaq; si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, &c.

Quod demonstrandum erat.

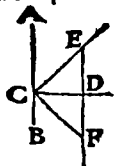
SCHO.

SCHOLION.

EST hac propositio precedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si DCE sit recta, angulos ACD, ACE, duobus esse rectis aequales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis aequales, rectas DC, EC, esse unam lineam rectam.

EX PROCLIO.

RBCTE Euclides addidit in propositione hac: & non ad eandem partem. Quoniam ut ait Porphyrius, fieri potest, ut ad punctum aliquod lineæ datæ ad eandem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis aequales, quæ tamen non constituent unam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea AB, datum. Ductur



CD, perpendicularis ad AB, diuidaturq; rectus angulus ACD, bisariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD, ducatur DF, perpendicularis ad CD, secans rectam CE, in E. Producta autem BD, ad partes D, sumatur DF, æqualis rectæ DE, & ducatur recta FC. Quoniam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia sunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, utrumq; utriq; & anguli D, ipsis contenti æqua-

les, nempe recti; erit basis EC, basi CF, æqualis, & angulus BCD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium est recti: (Est enim rectus ACD, diuisus bisariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, facit angulum ACF, constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti: Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad eandem partes faciunt rectæ CF, CE, cum AB, æquales sunt duobus rectis: Et tamen CF, CE, non sunt una linea recta, propterea quod non sunt ductæ ad diuersas partes, sed ad eandem.

1. primi.

2. primi.

1. primi.

3. primi.

4. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 15.

15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticē æquales inter se efficiēt.

SECEANT se duæ rectæ AB, CD, in puncto E, utriusq;. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC,

E 4 & an-

13. primi.

10. pron.

3. pron.

3. pron.

& angulum AEC , angulo BED . Quoniam recta DE , consistit super rectam AB , erunt duo anguli AED , DEB , æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE , super rectam CD , consistit, erunt eadem ratione duo anguli CEB , BED , duobus rectis æquales. Cum igitur omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli AED , DEB , duobus angulis DEB , CEB , æquales. Demptis igitur communi angulo DEB , remanebit angulus AED , angulo CEB æqualis. Eadem ratione demonstrabitur, angulos AEC , BED , inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC , CEB , (qui duobus sunt rectis æquales per præcedentem) æquales erunt duobus angulis DEB , CEB , (qui per eandem præcedentem duobus rectis sunt æquales.) Ablato igitur angulo communi CEB , remanebunt anguli AEC , BED , æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIUM. I.

Ex $CELESTIS$ colligit ex demonstratione huius theorematum, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent), duas lineas rectas se mutuo secantes, efferre ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED , DEB , quam duos AEC , CEB , duobus effertis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E , constituti, æquivalent duobus duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales erunt.

COROLLARIUM. II.

EADDEM ratione colligemus, omnes angulos circa unum & idem punctum constitutos, quorumque cunctos, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Cum enim ex E , hinc lineæ quælibet educantur, dividantur in quatuor, ut quatuor ad E , constituantur plurimar partes, quæ omnes simul sumptæ totis tuis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumflans, æquivalere quatuor rectis angulis. ut multi auctiores asserunt, quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quolibet lineas rectas se invicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

EX PRO

18. pron.

EX PROCLIO.

Si ad aliquam rectam lineam, ad eiusq; finem, due recte linee non ad easdem partes sumptae, angulos ad verticem aequales fecerint; ipsae recte lineae in directum sibi inuicem erunt.



Ex puncto C, rectae AB, in duas partes egrediuntur due rectae CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter se aequales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam cum angulus ACE, equalis sit angulo BCD, addito communis angulo BCE, erunt duo anguli ACE, BCE, duobus angulis DCB, BCE, aequales: Sed anguli ACE, BCE, sunt aequales duobus rectis; Igitur & duo DCB, BCE, duobus erunt rectis aequales. Quamobrem CD, CE, erunt linea vna recta. Hoc autem, ut vides, conuersum est propositionis decimae quintae.

2. *prop.*
13. *primi.*
14. *primi.*

EX PELETARIO.

Si quatuor rectae lineae ex vno puncto exi-
entes lineos angulos oppositos inter se aequales
fecerint, erunt quaelibet duae lineae aduersae in
directum sibi, & continuatae coniungantur.



Ex puncto A, quatuor lineae AB, AC, AD, AE, faciunt duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se aequales: Item duos BAC, DAE, inter se aequales. Dico itaq; BA, AD, efficere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam aequales sunt anguli BAE, CAD, si aequales illis addantur anguli BAC, DAE, erunt duo anguli BAE, BAC, aequales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quam hi, admodum sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentes: At hi quatuor aequales sunt quatuor rectis per 2. coroll. praecedentis propos. Igitur duo anguli BAE, BAC, aequales sunt duobus rectis; atque adeo CA, AE, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostenditur, duas BA, AD, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, BAD, aequales duo

2. *prop.*

4. *primi.*

les duobus angulis $DA C$, CAB ; Quare ut prius, concludetur
propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione no-
cente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem no-
stram ostensionem eius demonstrationi iure optimo prapofuimus.

16.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno
latere producto, externus angulus utroli-
bet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVL'I ABC , latus BA , producat ad D ;
Dico angulum externum $DA C$, maiorem esse interno,
& opposito ACB , itemq; maiorem interno, & opposito
 ABC . Diuidatur enim AC , bifariam in E ; & ex B , per E ,



extendatur recta BEF , ita ut BE ,
abscissa sit æqualis rectæ EB ; du-
caturq; recta FA . Quoniam igi-
tur latera CE , EF , trianguli CEB ,
æqualia sunt lateribus AE , EF ,
trianguli AEF , utrumq; vtriq;

per constructionem; Sunt autem & anguli ad E , dictis la-
teribus comprehensi, inter se æquales, cum sint circa verti-
cem E , & oppositi: Erit basis CB , æqualis basi AF , & an-
gulus ECB , angulo EAF ; Est autem angulus $DA C$,
externus maior angulo BAF , totum videlicet parte. Igitur
& externus angulus $DA C$, maior erit interno, & opposi-
to angulo ACB . Quod si latus CA , producat ad G ; &
 AB , diuidatur bifariam in H ; extendaturq; recta CHL ,
ut HL , æqualis sit rectæ HC , & ducatur recta LA : demon-
strabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB ,
maiorem esse interno angulo, & opposito ABC : Est au-
tem angulus $DA C$, angulo GAB , æqualis, cū lineæ BD ,
 CG , se mutuo secant in A . Igitur & angulus $DA C$, ma-
ior erit interno & opposito angulo ABC . Est autem
idem angulus $DA C$, maior quoq; ostensus angulo
interno, & opposito ACB . Cuiuscunque
ergo trianguli vno latere producto, &c.

Quod demonstrandum erat.

SCHO.

SCHOLION.

NON dixit Euclides angulum externum DAC , maiorem esse angulo BAC , interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare utrumlibet ACB , ABC , internum, sibiq; oppositum: quoniam: externus angulus aequalis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoq; erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit: Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Qua omnia facile colliguntur ex propof. 13. Nam angulus externus, & internum illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID vero, quod in scholio propof. 6. huius libri nos demonstratur recepimus, nimirum hanc propof. non posse conuerti scilicet & vno latere figura quadrilatera producta, extern⁹ angul⁹ quo libet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absoluem⁹.

SIT figura quadrilatera $ABCD$, cuius angulus BAD , obtusus, & ABC , rectus confirmatur, hac tamen lege, ut rectæ AB , DC , productæ ad partes B , & C , in puncto E , nec non & rectæ DA , CB , ad partes A , & B , in puncto F , coeant. Dico, si AD , producat⁹ ad G , angulum externum CDG , maiorem esse tribus internis BAD , ABC , BCD , sibi oppositis. Cū enim ADE , triangulum sit, erit angulus externus EDG , maior interno opposito DAE . Rursus cum DAB , obtusus maior sit recto ABC , maior quoq; multo erit EDG , ipso ABC . Postremo, quia & in triangulo CDF , angulus externus CDG , maior est interno, & opposito FCD ; manifestum est, in quadrilatero $ABCD$, externum angulum CDG , maiorem esse internis, & oppositis BAD , ABC , BCD . Quā ob rem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocantur, ut demonstratum est.

EX PROCLO.

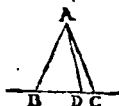
SEQUITUR ex hac propositione, ab eodem puncto ad unam eandemq; lineā rectā non posse duci plures lineas rectas, quā duæ.



16. primi.

16. primi.

inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam



B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D. Quoniam igitur latera A B, A C, sunt æqualia, erunt anguli A C B, & A B C, æquales super basim B C: Rursus quia latera A B, A D, sunt æqualia, erunt anguli A D B, & A B C, super basim B D, æquales. Quare cum uterq; angulus A C D, & A D B, æqualis sit angulo A B C, erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad B C, possunt duci. Quod est propositum.

5. primi.

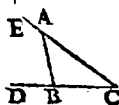
5. primi.

1. pron.

17.

THEOR. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



S I T triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quævis latera, nempe C B, C A, ad D,

16. primi.

4. pron.

13. primi.

& E. Quoniam igitur angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B, si addatur communis angulus A B C, erunt duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis A B C, A C B; sed A B D, A B C, æquales sunt duobus rectis; igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis: Item duo B A C, & B C A. Cuiuscunq; igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

EX P R O C L O.

H I N C perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quâ vnâ.



Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum. Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunq; oppositi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendicu-

17. primi.

pendiculares, quam una, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.

COROLLARIUM.

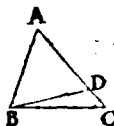
CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius unus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, eum monuimus defn. 16. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si unus fuerit rectus, vel obtusus, quemcumque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse faciamur.

THEOR. II. PROPOS. 18.

18.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

In triangulo A B C, sit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, subtensum a maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui a minori latere A B, subtenditur. Nā ex A C, auferatur A D, æqualis ipsi A B, & ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionē, erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus A D B, maior angulo A C B; Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cum angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; Erit angulus A E C, multo maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendes angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.



3. primi.

5. primi.

15. primi.

9. prop.

COROLLARIUM.

EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, ut monuimus defn. 15. huius lib. Sic enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidē latus A C, minimū autem B C; & medium locum habens A B: Dico etiam omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit an-



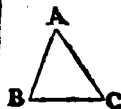
erit an-

erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus uero A; & C, mediū locū inter vtrunq; tenēs.

18.

THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus A C, subtendens maiorem angulū B, maius esse latere A B, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus A C, maius non est latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale esse ipsi A B, erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothefin, quod est absurdum. Si vero A C, minus esse dicatur latere A B, erit angulus B, subtensus a minori latere A C, minor angulo C, subtenso a maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis est absurdū. Cū igitur A C, latus neq; æquale sit lateri A B, neq; minus eo, erit maius. Eadē ratione probabitur, latus A C, maius esse latere B C, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

5. primi.

8. primi.

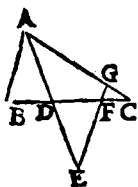
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idē theorema ostēdere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo precedentis, si tamen prius demonstretur hoc subsequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq; angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cū minori.

TRIANGULI A B C, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectā A D, quæ secet basin B C, in partes inæquales, maiusq; segmentum

trifit D C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Producatorem enim A D, ad E, ut fit D E, aequalis ipsi A D; Deinde ex maiori segmento D C, auferatur recta D F, æqualis minori segmento D B, & p F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A A D, D B, trianguli A D B, æqualia sunt lateribus E D, D F, trianguli E D F, utriusque; utriusque, per constructionem; sunt autem & anguli A D B, B D F, dictis lateribus cōiuncti æquales; Erunt bases A B, & B F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, æqualis: Est vero & angulus C A D, angulo B A D, æqualis, p hypothefin; Igitur anguli G A D, G B A, trianguli A G E, æquales erunt, ideoque; latera A G, E G, æqualia erunt. Est autem recta A C, maior quā A G; quare & A C, maior erit, quā E G; Et quia E G, maior est, quā E F, erit & A C, multo maior, quā E F. Cum igitur demonstratum sit rectam E F, æqualem esse rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.



3. primi

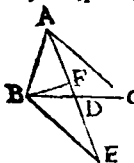
15. primi.

4. primi.

1. pron.

6. primi.

Hoc cōtento theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales,) bisariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, ut fit D E, æqualis ipsi A D; ducaturque; recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, utriusque; utriusque, per constructionem; sunt autem & anguli A D C, B D B, dictis comprehensis lateribus æquales: Erunt bases A C, & B E, æquales, angulusque; A C D, angulo E B D, æqualis: fit quia angulus A C D, ponitur esse minor angulo A E C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoque; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Singitur bisariam secetur per rectam B F, cadet B F, supra B D, eo quod angulus A B D, maior sit angulo E B D. Quia vero E F, maior est, quā E D, & E D, posita est æqualis ipsi A D, erit E F, maior, quā A D; sed adhuc A D, maior est, quā A F; Multo igitur maior erit E F, quā A F. Itaque; quia recta B F, diuidens angulum A B E, bisariam, secat basin A E, inæqualiter in F, estque; maius segmentum E F, minus autem A F, erit per theorema a Proclo proxime demonstratum, latus B E, maius latere A B. Ostensum est autem B E, æquale esse lateri A C; Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Quod erat demonstrandum.



3. primi.

15. primi.

4. primi.

9. pron.

9. pron.

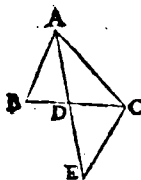
S C H O L I O N.

H A B C propositio 19 cōuersa est propositionē 18, ut periculum est. Campanus autem duarū istarū propositionū ordinē rorsus inuertit, ita ut ea, quæ apud nos est 18, apud ipsum sit 19. & contra. Quarum utramque ostendis ducendo ad id,

quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. di-
recte, & ostensine confirmaveris, ut ex dictis liquido constat.

POTERIMVS quoque Theorema a Proclo demon-
stratum convertere, hoc modo.

Si trianguli duo latera inæqualia fuerint, li-
nea recta bifariam diuidens angulum ipsis con-
tentum, secabit basin in partes inæquales, ma-
iusq; segmentum erit prope maius latus.



D V o latera AB, AC , trianguli ABC ,
sint inæqualia, $A C$, maius, & $A B$ min.
Recta autem AD , diuidēs angulū BAC ,
bifariā, sicut basin BC , in D . Dico segmen-
tum DC maius esse segmento DE . Si enim
nō est maius, erit vel æquale vel minus. Si
dicat esse æquale; producamus AD , ad E .

3. primi.

ut DE , æqualis sit ipsi DA , ducamusq; rectā EC . Quoniam
igitur latera AD, DB , æqualia sunt lateribus ED, DC ,
utrumq; utroq; AD , videlicet ipsi ED per constructionem,
& DE ipsi DC , per h., poterit aduersari; Sunt autem & an-
guli ad D , aëstis lateribus contenti æquales: Erūt bases AB ,
basi EC , æquales; & angulo EAD , angulus CED . Positus
autē est & angulo BAD , angulus CAE , æqualis: Igitur &
anguli CEB, CAD æquales erunt. Idēq; latus AC lateri
 EC , æquale. Cū i. nūc ostensum sit, lateri EC , æquale esse quoq;
latius AB , erunt latera AC, AB , æqualia; quod est absurdū.

15. primi.

4. primi.

6. primi.

1. pron.

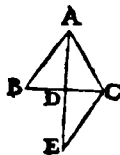
quia $A C$, maius ponebatur, quā $A B$. Non igitur erit segmen-
tum DC , segmento DB , æquale. Quod si DC , dicatur esse mi-
nus, & DB , maius erit, per theorema Procli, latius AB , ma-
ius latere AC ; Ponebatur autem minus, quod multo magis ē
absurdū. Non igitur minus erit DC , quam DB . Quare
erit necessario maius.

EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

Si trianguli angulum recta linea bifariam
diuidens, basin bifariam quoq; secet, erunt duo
latera

latera angulum continentia inter se æqualia:
Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bi-
fariam secabit linea recta, quæ angulum bifa-
riam diuidit.

PRIMO recta AD , secans angulum BAC , bifariam,
dimidas quoque basin BC , in D , bifariam;
Dico latera AB , AC , inter se æqualia esse.
Hoc autem demonstrabis eadem ratione, qua
in precedenti theoremate ostensum fuit, la-
tus AC , æquale esse lateri AB , si DC , seg-
mentum segmento DB æquale ponatur, dum-
modo figuram eodem modo construas. Cum
enim latera AD , DB , æqualia sint lateri-
bus ED , DC ; & anguli ad D , dictis lateribus contenti æqua-
les, erunt bases AB , EC , æquales, & angulus CED , angulus
 BAD , hoc est, angulus CAE , æqualis: Quare AC , æquale
erit ipsi EC , hoc est, ipsi AB .



15. primi.
4. primi
6. primi

SECUNDO sint latera AB , AC , æqualia, & recta
 AD , secans basin BC , in D , dimidas angulum BAC , bifa-
riam; Dico segmentum DC , æquale esse segmento DB . Cum
enim latera AD , AB , æqualia sint lateribus AD , AC ,
utrumque utriusque, & anguli quoque ad A , contenti dictis la-
teribus æquales per hypothesin, erunt bases BD , DC , æquales.

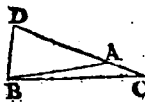
4. primi

THEOR. 13. PROPOS. 20.

20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo
sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIT triangulum ABC . Dico quæli-
bet eius duo latera, nempe AB , AC , si-
mul maiora esse reliquo latere BC . Iro-
ducatur vnum ex illis, ut CA , usque ad
 D , sitque recta AD , æqualis alteri lateri
 AB , & ducatur recta DB . Quoniam igitur
duo latera AB , AD , æqualia inter se sunt, per hypo-



3. primi

F thesin,

5. primi
9. pren.

thesin, erunt anguli ABD , ADB , æquales inter se: Est autem angulo ABD , maior angulus CBD ; Igitur & angulus CBD , maior erit angulo ADB . In

19. primi



triangulo ergo CBD , latus CD , oppositum maiori angulo CBD , maius erit latere BC , quod minori angulo CDB , opponitur. Cum igitur duo latera AB , AC , simul æqualia sint ipsi CD , (sicut enim

3. pren.

æqualibus AB , AD , commune addatur AC , sicut tota æqualia; nimirum linea composita ex AB , AC , & linea composita ex AD , AC ,) erunt quoque latera AB , AC , simul maiora latere BC . Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLIO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphyrij demonstratur, nullo latere productio, hac ratione. Sit probandum duo latera AB , AC , trianguli ABC , maiora esse latere BC . Diuidatur angulus BAC , illius lateribus contentus bisariam per rectam

9. primi



26. primi

29. primi

26. primi

AD . Quoniam igitur trianguli CDA , latus CD , præteritum est B , erit angulus externus BDA , maior interno & opposito CAD ; igitur & maior angulo BAD . Quare in triangulo ABD , latus AB , maiori angulo ADB , oppositum maius erit latere BD , quod minori angulo BAD , opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus AC , maius esse, quam CD , quia angulus CDA , maior est angulo BAD , hoc est, angulo CAD , &c. Quamobrem duo latera AB , AC , maiora erunt latere BC . Eademque est ratio quorumcunque duorum laterum, & angulus ipsius comprehensus bisariam secutus.

21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI super trianguli uno latere, ab extremitatibus dux rectæ lineæ interiorius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maio-

maiozem uero angulum continebunt.

IN triangulo ABC , super extremitates B , & C , lateris BC , intra triangulū cōstiturātur duæ rectæ lineæ BD , CD , in puncto D , concurrentes: Dico BD , CD , simul minores esse duobus lateribus BA , CA , simul; At uero angulū BDC , maiorem angulo BAC . Producat̃ enim altera linearum interiorum, nempe BD , ad punctum E , lateris CA . Quoniam igitur in triangulo BAE , duo latera BA , AE , maiora sunt latere BE . si addatur commune EC , erunt BA , AC , maiora, quam BE , EC . Rursus quia in triangulo CEB , duo latera CE , EB , maiora sunt latere CD ; si commune apponatur DB , erunt CE , EB , maiora, quam CD , DB . Oñsum uero iam fuit BA , CA , maiora esse, quam BE , EC ; Multo igitur maiora erunt BA , CA , quā BD , CD . quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus BDC , maior est angulo DEC , externus interno; & angulus DEC , angulo BAC , maior quoque est eandem ob causam; Erit angulus BDC , multo maior angulo BAC ; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.



20. primi.

4. prop.

20. primi.

4. prop.

16. primi.

SCHOLIUM

Quæ rectæ Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum cōstitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, aperse intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis uidelicet rethangulis, uel etiam amblygonijs, intra triangulum cōstitui posse duas lineas super unum latus circa angulum rectum, uel obtusum, quarum quidem una ab extremitate disti lateris, altera uero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, ita ut hæ cōstitutæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus.

Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum cōstitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

Si $\triangle$ triangulum habens exempli gratia angulum ABC , obtusum. Dico ab extremo C , & a quouis puncto, nempe $a D$, prope aliud extremum B , lateris BC , duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus BA, AC . Ducatur enim recta DA : Et quoniam in triangulo ABD , duo anguli ABD, ADB , minores sunt duobus rectis; Ponitur autem ABD , maior recto, nempe obtusus; erit ADB ,



17. primi.

19. primi

3. primi

10. primi

20. primi

4. prop.

3. primi

minor recto, ideoque minor angulo ABD . Quare latus AD , maius erit latere AB . Ex $D A$, abscindatur recta DB , æqualis rectæ AB ; Et reliqua linea AE , bisariam diuidatur in E . Si igitur ab extremo C , ad F , recta ducatur CF , erunt duæ lineæ rectæ constitutæ CF, DF , intra triangulum maiores duobus lateribus BA, AC . Quoniam in triangulo AFC , duo latera AF, FC , maiora sunt latere AC ; Est autem recta AF , ipsi FB , æqualis, per constructionem; erunt CF, FE , maiores quoque latere CA . Si igitur equalia addantur $ED, & A B$, fient rectæ CF, FD , maiores latibus CA, AB . Quod est propositum. Quod si ad F , ex B , extremum recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ CF, BF , minores duobus lateribus CA, AB , ut Euclides demonstrauit.

Rursus sit triangulum scalenum ABC , cuius latus maximum BC , minimum AB . Ex $B C$, auferatur BD , æqualis rectæ AB , & ducatur AD , recta, ad cuius punctum quodlibet, ut ad E , ab extremo C , recta ducatur CE . Constitutæ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ CB, DE , quæ minorem angulum comprehendunt, quæ efficiunt duo latera AB, AC . Cum enim



5. primi

16. primi

duo latera BA, BD , equalia sunt, erunt duo anguli BAD, BDA , æquales: Sed $BD A$, angulus maior est angulo CED ; Maior igitur erit & angulus BAD , angulo CED . Quare multo maior erit totus angulus BAC , angulo CED ; Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis unius lateris, ut minores quidē sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem uero comprehendunt, angulum. Alias enim propositio uera non esset, ut iam est demonstratum.

22.

PROBL. 8. PROPOS. 22.

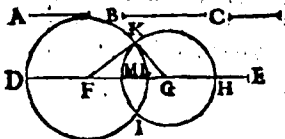
Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constitutur.

stitueret. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas : quoniam uniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

TRIS lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Alias ex ipsis non posset constitui triangulum, ut constat ex propos. 20, in qua ostensum fuit, duo quævis latera trianguli reliquo esse maiora.) oportetque construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia.

Ex assumpta recta quavis D E, infinitæ magnitudinis abscondatur recta D F, æqualis rectæ A, Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B, & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C.

Deinde centro F, intervallo uero F D, circulus describatur D I K : Item centro G, intervallo autem G H, alius circulus describatur H I K, qui necessario priorem secabit in punctis I, & K, (cum enim duæ F D, G H, maiores ponantur rectæ F G, & ex F B, sumatur recta F L, æqualis ipsi F D, & ex G D, recta G M, æqualis ipsi G H, caderet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in L, punctum, essent G L, F L, hoc est, G H, & F D, æquales rectæ F G : Si vero M, caderet inter G, & L, essent eadem duæ minores rectæ F G, quorum utrumque est contra hypothesein.) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducatur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cum enim recta F K, æqualis sit rectæ F D, & recta A, per constructionem eidem F D, æqualis, erit latus F K, rectæ A, æquale : Rursus quia G K, æqualis est ipsi G H, & recta C, eidem G H, erit quoque latus G K, rectæ C, æquale : Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituiamus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum : Quod faciendum erat.



3. primi.

15. def.

1. pron.

SUMATUR recta DE , equalis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B , quam nunc volumus esse basim: Deinde ex D , ad intervallū recta A , arcus describatur: Item ex E , ad intervallum recta C , alter arcus secans priorem in F . Si igitur ducantur rectae DF , EF , factum erit triangulum habens tria latera aequalia tribus datis lineis. Erit enim latus DF , aequale recta A , propter intervallum ipsius A , assumptum: & latus EF , ipsi C , propter assumptum intervallum C . DE vero latus, ac ceptum, est recta B , aequale, ab initio.



factum erit triangulum habens tria latera aequalia tribus datis lineis. Erit enim latus DF , aequale recta A , propter intervallum ipsius A , assumptum: & latus EF , ipsi C , propter assumptum intervallum C . DE vero latus, ac ceptum, est recta B , aequale, ab initio.

S C H O L I O N.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus aequale & quoad latera, angulosq; & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque ABC ,



cui aequale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas AB , BC , CA , quarum quaelibet duae maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam DE , aequalem uni lateri, nempe BC , & ex D , intervallo lateris AB , arcum describo; item alium ex E , intervallo reliqui lateris CA , qui priorē secet in F , &c.

20. primi

23.

PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit AB , datumque in ea punctum C , & datus angulus DEF . Oportet igitur ad rectam AB , in puncto C , angulum constituere æqualem angulo E . Sumantur in rectis ED , EF , duo puncta utcumque G , H , quæ recta GH , connectantur: Deinde constituatur triangulum CIK ,

21. primi.

habens

habens tria latera æqualia tribus rectis EG, GH, HE, hæ-
ut CI. æquale sit ipsi EG, &
CK, ipsi EH; & IK, ipsi GH.
(Quod facile fiet, si CI. sum-
atur æqualis ipsi EG; & CL, ipsi
EH; & IM, ipsi GH; Deinde
ex centris C, & I, intervallis ue-
ro CL, & IM, circuli describan-
tur secantes se in K, &c.) Dico
angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam duo latera
CI, CK, æqualia sunt duobus lateribus EG, EH, utrumq;
utriusque, & basis IK, basi GH, per constructionem; erit an-
gulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad
C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

8. primi.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in
præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulum
constituere oporteat æquale alteri triangulo, in angulus dato
angulo æqualis exhibeatur, ut perspicuum
est. Facilius tamen hac arte problema ef-
ficies. Sit linea data AB, punctumq;
in ea C, & angulus datus E. Centro igitur
E, & intervallo quonvis arcus descri-
batur GH; Eodemq; intervallo ex cen-
tro C, arcus describatur IK, sumaturq;
officio circini arcus IK, arcui GH, æqualis. Recta enim di-
recta CK, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si du-
cerentur rectæ IK, GH, essent ipse æquales, propterea quod
circino non variato utramque distantiam IK, GH, accepi-
mus. Cum ergo & duo latera IC, CK, æqualia sint duobus
GE, EH, ob æqualia intervallo, quibus arcus sunt descripti;
erunt anguli ICK, GEH, æquales.

8. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 24.

24.

SI duo triangula duo latera duobus la-
teribus æqualia habuerint, utrumq; utriq;

angulum. vero angulo maiorem sub æqua
libus rectis lineis contentum : Et basin ba-
si maiorem habebunt.

D r d latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint
duobus lateribus DE, DF, utrumque virique, nẽpe AB,
ipsi DE; & AC, ipsi DF; Angulus uero A, maior si an-
gulo EDF. Dico basin BC, maiorem esse base EF. Ad li-

neam enim DE, ad eiusque pun-
ctũ D, constituatur angulus EDG,
æqualis angulo A; (cadetque recta
DG, extra triangulum DEF, cum
angulus EDF, minor ponatur an-
gulo A) ponaturque DG, æqualis

ipsi DF, hoc est, ipsi AC. Ducta deinde recta EG, cadet
ea aut supra rectam EF, aut in ipsam, aut infra ipsam. Ca-
dat primo supra EF, ducaturque recta FG. Quia ergo la-
tera AB, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG utrumque;
utrique, & angulus A, æqualis angulo EDG, per constru-
ctionem; Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo
latera DF, DG, inter se sunt æqualia; erunt anguli DFG,
DGF, æquales: Est autem angulus DGF, maior angulo
EGF: Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, ma-
ior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eo-
dem angulo EGF. In triangulo igitur EFG, maius erit la-
tus EG, latere EF: Est autem ostensum EG, æquale esse
ipsi BC. Maior igitur erit quoque
BC, quam EF. Quod est propo-
situm.

CADAT secundo EG, in ip-
sam EF. Et quia rursus, ut prius,
basis EG, æqualis est basi BC: Et

EG, maior quam EF: erit & BC, maior, quam EF, quod
est propositum.

CADAT tertio EG, infra EF, producanturque rectæ
DF, DG, usque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit au-
tem rursus, ut prius, basis EG, basi BC, æqualis. Deinde
quia duo latera DF, DG, æqualia sunt inter se, per constru-
ctionem

23. primi

3. primi

4. primi

5. primi

9. prom.

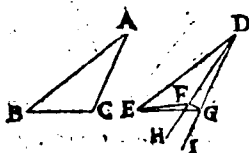
19. primi

4. primi.

9. prom.

4. primi.

tionem, erūt anguli GFH , FGI , infra basin FG , æqua-
les: Est autem angulus FGI ,
maior angulo EGE : Igitur &
angulus GFH , eodem angulo
 EGE , maior erit. Quare multo
maior erit totus angulus EGF ,
eodem angulo FGI . In trian-
gulo ergo EGF , maior erit la-
tus EG , latere EF . Est autem ostensum EG , æquale esse
ipsi BC . Maior igitur erit quoque BC , basi EF . Si
igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod
erat ostendendum.



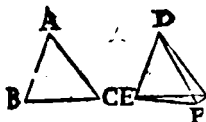
5. primi.
2. prout.

9. primi.

SCHOLIUM.

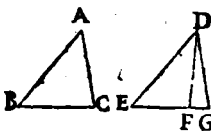
Si quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo,
quod duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus
alterius trianguli, verumque utrique, & anguli contenti di-
stis lateribus æquales, concluderet non solum æqualitatem ba-
sium, verum etiam triangulorum, & reliquorum angularum;
hic autem ex eo, quod duo latera unius trianguli æqualia sint
duobus lateribus alterius trianguli, verumque utrique, anguli
vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum
inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum
angularum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide
peritissimò Geometra esse factum: Nam ex antecedente huius
theorematismis semper consequitur basium inæqualitas, ita ut ba-
sis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assump-
tis est maior, superet basin alterius trianguli, cuius angulus
minor existit, ut demonstratum est: Non autem necesse est,
triangulum illud maius hoc esse. Ut enim clarissime ex Pro-
clo demonstrabimus ad propos 37 huius primi libri, Triangulum
maiorem habent angulum aliquando æquale est triangulo mi-
nore habenti angulum, aliquando uero minus eodem, & ali-
quando maius: Non igitur potuit in uniuersum inferri, ex
eo, quod angulus unius trianguli maior est angulo alterius,
triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit; modo mi-
nus & modo maius. Idem dicti potest de angulis reliquis:
Nam in prima figura huius theorematismis angulus ABC , mi-
nor

9. prom.



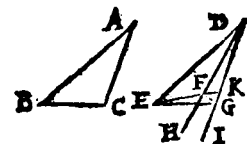
DEF, aequalis, per 4.

6. primi.



DEF propterea quod angulus DEG. (aequalis existens per 4. propos. angulo ABC,) maior sit eodem angulo DEF totum parte: Sed angulus ACB,

9. prom.



6. primi.

nor est semper angulo DEF, cum angulus DEG, (qui aequalis est, per 4. propos. angulo ABC,) minor sit eodem angulo DEF, pars totum. In secunda autem figura, existit quidem angulus ABC, angulo DEF, aequalis, per 4. propos. At vero angulus ACB, minor est angulo DFE, cum angulus DFE, maior sit angulo DGF, externus interno, & opposito; & angulus DGF, aequalis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, maior quidem est angulo DEF propterea quod angulus DEG. (aequalis existens per 4. propos. angulo ABC,) maior sit eodem angulo DEF totum parte: Sed angulus ACB, minor est angulo DFE. Nam si recta EF, producat in K, fiet angulus DFE, maior angulo DKE, externus interno; Est autem & angulus DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. propos. aequalis est angulo ACB. Quare neque certi quicquam colligi posuit de inaequalitate reliquorum angulorum, cum modo unus altera sit maior, modo minor, & modo aequalis.

25.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habuerint, utrumque utriusque, basin vero basi maiorem: Et angulum sub aequalibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

Duo latera AB, AC, trianguli ABC, aequalia sint duobus

duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, utrumque
 utrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis au-
 tem BC, maior sit base EF. Dico angulum A, maiorem
 esse angulo D. Si enim non est an-
 gulus A maior angulo D, erit vel
 æqualis, vel minor. Si dicatur esse
 æqualis, cum etiam duo latera cir-
 ca A, æqualia sint duobus lateribus
 circa D, utrumque utrique, per hy-
 pothesin, erit & basis BC, æqualis basi EF; quod est ab-
 surdum; Ponitur enim basis BC, base EF, maior: Si uero
 angulus A, dicatur esse minor angulo D, erit, propter æqua-
 litatem laterum circa istos angulos, basis EF, maior basi
 BC; quod magis est absurdum, cum EF ponatur esse mi-
 nor quam BC. Quare cum angulus A, neque possit æqua-
 lis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo
 triângula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint &c.
 Quod erat ostendendum.



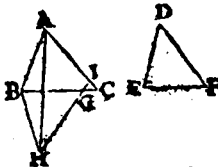
4. primi.

4. primi.

S C H O L I O N.

THEOREMA hoc conuersum est precedentis. In eo enim
 ex maiori angulo demonstratum est basin illi respondentem, esse
 maiorem. In hac autem ex maiori basi ostensum fuit angulum
 illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum
 hac duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata
 sunt in propos. 18. & 19. Nam in 19 demonstratum est, in
 uno eodemque triangulo maiori angulo maius latius respondere:
 At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis,
 quorum duo latera unius æqualia sunt duobus lateribus alte-
 rius &c. Idemque discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

MENBLAVS Alexandrinus, neque Proclus, demon-
 strat hoc istud theorema ostensue, hac
 ratione. Pofitis eisdem triangulis,
 ex base maiore BC, abscindatur re-
 cta BG, æqualis basi minori EF.
 Fiat quoque angulus GBH æqua-
 lis angulo DEF, & sit BH, æqua-
 lis ipsi BA, atque adeo ipsi DE,



3. primi.

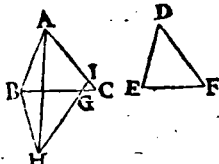
3. primi.

3. primi.

duca.

ducaturq; recta per G, ex H, secans AC, in I. Quoniam igitur
duo latera BA, BH, equalia sunt, erunt anguli BAH,

5. primi



4. primi

9. pron.

8. primi

4. pron.

BHA, equalia. Rursus quia latera BG, BH, equalia sunt lateribus EF, ED, utrumque utrique, & angulus GBH, equalis angulo DEF, per constructionem; erit basis HG, basi DE, atque adeo ipsi AC, equalis, angulusque GHB,

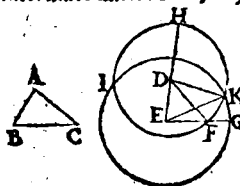
angulo EDF. Et quoniam recta HI, maior est quam HG, quae est equalis ipsi AC, erit quoque maior HI, quam AC; Sed AC, maior est adhuc, quam AI; Multo ergo maior erit HI, quam AI. Quare angulus IAH, maior erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui ostensi sunt aequales, fiet totus angulus BAC, totus angulo BHG, maior: Sed angulus BHG, demonstratus fuit equalis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus BAC, angulo D, quod est propositum.

3. primi

15. def.

2. pron.

10. prim



ED, ad H, in circumferentiam. Quoniam igitur DH, est equalis ipsi DE, erit quoque DH, equalis ipsi AC. Additis igitur aequalibus DE, AB, fient AC, AB, simul aequales toti HE: Sed AC, AB, simul maiores sunt quam BC, atque adeo quam EG; Igi-

tur, & HE, maior erit, quam EG. Quare circulus descriptus ex centro E, & intervallo EG, intersecabit rectam EH atque adeo circumferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectae DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, equalia sunt duobus lateribus DE, DK, utrumque utrique, (est enim) K, aequale ipsi DE, per definitionem circuli; DE, autem positum est aequale lateri AC.) & basis BC, basi EK, equalis; (cum EK, equalis sit ipsi EG, per definitionem circuli; EG, vero recta per constructionem facta sit

equalis

æqualis basi B C.) Erit angulus B A C, angulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior est angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior exister. Quod est propositum.

8 primi
9. prem.

THEOR. 17. PROPOS. 26.

26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumq; latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

S I N T duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, uterque vtrique, hoc est B, ipsi E, & C, ipsi E F D; Sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est A B, ipsi D E & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B non est æquale lateri D E, sit D E, maius. a quo abscindatur recta linea E G, R



æqualis rectæ lineæ A B, ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesein; Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D; Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars totius Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale. Quamobrem, cum

3. primi

4. primi

4. primi

cū latera AB, BC æqualia sint lateribus DE, EE , utrumque utrique, & anguli contenti B , & E , æquales; erunt & bases AC, DF , & anguli reliqui A , & D , æquales. Quod est propositum.

3. primi



4. primi

1.6. primi

SINT secundo latera AB, DE , subtendentia æquales angulos C , & EFD ; inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA , reliquis lateribus EF, FD , esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, BC , ipsi EF , & CA , ipsi FD ; reliquumque angulum A , reliquo angulo D . Si enim latus BC , non est æquale lateri EF , sit EF , maior; ex quo firmatur recta EG , æqualis ipsi BC , ducaturque recta DG . Quoniam igitur latera AB, BC , æqualia sunt lateribus DE, EG , utrumque utrique, & anguli contenti B , & E , æquales, per hypothesin; Erit angulus C , angulo EGD , æqualis: Ponitur autem angulus C , angulo EFD , æqualis; igitur & angulus EGD , angulo eidem EFD , æqualis erit, exterius interno, & opposito, quod est absurdum. Est enim maior. Non ergo est latus BC , lateri EF , inæquale. Quod circa, ut prius, colligetur institutum, ex 4. propositione huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM

PRIOR huius theorematum pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsi consentiunt, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super basibus. Nam in priori parte huius theorematum ex æqualitate basium BC, EF , & angulorum super has basibus, demonstratum est, reliqua latera & anguli reliquis lateribus & angulis æqualia esse, reliquumque angulum reli-



quo angulo D . Quod quidem alia nos ratione eam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus

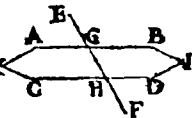
THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

27.

SI in duas rectas lineas recta incidens
linea alternatim angulos æquales inter se fe-
cerit : parallelæ erūt inter se illæ rectæ lineæ.

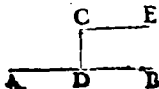
IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat an-
gulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico li-
neas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ,
coibunt tandem, si producantur infinite. Conveniant er-
go ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur trian-
gulum est G I H, (cum A B, recta
continuata sit, item recta C D,
usque ad punctum I,) & angulus
A G H, positus est æqualis angulo
D H G, erit externus angulus A G H,
æqualis interno, & opposito D H G;



quod est absurdum ; quoniam externus interno maior est 16. primi
Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in pun-
cto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G,
æqualis interno, & opposito A G H. quod est absurdum.
Non igitur coibunt lineæ A B, C D ; Quare parallelæ erūt.
Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G,
æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas.
Si igitur in duas rectas lineas recta incidens &c. Quod erat
ostendendum.

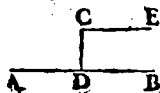
SCHOLIUM.

NECESSARIUM est, ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eo-
dem existant plano, ut ex definitione constet : Quare non sa-
tis est duos angulos alternos æquales inter se esse, ut duæ lineæ
probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in uno, eodemque
existere plano. Fieri enim potest, ut lineæ
rectæ incidēs in duas rectas nō in eodē pla-
no existentes, faciat alternos angulos æqua-
les. Sit enim C D, perpendicularis ad A B,
rectam, quæ in subiecto plano existit ; &c.



ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita ut punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito perspicuum est, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D, A D C, alternos equales, cum sint recti, & tamen C E, A B, non sunt parallela, quod non in eodem existant plano. Non

apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem: in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In undecimo vero libro & alijs, qui ipsum sequuntur, monebis semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diversis planis; quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diversa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.

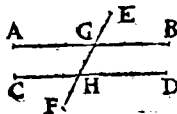


28.

THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelae erunt inter se ipsae rectae lineae.

IN duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C, & eodem angulo E G A, æqualis est angulus H G B; erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales: Quare lineae A B, C D, parallelae erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D.



15. primi
1. prop.
27. primi

S E C V N.

SECUNDO faciat recta EF, angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus, rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis AGE, AGH, æquales. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad easdem partes, æqualis. Quare ut iam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallele. Idem ostenderetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum.

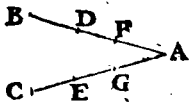
13. primi.

SCHOLIUM.

IAMDUDUM pronunciatum undecimum a principium numero reiecitur. Cum igitur sequens propositio 29. illi innisatur, ita ut absq; eo demonstrari non possit, necesse est, ut illud ex hactenus demonstratis theorematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, cum Proclo confirmemus, ut antea polliciti sumus. Hoc autem facile prestabimus, si prius duo explicemus, quorum primum hoc sit.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.

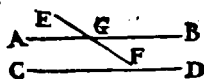
EXEANT a puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quàm D, & E, & ita deinceps, si producantur ultra rectæ lineæ AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, angeri posses eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ



sex. 35.

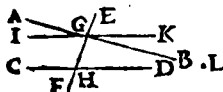
ultra produci, quod est absurdum. cum ponantur infinite iam esse producta. Quare si dicta linea AB, AC producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronuntiatio vsus est & Aristoteles lib. 1. de celo, ubi demonstravit, mundum non esse infinitum. Secundum, quod debet explicari, ita se habet.

Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productam secabit.



SINT due parallela AB, CD , & recta EF , secet ipsam AB , in G . Dico rectam EF , si producat. securam esse quoq; ipsam CD . Quoniam due recte GB, GF , in puncto G , angulum faciunt. si producantur infinite, excedunt omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela AB a parallela CD , distat, cum hæc distantia sit finita, alius enim non essent lineæ parallela. Quare quando distantia $GB, a GF$, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam GF , productam secuisse rectam CD . Nam quandiu GF , continebitur inter duas parallelas, minori distantia a GB , remouebitur, quam CD , ab eadem GB , ut constet. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, undecimum pronuntiatum.

Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.



IN rectas AB, CD , incidens recta EF , faciat internos angulos ad partes B , & D , ut BGH, DHG , duobus rectis minores. Dico re-

co re-

to rectas AB, CD , coire ad easdem partes $B, \& D$. Quoniam duo anguli BGH, DHG , minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli DHG, DHF , duobus rectis aequales; Erunt duo anguli DHG, DHF , maiores duobus angulis DHG, BGH . Ablato ergo communi angulo DHG remanebit angulus DHF , maior angulo BGH . Si igitur ad rectam FG , & ad punctum G , constitutur angulus KGH , equalis angulo DHF , cadet GK supra $G B$, secabisq; producta rectam AB . Quoniam igitur in duas rectas IK, CD , recta incidens EF , facit angulum externum DHF , & aequalem interno, & opposito KGH ; Erunt rectae IK, CD , parallelae. Secas autem recta AB , ipsam IK , in G ; Producta igitur secabit quoque ipsam CD , ut demonstratum est. Quare AB , cum CD , conveniet ad partes $B, \& D$, nimirum in puncto L , quod est propositum.

13. primi.

5. prop.

23. primi.

28. primi.

Quamvis autem optime a Proclo demonstratum sit videri hoc pronuntiandum, ut iure inter theoremata possit referri; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, volumus eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendens, tanquam pronuntiatio, praesertim cum facile ei assensus praeberi queas, intellecta prius recte propositione 28. Si enim linea recta proposita parallela sunt, ita ut nunquam coeant, sed semper aequali inter se distantia progrediantur, etiam si infinite producantur, quando recta in eas incidens facit duos angulos internos, ad easdem partes duobus rectis aequales, ut demonstratum fuit; quis non videt, si eadem recta incidens in duas rectas faciat angulos internos, ad easdem partes duobus rectis minores, alteram alteri appropinquare, ad eas partes, ad quas sunt interni anguli duobus rectis minores; quandoquidem aequali distantia procederent, si idem anguli paulo maiores essent, duobus videlicet rectis aequales, ut haec propositio 28. demonstravit?

28. primi.

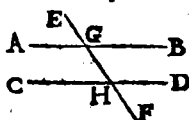
THEOR. 20. PROPOS. 29.

29.

IN parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se aequa-

les efficit ; & externum interno , & opposi-
fito , & ad easdem partes æqualem ; & in-
ternos , & ad easdem partes , duobus re-
ctis æquales facit .

In parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primū,
angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim
non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam



igitur angulus A G H, maior est an-
gulo D H G, si addatur communis
angulus B G H, erunt duo A G H,
B G H, maiores duobus D H G, B G H :
At duo A G H, B G H, æquales sunt
duobus rectis ; Igitur duo D H G,

B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interi-
ni, & ad easdem partes B, & D, coibunt lineæ A B, C D, ad
eas partes. quod est absurdum, cum ponantur esse paral-
lelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G :
Sed neq; minor ; Eadem enim ratione ostenderetur rectas
coire ad partes A, & C : Igitur æquales erunt anguli alterni
A G H, D H G. Eadēq; est ratio de angulis alternis B G H,
C H G.

Dico secundo, angulum externum A G E, æqualem
esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam
angulo B G H, æqualis est alternus C H G, ut ostensum
est ; & eidem B G H, æqualis est angulus A G E ; Erunt an-
guli A G E, C H G, inter se quoq; æquales. Eodem modo
demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo
D H G.

Dico tertio, angulos internos ad easdem partes,
A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniam osten-
sum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo
C H G, interno ; si addatur communis A G H, erunt duo
A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales : sed duo
A G E, A G H, æquales sunt duobus rectis ; Igitur & duo
anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt . Eo-
dem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æ-
quales . In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea,

& alter-

4. pron.
13. primi.

11. pron.

15. primi.
1. pron.

2. pron.

13. primi.

& alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIION.

CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, ut perspicuum est.

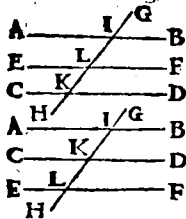
THEOR. 21. PROPOS. 30.

30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ A B, C D, eidem rectæ E F, parallelæ; Di-
co & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam
omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse planæ, (Nam pro-
pos. 9. undecimi libri agitur de lineis in diuersis planis) du-
catur recta G H, secans A B, in I; C D, in K; & E F, in L.

Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, erit angulus
A I L, alterno F L I, æqualis. Rur-
sus quia C D, ponitur etiam parallela
ipsi E F, erit angulus D K I, eidem
angulo F L I, nempe internus exter-
no, vel externus interno, æqualis.
Quare anguli A I L, D K I, æquales
inter se quoque erunt. Cum igitur sint
alterni, erunt rectæ A B, C D, paralle-
læ inter se. Quæ igitur eidem rectæ li-
neæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demon-
strandum erat.



29. primi.

29. prim.

1. pron.

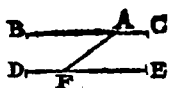
27. primi.

SCHOLIION.

QVOD si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas es-
se rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendū
est, duas A I, B I, non esse duas lineas, sed partes tantum
vnius lineæ. Conspiciendum enim est animo, quælibet paralle-
las infinitæ esse productas; Cõstat aut A I, productâ coincidere
cum B I. Quamobrem, quæ eidem rectæ lineæ parallela, &

G 3 inter

inter se sunt parallelæ, Vel certe vnâ, & eandem lineam constitunt, quando inter se coeunt. Quod ita demonstrabitur. Sint duæ rectæ AB, AC , coeuntes in A , parallelæ ipsi DE . Dico illas in rectum esse constitutas.



Ex puncto enim A , ducatur recta AF , faciens DE in F , vtrunq;. Quoniam igitur AB, DE , sunt parallelæ, erunt anguli alterni BAF ,

FAE , æquales. Addito ergo communi angulo CAF , erunt duo anguli ad A , æquales duobus angulis CAF, AFE . Sed & duo æquales sunt duobus rectis cum sint interni inter duas parallelas; Igitur & duo anguli ad A , duobus erunt rectis æquales; propterea in rectum erunt constitutæ ipsæ AB, AC . Qd est propostum.

29. primi.

2. prop.

29. primi.

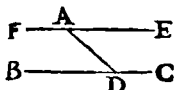
14. primi.

31.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

ADATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A , ducenda sit linea parallelæ lineæ BC . Ducatur ex A , ad BQ , linea AD , vtrunq; faciens angulum quemcunq; ADB ; Cui ad A , æqualis constitutatur EAD .



Dico igitur rectâ $E A$, extensam ad F , quantumlibet, parallelam esse ipsi BC . Cum enim anguli alterni ADB, DAE , æquales sint, per constructionem; Et sunt

rectæ BC, EF , parallelæ. A dato, igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod etiam faciendum.

23. primi.

27. primi.

SCHOLION.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, ut hac producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum lineâ datâ, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsâ lineâ datâ. Quomodo autem ab uno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares quam vnâ, ducuntur, ut ostendimus propo. 7. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datâ rectâ plures parallelæ, quâ vnâ, dari nequeunt. Si enim duc ducerent, conueniret

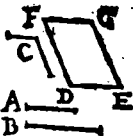
ipse

ipse in puncto eodem quod est absurdum, cum sint parallela.

Ex hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius unus angulorum equalis sit dato angulo rectilineo. Lateralq; angulū illū cōprehendens: datis duobus rectis lineis equalia.

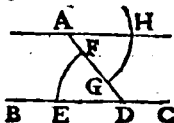
SINT enim data recta A, B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum equalem dato angulo rectilineo C. lateralq; circa illum angulum rectis A, B, equalia.

Sumpsa recta DE, qua recta A, sit equalis, fiat angulus EDF, angulo C, & recta DF, recta B, equalis. Deinde per E, agatur recta EG, ipsi DF, parallela, & per F, recta FG, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione; parallelogrammū erit DEGF. Quod cū ex cōstructione, habeat angulū D, angulo dato C, equalē, & latera DE, DF, circa dictū angulū D, datis rectis A, B, equalia; factū eris, qđ proponitur.



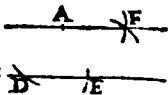
P R A X I S.

SIT ducenda parallela ipsi BC per punctum A. Ducasur recta AD, vicinq; ad BC & ex D & A ad idē internallū quodlibet describātur duo arcus ad diversas partes; vn⁹ ad partes B aliter ad partes C: Deinde officio circini arcus EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH equalis. Si igitur

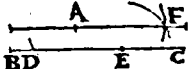


ex A, p H, recta ducā, eris hac parallela ipsi BC. Nā anguli EDF, HAG sunt equalis, ut constet ex praxi propos. 23. & c.

ALIO modo ducet per idē punctū A, datū linea parallela linea datā BC hac arte. Ex cētro A, ad q; odvis internallū describā arcus secā BC in pūcto D; & eodē intervallo ex D sumatur punctū E, in eadē recta BC: Deinde eodē intervallo ex A, & E, describānt duo arcus duo arcus secātes sē in F. Nā ducta recta AF, eris parallela rectis BC. Quoniam propter idē intervallum assumptū recta AF equalis est recta DF, & recta AD, recta EF, si ducerentur ha linea; eris AF, opposita DE, parallela.



ut postea demonstrabimus propos. 34. Quod si punctum A , vicinum fueris recte BC , commodius hac lege parallela opusata ducetur. Ex A , sumatur punctum D , in BC , ad quodvis intervallum; Et ex quovis puncto eiusdem recte BC , nempe E , quod tamen aliquantulum distet a puncto D . (Quo enim maior fueris distantia inter D , & E , eo rectius parallela ducetur) Eodem intervallo arcus describatur ad partes A : Deinde ex A , intervallo DE , aliter arcus descripsi feceris priorem arcum in F . Recta igitur ducta AF , erit parallela recte BC , ut prius; quia recta AF , aequalis est recte DE , ob idem intervallum; & recta AD , recte EF , si hæc recte ductæ essent, &c.



32.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

CVIVSCVNQUE trianguli vno latere producto : Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

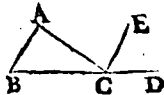
31. primi.

29. primi.

29. primi.

2. pron.

PRODUCATUR in triangulo ABC , latus BC , ad D . Dico primo, angulum externum ACD , æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A , & B . Ducatur enim ex C , linea CE , parallela recte AB . Quoniam igitur recta AC , incidit in parallelas AB , CE , erunt anguli alterni A , & ACE , æquales. Rursus, quia recta BD , in easdem parallelas incidit, erit angulus externus DCE , æqualis interno B ; Additis igitur æqualibus ACE , & A , fiet totus ACD , (qui ex duobus DCE , ACE , componitur) duobus A , & B , æqualis. Quod est propositum.



Dico secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A , B , & ACB , duobus esse rectis æquales. Cū enim

exter-

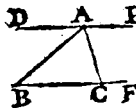
externus angulus ACD , ut ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A , & B ; si addatur communis ACB , erunt duo anguli ACD , ACB , æquales tribus A , B , & ACB : Sed duo ACD , ACB , æquales sunt duobus rectis; Igitur & tres interni A , B , ACB , duobus sunt rectis æquales. Quate cuiuscunque trianguli uno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

2. *prop.*
13. *primi.*

SCHOLIUM.

Cum demonstratum sit *prop.* 16. angulum externum cuiusvis trianguli maiorem esse utrobique interno, & opposito; Hic autem, eundem externum eisdem internis esse æqualem, perspicuum est, alterutrum interiorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo. Ut in triangulo proposito angulus A , superatur ab angulo ACD , angulo B ; Et angulus B , superatur ab eodem angulo ACD , angulo A , quandoquidem angulus ACD , duobus angulis A , & B , est æqualis. Rursum, quia demonstratum est *prop.* 17. duos angulos cuiuslibet trianguli, quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores; Hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse, manifestum est, duos a duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Ut in eodem triangulo, duo anguli A , & B , a duobus rectis deficient, angulo ACB , &c.

Omne porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, ut refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum ABC , & per punctum A , ducatur recta BC , parallela DE . Quoniam igitur anguli alterni DAB , & ABC , æquales sunt, si addantur æquales EAC , & ACB , (sunt enim & hi alterni) erunt duo anguli DAB , EAC , duobus ABC , ACB æquales. Addito ergo communi angulo BAC , erunt tres anguli DAB , BAC , CAE , æquales tribus angulis ABC , BAC , ACB . Sed anguli DAB , BAC , CAE , æquales sunt duobus rectis, ut constet ex *prop.* 13. Igitur & in triangulo ABC , anguli ABC , BAC , ACB , duobus sunt rectis æquales. quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum ACD , si latus BC , sit protra-



31. *primi.*
29. *primi.*
2. *prop.*

13. primi. *crū, aequalē esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam anguli ABC, BAC, ACB, aequales sunt duobus rectis, ut ostensum fuit; Sunt autem, & anguli ACF, ACB, duobus rectis aequales; Erunt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ACF, ACB, aequales. Dempto igitur communi angulo ACB, remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, aequalis.*
3. prom. 

- FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis; Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, ut angulus externus aequalis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CF, recta sitq; angulus ACF, aequalis duobus angulis ABC, BAC: Dico, rectas BC, CF, in directum iacere. Cū.n. angulus ACF, aequalis sit angulis ABC, BAC; si addatur communis angulus ACB, erunt anguli ACF, ACB, aequales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC, BAC, ACB, aequales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACF, ACB; duobus erunt rectis aequales. Quare BC, CF, vnam lineam rectam constituent.*
2. prom.
32. primi.
14. primi.

QVOT ANGV LIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

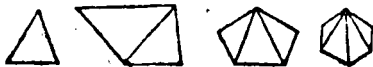
DVOBVS modis ex hac propof. 32. colligemus, quos nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figura cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusvis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli prima figura rectilinea æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli vero secunda figura rectilinea æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autē tertia figura rectilinea æquales sunt bis tri-

bi tribus rectis, sex videlicet rectis; Et sic de reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam due lineæ rectæ superficiem non concludunt, unde neque figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuram constitutionem requiruntur; Atque ita triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, erit prima inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus relinquitur unum; sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decima octava, cum binarius subtrahatur a 20. relinquitur 18. Idem indicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cum sis decima octava, habebis 20. angulos æquivalentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, ut dictum est. Ita quoque omnes 20. anguli figura 10. lateribus contenta, æquivalentibus 16. angulis rectis, cum talis figura sit octava inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula dividitur, quæ ipsa est inter figuras, seu quos ipsa habet angulos laterumque, binario dempto. Nam a quovis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, & solum ad duos propinquos angulos non possunt duci: Quare in tot triangula distribuetur quos ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse dividi in alia

triangula; quadrangulum vero in



duo secari; quinqueangulum in tria; sexangulum in quatuor. &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituant omnes angulos rectilineæ figuræ propositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis, perspicuum est omnes angulos figuræ cuiusvis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quos triagula dividitur, hoc est, quod ipsa est inter rectilineas figuras; Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.

Secundus modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figure rectilineæ, hic est,

OMNES anguli figure rectilineæ cuiusvis, æquales sunt bis tot rectis angulis, dem-

ptis

32. primi.

ptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

Hoc est, anguli cuiuslibet trianguli aequales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis: Ita etiā anguli figura continentis 20. latera, æqualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.



Demonstratio autē huius rei talis est. Si ab aliquo puncto intra figurā assumpto ad om-

32. primi.

nes angulos recta linea ducantur, efficiuntur tot triangula, quot latera, angulosue, figura ipsa continet: Cum igitur anguli cuiuscunque trianguli aequales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum aequales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt: At anguli circa punctum intra figuram assumptum non pertinent ad angulos figura rectilinea proposita, ut constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui anguli consiscentes angulos figura proposita, bis quoque tot rectis aequales, demptis illis circa punctum assumptum, quot latera, vel angulos continet figura: Sunt autem illi anguli circa dictū punctū aequales 4. rectis, ut collegimus ex propo. 15. Quamobrem anguli cuiusque figura bis tot rectis sunt aequales, ablati quatuor quot ipsa figura continet angulos, seu latera. quod est propositum.

33. primi.

Ex hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusvis rectilineæ producantur versus eandem partem, omnes angulos externos aequales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur cū duobus rectis, atque adeo omnes externi una cum omnibus internis aequales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosue figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis aequales, minus quatuor, ut demonstravimus: Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor rectis aequales, qui nimirum desunt internis angulis, ut interni, & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt.



Exemplum Intriangulo quocunque, anguli interni & externi simul aequales sunt sex rectis; Cum igitur interni du-

bis sint

bus sint rectis aequales, erunt soli externi aequales quatuor rectis. In quadrilatero, anguli externi, & interni simul aequales sunt octo rectis: Cum igitur interni soli aequales sint quatuor rectis, erunt & soli externi quatuor rectis aequales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni, & externi sunt aequales 10. rectis; quoniam vero interni adaequantur sex rectis, remanebunt externi aequales quatuor rectis. Quae omnia in appofitis figuris conſpiciuntur; Eademq; eſt ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

Si pentagoni ſingula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quzlibet duo extra coeant; efficiuntur quinq; anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis.

In pentagono A B C D E, latera in vtrâq; partem produâa coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K. æquales eſſe duobus rectis. In triangulo enim B H K, cum latus H B, ſit protractum ad F, erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppoſitis H, K, æqualis: Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppoſitis I, G. Quare duo anguli F B A, F A E, æquales ſunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinq; angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales ſunt duobus rectis. Igitur & quinq; anguli F, G, H, I, K, duobus ſunt rectis æquales. Quod eſt propoſitum.



32. primi.

2. pron.

32. primi.

COROLLARIUM. I.

Ex hæc propoſ. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli ſimul ſumptos æquales eſſe tribus angulis cuiuſq; alterius trianguli ſimul ſumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, æquales ſunt duobus angulis rectis. Unde ſi duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, & quinquangulaq; erunt ipſa triangula.

3. pron.

COR.

COROLLARIUM. II.

CONSTAT etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulos lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum; Nam reliqui duo simul conficiunt unum rectum. Quod si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet alterum esse semirecto minorem; Reliqui enim duo simul minores erant vno recto. Si deniq; dictus angulus extiterit acutus, vtrumq; reliquorum maiorem esse semirecto; Quoniam reliqui duo simul maiores erant vno recto.

COROLLARIUM. III.

PERSPICVVM quoq; est, si quemvis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti; Vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

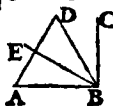
COROLLARIUM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangu-
la scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum, prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum deniq; tertiam partem vnius recti.

SCHOLIUM.

PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus ABC . Super rectam AB , constituatur triangulum æquilaterum ABD . Et quia per corollarium 3. angulus ABD , facit duas tertias partes anguli recti ABC ; erit angulus CBD , pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo ABD , bisariam, per rectam BE , erit vterque angulus ABE , EBD , tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus ABC , diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.

1. primi.



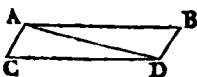
2. primi.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungūt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales; Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, utrumque utriusque, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.



29. primi.

4. primi.

27. primi.

SCHOLION.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, ut coniungentes sint & æquales & parallela. Nam si ad partes diversas coniungerentur, ut ad A, & D; Item ad B & C, neque coniungentes essent parallela unquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neque essent æquales, nisi raro admodum, ut ex sequenti propositione constabit.

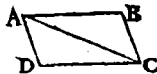
THEOR. 24. PROPOS. 34.

34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex
adverso

aduerso & latera, & anguli; atq; illa bifariam
secat diamteer.

S I T parallelogrammum $ABCD$, quale definiuimus
definitione 35. Dico latera opposita AB , DC , inter se esse
æqualia, nec non latera opposita AD , BC : Item angulos
oppositos B , & D , æquales inter se esse, nec non angulos op-
positos DAB , & DCB : Deniq; ducta diametro AC , pa-
rallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim AB ,



DC , sint parallele, erunt anguli alterni
 BAC , DCA , æquales. Rurs^o quia AD , BC ,
sunt parallele, erunt & anguli alterni BCA ,
 DAC , æquales. Itaq; cum duo anguli

BAC , BCA , trianguli ABC , æquales sint duobus angu-
lis DCA , DAC , trianguli ADC , utriq; utriq; & latus
 AC , dictis angulis adiacens commune utriq; triangulo; erit

recta AB , æqualis oppositæ rectæ DC , & recta BC , oppo-
sitæ rectæ AD . quod est primum. Erit rursus eadem de
causa angulus B , angulo D , æqualis. Et quia si æqualibus
angulis BAC , DCA , addantur æquales anguli BCA ,

DAC , toti quoq; anguli BAD , BCD , fiunt æquales;
constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æqua-
les. Quoniam vero duo latera AB , BC , trianguli ABC
æqualia sunt duobus lateribus CD , DA , trianguli CDA ,

utrumq; utriq; & angulus B , angulo D , æqualis, ut iam
ostendimus; erunt triangula ABC , CDA , æqualia, idcoq;
parallelogrammum $ABCD$, diuisum bifariam a diametro
 AC , quod tertio proponebatur. Parallelogrammorum
igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso &c.
Quod ostendendum erat.

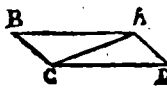
SCHOLIUM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogram-
mum a diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In
Quadrato enim, & Rhomboduntaxat, anguli etiam bifariam
diuiduntur a diametro: At in figura Altera parte longiori, &
in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erant,
si prius ostenderemus, quas uor hasce figuras, Quadratam,
Alteram

Altera pars longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

O M N E quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

S I N T in quadrilatero $A B C D$, latera opposita $A B$, $D C$, æqualia; Item opposita latera $A D$, $B C$. Dico $A B C D$, esse parallelogrammum; hoc est, lineas $A B$, $D C$, esse parallelas; Itemq; lineas $A D$, $B C$. Ducta enim diametro $A C$, erunt duo latera $A B$, $B C$ trianguli $A B C$, æqualia duobus lateribus $C D$, $D A$, trianguli $C D A$, utrumque utrique, & basis $A C$, communis; igitur erit angulus B , angulo D , æqualis. Rursus quia latera $A B$, $B C$, æqualia sunt lateribus $C D$, $D A$, utrumque utrique, & anguli B , D , ostensi æquales, erit angulus $B A C$, angulo $D C A$, alterno æqualis, & angulus $B C A$ alterno angulo $D A C$. Quare erunt $A B$, & $D C$, parallela; Item $A D$, & $B C$, quod est propositum.



8. primi

4. primi

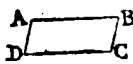
27. primi

H I N C constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, ut manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum eris, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Convertis autem hoc theorema primam partem propositionis 34. ut patet.

Secundum theorema tale est.

O M N E quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

S I N T in quadrilatero $A B C D$, anguli oppositi A , & C , æquales; Item oppositi anguli B , & D . Dico $A B C D$, esse parallelogrammum; hoc est, lineas $A B$, $D C$ esse parallelas; Itemq; lineas $A D$, $B C$. Nam si æqualibus angulis A , & C , addantur æquales anguli B , & D ; erunt duo anguli A , & B , duobus angulis D , & C æquales, & idcirco anguli A , & B , dimidium facient quatuor angulorum A , B , C , & D . Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, ut ad propos. 32. demon-



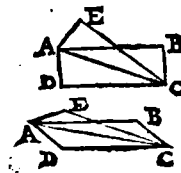
2. prop.

H sitamus.

28. prim

struimus, erunt duo A , & B , duobus rectis aequales. Quare $A D$, $B C$, parallelae sunt. Eadē ratione erunt $A B$, $D C$, parallelae. Erunt. n. duo quoq; anguli A , & D , duobus angulis B , et C , aequales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiā manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi aequales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi aequales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.

H O C theorema convertit secundam partem propositionis 34. ut constat. Tertia autem pars non potest converti. Nam & trapezium aliquod bisariam secari potest a diametro, & examen non est parallelogrammum. Sis enim altera parte longius, vel Rhomboides $A B C D$, quod parallelogrammum esse ostensum est, in quo ducta diametro $A C$, constitutur super



34. primi

$A C$, triangulo $A B C$, aequale triangulū $A E C$, inverso ordine, ita ut latus $C E$, sit aequale lateri $A B$, & $A E$, ipsi $C B$, fiatq; trapezium $A E C D$. Quoniam vero triangulū $A B C$, triangulo $A D C$, aequale est, quod diameter $A C$, bisariam fecit parallelogrammū $D B$: Erit et triangulū $A E C$, triangulo $A D C$, aequale: Ac proinde trapezium $A E C D$, bisariam dividetur a diametro $A C$.

Q U O D si quadrilaterum aliquod dividatur bisariam ab utraque diametro, illud parallelogrammum erit, ut ostendamus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

O M N E quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

S I N T in quadrilatero $A B C D$, omnes quatuor anguli recti; Dico ipsum esse parallelogrammum; hoc est, lineas $A B$, $D C$, esse parallelas; Itemque $A D$, $B C$. Quoniam duo anguli A , & B , aequales sunt duobus rectis. cum sint duo recti; erunt $A D$, $B C$ parallelæ:

Fodem modo erunt $A B$, $D C$, parallelae; atque adeo $A B C D$, parallelogrammum, quod est propositum.

H I N C rursum constat, Quadratū, & Altera parte longius

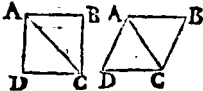
28 primi

gius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant
recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

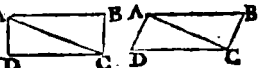
H I S in hunc modum demonstratis. Quadratum scilicet,
Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse paralle
logramma, facile ostendemus angulos Quadrati, & Rhombi,
bisariam secari a diametro; Angulos vero figura Altera parte
longioris, & Rhomboidis, non bisariam, ut paulo ante mo
nuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus $A B C D$, in
quo diameter $A C$. Quoniam igitur duo
lateralia $B A, A C$, trianguli $B A C$, aqua
lia sunt duobus lateralibus $D A, A C$,
trianguli $D A C$, utrumque utrique, D C D C
& basi $B C$, basi $D C$; (sunt enim he figurae aequilaterae) erunt
anguli $B A C, D A C$, aequales; Quare angulus $B A D$, di
uiditur bisariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos an
gulos bisariam secari a diametro.

S I T rursus, Altera parte longius, vel Rhomboides; $A B$
 $C D$, in quo diameter $A C$, sitq; A $B A$ C D
maius latus $A B$. Quoniam igitur in triangulo $A B C$, latus
 $A B$, maius est latere $B C$, erit
angulus $B C A$, maior angulo $B A C$: Est autem angulus
 $B C A$, aequalis angulo $D A C$, alternos quod $B C, A D$ paral
lela sint. (Est enim $A B C D$, ostensum esse parallelogrammum.)
Igitur & angulus $D A C$, maior erit angulo $B A C$. Atque
propterea angulus $B A D$, inaequaliter diuiditur a diametro
 $A C$. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem ap
posito Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum
parallelogramma bisariam a diametro secari, non autem &
angulos.

E O D E M fere pacto ostendemus, quod diametros in Qua
drato, & Altera parte longiore aequales esse; At vero in Rhom
bo, & Rhomboidem inaequales, maiorem
quidem eam quae angulos acutos, mi
norem vero eam, quae obtusos angulos
disperit. Sit. n. quadratum, vel altera
parte longius $A B C D$, in quo diame
tri $A C, B D$, quas dico esse aequales. Cum. n. duo latera $A B, B C$,
trianguli $A B C$, aequalia sint duobus lateralibus $A B, A D$, trianguli

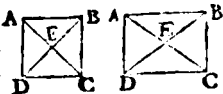


8. primi



18. primi

29. primi



H 2

BAD,

4. primi

B A D, utrumque utrique, & angulus A B C, angulo B A D, quia uterque rectus; Eris basis A C, basi B D, equalis: A C proinde diametri in quadrato, & figura altera pario longiore aequales sunt.

29. primi



S I T rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri A C B D, sitq; angulus B A D, maior, A B C, minor. Non enim aequales sunt, quia alias uterque esset rectus, cum ambo aequales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra de-

21. primi

initiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem esse diametro A C. Quoniam duo latera A B, A D, trianguli B A D, aequalia sunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, utrumque utrique, & angulus B A D, angulo A B C, maior existit; erit basis B D, maior base A C. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 12. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quae coniungunt parallelas aequales ad easdem partes, aequales esse, ut ibidem annotavimus. Nam in Rhombo, & Rhomboides recta A C, B D, inaequales sunt, licet coniungant parallelas A B, D C, quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, ut perspicuum est.

29. primi

34. primi

26. primi

I N omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bisariam dividunt. Cum enim duo anguli E A D, E D A, trianguli A E D, aequales sint alternis angulis E C B, E B C, trianguli B E C, uterque utrique; & latus A D, aequale lateri B C, opposito; Erit, & A E recta recta C E, & recta D E, recta B F, equalis. Quare utraque diameter bisariam dividitur in puncto E.

H V I V S autem, quod modo diximus, conversum etiam demonstrabimus, nimirum.

O M N E quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bisariam dividunt, parallelogrammum est.

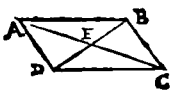
I N quadrilatero enim A B C D, diametri A C B D, se mutuo bisariam dividant in E. Dico A B C D, parallelogrammum esse. Cum enim latera A E, E B trianguli A E B, aequalia sint lateribus C E, E D, trianguli C E D; & anguli con-

tenti

sentis ad uerticem E, aequales quoque :

Erunt & bases AB CD, aequales, & angulus ABE, angulo alterno CDE, aequalis. Quare rectae AB, CD, parallelae sunt. Eadem ratione parallela ostenduntur AD, CB. Parallelogrammum ergo est ABCD.

H v c quoque referri potest hoc theorema.



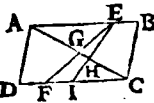
15. primi

4. primi

27. primi

R E C T A linea fecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque : & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

I N parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariam secat recta EF, in puncto G : Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam angulus EAG, aequalis est angulo alterno FCG, & angulus EGA, angulo FGC, Est autem & latus AG, lateri CG, aequale per hypotesin ; Erunt & latera EG, FG, aequalia. Quare cum latera AG, GE, aequalia sint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti aequales ; erunt trianguula AGE, CGF, aequalia. Addita igitur communi quantitate BC.



29. primi

15. primi

26. primi

4. primi

GE, erit triangulum ABC, trapezio BCFE, aequale ; Sed triangulum ABC, dimidium est parallelogrammi ABCD, Igitur & trapezium BCFE, dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoque recta EF, parallelogrammum bifariam secat.

2. pron.

34. primi

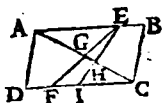
S E C E T iam EF, parallelogrammum bifariam ; Dico, & diametrum AC, bifariam secari in G. Si enim non bifariam diuiditur in G, diuidatur bifariam in alio puncto, ut in H, per quod ducatur recta EHI ; Eritque, ut iam demonstrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo aequale trapezio EFCB quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pari toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto. quod erat propositum.

10. primi

H I N C facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum,

H 3 num,

mū, vel extra, quod samē non sit in diametro, nisi ipsum fecer dia-



metrū bifariā; quā ratione ab illo puncto li-
nea duci debeat, q̄ parallelogrāmū bifariā
secet Si enim diameter ducatur, & a pun-
cto dato per medium punctum diametri re-
cta ducatur, factum erit, quod proponitur.

Vt si punctum sit E, in latere AB, ducenda est recta EF, per
G punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & sic
de alijs punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non
iniucundum. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum
facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem
collocare, quæ cum altera illarū faciat angulum
cuius angulo dato æqualem. Oportet autem
hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis
continetur, minorem esse duobus rectis.

DV AB rectæ infinite AB, AC contineant angulū BAC,
sitq; data recta finita quacunque D, & angulus datus E, hac
lege, ut duo anguli F, & BAC, minores sint duobus rectis:



Oportet igitur inter rectas AB, AC, collo-
care rectam æqualem quidem rectæ D, cū
alternis utro illarū, nimirū cum AC,
facientem angulum æqualem angulo dato
E. Fiat angulus CAF, æqualis angulo E,

& producta FA, ad G, sit AG, æqualis rectæ D; & per G,
ducatur GB, parallela ipsi AC, secans AB, in B: Deinde
per B, ducatur BC, parallela ipsi AG, secans AC, in C. Di-
co rectam BC, collocatam inter rectas AB, AC, æqualem
esse rectæ D, angulumq; BCA, angulo E. Cum enim paralle-
logrammum sit, per constructionem, ACBG, erit recta BC,
rectæ GA, æqualis; At GA, æqualis est, per constructionē,
rectæ D; Igitur & BC, rectæ D, æqualis erit. Rursus quia
angulus BCA, angulo alterno CAF, æqualis est; & eidem
angulo CAF, æqualis est, per constructionem, angulus E;
erunt anguli E, & BCA, æquales. Quod est propositum.

Ceterum

23. primi.

3. primi

31. primi

34. primi.

32. primi

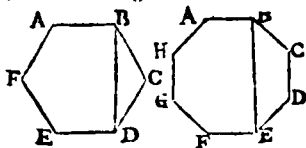
29. primi.

Ceterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulū ABC , si anguli BAC , & BCA aequales essent duobus rectis, vel maiores, ut constat ex propos. 17. vel 32.

EX PROCLIO.

In omni figura rectilinea latera habens numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æqui angula; erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex utraque parte latera habent æqualia numero; ut in hexagono $ABCDEF$, latera opposita erunt AB , & DE ; quoniam tam ad partes A , & E , duo sunt latera, quam ad partes B , & D . In octogono uero $ABCDEFGH$, latera opposita erunt AB , & FE , quia tam ad partes A , & F , tria sunt latera, quam ad partes B , & E . Et sic in alijs figuris æquilateris parium laterum, ex utraque parte oppositorum laterum, erunt tot latera, quot sunt in dimidio



numero laterum, minus uno. Ut in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur duo quælibet latera opposita esse parallela; AB , nimirum ipsi ED , in hexagono; & AB , ipsi FE , in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono BD , & in octogono BE . Et quoniam, ut in 32. propos. demonstravimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B , C , D , eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales: Sunt autem anguli BCD , CBD , CDB , trianguli BCD , duobus rectis æquales; Reliqui igitur anguli ABD , EDB , duobus rectis æquales erunt; Quare parallelæ erunt AB , & ED .

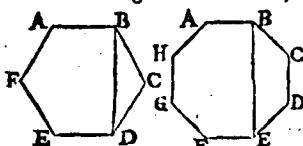
Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B , C , D , & H , sex rectis æquales. Sunt autem quatuor anguli quadrilateri $BCDE$, æquales quatuor rectis; Igitur duo reliqui anguli ABE , FEB , duobus erunt rectis æquales, adeo AB , FE , parallelæ erunt, eodem modo demonstrabitur in cæteris alijs

32. primi

28. primi

2. primi

figuris huiusmodi angulos duos ad lineā rectā extrema oppositorū laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam



in decagono autem ea lineā pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis; At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis: Ab istis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatēra, & æquianguli duodecim

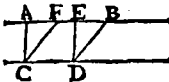
cim laterum, eadem lineā abscindet hexagonū, cuius anguli sunt octo rectis æquales; At sex anguli totius figure æquales sunt decē rectis; demptis igitur octo, remaneant duo recti, &c.

QVA M V I S autem omnis figura æquiangula pariter laterum habeat latera opposita parallelā, ut ostendimus; tam en tota quadrilatera figura latera opposita habens parallelā, ab Euclidē, & alijs Geometris parallelogrammum dici conuenit, propterea quē in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35. THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

INTER duas parallelas AB, CD, super basi CD, existant duo parallelogramma CDEA, CDBF; (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad areā, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo CDEA, recta AE æqualis est rectæ CD oppositæ; & eidem CD æqualis est FB, in parallelogrammo CDBF; Erunt AE,



34. primi

1. pron.

3. pron.

31. primi

29. pr. mi

4. primi

FB, inter se æquales: Demptā igitur communi FE, remanebit AF, ipsi EB, æqualis: Est autem & AC, ipsi ED, æqualis in parallelogrammo CDEA, & angulus BED, angulo FAC, externus interno. Quare trianguū FAC, triangulo BED, æquale erit: Addito igitur communi tra-

pazio

pez o C D E F, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F æquale. Quod est propositum.

C A D A T secundo punctum F, in punctum E; Dico rursus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia esse. Erunt enim ut prius, rectæ AE, E B, æquales, atque adeo triangula E A C, B E D, æqualia. Adduo igitur comuni triangulo C D E, fiet parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia.

C A D A T tertio punctum F ultra E, ita ut recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ A E, F B, sunt æquales; si communis addatur E F, erit tota A F, tota E B, æqualis, atque adeo triangulū F A C, triangulo B E D, æquale.

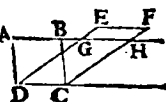
Ablato ergo cōmuni triângulo E G F, remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

CONVERTEMUS facile hanc propositionem, hoc modo.

PARALLELOGRAMMA æqualia; super eandem basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas.

S I N T duo parallelogramma æqualia A B C D, C D E F, super eandem basin C D, & ad easdem partes. Dico rectam A B productam, in directiō iacere ipsi E F, & propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim A B, producta vel cades infra E F, vel supra; C adat orimo infra, qualis est A H. Erut igitur parallelogrammum C D G H, æquale parallelogrammo A B C D; Ponitur



autem

2. pron.

4. primi

2. pron.

2. pron.

4. primi

3. pron.

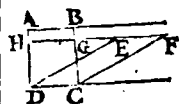
2. pron.

35. prin i

1. *pron.*

autem eidem parallelogrammo $ABCD$, æquale parallelogrammum $CDEF$; Quare parallelogramma $CDEF$, $CDHG$, æqualia erunt, totum, & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet AB , infra EF .

CADAT secundo AB , producta supra EF . Gades igitur FE , protracta infra AB : Quare, ut prius erunt parallelogramma $ABCD$, $CDHG$ æqualia, totum et pars, quod est absurdum. Idem absurdum consequeretur, si CF , DE , producerentur usque ad AB , protractam. Eademq; demonstratio conveniet omnibus cætionibus, qui occurrere possunt. hoc est, siue punctum E , sit ultra B siue non, ut perspicuum est. Non ergo cadet AB , supra EF ; sed nec infra, ut demonstratum est: ergo producta, in directum iacet ipsi EF ac proinde parallelogramma $ABCD$, $CDEF$, in eisdem sunt parallelis.

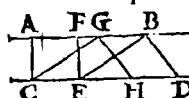


36.

THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma $ACEF$, $GHDB$, super æquales bases CE , HD , inter easdem parallelas AB , CD , Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarum



CE , GB , ad easdem partes hæc rectis CG , EB . Quoniam igitur recta CE , æqualis ponitur rectæ HD , & eidem HD , æqualis est GB . Erunt CE , GB , æquales inter se; sunt autem & parallelæ, per hypothesein: Quare & CG , EB , ipsas coniungentes parallelæ erunt, & æquales, idcirco; $CEBG$, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma $ACEF$, $GCEB$, sint inter easdem parallelas, & super eandem basin CE , erit parallelogrammum $ACEF$, parallelogrammo $GCEB$, æquale. Rursus quia parallelogramma $GCEB$, $GHDB$, sunt inter easdem parallelas, & super eandem basin GB , erit quoq; parallelogrammum $GHDB$,

34. *primi*

1. *pron.*

33. *primi.*

35. *primi.*

GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare 35. primi.
& parallelogramma ACEF, GHDB, inter se æqualia erūt.
Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, &c. Quod
ostendendum erat. 1. pron.

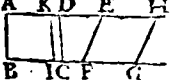
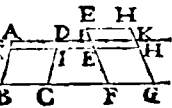
S C H O L I O N.

CONVERSVM huius theorematiss duplex est, ad hūc modum.

PARALLELOGRAMMA æqualia sup ba
ses æquales, & ad eadē partes constituta, in
ter eadē sunt parallelas: Et parallelogramma
æqualia inter eadē parallelas, si non eandē
habuerint basin, super æquales bases sunt con
stituta.

S I N T primo duo parallelogramma æqualia ABCD,
EFGH, super bases æquales BC, FG, & ad eadē partes
constituta; Dico ea esse inter eadē pa
rallelas, hoc est, AD, protractam cuire
in directum cum EH. Nam alias cadet
aut infra EH, aut supra. Quo posito se
quitur, totum esse æqualia, quē
admodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, &
figura facile demonstrat. Intelligende sunt autem bases æqua
les datæ in eadē linea recta BG.

S I N T secundo eadē parallelogramma æqualia inter
eadē parallelas AH, BG. Dico bases BC, FG, esse æqua
les. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, abscindatur
BI, æqualis rectæ FG, & ducatur IK, A K D E H
parallela ipsi CD: Fritq; parallelogrā
mum ABIK, æquale parallelogrammo
EFGH; & ideo parallelogrammo AB
CD, pars toti. quod est absurdum. Non ergo BC, maior est,
quam FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases BC,
FG, æquales sunt.



3. primi
31. primi.
36. primi

THEOR. 27. PROPQS. 37.

TRIANGVL. A super eadē basi cōsti

tuta,

37.

tuta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

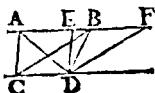
I N T E R parallelas A B, C D, & super basia C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D (Dicitur autẽ triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars unius, & angulus oppositus alteram tangit.) Dico ea esse æqualia. Per D, enim ducatur D E, parallela rectæ

31. primi.

35. primi

34. primi

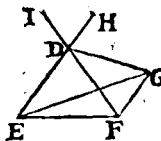
7. pron.



A C, & D E, parallela rectæ B C. Erunt igitur parallelogrãma A C D E, A C D F, æqualia; Sunt enim super eandem basim C D, & inter easdem parallelas: Sed horum dimidia sunt triangula A C D, B C D; quod A D B D, diametri bisariam secant parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

C O N V E R S A huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula quorũ duo latera unius æqualia sint duobus lateribus alterius, utrumque utriusque, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia; Id, quod in propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula A B C,



D E F, & latera A B, A C æqualia lateribus D E, D F, & angulus A, maior angulo E D F, siquẽ primo hi duo anguli duobus rectis æquales: Dico triangula esse

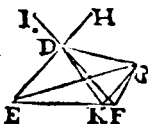
23. primi

æqualia. Producatũ enim E D, ad H, & F D, ad I. fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A, & recta D G, recta D F, seu A C; ducanturq; rectæ E G, G F. Quoniam igitur duo anguli A, & E D F, ponantur æquales duobus rectis; & angulus E D G, æqualis est angulo A; erunt & anguli E D G, E D F, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli

guli EDG GDH, duobus rectis aequales; Igitur anguli EDG, EDF, aequalis EDG, GDH, aequales erunt: Quare ablato communi angulo EDG, remanebit angulo EDF, aequalis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF, aequalis angulus HDI; Igitur & anguli GDH, HDI, aequales erunt, atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI. Rursus quia latera DF, DG, sunt equalia in triangulo DFG; erunt anguli DFG, DGF, aequales; qui cum aequales sint externo angulo GDI, erit uterlibet eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eiusdem anguli GDI: Quare anguli GDH, DGF, aequales erunt. Et quis sunt alteri inter EH, FG; erunt EH, FG, parallelæ. Quamobrem triangula DEG, DEF, equalia erunt, cum habeant eandem basin DE, sinique inter easdem parallelas DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG, æquale est triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, equalia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG; erit & triangulum ABC, triangulo DEF, æquale, quod est positum.

SINT secundo anguli A, & EDF, duobus rectis maiores; Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulū, min⁹ esse triangulo DEF.

Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I, fiatq; angulus EDG, aequalis angulo A, & recta DG, recta DF, sen



AC, aequalis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores; Sunt autem anguli EDG, GDH, aequales duobus rectis; Igitur anguli EDF, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH; Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero angulus EDF, angulo HDI, aequalis est, erit quoque HDI maior quā GDH; atque adeo GDH minor quam dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF, equalia sunt, erunt anguli DFG, DGF, aequales; qui cum sint aequales externo GDI, erit uterlibet

13. primi

3. pron.

15. primi

5. primi

32. primi

27. primi

27. primi

4. primi

23. primi

3. primi

13. primi

15. primi

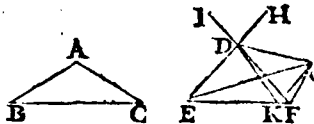
5. primi

32. primi

eorum,

eorum, nampe DGF, dimidium anguli GDI: Offensum est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdē GDI;

Quare DGF, maior erit, quam GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, equalis angulo alterno GDH: Erit ergo GK, parallela ipsi



23. primi.

27. primi.

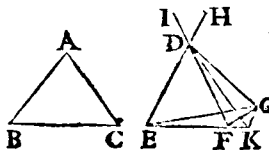
37. primi

4. primi

9. pron.

DE, secabitq; GK, rectā EF. Ducatur ex D, ad K, ubi GK, secat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, equale triangulo DEK. Quoniam autem triangulum DEG, equale est triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, equalia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, equale. Cum igitur DEK, minus sit triangulo DEF, erit quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus: Quod est propositum.

SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores: Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius esse triangulo DEF. Producaturs ED, ad H. & FD, ad I,



23. primi

fiatq; angulus EDG, equalis angulo A, & recta DG, recta DF, seu AC; ducanturq; recta EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF,

13. primi

15. primi

duobus rectis minores. Sunt autem anguli EDG, GDH, duobus rectis aequales; Igitur EDG, EDF minores sunt, quam EDG, GDH; deimproq; communi EDG, remanebit EDF, minor, quam GDH; Est uero EDF, equalis ipsi HDI. Quare & HDI, minor erit quam GDH, atque adeo GDH, maior est dimidio anguli GDI. Quoniam autem DGF, dimidium est eiusdē anguli GDI, ut iam supra offensum fuit; erit GDH, maior, quam DGF: Fiat igitur angulus DGK, equalis angulo GDH, ducta recta GK, q̄ secabit rectam EF, protractā in K, & ducatur recta DK: Eritque, ut prius, GK, parallela ipsi DE, triangulumq; DEG, triangulo DEK, equale: Est autem iterum DEG, equale ipsi ABC. Igitur & ABC, equale est ipsi DEK; Quocirca cum DEK, ma-

27. primi

37. primi

4. primi

9. pron.

ins fit quam DEF; erit & ABC, maius, quam, DEF;
Quod demonstrandum erat.

Ex his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum
collegerit inaequalitatem basium, non autem triangularum, ut
ibidem admonemus.

THEOR. 28. PROPOS. 38.

38.

TRIANGULA super æqualibus ba-
sibus constituta, & in eisdem parallelis, in-
ter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases
CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Di-
co ipsa esse æqualia. Ducatur. n. EG, pa-
rallela ipsi AC, & DH, ipsi BF; E. utiq;
parallelogramma ACEG, BFDH, æ-
qualia. Cum igitur horum dimidia sint
triangula ACE, BFD; erunt hæc inter
se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basi-
bus, &c. Quod erat ostendendum.



31. primi

36. primi

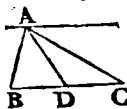
4. primi

7. primi.

SCHOLIUM.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITUR autem ex hac propositione, si a quouis
angulo trianguli dati linea recta ducatur di-
uidens latus oppositum bifariam, triangulum
quoque bifariam secari. Ducatur enim in
triangulo ABC, ex angulo A, recta AD,
diuidens bifariam latus BC, in D; Dico



triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per

A, du. aut parallela ipsi BC, erunt duo triangula

ABD, ADC, inter easdem paralle-
las, et super æquales bases;

Quare æqualia

erunt.

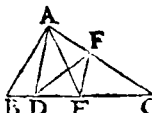
38. primi.

EX

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in uno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

Si τ triangulum ABC , & punctum datum D , in latere BC . Oportet igitur ex D , rectam lineam ducere, quę bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D , diuidat latus BC , bifariam, recta DA , ducta a A , diuidet triangulum bifariam, ut est ostensum: Si uero D , non diuidat



BC , bifariam, secetur BC , bifariam in E . Deinde ex D , ad angulum oppositum A , ducatur recta DA , & per E , parallela EF , ipsi

BC , secans AC , in F . Si igitur ducatur recta DF , erit triangulum diuisum bifariam a linea DF . Nam ducta recta EA , erunt triangula BEA , EFD , æqualia, cum sint super eandem basin EF , & inter easdem parallelas EF , AD . Addito igitur communi CFE , erunt tota triangula AEC , CDF , æqualia: Est autem AEC , dimidium totius ABC , ut iam fuit ostensum; Igitur & CD , dimidium est eiusdem trianguli ABC . quod erat probandum.



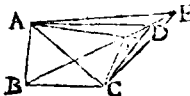
Quod si punctum D , fuerit in altera medietate EC , eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abicindetur ad partes B , trapezium uero ad partes C , ut figura præfens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur littera B , in C , & C in B . Hoc tamen problema multo nos uniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

39.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGULA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

Sint duo triangula æqualia ABC , DBC , super eadem basin BC , & ad easde partes; Dicco ipsa esse inter easdem parallelas constituta hoc est, rectam ductam AD , parallelam esse ipsi BC . Si enim non est, ducatur ex A , parallela ipsi BC , quę



quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primo supra, qualis est A E, coeatq; cum B D, protrahat, in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, B C, erit triangulo A B C, triangulum E B C, æquale: Est autem per hypothesein triangulum quoq; D B C, æquale eidem triangulo A B C; Igitur erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erunt eadem rationatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erunt igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

37. primi.

1. pron.

SCHOLIUM.

Ex his inferit Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SIT ET linea D F, latera A B, A C, trianguli A B C bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cuius enim triangula A D F, B D E, sint super æquales bases A D, D E, & inter easdem parallelas (si per E, duceretur parallela ipsi A B) erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E, æquale; Igitur triangula D B E, C E D, æqualia erunt: Habens autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta: Quare inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallela erunt; Quod est propositum.

38. primi.

1. pron.

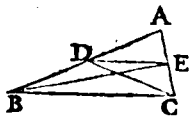
39. primi.

ID autem, quod ad finem secundi theorematismis in scholio propof. 34. polliciti sumus, facile ex hac propof. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum quod ab utraq; diametro bifaria diuiditur, parallelogrammum est.

I

NAM



NAM quadrilaterum $ABCD$, dividatur bisariam ab utraq; diametro AC , BD . Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula ADC , BDC , dimidia sint eiusdem quadrilateri $ABCD$, ipsa inter se equalia erunt. Quare cum eandem habeant basim DC , ad easdemq; partes sint, ipsa in eisdem parallelis erunt: Atq; idcirco AB , DC , parallela sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse AD , BC . Parallelogrammum igitur est $ABCD$. Quod est propositum.

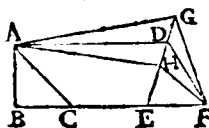


39. primi.

40.

THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGULA equalia super equalibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula equalia ABC , DEF , super bases equalles BC , EF , (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam

ex A , ad D , ductam parallelam esse rectæ BF . Si enim non est, cadet parallela ipsi BF , per A , ducta vel supra AD , vel infra. Cadat primo supra, coeatq; cum ED , producta in G , & ducatur recta GF . Quoniam igitur parallelæ sunt AG , BF , erit triangulum EFG , triangulo ABC , æquale; Ponitur autem, & triangulum DEF , eidem triangulo ABC , æquale: Igitur triangula DEF , GEF , equalia erunt, pars & totum; Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A , cadat infra AD , qualis est AH , ducta recta HF , erunt eadæ argumentatione triangula FEH , DEF , equalia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur AD , parallela ipsi BF . Quare triangula equalia super equalib; basibus, &c. Q. E. D. erar demonstrandum.

38. primi,

1. 2. con.

SCHOLIUM.

Eodem modo demonstrari poteris hoc theorema.

TRI.

TRIANGULA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.

SINT triangula æqualia, ABC , DEF , inter parallelas AD , BF , & super bases BC , EF , quas dico esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit BC , maior. Abscissa ergo recta CG , æquali ipsi EF ,



& ducta recta GA , erit triangulum AGC triangulo DEF , æquale. Ponitur autem & triangulum ABC , eidem triangulo DEF , æquale; Igitur triangula AGC , ABC , æqualia erunt, pars & totum; quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC , EF , sed æquales. Quod est propositum.

33. primi.

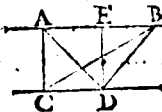
1. pron.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basim habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INTER parallelas AP , CD , & super basim CD , constituentur parallelogrammum $ACDE$, & triangulum BCD . Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD . Ducta enim diametro AD , in parallelogrammo, erunt triangula ACD , BCD , æqualia; At parallelogrammum $ACDE$, duplum est trianguli ACD ; Igitur & trianguli BCD , duplum erit idẽ parallelogrammũ $ACDE$. Quamobrem, si parallelogrammum cũ triangulo, &c. Quod erat demonstradũ.



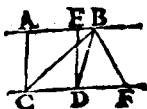
37. primi.

34. primi.

SCHOLION.

Hinc sequi, si triangulũ duplũ habuerit basim, fueritq; in eis-

in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo aequale fore. Nam si basis



38. primi.

41. primi.

6. pron.

tem & parallelogrammum $ACDE$, duplum eiusdem trianguli BCD : Igitur aequalia erunt triangulum BCF , & parallelogrammum $ACDE$.

IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum aequales habuerint bases, & non eandem, fuerintq; in eisdem parallelis, ut cernis in parallelogrammo $ACDE$, & triangulo $BF G$, quorum bases CD , FG , aequales sunt.



38. primi.

34. primi.

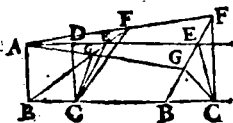
Est enim diametro AD , in parallelogrammo, erunt triangula ACD , BFG , aequalia; Cum igitur parallelogrammum $ACDE$, duplum sit trianguli ACD :

erit quoque idem trianguli BFG , duplum. Eadem ratione si basis FG , duplicaretur, & recta ad B , duceretur, fieret triangulum parallelogrammo aequale, quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli BFG , &c.

38. primi.

CONVERSUM huius theorematidis duplex est, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basin, vel aequales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemq; parallelis; erunt bases aequales, si non sit eadem.



SIT parallelogrammum $ACDE$, duplum trianguli BCF siue eandem habeant basin, siue aequales; Dico rectam ductam AE , parallelam esse rectae BC . Nam alias ducta parallela ex A , cadet, aut

supra

supra $A E$, aut infra. Unde ut in 39. vel 42. propof. ostenditur pars aequalis toti, ut & figura indicat. Quod est absurdum.

S I T deinde parallelogrammum $A B C D$, duplum trianguli $E F G$, in eisdemq; parallelis: Dico bases $B C$, $F G$, esse aequales. Nam si altera, nempe $B C$, sit maior, abscissa aequali $C H$, & ducta $H I$, parallela ipsi $A B$, demonstrabimus parallelogramma $A B C D$, $I H C D$, esse aequalia, totum & pariem; (quod utrumque duplum est trianguli $E F G$; illud quidem per hypotesin; hoc vero per 41. propof.) Quod est absurdum. Item ostendemus, si basis $F G$, maior dicatur. Si enim abscindatur ipse $B C$, aequalis $F H$ ducaturq; recta $H E$, erunt trianguli $E F H$, $E F G$, aequalia, pars & totum; (nam utruq; dimidium est parallelogrammi $A B C D$; Illud quidem per propof. 41. hoc vero per hypotesin.) Quod est absurdum.



EX P R O C L O.

S I triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.

I T E M si duas parallelas $A B$, $B C$, sint constituta trapezium $A B C D$, & triangulum $E B C$, super basin $B C$, eandem, quae sit tamen maior quam altera linea $A D$, parallela in trapezio dato. Dico trapezium $A B C D$, minus esse duplo trianguli $E B C$. Cum enim $A D$, minor ponatur quam $B C$, sumatur $A F$, aequalis ipsi $B C$, & ducatur recta $C F$, quae erit parallela ipsi $A B$; Atq; adeo parallelogrammum erit $A B C F$, quod duplum est trianguli $E B C$. Quare trapezium $A B C D$, cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli $E B C$, quod est propositum.



33. primi
41. primi

S I T rursus trapezium, & triangulum, ut prius, sed basis

I 3 $A D$,



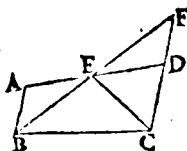
33. primi.

41. primi.

BC. fit minor quā reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quam BC, abscondatur DF, æquale ipsi BC, & ducatur recta BF, quæ erit parallela ipsi CD, atq; adeo parallelogrammum erit BCDF, quod duplū est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiusdem trianguli EBC, quod est propositum.

Idem concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen ut nunc quidem basis trapezii sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezii coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.



29. primi.

35. primi.

25. primi.

4. primi.

2. pron.

38. primi.

SIT trapezium ABCD, cuius duo latera opposita AB, DC, sint parallela, & super basin BC, constitutur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto F, lateris AD. Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli EBC. Producamus enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, producatum in F. Et quia parallele sunt AB, CF, erunt anguli alterni, BAE, FDE, æquales: Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus AE, trianguli ABE, latus DE, trianguli DEF, æquale, per hypotesin: Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus, DF, FE, æqualia erunt, utrumque utrique, & reliqui anguli ABE, DFE, æquales, atq; idcirco triangula ABE, DFE, æqualia erunt. Quare addito communi triangulo CDE, erunt triangulo CEF, æqualia triangula ABE, CDE: Est autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, quod bases BE, EF, ostēse sint æquales, & ipsa triangula inter easdē sint parallelas, si p C, duceretur parallela ipsi BE. Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidiū erit trapezii ABCD, quod est propositum.

42.

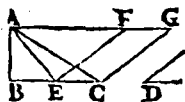
PROBL. II. PROPOS. 42.

DATO triangulo æquale parallelo

gram-

grammum constituere in dato angulo re-
ctilineo.

DATUM triangulum sit ABC ,
& datus angulus rectilineus D . oportet
igitur construere parallelogrammum
æquale triangulo ABC , habens
angulum æqualem angulo D . Diui-



10. primi.

23. *primi.*

21. primi.

41. primi.

38 primi.

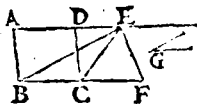
6. *prom.*

S C H O L I O N.

SVBIVNGIT hoc loco Peletarius subsequens problema.

D A T O parallelogrammo aequali triangulū
constituere, in dato angulo rectilineo .

Sed datum parallelogrammum
 $ABCD$, & datus angulus G . Fiet
 angulus CBE , angulo G equalis, se-
 cundò; recta BE recta AD , producta
 in E : Extendat quoq; BC , ad F , sitq;



23. primi.

4 angulo

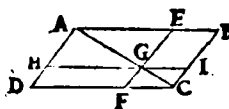
41. primi.
38. primi.
6. pron.

angulo dato G aequali, aequale esse parallelogrammo $ABCD$.
Ducta enim recta CE , erit parallelogrammum $ABCE$, & trian-
gulum BCF , duplum; quod aequalia sint triangula EBG , & BEF .
Quare aequalia inter se erunt parallelogrammum $ABCD$, &
triangulum BEF .

43.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

IN omni parallelogrammo, comple-
menta eorum, quæ circa diametrum sunt,
parallelogrammorum, inter se sunt æ-
qualia.

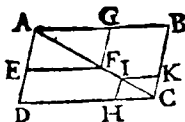


IN parallelogrammo $ABCD$,
sint circa diametrum AC , pa-
rallelogramma $AEGH$, $CGFI$,
& complementa $DFGH$,
 EIG , ut in 30. de fin. dixi-

34. primi.
3. pron.
34. primi.
3. pron.

mus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum
enim triangu'la ABC , CDA , æqualia sint; itemq; trian-
gula AEG , GHA ; si hæc ab illis demantur, remanebunt
trapezia $CBE G$, $CDH G$, æqualia: Sunt autem & trian-
gula CGI , CGF , æqualia. Quare si detrahantur ex tra-
pezijis, remanebunt æqualia complementa $DFGH$, EIG .
In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod
ostendendum erat.

SCHOLIUM.

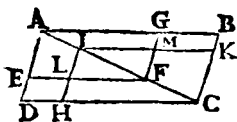


EODEM modo hoc theorema de-
monstratur a Proclo, etiam si duo pa-
rallelogramma circa diametrum nō con-
iungantur in puncto G , sed vel unum
ab altero sit semotum, vel ambo se mu-
tuo interscent. Sit enim primum unum

ab altero distans, ita ut complementa sint figura quinquangula
le. Vt in parallelogrammo $ABCD$, circa diametrum AC ,
confis-
sistat

consistant parallelogramma $A E F G$, $CHIK$: Dico complementa $DEFIH$, $BKIFG$, esse aequalia. Cum enim triangula ABC , CDA , aequalia inter se sint; Item triangula $A EF$, CHI , aequalia triangulis AGF , CKI ; erunt reliqua complementa $DEFIH$, $BKIFG$, aequalia. Quod est propositum.

SECEANT sciam mutuo parallelogramma $A E F G$, $CHIK$, circa diametrum, ita ut communem partem habeant $ELFM$;



Di: o adhuc complementa $DELH$, $BGMK$, esse aequalia. Cum enim aequalia sint triangula ABC , CDA ; Item triangula AFG , $A FE$; erunt reliqua quadrilatera $BCFG$, $DCFE$, aequalia; Sunt autem rursus aequalia triangula IFM , IFL ; Igitur si hac addatur dictis quadrilateris, erunt figurae $BCIMG$, $DCILE$, aequales: Cum igitur & aequalia sint triangula CIK , CIH , erunt reliqua complementa $BGMK$, $DELH$, etiam aequalia. Quod est propositum.

CONVERSVM quoque huius theorematism cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

Si parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita ut ex illis duo aduersa sint aequalia; consistent reliqua duo circa diametrum.

DUCTIS duabus rectis EF , GH , quae sint parallelae rectis BC , CD , seque secans in I , diuidatur parallelogrammum $ABCD$, in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo $BEIH$, $DFIG$ sint aequalia: Dico reliqua duo $AEIG$, $CFIH$, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C ad punctum A , ductam transire per punctum I . Si enim non transit, secet diameter CKA , rectam GH , in K , si fieri potest, & per K , ducatur LM , parallela ipsi BC . Erunt igitur complementa $BHKL$, $DGKM$, aequa.



34. primi.

3. pron.

34. primi.

3. pron.

34. primi.

2. pron.

34. primi.

3. pron.

31. primi.

43. primi.

9. *pron.* aequalia: Est autem DGKM, maius quā DGIF; Quare et maius erit BHKL, quā DGIF. Cum ergo DGIF, aequale ponatur ipsi BEIH, erit etiam BHKL, maius, quē BEIH, pars quā totius; Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectā GH, in K, secas, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.

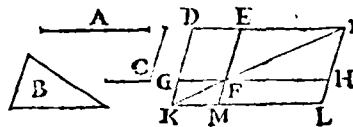
44.

PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DAT A recta linea sit A, datum triangulum P, & datus angulus rectilineus C. oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & unum latus æquale rectæ A. Cōstituatur trian-

42. *primi.*



gulo B, æquale parallelogrammū D E F G, habens angulū EFG, angulo C, æqualem, producatursq; G F, ad H, ut

81. *primi.*

FH, sit æqualis rectæ A, & per H, ducatur H I, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ D G, productæ in K; & per K, ducatur K L, parallela ipsi GH, secans IH, protraham in L, producatursq; E F, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod queritur: Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æquale,

85. *primi.*

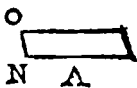
cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est æqualis angulo C: Deniq; parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, cū æquale sit cōplemento DEFG, qđ factū est æquale triangulo B. Ad datā igitur rectā lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

43. *primi.*

SCHOLIION.

QVOD si quis oveti, lineam ipsam A, esse unum latus parallelogrammi, non difficile erit trahi, ferre parallelogrammū FMIH,

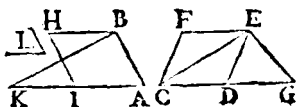
F M I H, ad rectam *A*, ex his qua in scholio propof. 31. huius lib. docuimus. Si enim in *N*, extremitate recte *A*, fiat angulus aequalis angulo *M F M*, & sumatur recta *N O*, aequalis recte *F M*, compleaturq; parallelogrammum, seu in dicto scholio traditū fuit, effectum eris, quod queritur.



A D D I T hic aliud problema *Petetrarius*, hoc modo.

A D datam rectam lineam, dato parallelogrammo constitucere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

S I T data recta *A B*, ita sū parallelogrammū *C D E F*, & datus angulus *L*. Producat *CD*, ad *G*, ut *DG*, æqualis sit ipsi *CD*, &



iungatur *GE*, recta: Eritq; triangulum *C E G*, parallelogrammo *C D E F*, æquale, ut demonstranim⁹ scholio propof. 41. Fiat ita super data recta *A B*, parallelogrammum *A B H I*, æquale triangu-
gulo *C E G*, hoc est, parallelogrammo *C D E F*, habens angulum *A*, angulo *L*, æqualem; & producat *A I*, ad *K*, ut sit *I K*, æqualis ipsi *A I*, iungaturq; recta *B K*. Dico triangulum *A B K*, constitutum super datam rectam *A B*, habensq; angulum *A*, æqualem dato angulo *L*, æquale esse dato parallelogrammo *C D E F*. Cum enim triangulum *A B K*, æquale sit parallelogrammo *A B H I*, ex scholio propof. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo *C D E F*, constet propositum.

44. primi.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

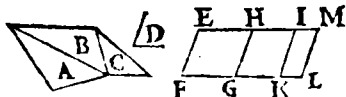
92.

D A T O rectilineo æquale parallelogrammū cōstitucere, in dato angulo rectilineo.

D A T U M rectilineum sit *A B C*, & datus angulus *D*: oportet igitur cōstrucere parallelogrammū æquale rectilineo *A B C*, cū habeat angulū æquale angulo *D*. Resoluat rectilineū in triagula *A, B, & C*. Deinde triagulo *A*, æquale paralle-

42. primi,

logram-



logrammum cōsti-
tuatur E F G H, ha-
bens angulum F, an-
gulo D, æqualem.

44. primi.

Item super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem an-
gulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triacula in dato rectilineo, factumq; erit, quod iuberetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, efficiunt totum vñ parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, inter se sunt æquales, cum uterq; æqualis sit angulo D. Addito igitur cōmuni angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H, qui duobus rectis æquivalent, æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. Quare F G, G K, vnam rectā lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vñā rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sint, (cum sint æquales oppositis angulis æqualibus E F G, H G K.) & duo anguli H I K, I H G, duobus sint rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint parallelæ; Itemq; E F, I K, quod utraq; parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem mod. demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vñ parallelogrammum E F L M. Dato ergo rectilineo A B C, constituiamus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendū.

29. primi.

14. primi.

34. primi.

29. primi.

30. primi.

SCHOLIION.

QVAMVIS in hoc problemate Euclides absolute, & simpliciter docuerit, quam arte parallelogrammum constituatur æquale rectilineæ figuræ datæ, non astringendo nos ad certam aliquam lineam rectam datam, vt in propos. 44. fecerit: Tamen eodem modo, quod iubetur, efficiemus, si recta aliqua linea nobis fuerit assignata. Nam si detur recta linea E F,

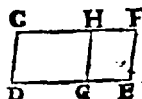
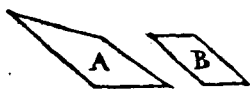
EF, super ipsam construamus parallelogrammum EFGH, 44. primi.
 aequale triangulo A. Es eodem modo super GH, construamus
 aliud GHIK, aequale triangulo B, &c. Quibus peractis, con-
 stitutum erit super datam rectam EF, parallelogrammum
 EFLM, aequale rectilineo dato, in dato angulo F, qui aqua-
 lis est angulo D, propositio.

PAZI ratione, propositis quocumq; rectilineis, consti-
 tuemus illis parallelogrammum aequale, si omnia resoluantur
 in triangula, quibus aequalia parallelogramma exhibeantur,
 singulis singula, per propof. 42. & 44. ceu factum est ab Eu-
 clide in hoc problemase. Nam cum omnia haec parallelogramma
 efficiant unum parallelogrammum, veluti hic demonstratum
 fuit, constitutum erit parallelogrammum aequale rectilineis
 propositis. Ut si quis intelligas duo rectilinea proposita AB,
 & C; Atq; AR, resoluantur in triangula A, & B, singulisq;
 triangulis A, B, C, singula parallelogramma EG, GI, IL,
 iuxta artem huius problematis, aequalia constituentur, ex pro-
 pos. 42. & 44. erit constructum parallelogrammum totum EFLM,
 aequale duobus rectilineis AB & C. Es sic de pluribus.

HVC referri poterit problema utilissimum ex Ptolemaeo,
 quod nos sane alio modo, et breviori demonstrabim⁹, in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inaequalibus,
 excessum maioris supra minus inquirere.

SINT data
 rectilinea A,
 & B, sitq; A,
 maior. Opor-



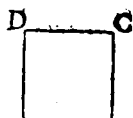
tes igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, super
 rectilineum B. Fias parallelogrammum CDEF in quocumq; 45. primi.
 angulo D, aequale maiori rectilineo A. Et super rectam CD
 parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, aequale re-
 ctilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum
 CDEF, superat parallelogrammum CDGH,
 parallelogrammo EFHG; superabis eumq;
 figura A, figurā B, eodē parallelogra-
 mo EFHG. Quod est propositum.

PRO-

45.

PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.



11. primi.

28. primi.

13. primi.

34. primi.

SIT data recta AB, sup quā oporteat quadratū describere. Ex A, & B, educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintq; ipsi AB, æquales, & cōnectatur recta CD. Dico AB-CD, esse quadratū. Cum, n. anguli A, & B, sint recti, erunt AD, BC, parallelæ: Sunt aut & æquales, quod utraq; æqualis sit ipsi AB; Igitur & AB, DC parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammū est ABCD; in quo, cū AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existūt; Sunt aut & cōs quatuor anguli recti, cū C, & D, æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratū igitur est ABCD, ex definitione; Ac, p̄indea data recta linea quadratū descripsimus; Quod faciendū erat.

EX PROCLO.

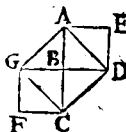
LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorū æqualiū æquales sūt lineæ.



4. primi.

34. primi.

SINT primo rectæ AB, CD, æquales; Dico earū quadrata ABGF, CDGH, æqualia quoq; esse. Datis enim diametris BF, DH, erunt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus laterib; DC, CH, trianguli DCH, æqualia, utriusq; v. triq; cū ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales sint rectis AB, CD: Sunt autem, & anguli A, & C, æquales, nempe recti: Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.



14. primi.

SINT secundo quadrata ABDE, BCFG, æqualia; Dico lineas quoq; ipsorū AB, BC, æquales esse. Cōiungantur, n. quadrata ad angulum B, ut rectæ AB, BC, in directū cōstituuntur. Et quoniam anguli ABG, ABD, sunt recti, erūt & rectæ GB, BD, in directū cōstituta. Ducatur diametri AD, CG, iunganturq; rectæ AG, CD. Quoniam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia sunt, erūt & triângula ABD, BCG, eorū dimidia, æqualia. Addito ergo cōi triângulo BCD, fiet totū triângulū ACD, toti triângulo GDC, æquale. Quare triângula ACD, GDC, cū eandem

dem habeat basis CD, ad easdēq; sint partes, in eisde sunt paralle-
lis, ideoq; parallelae sunt AG, CD. Et qm, ut in scholio propoſ. 24.
ostēdimus, diameter in quadrato fecit angulos quadrati bīariā,
erūt anguli DAC, GCA, al. erūt semirecti, ideoq; æquales. Quāob-
rē & parallelae sunt AD, CG, igitur parallelogrammū est ADCG, ac
propterea recta AD, CG, æquales: Quoniam ergo in triāgulis ABD,
BCG, latera AD, CG, æqualia sūt, & anguli, qđ ea latera adiacēt,
inter se ē æquales, cū sint semirecti, ut i scholio propoſ. 24. ostēdim-
tuſ; erūt itē quæ latera æqualia, nēpe AB, ipsi BC, &c. Qd ē ppositū.

39. primi.

27. primi.

31. primi.

36. primi.

SCHOLION.

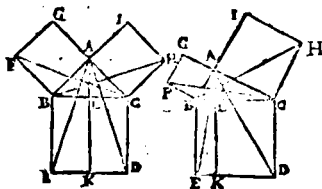
POSSENT hæc omnia multo brevius probari per superpo-
sitionē quadrati vnus super aliud. Nā si lineæ sint æquales,
si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se; Cū ergo &
anguli sint æquales, nempe recti, conveniēt quoq; ipsi inter se,
ideoq; totū quadratū toti quadrato congrues. Quā si quadra-
ta sunt æqualia, cōgruent ipsa inter se, propter æqualitatē an-
gulorū; Igitur & lineæ; alias vnū quadratū alio maius esset.

THEOR. 33. PROPOS. 47.

46.

IN rectāgulis triāgnlis, quadratū, quod
a latere rectum angulum subtendente de-
scribitur, æquale est eis, quæ a lateribus
rectum angulum continentibus.

IN triāgulo ABC,
angulus BAC, sit re-
ctus, describāturq; su-
per AB, AC, BC, qua-
drata ABFG, ACHI
BCDE. Dico quadra-
tū BCDE, descriptū
super latus BC, quod



46. primi.

11. primi.

42. primi.

angulo recto opponit, æquale esse duob⁹ quadratis ABFG,
ACHI, quæ sup alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo
latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta
AK, parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L
& iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia du-
anguli BAC, & BAG, sunt recti, erunt rectæ GA,
AC, vna linea recta; eodēq; modo LA, AB, vna recta linea
erunt.

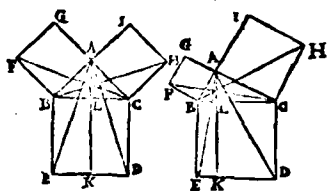
2. *pron.*

4. *primi.*

41. *primi.*

6. *pron.*

erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cū sint recti, si addatur communis angulus ABC, fiet totus angulus CBF, totus angulo ABE, equalis; similiterq; totus angulus BCF, totus angulo ACD. Quoniam igitur latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus FB, BC, trianguli FBC, utrumq; utrq; , ut constat ex definitione quadrati, sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æ-



quales, ut ostendimus; Erunt triāgula ABE, FBC, æqualia. Est autē quadratum, seu parallelogrammū ABFG, duplū trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super

eandem basin BF; Et parallelogrammum BEKL, duplum trianguli ABE, quod sint inter parallelas BE, AK, & super eandē basin BE. Quare æqualia erunt quadratū ABFG, & parallelogrammum BEKL; Eadem ratione ostendetur, equalia esse quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, idēq; eorum dupla, parallelogrammū videlicet CDKL, & quadratum ACHI. Quamobrem totum quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL, æquale est duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

cap. 2.

INVENTIO huius theorematism ad Pythagoram refertur, qui, ut scribit Vitruvius lib. 9. hostias Musis immolans, quod se in tam præclaro inuento adiunxit. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues; si tamen Proclo credendum est, unum tantummodo obulū. Fortasse autem Pythagoras, ut nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, ut theorema hoc inuēstigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidissetq; quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorum, com-

posuisse

posuit triangulum scalenum, cuius maximum latus dimi-
sum erat in 5 parte aequales, minimum in 3. eiusdem magni-
tudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum
sub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum.
Idque in quampsurimis alijs numeris, ut in 6, 8, 10. & in 9.
12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit,
num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod re-
cto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis aequale
esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habe-
ant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant
unum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theo-
rema maxima animi uoluptate adinuenit, si maq; ratione de-
monstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum am-
plificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum qua-
dratum lateris, quod recto angulo opponitur, aequale esse qua-
dratis reliquorum duorum laterum: Verum etiam figuram qua-
libet rectilineam super latus recto angulo oppositum constru-
ctam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, siue quinquan-
gulum, &c. aequalem esse duabus figuris, quae super reliqua la-
tera describuntur, dummodo priori sint similes. similiterq; de-
scripsit, ut ibidem ostendimus.

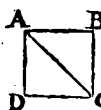
C A T E R V M quoniam mentionem fecimus trium nume-
rorum, quorum maximi quadratum aequale est quadratis reli-
quorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quoniam pacto hu-
iusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus nume-
ris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si
idem triplicentur, exurgunt alij tres 9. 12. 15. & si quadru-
plicentur, inueniuntur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperien-
tur quoscunque alij, si primi illi tres per quemcunque multi-
plicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo dua regu-
lae, quibus inueniuntur praedicti numeri, nulla habita ratione
illorum trium. Prima ascribitur Pythagorae, & est huiusmo-
di. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, ut 5.
ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic
ex 25. reijce unitatem 3 Nam reliqui numeri dimidium, vide-
licet 12. erit aliter numerus, cui si addatur unitas, exurget ser-
uus numerus 13. Huius igitur quadratum aequale est quadra-
tis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent
reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula

tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiasur numerus quicunque par, nempe 6; Ex huius dimidiū quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros. 8. & 10. primus. n. est 6. nimirū numerus par accipit. Hæc regula si accipias par 10. reperienē alij duo 24. et 26.

COLLIGUNTUR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scita non iniucunda tam theoremata, quæ problema, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, insitum hinc sumentes.

- I. SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplū erit prædicti quadrati.

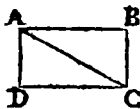
47. primi



IN quadrato ABCD, ducatur diameter AC; Dico quadratum AC, duplum esse quadrati ABCD. Cum enim in triangulo ABC, angulus B rectus sit, erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearū AB, BC, equalia sint, quod linearū AB, BC, sint æquales; erit quadratum linearū AC, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati linearū AB, hoc est, quadrati ABCD. Quod est propositum.

- II. QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

47. primi



IN altera parte longiori ABCD, ducatur diameter AC; & quia in triangulo ABC, angulus B, est rectus, erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum inæqualiū AB BC. Quod est propositum.

- III. SI fuerint duo triangula rectangula, quorū latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterū vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorū duorum laterum alterius.

TRIANGULORVM ABC, DEF, angull, A, & D, sint

sint recti, lateraq; opposita BC, EF,
aequalia: Dico duo quadrata laterum
AB, AC, simul sumpta aequalia esse
duobus quadratis laterum DE, DF,
simul sumptis. Nam quadrata linearum BC, EF, aequalia inter
se sunt, cum & ipse inter se ponantur aequales; Quatrato autē
linea BC, aequalia sunt quadrata linearum AB, AC; Es qua
drato linea EF, aequalia sunt quadrata linearum DE, DF:
Per se cum ergo est, quod pronitur.



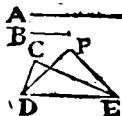
47. primi

47. primi.

Dvobus quadratis inaequalibus propo-
sitis, inuenire alia duo quadrata, quae & aequalia
sint inter se, & simul sumpta aequalia duobus
inaequalibus propositis simul sumptis.

IIII.

Sint A, & B latera duorum quadratorum inaequalium;
Fiat angulus rectus DCE, sitq; DC, recta aequalis rectae B,
& recta CE, recta A. Ducta deinde recta
DE, coniungente puncta D, E, super ipsam
constituantur duo anguli semirecti DEF,
EDF, cocantq; recta DF, EF, in F. Quo-
niā igitur in triangulo FDE anguli FDE,
FED, aequales sunt, erunt & latera DF,
EF, aequalia, ideoq; es quadrata eorundem laterum aequalia. Di-
co iam, eadem quadrata linearum DF, EF, aequalia esse quadra-
tis linearum A, & B, hoc est linearum CE & CD. Nam cum in
triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant unum rectum, erit re-
liquus angulus F, rectus. Quamobrē erunt quadrata linearum
DF, EF, aequalia quadrato linea DE; sed eidē quadrato linea
DE, aequalia sunt quoque quadrata CD, CE; igitur quadra-
ta linearum DF, EF, aequalia sunt quadratis linearum DC,
EC. Quod est propositum.



II. prom.

6. primi

32. primi

47. primi

1. prom.

PROPOSITIS duabus lineis inaequalibus, in-
uenire id, quo plus potest maior, quam minor.

V.

POTENTIA linea recta dicitur eius quadratum. Tan-
tū enim quantum recta linea posse dicitur, quantum est eius qua-
dratum. Sint ergo duae lineae inaequales A, & B, oportetq; co-
gnoscere, quāto maior sit quadratū maioris lineae A, quāmino-
ris B. Ex quavis linea recta CD, sumat CE, aequalis rectae A,

K 2 & EF,

et EF, aequalis recta B. Deinde cetero E, & intervallo EC, semi-
circulus describatur CGD; & ex F, ducatur FG perpendicularis
ad CD. Dico quadratum rectae A, hoc est, rectae CE, sibi aequa-
lis, maius esse, quam quadratum rectae B, hoc
est, rectae EF, sibi aequalis, quadrato rectae
FG. Ducta enim recta EG, erit unum qua-
dratum aequale quadratis rectarum EF, &
FG. Quocirca quadratum rectae EG, hoc
est, quadratum rectae EC, illi aequale, super-
bis quadratum rectae EF, quadrato rectae
FG. Quod est propositum.

47. primi

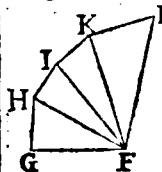


VI.

PROPOSITIS quocunque quadratis, si-
ue aequalibus, siue inaequalibus, inuenire qua-
dratum omnibus illis aequale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. opor-
tet igitur inuenire quadratum aequale omnibus illis quinque.

Fiat angulus rectus FGH, sitque
recta FG, aequalis rectae A, & re-
cta GH, recta B; Ducta deinde
recta HF, fiat angulus rectus
FHI, sitque HI, aequalis rectae
C; Ducta rursus recta IF, fiat
angulus rectus PIK, sitque IK,
aequalis recta D; Ducta denique
recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitque KL, aequalis
recta E. Si igitur ducatur recta FL; Dico quadratum rectae
FL, aequale esse quinque quadratis propositis. Quadratum
enim rectae FH, aequale est quadratis rectarum FG, GH, hoc
est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectae
FI, aequale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco qua-
dratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectae FK, aequa-
le est quadratis rectarum FI, IK, ideoque quadratis rectarum
A, B, C, & D. Denique quadratum rectae FL, aequale est
quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum
A, B, C, D, & E, Quod est propositum.



47. primi.

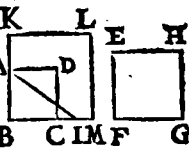
VII.

PROPOSITIS duobus quadratis qui-
buscunque, alteri illorum adiungere figuram,

quo

quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata $ABCD, EFGH$, propositumque sit quadrato $ABCD$, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato $EFGH$, &c. Sumatur recta BI , æqualis rectæ FG , lateri quadrati $EFGH$. Ducta autem recta AI , & producta recta BA , ad partes A , accipitur BK , æqualis rectæ AI , perficiaturque quadratum $BK- B C I M$. Dico figuram $AD C M L K$, quadrato $ABCD$, adiunctam, equalē esse quadrato $EFGH$. Quoniam quadratum rectæ AI , hæc est, quadratum $BK- L M$. æquale est quadratis rectarum AB, BI , hoc est, quadratis $ABCD, EFGH$; si auferatur commune quadratum $ABCD$, remanebit figura $AD C M L K$, æqualis quadrato $EFGH$. Quod est propositum.

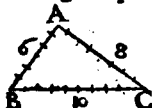


47. primi

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

VIII.

SIT angulus A , rectus in triangulo ABC . finisque primo cognita latera AB, AC , circa angulum rectum, quorum AB , ponatur 6 palmorum, & AC , 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC , nempe palmi 36. & 64. æqualia sunt quadrato rectæ BC ; si illa coniungantur simul, efficietur hoc palmorum 100. Latus ergo BC , continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, ut perspicuum est apud Arithmeticos. Sins secundo cognita latera AB, BC , sitque AB , 6. palmorum, & BC , 10. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC , æqualia sunt quadrato rectæ BC ; si quadratum rectæ AB , quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ BC , quod est palmorum 100, remanebit quadratum rectæ AC , 64. palmorum. Latus ergo AC , continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus 64. palmorum. Quod



47. primi

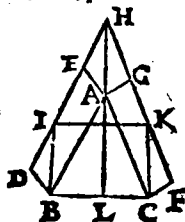
47. primi.

est propositum. Caterum non semper hac arte inveniuntur numeri rationales, quia non omnes numeri habent latus, radicemve quadratam, ut notum est apud Arithmeticos; Unde latus inuentum saepe numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias.

T H E O R E M A T E verohoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibus: unq; parallelogrammis super latera trianguli constructis, tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter æquiangula. Quod nos in formam theorematidis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius.

I N omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quæ duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorû lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli dicti producantur.

S I T triangulum quodcunque ABC, constituanturq; super latera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, as-



sumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducturq; recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latere BC, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in I; & per B, C, agantur BI, CK, parallela ipsi AH; im-
 sumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, comprehensi, conueniant in H, ducturq; recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latere BC, descripto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in I; & per B, C, agantur BI, CK, parallela ipsi AH; im-

84. primi
 30. primi
 33. primi

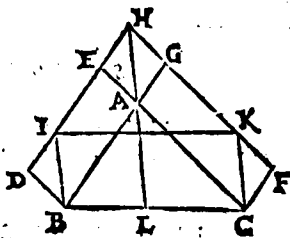
gaturq; recta IK. Quoniã igitur parallelogramma sunt BI, HA, CKHA, erit utraq; BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt BI, CK, quæ cum sint etiã parallela, quod eidem AH, parallela sint; erant quoque BC, IK, parallela, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI super latere

latus BC, habet alterū latus BI, recta AH, æquale, & paralle-
lū: Cui quidē equalia ostendēda sunt parallelogrāma AD,
AF. Quia equalia sunt parallelogrāma AD, ABIH, quod eā-
dē habeant basim AB, in eisdemq; sint parallelis AB, HD; Est
autē ABIH, parallelogrāmo IL, æquale, quod illud cum hoc
etiā eandē habeat basim BI, in eisdemq; sint parallelis BI, LH:
Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter ostendemus,
AF, ipsi KL, esse æquale. Quare parallelogramma AD, AF,
parallelogrammo BK, æqualia sunt. Quod est propositum.

35. primi

35. primi.

PAPPV5 cōstruit fi-
gurā aliter. Nam sumis re-
ctas AC, AE, et AB, AG,
in directū positas, ita ut pa-
rallelogrāma AD, AF, sint
equiangula, habētia angu-
los AED, AGF, angulo
BAC, iernos externo, equa-
les cum hac eius figura indi-
cas. Sed nōs vniuersalius rō-
pposim⁹, ut manifestū est.

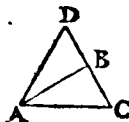


THEOR. 34. PROPOS. 48.

47.

SI quadratū, quod ab uno laterū trian-
guli describitur, æquale sit eis, quæ a reliq; trianguli lateribus describuntur, quadratis:
Angulus comprehensus sub reliquis duo-
bus trianguli lateribus, rectus est.

DETERMINA triangulum ABC, sitq; quadratū latetis AC,
æquale quadratis reliquorū laterū BA, BC:
Dico angulū ABC, esse rectū. Ducta namq;
BD, perpendicularis ad BA, & æqualis re-
ctæ BC, connectaturq; recta AD. Quoniam
igitur in triāgulo ABD, angulus ABD, re-
ctus est, erit quadratum rectæ AD, æquale
quadratis rectarū BA, BD: Est autē quadra-
tū rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearū æquali-



47. primi

K 4 tatem:

8. primi

ta: ē: Quare quadrarū rectę AD quadratis rectarū BA, BC, æquale erit. (ũ ergo quadrarū rectę AC, eisdē quadratis rectarū BA, BC, æquale ponat, erūt quadrata rectaru AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectę: ipsę AD, AC, æquales. Quoniā igitur latera BA, BD, trianguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & basis AD, ostensa est æqualis basi AC; erunt anguli ABD, ABC, æquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus: Quare & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theoremati Pythagorici, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI PRIMI.



E V C L I D I S

ELEMENTVM II.



DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulū.



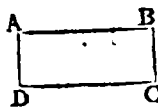
GIT Euclides in secundo hoc libro de posentis linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cuiusvis linea recte diuise, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem linea diuise comprehensa, tam intersc, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commodè

exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ de monstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum; Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti; Cuius quidem duotantum sunt genera, Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, ut perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si unus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo

29. primi

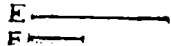
lelogrammo ABCD, angulus A, reſtus: Dico reliquos tres angulos B, C, D, reſtos quoque eſſe. Nam cum parallela ſint AD, BC, erunt anguli A, & B, interni duobus reſtis aequales: At angulus A, reſtus eſt, ex hypotheſi. Igitur et B, reſtus erit. Quoniam vero quilibet ſuo oppoſito eſt æqualis, ut angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, reſti.



34. primi

D I C I T itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri ſub duobus reſtis lineis, quæ unum eorum angulum reſtum continent. Vt parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur ſub duabus lineis reſtis AB, AD; vel ſub AD, DC; vel ſub DC, CB, vel denique ſub AB, BC; quoniam qualibet huiusmodi due lineæ exprimiunt totam parallelogrammi magnitudinem, una quidem, ut AB, vel DC, eius longitudinem; altera vero, ut AD, vel BC, eius latitudinem. Vnde expreſſis duabus lineis, quæ angulum reſtum continent in parallelogrammo rectangulo, ſtatim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, æque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta AB, deorſum ſecundum reſtam AD, moveri in tranſuerſum, ita ut ſemper angulum reſtum cum AD, conſtituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, deſcriptum erit totum parallelogrammum ABCD. Idem fiet, ſi AD, ponatur moveri in tranſuerſum ſecundum reſtam AB, &c. Quamobrem iure optimo ſub talibus duabus lineis reſtis contineri dicitur parallelogrammum reſtangulum.

I T A Q V E parallelogrammum reſtangulum, quod ſub duabus reſtis lineis contineri dicitur, erit illud cuius duo latera circa unum angulum reſtum equalia ſunt duabus illis reſtis lineis, utrumque utrique. Vt parallelogrammum reſtangulum ſub reſtis F, & F, continetur,



erit idem, quod parallelogrammum ABCD, quoniam latus AB, æquale eſt reſtæ E, & latus AD, reſtæ F.

P E R S P I C I V M eſt ex diſſis, parallelogrammum reſtangulum contentum ſub duabus lineis equalibus eſſe quadratum; Cum enī qualibet illarum linearum equalium æqualis ſit

Si linea opposita, erit oia quatuor parallelogrammi rectanguli latera aequalia: Quare ex definitione quadrati quadratum erit.

34. primi

ITEM manifestum est, si duae rectae lineae alijs duabus rectis lineis aequales fuerint, utraque utriusque, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, aequale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera unius aequalia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam

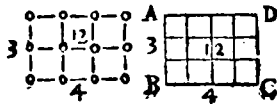
ratione demonstrari potest. Sint rectae AB BC, aequales rectis DE, EF. utraq; utriusq; Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum sub AB, BC aequale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF. cum latera AB, BC, trianguli ABC. aequalia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF; & anguli B & E, aequales, nempe recti, erunt triangula ABC, DEF, aequalia; Eadem ratione aequalia erunt triangula AGC, DHF: Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, aequalia erunt.



4. primi

HABET autem comprehensio haec parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione unius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12.

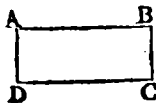
qui in formam parallelogrammi constituitur, unde et conspici dicitur sub 3. & 4: Ita quoque parallelogrammum rectangulum ABCD, comprehensum sub duabus rectis AF, BC quarum illa sit 3. palmorum, haec autem 4 constas



12. palmis quadratis, quod ex ductu lineae AB. 3. palmorum in lineam BC, 4. palmorum producantur ut figura indicat notumque est arithmeticis, atque Geometricis. Demonstratur autem a Ioan. Regio mont. lib. 1. de triangulis propos. 16. Hinc fit, ut nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum unius in alteram. Ut proxime antecessens parallelogrammum ex ductu lineae AB, in lineam BC, vel (quod idem est) ex ductu lineae BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur

producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

O B I T E R quoque monendus mihi lector uidetur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam ceteri Geometrae obseruant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum re-

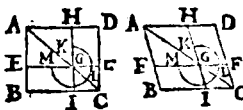


ctangulum. Rursus, ne toties eadem littera repetantur, solens Geometra exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duobus duntaxat litteris, quae per diametrum opponuntur; Vt superius parallelogrammum appellant A C, vel B D.

II.

I N omni parallelogrammo spatio, unumquodlibet eorum, quae circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon uocetur.

I N Parallelogrammo A B C D, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectae E F, H I, parallelae lateribus parallelogrammi, ita ut paralle-



logrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo E H, I F, dicuntur esse circa diametrum, alia uero duo B G, G D, complementa, ut manifestum est ex ultima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo utrolibet circa diametrum, ut ex I F, una cum duobus complementis B G G D, qualis est figura E B C D H G E, quam complectitur circumscribitur K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, composita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus

bus complementis BG, GD, Gnomon appellabitur.

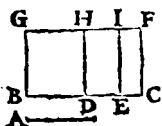
THEOR. I. PROPOS. I.

I.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub infecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & BC, quarum BC, secetur quomodocunque in quolibet segmenta BD, DE, EC: Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indivisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item sub A, & EC, comprehenso.

Rectangulum enim BF, comprehendatur sub A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ A; Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perpendiculares BG, CF, æquales rectæ A, ducaturque recta FG. Deinde ex D, & E, ducantur



rectæ DH, EI, parallelæ ipsi BG, uel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ sint ipsi BG, inter se quoque parallelæ 33. primi erunt: Rursus eadem, cum ex constructione parallelogramma sint BH, BI, æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ 34 primi A. Quoniam igitur recta BG, æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub infecta linea A, & segmento BD; Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE; Item rectangulum EF sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF; perspicuum est rectangulum comprehensum sub A, & FC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, et segmentis BD, DE, EC, compre-

comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq;
ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION

Q U O N I A M lib. 9. prop. 14. decem priora theoremata
secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodas, in nume-
ris etiam demonstrabimus, si dividantur, ut lineæ; non abs re
fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus uerbis de
lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri
vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, ut
supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq;
ut 6. & 10. dividatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico
60. numerum productum ex 6. in 10. equalem esse tribus nu-
meris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. &
2. gignuntur, id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Cōmandinus duo
alia theoremata, quæ iam sequuntur.

S I fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque am-
bæ in quocunque segmenta: Rectangulum cō-
prehensum sub illis duabus rectis lineis, æqua-
le est eis, quæ sub singulis segmentis unius, &
quolibet segmentorum alterius continentur,
rectangulis.

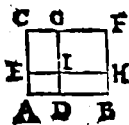
S I N T duæ rectæ AB, AC, rectum angulum A. continen-
tes, quæ secentur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC.
Dico rectangulum sub rectis AB, AC, cōprehensum equale es-
se rectangulis, quæ sub AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE,
AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF,
GH; EF, HC: FB, AG; FB, GH; FB, HC,
continentur. Cōpleatur rectangulū AI, du-
canturq; DK, EL, FM parallela ipsi AC,
vel BI: Item HN, GO, parallela ipsi AB,
vel CI; quæ secant priores in P, Q, R, S,
T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, cō-
tinetur sub AD, AG; & GP sub AD, GH; & HK, sub
AD, HC; (quod recta GS, HP, ipsi AD, sint æquales:)

Item

Item rectangula DT, SQ, PL , continentur sub DE, AG ; DE, GH ; DE, HC ; (quod DS, SP, PK , ipsis AG, GH, HC , 34. primi
 aequales sint, & ST, PQ , ipsi DE) Et eadem ratione rectan-
 gula EV, TR, QM , continentur sub EF, AG ; EF, GH, BF ,
 HC ; Nec non rectangula FO, VN, RI , sub FB, AG ; FB ,
 GH ; FB, HC ; perspicuum est, rectangulum sub AB, AC ,
 æquale esse rectangulis sub singulis partibus AD, DE, EF ,
 FB , & quolibet segmentorum AG, GH, HC , comprehensis.
 Quod est propositum.

Si sint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ
 utcumque: Rectangulum comprehensum sub
 illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo
 sub una parte unius, & una parte alterius com-
 prehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, &
 dictis partibus mutuo continentur, rectangulis,
 una cum rectangulo sub reliquis partibus
 comprehenso.

SINT dua recta AB, AC , angulum continentes re-
 ctum A , quæ secantur utcumque in D, E ; Dico rectangu-
 lum comprehensum sub AB, AC , una cum rectangulo com-
 prehenso sub partibus AD, EC , æquale esse rectangulis con-
 sentis sub AB, EC ; AC, AD , una cum
 rectangulo sub DB, AE , comprehenso.
 Compleatur rectangulum AF , agaturque
 per D , recta DG , ipsi AC , vel BF , paral-
 lela; nec non & per E , recta EH , secans
 DG , in I , parallela ipsi AB , vel CF .
 Quoniam igitur rectangulum AF , æqua-
 le est rectangulis EF, DH, AI ; si addatur commune EG ,
 erunt rectangula AE, EG , nempe sub totis AB, AC , &
 partibus AD, EC , comprehensa, æqualia rectangulis EF ,
 AG, DH , sub AB, EC ; AC, AD ; DB, AE , compre-
 hensis æqualia. Quod est propositum.



IN numeris etiam hac eadem perspicua sunt. Proposi-
 tis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres
 partes

partes. 2. 3. 5. posterior vero in duas. 3. 5. dividatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul additi 80. ut volebat theorema 1 Federici.

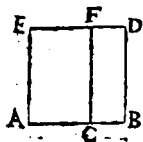
R V B S V S, si idem numeri secantur utcumque, prior quidem in 2. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoq; est 80. numerum productum ex 10 in 8. una cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum utrobique efficiantur 98. ut theorema 2. Federici optabat.

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea secta sit utcumque, Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota sit, quadrato.

RECTA linea A B, dividatur utcumque in C, duas in partes; Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B. simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D,

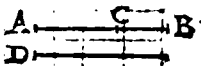


34. primi

quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F parallela rectæ A E, vel B D, quæ æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B. Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectæ A B, ex definitione quadrati, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C; similiter erit rectangulum C D, comprehensum sub A B, & segmento C B. Quare cum rectanguli A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, æqualia esse quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea secta sit utcumque, &c. Quod demonstrandum erat.

A L I E R. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B, Quoniam

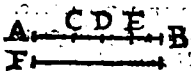
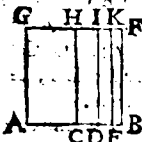
Quoniam igitur AB , diuisa est in C , erit rectangulum comprehensum sub infecta D , & recta AB , nempe quadratum recte AB , æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D , infecta; hoc est; sub AB , & singulis segmentis AC , CB , quod est propositum.



1. secundi.

SCHOLIUM

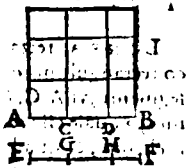
Quamquam Euclides secundum hoc theoremata proposita de lineæ recta diuisa in duas tantummodo partes vicinas, idem tamen eisdem modis demonstrabitur, si lineæ diuidatur in quocumque partes; ut ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quæ drato ipsius numeri 10. ut manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 1. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. gentes ex 10. in 3. 2. 1. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.



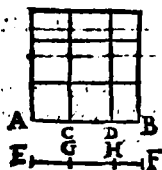
SIMILITER modo demonstrat hoc loco Eudoricus. Commandinus hoc theoremata.

Si linea recta secetur in quocumque segmenta: quadratum, quod a tota sit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

Si recta AB diuisa in partes quocumque AC , CD , DB . Dico quadratum ex AB , descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC , CD , DB , & quolibet segmentorum AC , CD , DB , comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC , AC ; AC , CD ; AC , DB ; CD , AC ; CD , CD ; CD , DB .



L DB:



DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehens. Sumpta enim recta EF, quae aequalis sit ipsi AB, diuisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, aequales; Eris ex his, quae ad propos. 1 huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB aequale rectangulis

sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB partibus EG, GH, HF, sint aequales; Eris quoque quadratum ex AB, aequale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod, est propositum.

IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. eris 100. quadratus totius aequalis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quauilibet partium 2. 3. 5. procreantur, ut perspicuum est.

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secta sit utcumq; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a praedicto segmento describitur, quadrato.

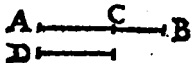
LINEA recta AB, diuisa sit utcumq; in puncto C: Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtriusque segmento, ut AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constatuatur enim quadratū dicti segmenti AC, quod sit AD, & ex

& ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta recte AC, æqualis est ex quadrati definitione, erit rectangulum AF, comprehensum sub rota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC, erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB.



Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, rota, & segmento AC, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit utcumq; , &c. Quod erat ostendendum.

A L I T E R. Accipiat recta D, æqualis segmento AC. Quoniam recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB; hoc est, sub AB, & AC, æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC; quod est propositum.



1. secundi.

S C H O L I O N.

¶ *Et hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, una cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Parit ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.*

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

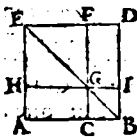
S I recta linea secta sit utcumq; Quadratum, quod a tota describitur, æquale est

L 2

& illis,

& illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA AB, diuisa sit utcumq; in C. Dico quadratum ro ius rectæ AB, equale esse quadrans segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur super AB, quadratum AD, ducaturq; diameter BE. Deinde ex C, agatur, CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB; Eruntq; quadratum AD, diuisum in quatuor paralelogramma.



Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atque tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales; & BAE, rectus est; reliqui ergo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadē ratione ostendens, angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex 31. quæ ad 4. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, ut ibi ostensum est, diameter BE, diuidit, angulos rectos ABD, AED, bisariam. Quia ergo anguli tres trianguli EFG, æquales sunt duobus rectis; & angulus EFG, rectus est, cum sit equalis recto D, externus interno; nec nō FEG, semirectus; cur & reliquus EGF, semirectus, ideoq; equalis angulo F. G.

Quare æqualia erunt latera EF, & FG, quæ cum sint æqualia oppositis lateribus GH, HE, erit paralelogrammū FH, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod HG, recta æqualis sit rectæ AC; & rectangula AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sint rectæ CB; & FG, æqualis rectæ GH, hoc est rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, equale sit quadrans CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratū AD, totius lineæ AB, equale esse quadrans segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdē segmentis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit utriusq; quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ sub ora AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub AB, & AC, comprehensum, æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC; Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. quod est propositum.

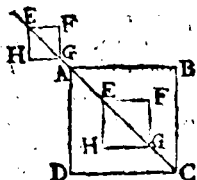
2. secundi.

3. secundi.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori bulus theorematum demonstratione, in qua ostensum est, rectangula CI, FH, quæ sunt circa diametrum BD, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ commune aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma CI, FH; Illud enim angulum habet ARD, commune cum quadrato, hoc vero angulum AED. Idem nihilo minus verum est de quibuscumque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, consistat parallelogrammum FH, siue intra quadratum, siue extra, quod tamẽ habeat latera lateribus quadrati BD, parallela; Dico FH, esse quadratum. Cum enim parallela sint AB, EF, erunt anguli BAC, FBG, æquales, internus & externus; atque eadem ratione anguli BCA, FGB, æquales erunt. Sane autem anguli BAC, BCA, semirecti, ut ostensum iam fuit; Igitur & anguli FBG, FGB, semirecti erunt, propterea; latera EF, FG, illis opposita, æqualia, & angulus F, rectus.



29. primi.

32. primi.

6. primi.

34. primi.

Quare cum EF, FG, latera æqualia sint oppositis lateribus GH, HE, erit FH, quadratum. Quod est propositum.

SCHOLIION.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercēbitur. Sit numerus 10. diuisus utriusque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri aequale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. una cum numero 21. qui ex 7. in 3. procedatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PER FACILE autem ex hoc theoremate demonstrabimus. Si linea recta fuerit dupla linea recta, quadratum ex illa descriptum, quadruplum esse quadrati ex hac descripti. Sit enim linea AB , dupla linea K . Dico quadratum recte AB , quadruplum esse quadrati recte K . Nam diuisa AB , bisariam in C , si fide constructio, ut in theoremate 3. erunt quatuor parallelogramma AG , CI , IF , FH , quadrata, atque inter se aequalia, cum omnia eorum latera sint aequalia, ut facile demonstrari potest ex propof. 34. lib. 1. omnesque anguli recti. Quare cum quadratum AB , aequale sit quatuor quadratis AG , CI , IF , FH , erit quadratum linea AB , quadruplum quadrati lineae AC hoc est, lineae K , quae aequalis est ipsi AC . Est. n. utraque dimidia linea AB .

BREVIVS. Ex hac propositione, quadratum recte AB , aequale est quadratis rectarum AC , CB , & rectangulo sub rectis lineis AC , CB , bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum aequalium AC , CB , aequalia sint, & rectangulum sub aequalibus AC , CB , quadratum quoque sit, atque aequale quadrato recte AC ; Constat quadratum recte AB , quadruplum esse quadrati recte AC . cum aequale sit quatuor quadratis aequalibus quadrato recte AC .

ECONTRARIO ostendemus. Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum esse lateris huius. Sit enim quadratum recte AB , quadruplum quadrati recte K . Dico latus AB , duplum esse lateris K . Nam diuisa recta AB , bisariam in C , ut AB , dupla sit ipsius AC ; erit, ut iam demonstratum est, quadratum recte AB , quadruplum quadrati recte AC ; Erat autem & quadruplum quadrati recte K . Igitur aequalia sunt quadrata rectarum K , & AC , & ipsa recta K , & AC , aequales. Est autem AB , ex constructione, ipsius AC , dupla: Dupla igitur etiam erit ipsius K . Haec tamen omnia aliter demonstrabimus ad propof. 20. lib. 6.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cū quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATUR recta A B, bisariam in C, & per inæqualia in D, ut sectionum intermedia recta sit C D, qua dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, una cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium præcedentis propos. D I, K G, quadrata, idcoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; est rectangulum A H, una cū quadrato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale; Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint: Igitur D F, A K, æqualia inter se erunt; quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F, erit & rectangulum



34. primi.

43. primi.

36. primi.

L 4

A H,

A H, una cum quadrato A G, æquale eidem quadrato C F.
Si recta ergo linea fecerit in æqualia, & non æqualia, &c.
Quod ostendendum erat.

S C H O L I O N.

ALL THE BODILY MEMBERS OF THE



cisco pluribusq[ue] demonstrabimus, hoc

mo. Quia quadratum ex CB equa-

4. secundi. le est quadratus ex $C D$, $D B$ una cum recto angulo bis sub $C D$, $D B$. Ita recto angulo sub $C D$, $D B$ una cum quadrato ex $D B$.

3. *secundi.* aequale est rectangulum sub C B, B D; Erit quadratum ex C B,

1. secundi. restangulum sub tota AD , DB . Igitur quadratum ex CB ,
est ad totum quadratum ex CD ut CB ad CD cum restangulo sub AD .

IN E, M in numeris est manifestum: Dicitur enim nu-
merus 10. equaliter in 5. & 5. licet in equaliter in 7. & 3.
ita ut melius numerus in 7. sectiones sit 2. quo videlicet di-
mitius numerus 35. superat minorem partem 5. & c. Vides igitur,
numerum 21. ex 7. in 3. productum, macula 4. quadra-
to intermedij numeri 2. equaliter esse 25. quadrato dimidij
numeri 5.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam secetur, & illi recta quaedam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, aequale est quadrato a linea, quæ tū ex dimidia, tū ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECEtur recta AB, bifariam in C, & ei in rectū ad-
datur BD: Dico rectangulum comprehensum sub tota co-
posita AD, & DB, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ
CB, æquale esse quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB,
& adiecta BD, componitur. Descri-
batur namq; CE, quadratum super
CD, & ducta diametro DE, ducatur
ex B, recta BG, parallela rectæ
DE, secans diametrum DF, in H,
puncto, per quod agatur IK, paral-
lela rectæ CD; Item ex A, ducatur
rectæ CF, parallela AL, secans IK, præductam in L. Erunt
igitur per corollarium 4. propos. huius lib. BI, KG, qua-
drata, ideoq; recta DI, rectæ DB, æqualis; Est autem &
KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, com-
prehendetur sub rectis AD, DB; & KG, erit quadratum
rectæ CB. Probandum itaq; est, rectangulum AI, vna cum
quadrato KG, æquale esse quadrato CE. Quoniam ergo
parallelogrammum AK, æquale est parallelogrammo CH,
quod bases AC, CB, æquales sint; Est autem & paral-
lelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum
complemento; erunt AK, HE, æqualia inter se. Addito
ergo communi CI, erit rectangulum AI, gnomoni MNO,
æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum
KG, quadrato CE, sint æqualia; erit & rectangulum AI,
vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æ-
quale. Itaq; si recta linea bifariam secetur, & illi rectæ que
dā linea in rectū adijciatur, &c. Quod erat demonstrandū.



SCHOLION.

ALITER idem ostendimus ex Francisco Maurolyco.
Quia quadratum ex CD, æquale est
quadrato ex CB, BD, vna cum re-
ctangulo bis sub CB, BD; hoc est,
vna cum rectangulis sub CB, BD, & sub AC, BD. Est autem
rectangulis sub AC, BD; CB, BD & sub DB, DB, hoc est,
quadrato ex DB, æquale rectangulum sub AD, DB. Igitur
quadratum ex CD, æquale est reliquo quadrato ex CB vna cum
rectangulo



34. primi.

36. primi.

43. primi.

4. secundi.

1. secundi.

rectangulo sub $A D, D B$: Hoc est, rectangulum sub $A D, D B$, una cum quadrato ex $C B$, aequale est quadrato ex $C D$. Quod demonstrandum erat.

SECTUR. *iqui numerus 10. bisariam, (ut & hoc thes rema numeris accommodamus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 12. qui producitur ex 100 numero composito 82. in adiectum 2. una cum 25. quadrato dimidij numeri, aequalem esse 49: quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.*

Ex hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticae proportionalitatis, qua consistit in eodem semper excessu quantitarum proportionalium. Cum enim $A D$, superet $C D$, magnitudine $A C$, hoc est, $C B$ & $C D$, superet



$B D$, eadem magnitudine $C B$: habebunt linea $A D, C D, B D$, proportionalitatem Arithmeticae. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extre-

mis $A D, B D$, una cum quadrato excessus $C B$, aequale esse quadrato linea media $C D$; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, una cum quadrato excessus, aequale esse quadrato linea media. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. una cum 9. quadrato excessus 3. aequalis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

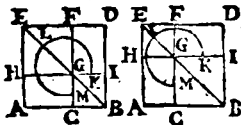
THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur utcumq; Quod a tota, quodq; ab vno segmentorum, utraque simul quadrata, aequalia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

RECTA

RECTA AB, secetur utcumq; in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cū quadrato reliqui segmenti CB. Describatur. n. super AB, quadratū AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AB, secās diametris in puncto G, per qđ agat HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 4. propof. huiuslib. CI, HF, quadrata, & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulū AF, cōprehensum sub tota AB, & segmento AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdē rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale est quadratū AD, si apponatur cōmune quadratū HF, erūt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quæ comprehenduntur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta, linea secetur utcumq;, &c. Quod erat demonstrandum.



34. primi.

SCHOLIUM.

ALITER ex Francisco Maurolyco idem demonstramus. Quia quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadratis ex AC, CB, AC, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, æquale est rectangulum sub AB, AC; Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.



4. secundū.

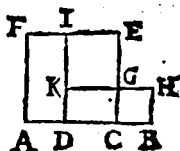
3. secundū.

*I*n numeris autem, diuidatur numerus 10. vicinque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. aequales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. aequales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

*S*i recta linea in partes inaequales secetur: earum partium quadrata aequalia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur; vna cum quadrato eius lineae, quae maior pars superat minorem.

*S*ecetur recta *A B*, in partes inaequales *A C*, *C B*, sitque maior pars *A C*; ponatur autem minori parti *C B*, aequalis linea *A D*; vt *D C*, sit excessus, quo pars *A C*, superat partem *C B*. Dico quadrata partium *A C*, *C B*, aequalia esse rectangulo, quod bis continetur sub *A C*, *C B*, vna cum quadrato lineae *D C*. Constituantur quadrata *A B*, *C H*;



& agatur *D I*, ipsi *C E*, parallela, producatque *H G*, ad *K*. Itaque quoniam *A D*, ipsi *C B*, est aequalis, addita communis *D C*, erit tria *A C*. hoc est *C E*, totum *D H*, aequalis. Est autem & *C G*, ipsi *C B*, aequalis, quod quadratum sit *C H*: Igitur & reliqua *G E*, reliqua *D C*, aequalis erit: *A c* proinde, cum & *I B*,

34. primi.

ipsi *D C*, sit aequalis; erunt *G B*, *I B*, aequales: ideoque *I G*, quadratum erit ab excessu *D C*, descriptum. Quoniam vero rectangula *A I*, *D H*, continentur sub partibus *A C*, *C B*, (Est. n. *A C*, vtriq; lineae *A F*, *D B*; & *C B*, vtriq; *A D*, *B H*, aequalis:) manifestum est, quadrata *A E*, *C H*, partium *A C*, *C B*, aequalia esse rectangulis *A I*, *D H*, quae continentur sub partibus *A C*, *C B*, vna cum quadrato *I G*, excessus *D C*. Quod est propositum.

SCHOLIUM.

*I*n numeris. Secetur numerus 10. inaequaliter in 4. & 6.

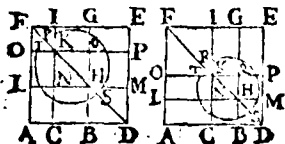
ita ut maior pars superet minorum numero 2. Vides igitur numeros 16. & 6. quadratos partium, qui efficiunt 52. aequales esse numero 4. quod ex 4. in 6. bis sumpto, una cum 4. quadrato excessus 2. ut volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI recta linea secetur vtcunq; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorū, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SI recta AB, in C, diuisa vtcunq; Dico rectangulum quater comprehensum sub AB, & segmento siue maiore, siue minore CP, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Producatuſque AB, versus dictum segmentum CB, ad D, fitque BD, recta æqualis segmento CB, & super tota AD, quadratum describatur AE; Ducta autem diametro



DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipsi DE, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propof. 4. huius libi. OI, NQ, BM, quadrata. Et quia OK, æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC: Rursus quia NH, æqualis est rectæ CB, erit NQ, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; Atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, cum LH, sit æqualis rectæ AB. Eadē rōne erūt duo rectan-

34. primi.

34. primi.

34. primi

34. primi.

rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cū NH, HM, rectæ æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc est, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, PM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erūt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG; gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CF. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quobrem, si recta linea secetur vtcunq; &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

4. secundi.

ALITER idem ex Francisco Maurolyco demonstrabitur. Quia quadratū ex AD æquale est quadratis ex AB, BD, vna cū rectangulo sub AB, BD, bis; hoc est, quadratis ex AB,



7. secundi.

BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: Et quadrata ex AB, BC, æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratū ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.

SECE TVR iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

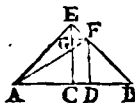
9.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & nō æqua-

æqualia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECTVA recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium AD, DB, dupla esse quadratorum, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia sectionum CD. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB; Ducanturq; rectæ EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoq; ad A B, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipsi AB, secans CE, in G, ducaturq; AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia sunt; erunt anguli CAE, CEA, æquales. Est autem angulus ACE, rectus; reliquus igitur anguli alium rectum conficiet, ideoq; AEC.



semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, æqualis est recto ECB, externus interno; erunt reliqui duo anguli uni recto æquales: ostensum autem est, angulum FEG, esse semirectum; igitur & EFG, semirectus erit, proptereaque cum anguli FEG, FGE, æquales sint, erunt & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia; nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE; Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia; quod & lineæ AC, CE, æquales sint; Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF; At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF;

Igitur

5. primi.

32. primi.

19. primi.

32. primi.

6. primi.

47. primi.

47. primi.

4. primi.



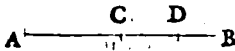
7. primi.

7. primi.

Igitur quadratum lateris EF , duplum erit quadrati lateris FG , hoc est quadrati lineae CD ; Est enim CD , recta rectae FG , æqualis, cum CF , sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE , EF , dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC , CD .
Sunt autem duo quadrata rectarum AE , EF , æqualia quadrato rectae AF ; & quadratum rectae AF , æquale duobus quadratis rectarum AD , DF . Igitur & duo quadrata rectarum AD , DF , dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC , CD . Atqui quadratum rectae DF , æquale est quadrato rectae DB ; ostensum enim est, rectas DF , DB , esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD , DB , segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum AC , CD , dimidiæ lineæ, & inter mediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC , ipsi CE , equalis est, & superas CB , ipsam CD , recta DB ; superas bis quæque AC , ipsam CD , eadem recta DB . Quare, ut ad 7. prop. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum AC , CD , equalia sunt rectangulo sub AC , CD , bis; una cum quadrato rectae DB ; ac propterea quadrata rectarum AC , CD , & rectangulum sub AC , CD , bis una cum quadrato rectae DB , dupla sunt quadratorum ex AC , CD : Sed quadratis rectarum AC , CD , una cum rectangulo sub AC , CD , bis, est æquale quadratum rectae AD . Igitur & quadrata rectarum AD , DB , dupla sunt quadratorum ex AC , CD .



4. secundi.

ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex linea recta AD , descriptum æquale est quadratis descriptis ex AC , CD , una cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis AC , CD , comprehens; si commune ponatur quadratum ex CE , erunt quadrata ex AD , DB , equalia quadratis ex AC , CD , una cum rectangulo bis sub AC , CD .

vel

vel sub BC, CD , Atqui quadrato ex DB , vna cum rectangu-
lo, bis sub BC, CD , equalia sunt quadrata ex BC , seu AC ,
& ex CD . Quadrata igitur ex AD, DB , equalia sunt bis
quadratis ex AC, CD ; Ac propterea quadrata ex AD, DB ,
dupla sunt quadratorum ex AC, CD ; Quod ostendendum
erat.

7. secundi.

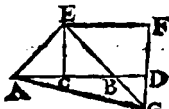
IAM vero rursus numerus, 10. diuidatur equaliter in 5.
& 5. Item inaequaliter in 7. & 3. ut sit intermedia sectio nu-
merus 2. cum in propor. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur
49. & 9. partium inaequalium 7. & 3. dupli sunt quadrato-
rum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectio-
nes, ut manifestum est.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI recta linea secetur bifariam, adijcia-
tur autem ei in rectū quæpiam recta linea:
Quod a tota cum adiuncta, & quod ab ad-
iuncta, utraque simul quadrata, duplicia
sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod
a composita ex dimidia & adiuncta, tanquā
ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECTUR recta AB , bifariam in C , & ei in rectum
addatur BD : Dico duo quadrata rectarum AD, BD , du-
pla esse quadratorum, quæ ex rectis AC, CD , describun-
tur. Super AB , enim ex C , erigatur perpendicularis CE ,
quæ sit æqualis dimidiæ AC , uel CB , & iungantur rectæ
 AE, EB . Per D , deinde educatur DF ,
ipfi CE , parallela, occurrens rectæ EB ,
protractæ in G ; & per E , ducatur rectæ
 CD , parallela EF , secans DF , in F ,
iungaturque recta AG . Ostendetur iā,
angulum AEB , esse rectum, ut in præcedenti propos. &
 CEB , semirectum; ideoque eius alternum EGF , semirec-
tum quoque: Est autem angulus F , rectus, cum in paral-



M

lelogrammo

29. primi

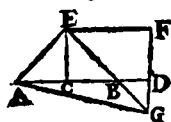
34. primi

32. primi
6. primi

leogrammo C F, recto angulo C, opponatur; Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Quare rectæ E F, F G, & angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G esse æquales, propterea quod angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E, erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C.

47. primi

47. primi



Rursus quia quadratū rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplū quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, cum C D,

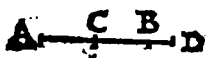
34. primi

47. primi

recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum: Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est quadratum rectæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis æqualibus A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D, erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bisariam, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I O N .

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, recta B D; superabis quoque C D, ipsam A C, eadem recta B D. Quare, ut ad 7. ppos huius lib. ostēdimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt



rectangulo sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarū A C, C D,

4. secundi

& rectangulum sub A C, C D, bis, una cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Atqui quadratis rectarū A C, C D, una cū rectangulo sub A C, C D, bis, æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarū A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.

ALITER

ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratū ex AD, æquale est quadratis ex AC, CD, una cū rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; si commune addatur quadratū ex BD, erunt quadrata ex AD, BD, equalia quadratis ex AC, CD, BD, una cū rectangulo bis sub BC, CD. Sed quadrato ex BD, una cū rectangulo bis sub BC, CD, equalia sunt quadratis ex CD, BC, hoc est, quadrata ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, equalia sunt quadratis ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD; Quod erat demonstrandum.

4. secundi

7. secundi

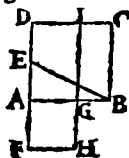
XYMERVS 10. bisariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinis 3. ut totus numerus cōpositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorū 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, ut perspicuum est.

PROBL. I. PROPOS. II.

II.

DATAM rectam lineam secare, ut cōprehensum sub tota, & altero segmentorū rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

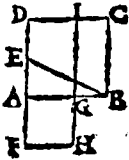
DATA sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum cōprehensum sub tota AB, & minori eius segmento, æquale sit quadrato reliqui segmenti maioris. Describatur ex AB, quadratū AC, & diuiso latere AD, quod cū linea data AB, angulū rectū efficit, bisariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF; & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Dico rectam AB, sectā esse in G, ita ut rectangulum cōprehensum sub AB, & BG, æquale sit quadrato rectæ AG. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia eius quatuor latera sint



M 2 æqua-

34. primi

6. secundi.



47. primi

æqualia ; & rectangulum C G , comprehensum sub A B , & segmento B G , quod A B , æqualis sit ipsi B C . Itaque probandum est, rectangulum C G , & quadratum A H , æqualia esse. Quoniam igitur recta D A , dimissa est bisariam in E , & c. addita in rectum A F , erit rectangulum sub D F , F A , hoc est , rectangulum D H , (cum F H , sit æqualis ipsi F A ;) una cum quadrato dimidiæ A E , æquale quadrato rectæ E F , hoc est , quadrato rectæ E B , quæ rectæ E F , æqualis est : Est autem quadratum rectæ E B , æquale quadratis rectarum A E , A B : Quare rectangulum D H , una cū quadrato rectæ A E , æquale est quadratis rectarum A E , A B : Dempito ergo communi quadrato rectæ A E , remanebit rectangulum D H , æquale quadrato rectæ A B , hoc est , quadrato A C . Ablato igitur rursus communi rectangulo A I , remanebunt rectangulum C G , & quadratum A H , inter se æqualia . Quod est propositum . Datam igitur rectam A B , secimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIION.

Hoc theorema nulla ratione accommodari potest numeris . Non enim numerus ullus in duos numeros dividitur , ut numerus productus ex 1010 in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis , ut demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus .

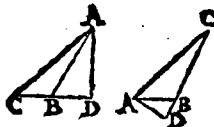
12.

THEOR. II. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis , quadratum , quod fit a latere angulum obtusum subtendente , maius est quadratis , quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus , rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum , quæ sunt circa obtusum angulum ,

Ium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, una cū rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, diuisa sit in B, utcumque, erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarū CB, BD, & rectangulo cōprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur cōmuni quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarū CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: Est autē quadratis rectarū CD, DA, æquale quadratū rectæ AC; Quare & quadratū rectæ AC, æquale erit trib⁹ quadratis rectarū CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur quadratis rectarum BD, DA, æquale sit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.



4. secundi.

47. primi

47. primi

SCHOLIUM.

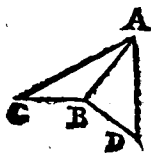
QVONIAM assumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractū; Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulū in latus CB, protractum, cuiusmodi est recta AD. Si enim

M 3 caderet

caderet intra triangulum, qualis est recta AE , essent duo anguli ABE, AEB , duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus: Quod e si contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latere BC , productum ad partes C , qualis est recta AF , essent rursus in triangulo ABF , duo anguli ABF, AFB , maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.

CONVERSVM quoque huius theorematiss ita ostendimus. In triangulo ABC , quadratum lateris AC , maius sit quadratis laterum AB, BC ; Dico angulum B , quem dicitur latius subtendisse, esse obtusum. Ducatur enim ex B , ad AC perpendicularis BD , lineae BC , equalis, iungaturq; recta AD .

47. primi.



Quoniam igitur quadratum ex AD , aequale est quadratis ex AB, BD , hoc est ex AB, BC ; Ponitur autem quadratum ex AC , maius quadratis ex AB, BC : Erit quadratum ex AD , minus quadrato ex AC , & idcirco recta AD , minor quam recta AC . Itaque quia latera AB, BC , trianguli ABC , equalia sunt lateribus AB, BD , trianguli ABD , utrumq; utriusq;

25. primi.

& basis AC , maior est base AD ; Erit angulus ABC , maior angulo ABD : sed ABD , rectus est. Igitur ABC , recto maior, & obtusus erit.

13.

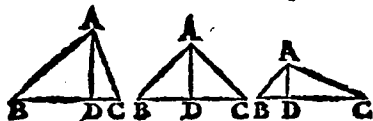
THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygoniis triagulis, quadratum a latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quae sunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno laterum, quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

S I N T omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratū lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, una cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duobus quadratis laterū A C, C B. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, utcumque, erunt quadrata rectarū

B C, C D, æqualia rectangulo comprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D.



7. secundi

Addito ergo cōmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarū B D, D A:

Duobus autem quadratis rectarū C D, D A, æquale est quadratum rectæ C A; Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cū ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, æquale sit quadratum rectæ A B;

erunt duo quadrata rectarū B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & quadrato rectæ A B: quod est propositum. Eodem modo ostenderur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat.

47. primi

47. primi

SCHOLIUM.

Q U A M V I S Euclides theorema hoc proponat de triangulis dñtaxat oxygonijs, quæ scilicet oēs angulos habet acutos; Idē tamen verum est in triangulis rectangulis & amblygonijs, ut constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, ut perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum observandum est in triangulis

lis reſt angulis, & amblygonijs perpendicularẽm duci debere ab angulo recto, vel obtuſo; in oxygonijs vero, a quolibet.



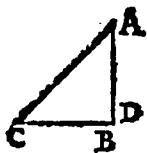
Ita enim ſemper cadet perpendicularis intra triangulum, ut Euclides in demonſtratione aſſumpſit. Quod quidem facile demonſtrabitur hac ratione. Siſt enim in triangulo ABC , duo anguli AEC , ACB ,

acuti, angulus vero BAC , rectus, vel obtuſus, acutusve. Diſco perpendicularẽ ex A , demiffam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B , protractam ad partes B , cuiusmodi eſt recta AE , eſſet in triangulo ABE , angulus exterior ABC , acutus, maior interno & oppoſito recto AEB , quod eſt abſurdum. Si vero caderet extra in B C , productam ad partes C , qualis eſt recta AF , in idẽ incidereſſet abſurdum, ut maniſeſtum eſt.

16. primi

Idẽ hoc theorema in triangulis reſt angulis, & obtuſangulis demonſtrat Federicus Commendinus, etiam ſi perpendicularis AD , non cadat in laſus BC , ſed vel eadẽ ſit, quæ laſus AC , ut in reſt angulis, vel extra triangulũ cadat, ut in obtuſangulis accidit, cẽu in ſcholio propoſ. præcedentis demonſtravimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis nõ ab angulo recto, vel obtuſo, ſed ab altero acutorum demittitur.

Si T triangulũ reſt angulũ ABC , cuius angulus B , ſit reſtus; & ex angulo A , acuto ad BC , perpendicularis ducatur AD , quæ eadẽ erit, quæ laſus AB , propter angulũ reſtũ B . Di



co quadratum laſeris AB , acutum angulũ C , ſubtendentis, minus eſſe, quam quadrata laterum AC , CB , reſt angulo bis comprehenſo ſub laſere CB , in quod perpendicularis cadit, & ſub linea CD , quæ interjicitur inter perpendicularẽ AD , & acutum angulũ C . Cum enim

47. primi

quadrata ex AB , CB , equalia ſint quadrato ex AC ; addito communi quadrato ex CB , erunt tria quadrata, nempe quod ex AB , & duplum eius, quod ex CB , equalia duobus quadratis ex AC , CB : At quadratum ex CB , idẽ eſt, quod reſt angulum ſub CB , CD ; Igitur & quadratum ex AB , una cum reſt angulo bis ſub CB , CD , aquale eſt quadratis ex AC , CB ; Ac proinde quadratum ex AB , minus eſt, quam quadrata ex

AC ,

AC, CP, rectangulo bis sub CB, CD, Quod est propositum.

R. V. R. s. v. s. fit triangulum obtusangulum ABC, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehensibis sub CB, & CD. Quoniam quadrata ex AD, CD, aequalia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, aequalia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD, aequale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, una cum qua leatis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, aequalia quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, una cum rectangulo sub CB, BD, aequale est rectangulum sub CD, CB; Ac propterea duplo quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD, aequale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, una cum rectangulo bis sub CB, CD, aequale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.



47. primi

4. secundi

47. primi

3. secundi

CONVERSVM quoque huius theorematris in quodam ensiq; scholio demonstratur in hunc sese modum.

IN triangulo quocunque ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulum C, quem ducunt latus subtendis, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, linea CB, equalis, iungaturque recta AD. Quoniam



igitur quadratum ex AD, aequale est quadratis ex AC, CD hoc est, ex AC, CB; Ponitur autem quadratum ex AB, mi-

47. primi

nu.

us quadratis ex AC, CB ; Erit quadratum ex AD , maius quadrato ex AB , & ideo recta AD , maior quam recta AB .



Itaque quia duo latera AC, CD , trianguli ACD , equalia sunt duobus lateribus AC, CB , trianguli ACB , utrumque utriusque :

25. primi

& basis AD , maior base AB : Erit angulus ACD , maior angulo ACB : Sed ACB , rectus est, ex constructione: ergo ACB , recto minor, & acutus erit.

Ex his autem, quae in proximis duobus theorematibus, & in 1. lib. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inveniemus. Si primo triangulum rectangulum ABC , cuius latera nota sint, nempe AB ,



10 . palmorum; AC , 8 . BC , 6 . Diviso latere BC , bifariam in D , ut sit CD , 3 . palmorum, perficiatur rectangulum $ACDE$, quod aequale est triangulo ABC , ut in scholio propos. 48. lib. 1. ostendimus. Quia vero ex ductu CD , trium palmorum in CA , 8 . palmorum produciatur area rectanguli CE , 24 . palmorum quadratorum, ut ad

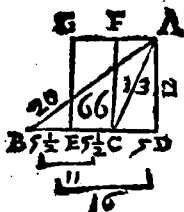
initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum ABC , rectangulo CE , aequale. Quod est propositum.

12. secundi

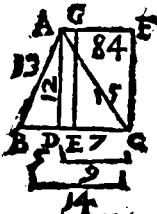
Si 1. secundo triangulum obtusangulum ABC , cuius latera sint cognita; AB , 20 . palmorum; AC , 13 . BC , 11 . Primum igitur inveniendae est quantitas perpendicularis lineae AD , hoc modo Quoniam quadratum lateris AB , maius est, quam quadrata laterum AC, BC , rectangulo bis comprehenso sub BC, CD ; si quadrata laterum AC, BC , nempe $169. 121$. quae efficiunt 290 . detrahantur ex 400 . quadrato lateris AB , remanebunt 110 . pro rectangulo bis comprehenso sub BC, CD , cuius numeri dimidium 55 . dabis rectangulum sub BC, CD . Si igitur 55 . rectangulum sub BC, CD , dividatur per 11 . latus notum BC , exhibit reliquum latus CD , 5 . palmorum, ut Ioan. Regiom. demonstrat

fira

propos. 17. lib. 1. de triangulis. Quia vero quadrata
lateralum AD, CD, equalia sunt quadrato lateris AC, si
quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD, 5. palmo-
rum nuper inueni, auferatur ex 169. quadrato lateris AC,
remanebunt 144. palmi pro quadrato
lateris AD. Quare latus AD, erit 12.
palmorum, cum radix quadrata huius
numeri 144. sit 12. Itaque diuiso late-
re BC, bisariam in E, educantur ex
C, E, ad BD, perpendiculares CF,
EG, occurrentes rectae AG, quae per
A, ipsi BD, parallela ducitur, in pun-
ctis F, G. Quibus peractis, si EC,
palmorum quinque cum dimidio, du-
catur in CF, 12. palmorum. (Est
enim CF, ipsi AD, equalis,) exurget area rectanguli
CG, 66. palmorum, quod cum aequale sit triangulo ABC,
ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum CG, &
triangulum ABC, in eisdem parallelis) Erit quoque area
trianguli ABC, palmorum quadratorum 66. quod est pro-
positum.



Si t postremo triangulum acutangulum ABC, latera
habens nota; AB, 13. palmorum; AC, 15. BC, 14. Primū
igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis
AD, hac ratione: Quoniam quadratum lateris AB, minus
est, quam quadrata laterum AC, BC,
rectangulo comprehenso bis sub BC, CD;
si quadratum lateris AB, nimirum 169.
detrahatur ex quadratis laterum AC,
BC, hoc est, ex 225. 169. quae efficiunt
421. remanebunt 252. pro rectangulo cō-
prehensio bis sub BC, CD, cuius numeri
dimidium 126. dabit rectangulum sub
BC, CD. Si igitur 126. rectangulum sub
BC, CD, diuidatur per BC, latus
notum, ut per 14; exhibit reliquum eius latus CD, palmorum
9. ut constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17.
Quoniam autē quadrata ex AD, CD, equalia sunt quadrato
ex AC; si quadratum 81. palmorum, nempe lateris CD,



9. pal-

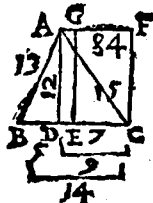
47° primi

34. primi

13. secunda

47. primi

9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris AC ; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD . Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit la-



tus AD , 12. palmorum. Itaque dimiso latere BC , bisariam in E , educantur ex C, E , ad BC , perpendicularares CF, EG , occurrentes rectæ AF , quæ per A , ipsi BC . parallela ducitur, in punctis G, F . Quibus peractis, β $CF, 7$. palmorum ducatur in EG , 12. palmorum; (est enim EG , recta ipsi AD , æqualis) exurget area rectanguli EF , palmorum 84. Quod cum

triangulo ABC , sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1 (sunt enim rectangulum EF , & triangulum ABC , in eisdem parallelis) erit quoque area trianguli ABC , 84. palmorum. Quod est propositum.

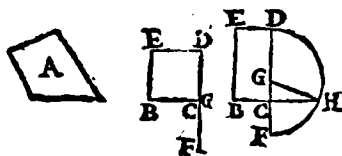
ITAQUE in uniuersum, area cuiuscunque trianguli producit ex dimidio basis in perpendiculari, quæ a vertice ad basin demittitur, cum in exemplis datis est manifestum.

14.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo, æquale quadratum constituere.

43. primi Si r datum rectilineum A , cui quadratum æquale constituendum est. Constituatur parallelogrammum $BCDE$, æquale rectilineo A habens angulum rectum, cuius vnum



latus. ut DC , producatum ad F , sitque CF , recta æqualis rectæ BC . Diuidaturque DF , bisariam in puncto G quod

cadet aut in punctum C , aut nō. Si cadit in punctum C , erit recta BC , (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD , æqualis. Quare rectangulum BD , erit quadratum, cum latera DE, EB , æqualia sint

34. primi

sint oppositis lateribus B C, C D; atque adco, constitutum
erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero punctum G, nō
cadit in C; facto G, centro, describatur intervallo G D, uel
G F, semicirculus: H D, producatuq; B C, donec circun-
ferentiam fecerit in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H,
esse æquale rectilineo A. Ductur enim recta G H. Ita q; quia
recta D E, diu ditur bisariam in G, & non bisariam in C erit
rectangulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectan-
gulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quadra-
to rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F,
G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, æquale est
quadrato rectarum G C, C H. igitur rectangulum B D, una
cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis re-
ctarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi qua-
drato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, re-
ctilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo re-
ctilineo æquale quadratum constitutumus: Quod facere
oportebat.

5. secundi

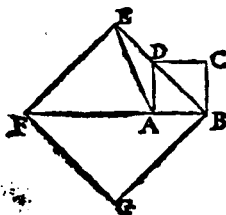
47. primi

SCHOLIUM.

QVONIAM in secundo hoc libro Euclides de rectangulis
parallelogrammis, atque quadratis disputans; recte inseri hic
poterit sequens problema de quadrato nō inincundum, ad hunc
modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati
supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius qua-
drati.

EXCEDAT diameter ali-
cuius quadrati latus eiusdem re-
cta A B. inueniendumque sit la-
tus illius quadrati. Ex recta
A B, describatur quadratum
A C, cuius diameter ducta B D,
producatu ad E, usq; D E, re-
cta rectæ A D, equalis. Dico
rectam B E, esse latus illius qua-
drati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato A B.
Ducatur



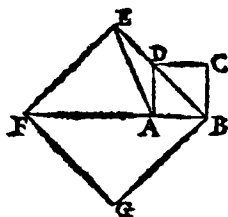
12. primi

6. primi

3. primi

6. primi

Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quae rectam BA, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus est, & EBF, semirectus, erit & BFE, semirectus. Quare recta BE, FE, aequales sunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipsi BE; & ex B, recta BG, parallela ipsi EF, occurrens priorum in G; constitutum erit quadratum recta BE. Quod si ducatur recta AE, erunt anguli AED, EAD, aequalibus lineis DE, DA, oppositi aequales. Quare si demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, aequales, ideoque recta EF, AF, aequales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AF, superat data recta AB; superabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB; quod est propositum.



FINIS ELEMENTI SECUNDI.



E V C L I D I S

ELEMENTVM III.



DEFINITIONES.

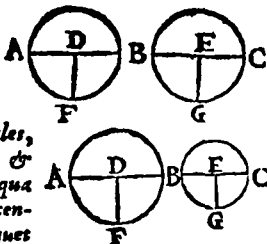
I.

AEQVALES circuli sunt, quorū diametri sunt æquales; uel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.



QONIAM Euclides in hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens futurus est usus in hoc lib. Primo itaque docet eos circulos esse æquales, quorum diametri, uel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidia-

metri circa alterū extremū fixū, & immobile, cen in 1. lib. diximus, per spicuum est. eos circulos esse æquales, quorū semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sūt æquales; uel etiā quorū tota diametri æquales sunt. Ut si diametri AB, BC, uel rectæ DF, EG, e centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiā si circuli sint æquales, erunt diametri, uel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, uel rectæ ductæ ex centris sunt inæ-



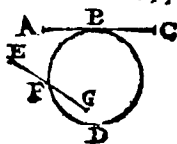
quales,

quales, inaequales esse; atque adeo illius, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem, &c.

II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producat, circulum non secat.

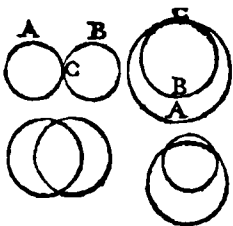
Ut recta AB , quia ita circulum BFD , tangit in B , ut producta ad C , nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum; dicitur tangere circulum. At vero recta EF , quia ita eundem circulum tangit in F , ut producta ad G , secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicitur circulum tangere, sed secare.



III.

CIRCULI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

Eodem modo duo circuli AC, BC , se mutuo dicuntur tangere in C , quia ita se se consingunt in C , ut nemer alterum



secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exterius se se circuli tangunt, ut quando unus extra alterum est positus; aut interius, quando unus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, ut unus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

III.

IN circulo, æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, inquam maior perpendicularis cadit.

Q U O N I A M inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; alia vero infinitis modis variari possunt; rectæ distantia illius puncti a linea accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A , a recta BC , dicitur esse perpendicularis AD , non autem AE , vel AF , vel alia quavis, quæ non perpendicularis est; quia AD , omnibus est brevior, quod angulus AED , vel AFD minor sit angulo recto ADE . Immo non solum AE , AF maiores sunt quam AD , sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim AE maior, quam AF , cum angulus AEF , sit obtusus, Et AF FE , acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Hinc factum est, ut Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt dua rectæ AB , CD , in circulo $ABCD$, æqualiter dicuntur distare a centro E , si perpendiculares EF , EG , æquales fuerint. At linea CD , longius abesse dicitur a centro E , quam linea HI , si perpendicularis EK , maior fuerit perpendiculari EK .



V.

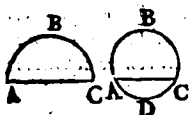
SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



VT si ducatur in circulo $ABCD$, recta BD , vnicuique, dicetur tam figura ABD , contenta circumferentia BAD , & recta BD ; quam BCD , comprehensa recta BD , & circumferentia BCD , circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta BD , per centrum E , incidit; Segmentum semicirculo maius, quando recta BD , non transis per centrum, in ipso a tamen centrum existit, quale est segmentum BAD ; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum BCD . Vocatur a plerisque Geometris recta BD , chorda, & circumferentia BAD , vel BCD , arcus.

VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur; Primo angulum segmenti, dicens, angulum mixtum BAC , vel BCA , contentum sub recta linea

AC , & circumferentia ABC , appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo existerit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quod-

quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

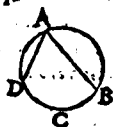
Si r segmentum circuli quodcunque ABC , cuius basis recta AC : Ex suscepto quolibet puncto B , in circumferentia, ducantur ad puncta A , & C , extrema basis, recta linea BA, BC . Angulus igitur rectilineus ABC , dicitur existere in segmento ABC .

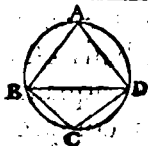


VIII.

CVM vero comprehendentes angulū rectæ lineæ aliquam assumūt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

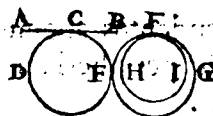
Ex puncto A , quolibet suscepto in circumferentia circuli $ABCD$, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD , ad duo extrema B , & D , circumferentiæ BCD , cuiusque, quam quidem duc rectæ AB, AD , assumunt, Angulus itaque rectilineus BAD , insistere dicitur circumferentiæ BCD . Per spicuum autem est, hunc angulum a precedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD , iuxta precedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento BAD , si recta BD , basis duceretur; ex hac vero insistere circumferentiæ BCD . Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ insistit, quamvis unus & idem sit; ad diversa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur





segmentum aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentia insistens. Angulus enim in eo existens, erit BCD; at eius circumferentia CBD, insistens, erit BAD, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinasi sunt Orontius, Pelesavius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiae cuiuspiam insistens, ad diversos arcus referantur, lucè clarius patebit ex ultima propos. lib. 6. quæ solum convenire potest circumferentijs circumlorum, quibus anguli insistant, non autem, in quibus existant, ut eo in loco ostendemus. Idem quoque facile constat ex verbo græco $\beta\epsilon\lambda\lambda\acute{\eta}\nu\alpha\iota$, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus DAB, supra circumferentiam CBD.

PRAETER tres dictos angulos consideratur etiam a Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circum, & circumferentia circuli, vel orbis duobus circumferentijs se mutuo tangentes, suo hoc exterius fiat, siue interi.



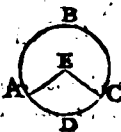
Exemplum: Si recta AB, tangat circumulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel CBE, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circumulus CDE, tangat circumulum EFG, exterius in E: Item circumulus HFI, circumulum EFG, interius in F; appellabitur iam angulus curvilineus CEF, quæ EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaque, ut vides, tres anguli contingentiæ, unus quidem mixtus, reliqui vero duo, curvilinei.

IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & a periph-

pheria ab illis assumpta.

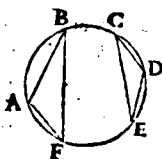
S i in circulo $A B E D$, cuius centrum E , recta $A E, C E$, constiterint angulum $A E C$, ad centrum E , nominabitur figura $A E C D$, consentia rectis $A E, E C$, & circumferentia $A D C$, quam prædicta linea assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, ut male innotuit existimantur. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam $A D C$, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheria a rectis $A E, C E$, assumpta: Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheria, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in utraque definitione usus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνειν.



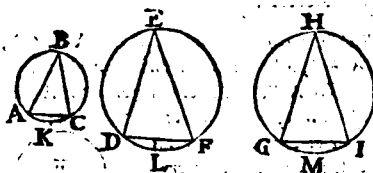
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

SEGMENTA, seu circumferentia $ABDF, DCAE$, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCE , æquales: vel, quod idem est, in quibus idem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.



EODEM modo segmenta diversorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si anguli ABC, DEF, GHI , fuerint æquales, dicuntur segmenta, seu circumferentia ABC, DEF, GHI , quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hac



segmentorū, circūferentiārum similitudo in eo, quod qualis pars est una circūferentia totius sue circūferentia,

talis quoque sit altera circūferentia, quae dicitur huic similis, totius suae circūferentiae, ita ut qualis, & quanta pars est circūferentia ABC , totius circūferentia ABC , talis & tanta quoque pars sit circūferentia DEF , totius circūferentia DEF ; Item talis, & tanta circūferentia GHI , totius circūferentia GHI . Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circūferentia similes, ad totas circūferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quae vel aequales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt aequales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc saxis sit, talia segmenta circularum, vel etiam arcus, circūferentiaue, appellari similes.

1. PROBL. I. PROPOS. I.

DATI circuli centrum reperire.



Si Γ circulus datus $ABCD$, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtrunque AC , quae bifariam diuidatur in E , & per E , ad AC , perpendicularis agatur BD . Hac igitur bifariam secta in F ; dico F , esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD , aliud punctum, præter F , non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inaequaliter, quandoquidem in F , diuisa fuit aequaliter. Si igitur F , non est centrum, sit punctum G , extra rectam BD , centrum, a quo ducantur lineae GA , GE , GC . Quoniam ergo latera AE , EG , trianguli AEG , aequalia sunt lateribus CE , EG , trianguli CEG ; & basis AG , basi CG ; (a centro

centro enim (ducuntur) erunt anguli AEG , CEG , æquales, ideoq; recti: Erat autem & angulus AEF , rectus ex constructione; Igitur recti AEF , AEG , æquales sunt; pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G , centrum: eademq; est ratio de omni alio. Quare F , centrum est. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

3. primi.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bitariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD , recta rectam AC , bitariam secat in B , & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F , necessario esse circuli centrum.

THEOR. I. PROPOS. 2.

2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo ABC , sumantur quælibet duo puncta A , & C , in eius circumferentia: Dico rectam ex A , in C , ductam cadere intra circulum, ita ut ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC , recta. Invenio igitur centro E , ducantur ab eo ad puncta assumpta A , & C , nec non ad quodvis punctum D , in recta ADC , lineæ rectæ EA , EC , ED , secetq; ED , circumferentiam in B . Quoniam ergo duo latera EA , EC , trianguli, cuius basis ponitur recta ADC , equalia sunt, (e centro enim ducuntur) erunt anguli EAD , ECD , æquales: Est autem angulus EDA , angulo ECD , maior, externus interno opposito, cum latus CD , in triangulo BCD , sit productum ad A . Igitur

1. tertij.



5. primi.
16. primi.

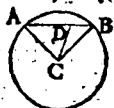
19. primi.

& angulo EAD , maior erit idem angulus EDA .
Quare recta EA , maiori angulo opposita, *hypothesis*, est, recta
 EB , sibi equalis, maior erit, quam recta ED , pars quam
eorum, Quod est absurdum. Non igitur recta ex A , in C ,
ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo
demonstrabitur, rectam ductam ex A , in C , non posse ca-
dere super arcum ABC , ita ut eadem sit, quæ circumferen-
tia ABC . Esset enim recta EA , maior, quam
recta EB . Quod etiam ex definitione rectæ
lineæ patet, cum ABC , arcus sit linea cur-
va, non autem recta. Itaque si in circuli per-
ipheria duo quolibet puncta, &c. Quod erat
ostendendum.



SCHOLIUM.

Idem hoc theorema demonstrari poteris affirmative,
hoc modo. Recta AB , contingat duo puncta A , & B , in cir-
cunferentia circuli AB , cuius centrū C . Dico
rectā AB , intra circulū cadere, ita ut omnia
eius præter media intra circulū existat. Assu-
matur. n. quodcumque eius punctū intermediū
 D , & ex centro educatur recta CA , CB , CD .



5. primi.

16. primi.

19. primi.

Quoniam igitur duo latera CA , CB , trianguli CAB , aequa-
lia sunt, erunt anguli CAB , CBA , æquales: Est autem an-
gulus CDA , angulo CBA , maior, externus interno; Igi-
tur idem angulus CDA , angulo CAD , maior erit, & ob
id latius CA , latere CD , maius erit. Quare cum CA , sit
ducta a centro ad circumferentiā usque, non perveniet re-
cta CD , ad circumferentiā, ideoque punctum D , intra circū-
lum cadet: Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto.
Ita igitur recta AB , intra circulū cadit, quod est propositū.

COROLLARIUM.

Hæc est manifestum, lineam rectam, quæ circulū tangit,
ita ut eum non secet, in uno tantum puncto ipsum tangere.
Si enim in duobus punctis eum tangeret, ca-
deret pars rectæ inter ea duo puncta pu-
sita, intra circulum; Quare cito
circulum secaret, quod est
contra hypothēsia;

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER A, centrum circuli BCD, recta CE, extensa dividat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus lateribus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales; Igitur anguli F, AFD, æquales erunt, hoc est recti. Quod erat primo propositum.



Si et iam AF, ad angulos rectos ipsi BD; dico rectam BD, bifariam secari in F a recta CE. Ductis. n. iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF, & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque; erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

3. primi.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque ideo rectæ FB, FD, æquales erunt.

3. primi.

26. primi.

47. primi.

THEOR.

†

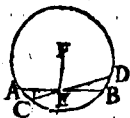
THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant non per centrum extensæ; sese mutuo bifariam non secabunt.

D V A B rectæ A B, C D, se mutuo in E, secant in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secant. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum aliquando bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. Inuenito

1. tertij,

3. tertij.

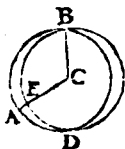


igitur centro circuli F; ducatur ab eo ad E, recta FE. Quoniam ergo FE, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, &c. Quod erat demonstrandum.

5.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli sese mutuo secant; non erit illorum idem centrum.



CIRCULI A B D, E B D, se mutuo secant in B, & D. Dico ipsos non habere idē centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque C, a quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad sectionem B; C A, vero secans vtramque circumferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli

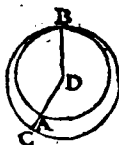
culi $E B D$, erit recta $E C$, rectæ $B C$, æqualis. Rursus quia C , centrum quoque ponitur circuli $A B D$, erit & recta $A C$, eidem rectæ $B C$, æqualis. Quare rectæ $E C$, $A C$, æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo secant, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

6.

SI duo circuli sese mutuo interius tangent; eorum non erit idem centrum.

Duo circuli $A B$, $B C$, se interius tangent in B ; Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D , a quo duæ rectæ ducantur; DB , quidem ad tactum B ; At DC , secans utramque circumferentiam in A , & C . Quoniam igitur D ponitur centrum circuli $A B$, erit recta AD , rectæ BD , æqualis. Rursus quia D , ponitur centrum circuli $B C$, erit recta CD , eidem rectæ BD , æqualis. Quare rectæ AD , & CD , inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo interius tangent, &c. Quod demonstrandum erat.



SCHOLION.

EVCLIDES proposuit theorema hoc de circulis sese interius tangensibus duntaxat, quoniam circulorum exterius sese tangensium, cum unus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

7.

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua

in qua centrum; minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrū ducitur, remotiore semper maior est: Dux autem solum rectæ lineæ æquales ab eodē puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

In diametro A B, circuli A G D E B, cuius centrū F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrū, & ex G, cadant in circulum quocunque lineæ F C, F D, F E. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiā ducuntur, maximam esse G A, in qua est centrū, minimam vero reliquam G B, quæ diametrum perficit; Deinde rectam G C, quæ centro propinquior est, maiorem rectā G D, quæ a centro plus distat, & eadem ratione G D, maiorem rectā G E; Denique ex G, ad vtrasque partes minimæ lineæ G B,



20. primi.

duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur e centrō F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniā igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc est,

rectæ G A; erit & G A, maior quam G C; Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maximæ est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

20. primi.

Deinde in triangulo E F G, latus E F, minus est duobus lateribus F G, G E; Est autem F E, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duobus rectis F G, G E. Demptra ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quam G E; Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiā cadunt.

7.

Restat ut ostendatur, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus rectus G F C, maior est angulo G F D; erit basis G C, maior base G D; Eadem ratione maior erit G C, quam G E; Item maior erit G D, quam G E. Quare linea propin-

24. primi.

propinquior centro maior est ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo BFE , ex altera parte æqualis angulus BFH , & ducatur recta GH , ita ut GE , GH , æqualiter distent a centro. Quoniam igitur latera EF , FG , trianguli EFG , æqualia sunt lateribus HF , FG , trianguli HFG , & anguli his lateribus contenti EGF , HFG , æquales; erunt rectæ GE , GH , ex utraque parte ipsius lineæ minimæ GB , æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G , ducatur alia, quæ cadat supra punctum H , erit ea, cum sit centro propinquior, maior quam GH ; si vero cadat infra H , erit ea, cum sit remotior a centro, minor quam GH , ut ostensum fuit. Dux igitur solum rectæ lineæ æquales ad utrasque partes minimæ GB , cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

4 primi.

SCHOLIUM,

HANC propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, una quidem maxima sit, una vero minima; & reliquarum alia sint inæquales, alia æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquoires, æquales autē ab e æqualiter distabūt.

IN circulo ABC , punctum sumatur D , quo rectæ quocunque DA , DC , DE , DF , & DB , cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit DA , minima vero DC ; ipsarum vero DE , DF , maior sit DE , denique DE , DB , sint æquales. Dico DA , per centrum transire, & DC , reliquam partem esse diametri, hoc est,



DC ,

7. versij. DC, ipsi DA, esse in directum. Item DE, propinquiorum esse centro, quam DF. Denique DE, DB, equaliter a centro abesse. Primum enim si DA, non transsit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, eris ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur. Transsit ergo DA, per centrum.

DEINDE, si DC, non est in directum ipsi DA; protrahat AD, in directum, eris alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius AD, protrahata, omnium minima; Quod est absurdum; cum DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.

7. versij. RURSUS, si DE, non est vicinior centro, quam DF, aut equaliter distabunt ab eo, aut DE, longius ab eo abest: Si equaliter distant, ipse erunt aequales; quod est absurdum, ponitur enim DE, maior. Quod si DF, dicatur esse propinquior centro, ipsa eris maior, quam DE. Quod magis est absurdum.

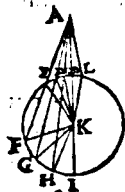
7. versij. POSTREMO, si DE, DB, non equaliter distans a centro, eris ea, qua magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim aequales DE, DB.

8. THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum ducantur rectae quaedam lineae, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquae vero ut libet: In cavam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quae per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quae per centrum transsit, remotiore semper maior est: In convexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quae inter punctum, & diametrum

metrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Dux autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum transeat; aliæ vero A H, A G, A F, utcumq; . Dico omnium esse maximam A I, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ centro propinquior existit, maiorem recta A G, quæ remotior est a centro; Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. Econtrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse. Deinde rectam A C, quæ vicinior est minimæ A B, minorem esse recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipsam A D, maiorem, quam A E. Denique ex A, ad utrasque partes minimæ lineæ A B, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, maiora sunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc est, rectæ A I, erit & A I, maior, quam A H: Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quæ A F. Quare A I, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



20. primi.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia sunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus cæcus A K H, maior est angulo A K G; erit basis A H, basi A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F; Item A G, maior, quam A F. Quare linea centro propinquior maior est linea remotiore.

24. primi.

RVRSVS, quæ in triangulo A C K, recta A K, minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, C K, remanebit adhuc

20. primi.

adhuc $A B$, minor, quam $A C$. Similitudine erit $A B$, minor, quam $A D$, & quam $A E$. Quare $A B$, omnium linearum extra circulum, quæ ex A , ducuntur, minima est.

21. primi. $R V R S V S$, cum intra triangulum ADK , cadant duæ rectæ $A C$, $C K$, ab extremitatibus lateris $A K$, erunt $A C$, $C K$, minores, quam $A D$, $D K$; Subtatis igitur æqualibus $C K$, $D K$, remanebit adhuc $A C$, minor, quam $A D$. Pariteratione erit $A C$, minor, quam $A E$; Item $A D$, minor, quam $A E$. Quare linea propinquior minimæ linearum $A B$, minor est, quam remotior ab eadem.

4. primi. $P O S I T$, ut fiat angulo $A K C$, angulus $A K L$ æqualis, & ducatur recta $A L$. Quoniam igitur latera $A K$, $K C$, trianguli $A K C$, æqualia sunt lateribus $A k$, $k l$, trianguli $A K L$; Sunt autem & anguli $A K C$, $A K L$, dictis lateribus contenti æquales; erunt rectæ $A C$, $A L$, ex utraque parte minimæ $A B$, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A , ducatur recta cadens ultra L , erit ipsa, cum sit remotior a minima, maior quam $A L$; Quod si cadat inter B , & L , erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam $A L$, ut ostensum est. Duæ igitur solum rectæ linearum æquales ad utraque partes minimæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

E A D E M ratione ab A , in peripheriam concavam duæ tantum linearum æquales cadent, ad utraque partes maxime $A I$.

F er enim angulo $A K H$, æqualis angulus $A K M$, iungaturque recta $A M$. Quia igitur latera $A K$, $K H$, æqualia sunt lateribus $A K$, $K M$; sunt autem & anguli $A K H$, $A K M$, æquales; erunt bases $A H$, $A M$, æquales. Neque vero ulla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcumque ex A , ducatur ad partes H , ea vel maior erit, vel minor, quam $A H$, prout citra vel ultra rectam $A H$, du-

4. primi.  Et fuerit, ut manifestum est ex demonstratione theorematum.

T H E O R.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

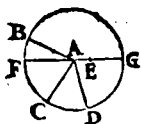
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales: Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bisariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & baks A B, A C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bisariam, & ad angulos rectos; transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.



8. primi

A L I T E R. Si punctum A, non est centrum circuli, sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circumferentiam cadunt rectæ A D, A C; erit recta A D, quæ propinquior est centro E, maior, quam recta A C, remotior a centro, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



7. secij

O THEOR.

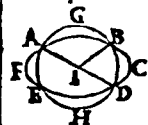
10.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus,
quam duobus punctis non secat.

S E C U T enim, si fieri potest, circulus $AECDEF$, circulu $AGBDHE$, in pluribus, quā duobus, punctis A, B , & D , quæ iungantur rectis AB, BD : quibus bisariam diuisis in I , & K , educantur ex I , & K , ad A, B , & B, D , perpendiculares IL, KL . Quoniam igitur rectæ IL, KL , secant rectis A, B, BD , in circulo $AGBDHE$, bisariam, & ad angulos rectos; transibit utraq; ex corollario propos. 1. huius lib. per centrū ipsius. Quare punctum L , in quo se diuidunt, erit centrū dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L , esse centrū circuli $AECDEF$. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrū. quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

A L I T E R. Secent se iidem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B , & D . Inuentum autem sit I , centrū circuli $AGBDHE$, a quo ad dicta tria puncta ducantur IA, IB, ID . quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulu $AECDEF$, assumptū est punctū I , a quo cadunt in circumferē



tiā plures, quā duæ rectæ æquales, erit I , centrū circuli $AECDEF$. Erat autem idem punctum I , centrū circuli $AGBDHE$; Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrū; quod est absurdum.

11.

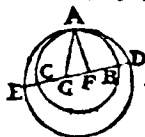
THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & produ-

a,

Et, in contactu n. circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC , circulum ADE , intus in A , & sit F , centrū circuli ABC , & G , centrū circuli ADE . Dico restan. ex ensam per G , & F , cadere in cōtactum A . Si enim non cadet, fecer utrumq; circulū in punctis D, B, C, E , & ex contactu A , ad centra F, G , rectæ ducantur AF, AG . Quoniam igitur in triāgulo AFG duo latera GF, FA , maiora sunt latere GA ; Est autem GA , recta rectæ GD , æqualis; (quod G , positum sit centrū circuli ADE) Erunt & GF, FA , rectæ maiores recta GD . Demptra igitur communi GF , remanebit FA , maior, quam FD : Quare cum FA , æqualis sit ipsi FP ; (quod F , positū fuerit centrū circuli ABC) erit & FB , maior, quā FD , pars toto, quod est absurdū. Quod si quis velit cōtendere F , esse centrū circuli ADE ; & G , centrū circuli ABC , instituetur argumētatio hac ratione. In triāgulo AFG , duo latera FG, GA , maiora sunt latere FA ; Est autē recta FA , rectæ FE , æqualis: (cum F , ponatur centrū circuli ADE .) Igitur rectæ FG, GA , maiores sunt recta FE ; dempta ergo cōmuni FG , remanebit GA , maior, quā GE : Quia igitur GA , æqualis est ipsi GC ; (propterea quod G , ponatur esse centrū circuli ABC .) erit quoque GC maior, quā GE , pars toto. quod est absurdum. Idem absurdum sequeretur, si centrū maioris circuli extra mino. e. ponatur. Nō ergo recta FG , extensa vtrumq; circulum secabit sed in contactum A , cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



20. primi

20. primi

THEOR. 11. PROPOS. 12.

11.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCULI ABC, DBE tangāt se exterius in B , & centrū circuli ABC , sit F ; circuli uero DBE , centrū sit G ; Dico rectā extensam p. $F, & G$, trāsire per contactū B . Si enim non

O 2 transibit,

10. primi

transit, fecit circunferentias in C, & E; ducanturque a centris P, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, maiora sunt latere FG: Est autem recta BF, rectæ FC, æqualis, (quod F, sit centrū circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis, (quod G, sit centrum circuli DBE) erunt & rectæ FC, GE, maiores quam recta FG, pars quā totū, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE;) quod est absurdum. Si igitur duo circuli se exte-
nus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



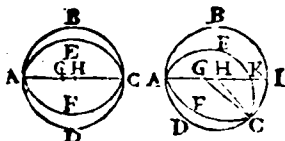
12.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCULVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, siue intus, siue extra tangat.

11. tertij

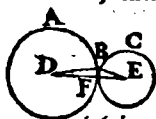
CIRCULI ABCD, AE CF, tangent se intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C. Assumantur igitur centra horum circulorum G, H, per quæ recta GH in utramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta AC, diameter, diuidetur AC, bisariam in G. Simili ratione diuidetur eadem AC, bisariam in H quod est absurdum. Vna enim recta in uno duntaxat puncto diuiditur bisariam. Si enim GC, est dimidium totius AC, erit necessa-
rio HC, dimidio minor, cum sit pars dimidi; GC. Quod si quis dicat rectā GH, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At uero ad partē H, minime pertinere ad contactum C, sed se
care utrumque circulum in I, & K, ut in secunda figura perspicuum est: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ GC, HC. Ponatur igitur primo C, centrū circuli



care utrumque circulum in I, & K, ut in secunda figura perspicuum est: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ GC, HC. Ponatur igitur primo C, centrū circuli

circuli $A B C D$; & H , centrum circuli $A E C F$. Et quia in triangulo $G H C$, duo latera $G H$, $H C$, maiora sunt latere $G C$; Sunt autem rectæ $G H$, $H C$, æquales ipsi $G K$; (quod $H C$, $H K$, sint ex centro) & recta $G C$, rectæ $G I$; (quod & hæc sint ex centro) erit quoque recta $G K$, maior, quam $G I$, pars toto: quod est absurdum. Ponatur secundo G , centrum circuli $A E C F$; & H , centrum circuli $A B C D$. Quoniam igitur rectæ $H G$, $G C$, maiores sunt recta $H C$; Est autem $H C$, æqualis rectæ $H A$; (cum utraque ducta sit ex centro H ;) erunt quoque $H G$, $G C$, maiores recta $H A$; Quare dempta communi $H G$ erit $G C$, maior, quam $G A$, quod est absurdum, cum utraque ex centro G , ducatur: Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno.

TANGANT se iam circuli $A B$, $C B$, exterius in pluribus punctis, quam uno, prope F . Ducatur ex D , centro circuli $A B$, ad E , centrum circuli $C B$, recta $D E$, quæ per contactum F , necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F , se tangent, tangent sese in B ; Ductis igitur rectis $D B$, $E B$, erunt rectæ $D B$, $E B$, æquales rectis $D F$, $E F$, hoc est ipsi $D E$: Sunt autem & maiores: quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno.

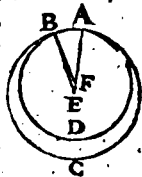


ALITER. Si circuli $A B$, $C B$, exterius se tangerent in duobus punctis B , & F ; ducta recta $B F$, cadet ipsa intra unum circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra aliū, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Si recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probatur, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam uno videtur ea potissimum concludere, circulum non posse tangi a circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longe intervallo a se disteant; non autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamvis facile hoc ipsum eodem

argumento sefe demonstrari possit. Quare ut omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam uno, ostendemus breuiter, in uno eodemque contactu non posse esse plura puncta, quam unum. Tangat enim circulus ABC , circulum ABD , prope A , & per eorum centra



18. tersij

20. primi

E , & F , recta ducatur EF , quæ ad contactu perueniet necessario, ut ad punctu A . Dico igitur, hos circulos sefe duntaxat tangere in puncto A Si enim se tangant in alio puncto, ut in B , ductis ex B ad centra E , & F , rectis BE , BF , ex una recta EF , FB , maiores recta EB ; Est autem recta EB , æqualis recta EA , cum utraq; sit ex centro E : Igitur & recta EF , FB , maiores erunt recta EA . Quare dempta communi EF , remanebit FB , maior, quã FA ; quod est absurdum, cum FB , FA , cadant e centro F , ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales existant.

13.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro. Et quæ æqualiter distat a centro, æquales sunt inter se.

SINT in circulo $ABCD$, cuius centrum E , duæ rectæ æquales AB , CD ; Dico ipsas æqualiter distare a centro E .



9. tersij.

47. primi

Ducantur enim ex E , centro ad rectas AB , CD , duæ perpendiculares EF , EG , & coniugantur rectæ EA , ED ; Secabuntque rectæ EF , EG , rectas AB , CD , bisariam. Quare cum totæ AB , CD , æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ uidelicet AF , DG , æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA , ED , æqualium, inter se sunt æqualia: Quadratum autem rectæ EA æquale est quadratis rectarum AF , FE ; & quadratum rectæ ED , quadratis rectarum DG , GE : Erunt quoque quadrata rectarum AF , FE , æqualia quadratis rectarum DG , GE . Ab aut. ergo quadratis æquali-

æqualibus æqualiū rectarū A F, D G, remanebunt quadrata rectarū F E, G E æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

RURSUM distant rectæ A B, C D, æqualiter a centro E; Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterū ex cetro E, ad A B, C D, perpendiculares E F, E G, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; diuidentq; rectas A B, C D, bifariā. Ducitis igitur rectis E A, E D, erunt earū quadrata æqualia: Est autem quadratū rectæ E A, æquale quadratis rectarū A F, F E; & quadratū rectæ E D, æquale quadratis rectarū D G, G E. Quare & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; id eoq; ablati æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erūt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum.

3. tertij.

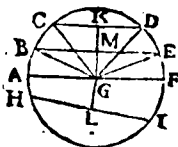
47. primi

THEOR. 14. PROPOS. 15.

14.

IN circulo maxima quidē linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo A B C D E F, cuius centrū G, diameter sit A F, & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F, & H I, maiorem, quam C D. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior est C D, a cetro, quā H I, erit G K, maior quā G L, per 4. defin. huius lib. Abscindat ex G K, recta G M, ipsi G L, æqualis, atq; per M, educatur B M E, perpendicularis ad G K, & cōnectantur rectæ G B, G C, G D, G E. Quoniam igitur rectæ perpendiculares G M, G L, æquales sunt, æqualiter distabūt rectæ B E, H I, a centro, per 4. defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, maiores

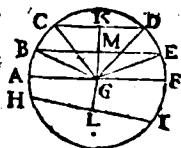


14. tertij

20. primi

O 4 quidem

quidem sunt recta BE , æquales autem diametro AF , erit & diameter AF , maior, quam BE ; Ead- m ratione ostendetur AF , maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB , GE , trianguli GBE , æqualia sunt lateribus GC , GD , trianguli CGD ; & angulus BGE , maior est angulo CGD ; erit recta BE , maior quam CD ; æque adeo HI , quæ æqualis ostensa fuit ipsi BE , maior quoque erit quam CD . In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandũ.



24. primi

SCHOLIION.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemque puncto plurima linea cadant.

CADANT enim a puncto A , plures linea AB , AC , AD , quarum AD , per centrum E , transeat. Dico AD , esse omnium maximam, & AC , maiorem remotiore



20. primi

AB . Ductis enim rectis BE , CE , cum in triangulo AEC , latera AE , EC , maiora sint latere AC , sinque rectæ AE , EC , æquales rectis AE , ED , hoc est, rectæ AD ; maior erit AD , quam AC ; Ea-

demque ratione maior erit, quam AB ; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD .

DEINDE, quia duo latera AE , EC , trianguli AEC ; æqualia sunt duobus lateribus AE , EB trianguli AEB ; & angulus AEC , totus, maior est angulo AEB ; erit basis AC , maior base AB ; Eodemque argumento erit AC , maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est.

24. primi

CÆTERVM & hic due tantum æquales linea duci possunt a puncto A , ad utrasque partes maxime AD . Si namq; angulo AEC , æqualis fiat angulus AEF , iungaturque recta AF ; cum latera AE , EC , æqualia sint lateribus AE , EF , & anguli consenti quoque AEC , AEF , æquales; Erunt bases AC , AF , æquales. Neque vero ulla alia his duabus æqualis potest exhiberi; Quacunque enim ducatur ex A , supra AC , ea minor erit quam AC ; si vero infra AC ,

4. primi

et maior erit, ut iam demonstratum est.

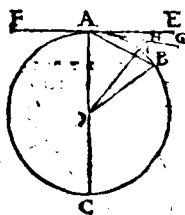
THEOR. 15. PROPOS. 16.

15.

QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quovis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

In circulo ABC , cuius centrum D , diameter sit AC , ad quam ex A , puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularē necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est AB ; ducta DB , erunt duo anguli DAB , DBA , æquales; sed DAB , rectus est, per constructionem: igitur & DBA , rectus erit, quod est absurdum; Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; nec eandē ob causam in ipsam circumferentiā, sed extra, qualis est EF . Dico istam inter AE , rectam, & circumferentiā AB , non posse cadere alteram rectā. Cadat enim, si fieri potest, recta AG , ad quam ex D , ducatur perpendicularis DH , secans circumferentiā in I . Quoniam igitur in triangulo DAH , duo anguli DHA , DAH , minores sunt duobus rectis; & DHA , rectus est, per constructionem, erit angulus DAH , recto minor, ideoque recta DA , hoc est, recta illi æqualis DI , maior erit quam DH , pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE , & circumferentiā AB : sed quæcunque ex A , du-

5. primi



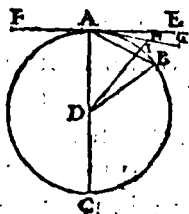
17. primi

17. primi

19. primi

A, du-

A, ducatur infra A E, ea secabit circulū. Dico deniq; angulū semicirculi, contentū diametro A C, & circumferētia A B, maiore esse omni acuto angulo rectilineo; reliquū uero angulū cōtingentīæ, qui cōtinetur recta A E, & circumferētia A B, minore esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam ostensū est, omnē rectā ex A ductā infra perpendicularē A E, cadere intra circulū, aciet necēssario ea cum A C, minore angulū angulo semicirculi, at uero cū A E, maiore angulo cōtingentīæ, cū ille sit pars anguli semicirculi, hic uero totum quidpiā ad angulū cōtingentīæ. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem minor. Itaque



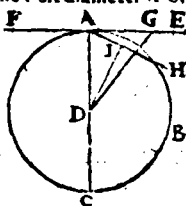
quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, quod recta a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta, ipsam circum tangit. Ostensum enim fuit, ipsam cadere extra circulum; Quare solum in puncto illo diametri extremo ipsum attingit.

EXORONTIO.

Potest hoc idem theorema demonstrari ostensue hac ratione. sit diameter A C, in circulo A B C, cuius centrū D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quā dico extra circulū cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctū G, & coniungatur recta G D. Quoniam igitur in triāgulo A D G, duo anguli D A G, D G A, minores sunt duobus rectis, & D A G, factus est rectus; erit D G A, recto minor. Quare maior erit recta D G, quā D A; ideoq; punctū G, extra circulū erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A B. Cadet ergo tota A E, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra A E,



recta A H, quā dico necēssario secare circulū. Fiat. n. angulus A D I, equalis angulo E A H. Addito igitur cōmuni angulo D A H, erūt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideoq; minores duobus rectis; quare coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, uel in I. Dico igitur punctū I, esse intra circulū. Quoniam tres anguli in triā-

17. primi

19. primi

11. primi.

gulo

gulo DAI , æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI , ADI , ostēti sunt æquales recto DAE ; erit reliquus AD , rectus, atq; adeo maior, quam DAI , acutus. Quare recta DA , maior est quam DI . Non igitur DI , ad circumferentiā perveniet; proptereaq; punctum I , intra circulum existet; atque adeo recta AH , circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, ut prius.

32. primi
19. primi

SCHOLIUM.

EXISTIMAT Peletarius, angulū contingentia, quem Euclides hic probavit minorem esse omni acuto angulo rectilineti, nihil esse, atque adeo ex illo contactu linea recta, & circuli ferentia, non effici angulum ullum. Vt autem, sententia illius planior fiat, asseremus in medium digressionem illam, quā ipse hoc in loco adducit. Sic igitur inquit:

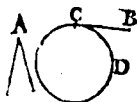
CUM huius theorematis caput postremū attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima species, Geometriā nō fasis sibi constare; immo adeo, repugnantia in se admittere.

PRIMUM enim extra intelligentiā est, ut inter quantitates minima dari possit; qualē hoc loco angulū, quē dicunt contingentia, seu rectius, contactu, minorē omni acuto posuimus. Nihil magis convenit, ut maxima quantitas deat, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod paribus constat, & secundū eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam cōtinuæ in infinitum secta est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissim, tum magis anxie expendere capi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, ut apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidiū; ac rursus ex reliquo maius, quā dimidiū, idq; continuo fiat relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

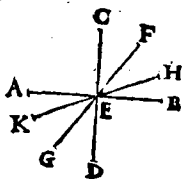
VERI causa, sint duo anguli A , quidem rectilineus, & RCD , angul^{us} (si modo sit angul^{us}) cōtactus: Vult prima decimis si auferas ab angulo A , maius, q̄ dimidiū, ac rursus a reliqua parte

parte maior, quam dimidium; sicque continuo ex residuis partibus maior, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam $B C D$. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quae (ut sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarus euadit. Quis enim non uidet propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octona



rio maior, quam dimidium abstuleris, ut quinarium; cum a ternario residuo, maior quam dimidium, ut binarium; relinquit unitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hac quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, ut nos, cum illuc uentum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda alijsque propositionibus nonnullis solidorum, a curuo rectum auferat.

Nos igitur hanc dubitationem sic expediemus; ut dicamus lineam rectam, quae circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet $B C D$, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et ubi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque ut uno uerbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes



angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis $A B$, & $C D$, se scindentibus in puncto E ad angulos rector, intelligatur $C D$, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E , fixo, ut ex $C D$, fiat $F G$; hunc sane ex recto angulo $A E C$, fiet obtusus $A E F$: Inde ex recto $B E C$, fiet acutus $B E F$ Cuius

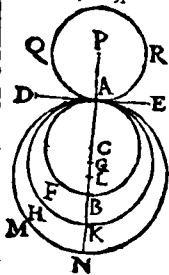
que facta fueris $H K$, hinc quidem angulus obtusior fiet $H E A$, inde uero acutior $B E H$; sicque continuo, donec peruenieris ad $A B$, & intra eosdem terminos concludatur cū ea. Tum enim immersa, ut sic dicam linea $C D$, in lineam $A B$, euanesces angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo

culo $ABCA$ cuius centrum D , linea DE , præteriens peripheriam, & secans ipsam in A , puncto fixo, super quod circumducatur ipsa DE , per puncta F, G, H . Tum fiant anguli cōsinuo varij cum peripheria, in ipso puncto A ; donec cessante decussatione, linea FD , facta sit EK , & tangat circumulum. Accum linea DE , non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam BAC , quantum ad angulum attinet: non aliter quam si BAH , esset linea recta; neque contrariis, quod deducantur lineæ, faciantque spatium CAK . Nam id sola AC , lineæ efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A , amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non cōfistat, quam uno; sit, ut punctum A , tam sit ineptum angulo constituendo, quam moderat punctum sectionis E , linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A , lineæ rectæ manere in suo recto, punctumque A' , peripheria in suo rotundo, neque vitium esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; ut contraria contraposita, fiant manifestiora: Id vero sensus non recipis. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquent: Scilicet, si intelligeremus circumulum, qui in puncto A , tangeret ipsum ABC , circumulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; ut nihil in cogitationem cadat, quod semel respectam Geometriam non representet: Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Hiabitis enim utrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per theoremata.

CONTACTVS duorum circularum interior, quantitas non est.

S i t enim circulus AFBA, cuius centrum C, diametere ve-
ro AB, per cuius extremis aem A, ducatur linea DE, ad an-
gulos rectos. Et confias, ex confessorio huius decima scata,
lineam DE, contingere ipsum AFBA, circulum: ac prop-
rea

rea DAF , esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per ultimam partem huiusce decimasexta. Iam vero inter puncta C , & B , suscipiatur in diametro AB , centrum G , & spatio GA , describatur aliter maior circulus AHK .



KA . Dico FAH , non esse quantitatem. Constat quippe circulum AHK , transire inter rectam DA , & curvam AF , cum sit semidiameter GA , maior semidiametro CA . Manifestum quoque est, lineam DE , tangere ipsum AHK , circulum ex eodem huiusce decimasexta consecratio: ac propterea DAH , esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium LA , circulus AMN . Es erit ex eodem consecratio, DAM , omni acuto minor. Sicque in in

finisum, erunt omnes contactus, quos efficit linea DE , cum circulis ductis per A , punctum, quorum centra in AB , linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic, omnes aequales, si modo aequalitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus DAM , erit aequalis contactus DAF : Fieri quod, ut MAF , contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat contactum DAM . Igitur MAF , quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

Sed & probabimus, contactum interiore circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes: Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt aequales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac aequalitate angulorum non excluduntur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF , aequalis utriusque angulorum KAH , & NAM : Ac propterea contactus FAM , nihil addis ad angulum BAF : Quare FAH , quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si DAF , sit quantitas

quantitas; ipsa vique dividitur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimasexta: neque per obliquam, ut per lineam AM : Effet enim FAM , pars ipsius DAF : Atqui FAM , quantitas non est, ut modo probauimus. Non est igitur FAM , pars ipsius DAF . Igitur DAF , neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF , quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTRACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur BA , diameter ad punctum P . Tum centro P , intervallo autem PA , describatur circulus $AQRA$, tangens circulum $ABFA$, exterius in puncto A . Dico contractum FAQ , non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM , non sit quantitas, per primam harum; neque per rectam, cum neque DAF , sit quantitas, per secundam earundem; neque DAQ , quantitas per eandem. Quare cum FAQ , partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGULI, qui sunt a diametro, & periphæria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis, rectilineis æquales.

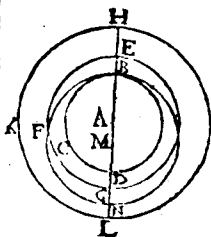
UT in posteriori figura, angulus BAF , æqualis est angulo BAD , tum ipsi nihil accrescat ob contractum DAF , qui quantitas non est: & ob id QAP , rectus est, & æqualis ipsi DAP , cum DAQ , nihil addat: quod erat probandum.

HABET Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quã ad Cardanum scribis, affert aliam demonstrationem, quam ipse ais pleniorẽ esse. Hanc igitur hic subicere statui. In primis autem præmissis hoc theorema.

IN circulis anguli, qui sunt a diametro & periphæria, sunt æquales.

SINT

S I N T enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D, & E G. & secet E G. ambos circulos in punctis E, B, D, & G Aio duos angulos C B D, & F E D, esse aequales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior illo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum unus hoc loco satis fuerit H K L H; fiet tandem ex continuo augmento, angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E. inter se aequales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione ullus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos retilineos: attamen eris angularum, qui sunt ex sectione recte lineae, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos retilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores sunt.



qui sunt ex sectione recte lineae, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos retilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifeste maiores, & minores sunt.

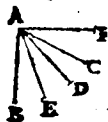
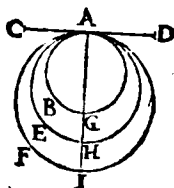
Hic ad hunc modum demonstratis, aio contactum circum-
lorum interiori, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto intervallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro aequali ipsi A E; qui circulus tangat B C D B, circulum in puncto B. Est manifestum est, angulum F B D, aequalem esse angulo F E D, propter aequalitatem peripheriarum & diametrorum: Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D aequalis. Igitur C B F, contactus, nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedis demonstratio, eorum, quae in tertio libro adduximus, theorematum.

H A E C igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, qua omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi aequalem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasses,

asser, ut demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarii sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponis Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quis propter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque a ter angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Unde dissolventa sunt a nobis omnia Peletarii sophismata, quæ in hac digressionem adduxis, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMUM igitur extraintelligentiam esse fatemur, ut inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem; Immo vero asseueramus, quemvis angulum contactus & si ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, dividi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, ut Euclides demonstravit, & optime; sed per lineam circulearem. Ut propositio

angulo contactus CAB , si per A , describatur circulus $A E H$, maior circulo ABG , tangens rectam CD , in A ; fiet angulus contactus CAE , minor angulo contactus CAB . Quod si adhuc maior circulus $A F I$, describatur, eris multo minor angulus contactus CAF , eodem angulo contactus CAB . Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inaequalitas inter angulos contactuum, quamvis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque: Quemadmodum quavis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poteris, cum dividi possit infinite. Ut angulus acutus BAC , minor est recto BAF ; & tamen si ducatur recta AD , inter AC , AB , fiet acutus minor BAD : Quod si alia recta AE , inter AB , AD , ducatur, eris multo minor acutus BAE , nec unquam finis eris huius decrementi.



PARITER ratione asserimus, angulum contactus angari posse in

se infinitæ, ita ut quoniam angulo contactus propositio, dentur alij maiores sine numero. Ut in superiori figura circulari, angulo contactus $C A F$, maior est angulus contactus $C A E$, & multo maior angulus contactus $C A B$; Atque ita deinceps, si minores semper circuli, quam $A B G$, describantur tangentes rectam $C D$, in A , augebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quoniam rectilineo acuto. Quemadmodum quoniam angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Ut in proxima figura, angulo acuto $B A E$, maior est acutus $B A D$, & multo adhuc maior acutus $B A C$. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem $A F$, & rectam $A C$, fiet adhuc maior angulus acutus, nec unquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam pervenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit equalis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accrescitione anguli contactus nunquam devenimus ad aliquem angulum contactus, qui equalis sit acuto angulo rectilineo propositio, vel maior acuto nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo affirmamus, quolibet angulo semicirculi propositio, quamvis obtusus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Ut in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi $B A G$, maior est angulus semicirculi $E A H$, & multo adhuc maior angulus semicirculi $F A I$: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam $A F I$, tangentes rectam $C D$, in A , augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto $C A I$. Contrario vero, angulo semicirculi $F A I$, minor est angulus semicirculi $E A H$, & multo adhuc minor angulus semicirculi $B A G$, nec unquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est, quoniam angulo acuto rectilineo, licet infinitè diminuat, ut Euclides demonstravit: quemadmodum quoniam acuto angulo dato, invenimus alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD

QVOD autem anguli contactus sint inaequales inter se, & non omnes aequales, ut vult Peletarius, similiter & anguli semicircularum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in unico puncto, & linearum inclinatione, quae non in directum iacent, ut constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, ut aequalitas angulorum eiusdem generis requiratur eandem inclinationem linearum, ita ut linea unius conveniant omnino lineis alterius si unus alteri superponatur; Ea enim aequalia sunt, quae sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronuntiatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicircularum, nequaquam reperiantur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) linea eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, ceteris ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiusmodi inter se aequales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & dividi poterit infinitè per lineam curvam, licet per rectam secari nequeat, ut recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hac afferri potest causa; Si enim linea contingens circumlunum concipiatur moveri circa punctum contactus immobile, continuo circumlunum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circumlunum: Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circumlunum, cum in vno tantum puncto linea recta circumlunum possit tangere, ut ex 2. propositione huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicircularum aequales inter se erunt, qui efficiuntur a peripheriis aequalibus: In his enim eandem modo linea sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui a peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicircularum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, ut non obscure intelligi potest ex superioribus figuris: Neque enim linea talium angulorum sibi mutuo conveniunt.

CONSTAT ergo, quomodo angulum contactus habere partes, & unum alteri posse aequalem exhiberi, ac rursus inaequalem, nempe maiorem, vel minorem: quomodo-
dum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod

etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximum.

D E I N D E non est, quod anxium reddas Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatribus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo utraque multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterne, siue deniq; quoties libueris, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quocunque anguli contactus, ut centum, inter se aequales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis aquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel aequalis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, ut dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsam superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem dictae propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo relictum aufert, vel contra, ut vult prima propof. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

I A M vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, ut angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclina-
ri, ita tamen, ut non in directum iaceant, ut constas ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quatenus se mutuo non secant, si producantur; cuiusmodi sunt periphæria.
Et li-

& linea recta illam tangens, vel etiam dua peripheria se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, ut antea diximus.

P O R R O demonstratio Pelesarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamvis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes aequales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, ut diximus: quomodolum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes aequales. Sic etiam omnes formica (ut ex rebus quoque naturalibus exemplum asseramus,) minores sunt homine, vel monie, cum tamen ipse inter se valde sint inequales. Quare non recte concludit Pelesarius, contactum interiorem nihil esse.

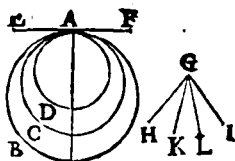
N E G A M U S deinde, angulos segmentorum similium aequales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significavit in ultima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt aequales, vel quae angulos rectilineos capiunt aequales; non autem quorum anguli aequales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, ut aperse constabit ex propositione. 31. huius libri.

E X his facile rejiciuntur reliqua Pelesarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, dividitur per lineam circuli, ita ut contactus interior sit vera pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, dividitur & per lineam circuli, & per rectam, quae utrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi aequalem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Pelesarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Est enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minoris; non tamen propterea efficitur, ut aliquis angulus semicirculi, maior sit angulo re-

cto. Semper enim rectus angulus superabit quomvis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quovis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, ut in precedenti figura cernere licet.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



Proponantur enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur describantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam B F, in A, augebitur continue angulus contactus, ut dictum est. Si rursus inter rectas G H, G I, alie recte cadant G K, G L, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen

semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumvis diminuetur.

EX CAMPANO.

CETERUM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse augmentationem hanc, qua usus est Brisson in quadrando circulo, ut auctor est Aristoteles. Videlicet.

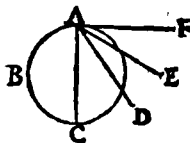
1. possit.

TRANSITUR a minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATUR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moveri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per punctum

Da

ita D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc concesso, manifestum est, quamdiam recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus aequalis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoque; vitiosam esse posteriorem consequentiam.

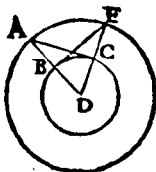


PROBL. 2. PROPOS. 17.

16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B; Deinde centro D, intervallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, secans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, equalia sint duobus lateribus D A, D C,

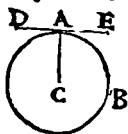


trianguli C D A, utrunque utrique, ut constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt & bases B E, C A, & anguli D B E, D C A, super ipsas, æquales: Est autem D B E, rectus ex constructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaque C A, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum B C, in C, quod faciendum erat.

4. primi.

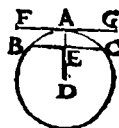
SCHOLIŌN. I.

QUOD si punctum A, datum fuerit in circumferentia circuli AB, cuius centrum C, facilius ex eo ducetur recta tangens circumulum, hoc modo. Ducta semidiametro AC, educatur per A, ad AC, perpendicularis DE. Hec enim per corollarium præcedentis propositionis, circumulum tanget: quod est propositum.



EXPELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circumulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circumulum tangat.



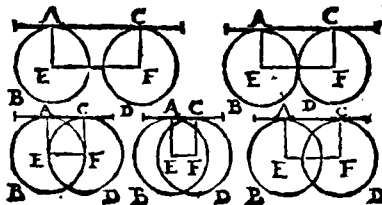
28. primi.

CIRCULUM ABC, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circumulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erig igitur F G, parallela ipsi B C, tangetq; circumulum in A, per corollarium propof. 16. quod erat faciendum.

SCHOLIŌN. II.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

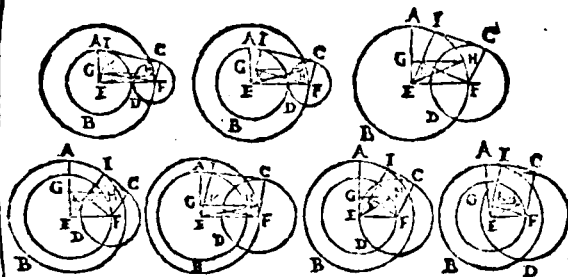
PROPOSITIS duobus circumulis, quorum neuter alterū includat; rectam lineam ducere, quæ utrumq; tangat circumulum.



SINT primū duo ppositi circumuli aequales AB, CD, quorū centra E, & F, recta iungantur EF, ad quā ducantur perpendiculares EA, FC, secantes circum-

circumferentias in punctis *A*, & *C*. Dico rectam per *A*, & *C*,
eductam utrunq; circulum tangere. Cum enim *EA*, *FC*, se-
midiametri circulorum equalium sint equalis, & parallela,
quod anguli *E*, & *F*, recti sint; Erunt quoq; *EF*, *AC*, equal-
es & parallela; Ideoq; & anguli *A*, & *C*, recti. Quare,
per coroll. propof. 16. huius lib. recta *AC*, utrunq; circulū
tanges, cum rectos angulos constituas in extremitatibus semi-
diametrorum.

S I N T secundo duo circuli propofiti inaequales *AB*, *CD*,
quorū vnus cōtra *E*, & *F*, innūdatur recta *EF*, ad cuius inter



nullū ex *E*, centro maioris circuli circulus describatur *FH*, si
maior non transeat per centrū minoris. Deinde ducta ad *EF*,
perpendiculari *EA*, absindatur ex ea recta *AG*, semidiamet-
ro minoris circuli *CD*, equalis; & ex *G* ipsi *FA*, perpendicu-
laris ducatur *GH*. & ad circumferentiā circuli ultimo de-
scripti. Ducta autē recta *HE*, fiat angulo *HEA*, angulus *FEL*,
equalis; atq; ex *F* agatur ipsi *EI*, parallela recta *FC*. Dico re-
ctā p puncta *I*, & *C*, ductā utrunq; circulū cōtingere. A' scinda-
tur, n. ex *I* *E*, recta *IK*, ipsi *AG*, vel semidiametro *FC*, minoris
circuli equalis, ut sint reliquæ *EG*, *EK*, equalis quoq; ducaturq;
recta *KF*. Quoniā igitur latera *HE*, *EG* trianguli *HEG*,
equalia sunt lateribus *FE*, *EK*, trianguli *FEK*, & anguli ipsi
cōsenti equalis, ex cōstructione; Erunt anguli *HGE*, *EKF*, a-
quales; Ac proinde, cū *HGF*, rectus sit, ex cōstructione, erit &
EKF, rectus. Rursus quia *CF*, *IK* equalis sunt, & parallelae,
ex cōstructione, erūt quoq; *IC*, *KF*, equalis & parallela; Atq;
propterea angulus *EIC*, cū equalis sit externo *FNE*, rectus erit;

Ideoq;

22. primi.
33. primi.
29. primi.

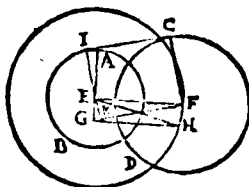
4. primi.

33. primi.
29. primi.

Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, utrūq; circulū cōtinget, cū rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorū. Quod eras ppositū.

SATIS autē constas, si circuli ppositi aequales fuerint, id quinq; modis possē fieri. Aut. n. alius extra aliū cadit, aut se mutuo cōtingūt, aut se inuicē p cētra secant, aut nō, ita tamē, ut vel cētra consistant in cōmuni eorū segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli ppositi fuerint inæquales, id cōtingere posse septē modis. Aut. n. minor totus extra maiore cadit, aut ipsum tāgit, aut ipsum secat, ita ut vel cētrū eius sit in circūferētia maioris, vel intra, hac tamē lege, ut circūferētia minoris circa cētrū maioris trāseat, vel cētrū minoris sit extra circūferētiā maioris, vel intra, ita tamē, ut circūferētia minoris p maioris centrum incedat, vel deniq; intra, ita tamen, ut circūferētia minoris includat centrum maioris.



QUONIAM vero, circulis inæqualibus existētib; , inistū cōstructionis sumptissimus semp a maiori, si quis malueris a minori incipere, id efficiet eadē cōstructione. demonstratiōneq; , nisi qđ recta AE, IE, protrahēda sunt ad G, & K, ut AG, IK, aequales

sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, cōtinentes lateribus HE EG, FE, EK, idcirco æquales esse, qđ HI: A, FEI, reliqui duorū rectorū, æquales sint ex cōstructione. Deniq; angulū EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EkF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulū tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiūcta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tāgat in C, circulū CD, cuius cētrū E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularē esse ad

A B.

A B. Si n. nō est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secās circumferentiā in D. Quoniā igitur in triangulo CEF, duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex cōstructione: erit ECF, minor. Quare maior erit recta EC, hoc est, ED, quā EF, pars quā totū. qđ est absurdū. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulū tāgat recta quāpiā linea, &c. Qđ demonstrādū erat.



17. primi.

19. primi.

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorū Ad C, obtusus, & alter acutus: Sit ergo ECB, acutus, q cū maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: qđ est absurdū. Oīs siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto.

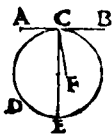
16. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

18.

SI circulum tetigerit recta quāpiam linea, a cōtactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta FC, quā perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB,



18. tertij.

recto angulo ECB, æqualis erit, pars totī: quod est absurdū. Nō igitur extra CE, cētrū circuli existet. Itaq; si circulū tetigerit recta quāpiam linea, &c. Quod erat demonstrādū.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

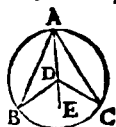
19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituitur angulus BDC, ad centrum, & super eandem basin: angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplū esse anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorū, ut anguli DAB. Eodē modo duplus ostēdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: quod est propositū.

5. primi.
32. primi.



SECUNDO non includat rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autē duo inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

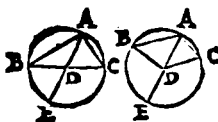
32. primi.
5. primi.



TERCIO recta AB, secet rectam DC, & per centrū D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrū, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandē basin EC, & recta AE, extenditur per centrū; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, ut ostēdum fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent. n. hi anguli eandē basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si. n. totum totum est duplū, & ablatū ablati; erit & reliquū reliqui duplū. In circulo igitur angulus ad centrū duplex est, &c. Quod erat demonstrādū.

19. prop.

SCHOLIUM.



Quod si recta BD, CD, in cetero angulū nō cōstituant ad partes basii Bt; quod tū denū fit, quādo segmentū BAC, est vel si micirendus, vel segmentū minus; nihilo minus spatium illud ad centrū duplū erit anguli ad circumferentiā, qui eādē habeat basin, quā spatium illud. Duclā. n. recta AE, per centrū

trū

erū, eris tā angulus BDE, ad cetrū duplus anguli BAE, ad circunferentiā, quā angulus CDE, ad centrū anguli CAE, ad circunferentiā, ut ostēsum est. Spatiū igitur ad centrū D, basin habēs BEC cōstansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplū est totius anguli BAC. Quod est propositum.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

20.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

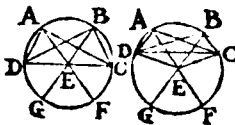
IN circulo ABCD, cuius centrum E, existāt anguli A, & B, in segmento DABC; Dico eos esse æquales. Sit enim primo segmentum DABC, semicirculo maior, & ducantur rectæ DE, CE, ad centrū E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrū, duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriā, cū omnes habeant eandē basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. Quare inter se æquales erunt. Eadēq; ratione oēs alij anguli existentes in segmento DABC, ostendent esse æquales.



20. scrij.

7. pron.

Si r secūdo segmentū DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducātur p centrū E, rectæ AF, EG, & in segmento minori connectātur rectæ DE, CE. Quin igitur angulus DEF, ad cetrū, duplū est anguli DAF, ad peripheriā: Similiter angulus CEF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.



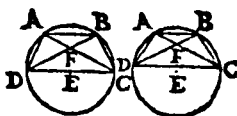
20. scrij.

7. pron.

ALITER. Quoniam, ut in Icholio propos. præcedētis demonstrauimus, spatiū ad centrū E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiā: Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

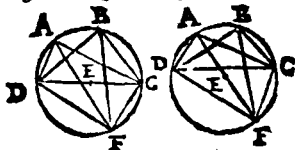
ALITER. Secēt sese rectæ AC, BD, in F, & connectā recta AB; Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam

15. primi.



quæ hi æquales sunt duobus rectis: Si auterantur anguli AFD, BFC, qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli

ADF, BCF, æquales sunt ostēsi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.



ALIITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum circuli E, includētibus cētrum E, ita ut rā DABCF, q̄ FDABC, sit segmentū maius, iungatur quoq; rectæ AF, BF.

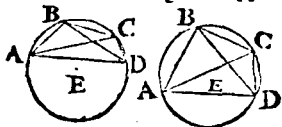
Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec nō & anguli FAC, FBC, in segmento etiā maiori FDABC, existētes: Si hi illis addātur, fiet totus angulus DAC, totus angulo DBC, æqualis. Itaq; in circulo, qui in eodē segmento sunt, &c. Quod erat ostēdendū.

21.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius cētrum E, inscriptū sit quadrilaterū ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: In BCD,



DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis. n. diametris AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, in eodē segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD,

CAD, in eodē segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur cōi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA: Sed hi tres æquales sunt duobus rectis, igitur & duo

21. secūdi.

32. primi.

& duo ABC, CDA, duobus erūt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorū, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

CONVERSVM quoq; huius theorematidis demonstrari potest, hoc modo.

Si in quadrilatero anguli, q ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui p tres quoscūq; eius angulos describitur, trāsbīt etiam per reliquū quartū angulū; Atq; adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.

IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi A, & C; Item B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo molo autē hoc fieri possit, in 25. propof. huius lib. & in 3. quarti lib. ostenditur.) quem dico transire etiā per D. Si .n. nō, transibit vel ultra D, vel citra. Ducantur ergo recta CE, AF, ad circumferētiā, ita ut nō secent rectas CD, AD. Quo factō, erūt anguli B, & F, æquales duobus rectis; Erāt autē & anguli B, & D, duobus rectis æquales: Igitur duc anguli B, F, æquales sunt duobus angulis B D. Quocirca ablato cōi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdū. Ducta .n. recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transīt igitur circulus p pūctū D. qd est propositū.



22. tertij.

21. primi.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

22.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, nō constituentur ad easdem partes.

Si



10. *terti.*

Si .n. fieri pōt, sup recta AB, cōstituantur ad eadē partes duo segmēta similia, & inēqualia ACB, ADB. Perspicuū ē aut, qđ se solū interfecēt in pūctis A, & B; circulus .n. circulū nō secat in pluribus pūctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmētī tota erit extra perpheriā alterius. Ducatur igitur recta AD, secās circūferētiās in C, & D, & cōnectātur rectę CB, DB. Quonā igitur segmēta ponūtur similia, erit p 10. de fin. huius lin angulus ACB, aequalis angulo ADB, externus interno: qđ est absurdū. Nō igitur segmēta similia. Quare sup eadē recta linea, &c. qđ erat demonstrādū.

16. *primi.*

SCHOLIUM.



EADBM ratione, neq; ad diuersas partes super eadē recta linea duo segmēta circularū similia. & inēqualia cōstitueretur. Nā si alterū eorū intelligat moueri circa lineā AB vt iā ambo sint ad eadē partes, in idē absurdū incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inaequalitatem.

23.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, cōstituta sint segmēta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Linea enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmētū AEB, segmento CFD, congruere. Si nō congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, cōstitueretur super eadē recta CD, duo segmēta AEB, AFB, similia, & inēqualia; qđ est absurdū. Demonstratū n. est cōtrariū. Qđ si partim extra cadat, partim intra, secabūt sese in plurib; pūctis, q̄ duob; nimirū in A, F, G. Qđ est absurdū. Circuli .n. nō se secāt in plurib; pūctis, q̄ duobus. Congruet igitur segmētū AEB, segmento CFD.



23. *terti.*

10. *terti.*

CPD, atq; adeo ipsa inter se æqualia erūt. Quæcirca super æqualibus rectis lineis &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

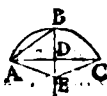
NON solum in hac propositione ostenditur segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verū etiam ipsas peripherias, eo quod, ut demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propos. & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circularum, æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem aliarum, alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis oppositi æquales sint.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

CIRCULI segmento dato, describere circum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Sumendatur recta AC, quæ bisariam secatur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, coniectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primo maior, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum; cum ponatur esse minus, erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum, sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferentiam cadunt. Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE. æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti: Quare bases EA, EC, æquales erunt;



Q. Est

7. tertij.

18. primi

4. primi

6. primi

9. tertij.

5. primi

6. primi

9. tertij.

7. tertij.

18. primi

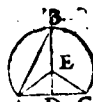
Est autē & $E A$, æqualis ipsi $E B$, quod anguli $E A B$, $E B A$, æquales sint. Igitur tres lineæ $E A$, $E B$, $E C$, æquales erūt, ac propterea E centrū erit circuli $A B C$, quandoquidē ex E , plures quā duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

S i t secundo angulus $D B A$, angulo $D A B$, æqualis; (Quod demū continget, quando segmentū $A B C$, semicirculus fuerit. Tunc enim erit $A C$, diameter, & D , centrum, atq; adeo rectæ $D A$, $D B$, æquales; quare & anguli $D A B$, $D B A$, æquales erunt.) Erant



$A D C$ igitur rectæ $D A$, $D B$, æquales: Erat autem, & $D C$, æqualis ipsi $D A$; Quapropter cum tres rectæ $D A$, $D B$, $D C$, cadant ex D , in circumferentiam, erit D , centrum.

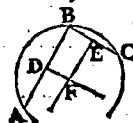
S i t tertio angulus $D B A$, angulo $D A B$, minor, (quod quidē eveniet, si segmentū $A B C$, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam $B D$, transit per centrū, ex corollario propos. r. huius lib. quod quidē intra segmentum, cū maius esse ponatur, existit; erit $D B$, omnium, quæ ex D , in circumferentiam cadunt, maximæ; maior igitur erit quā



$D A$, ideoq; angulus $D A B$, maior angulo $D B A$) fiatq; angulus $B A E$, æqualis angulo $D B A$, & secet recta $A E$, rectam $B D$, in E , puncto, quod ostēdetur esse centrū eodem modo, quo idipsum ostendimus, quando angulus $D B A$, maior erat angulo $D A B$, ut constet, si recta ducatur $E C$. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

SCHOLIUM

BREVIS inveniatur centrum segmenti propositi cū insit, hac ratione. Assumantur in peripheria sequenti



tria puncta vicinque A , B , & C , quæ duabus rectis coniungantur $A B$, $B C$, quæ bisariam secantur in D , & E . Deinde ex D , & E , educantur ad $A B$, $B C$, perpendiculares $D F$, $E F$. Quoniam igitur per corollariū propos. i. huius lib. tam $D F$, quā $E F$, incedit per centrum circuli, cuius $A B C$, est segmentum, colluntur amba in centro, ut in F . Quare centrum est inuentum; quod est propositum.

$A L I T E R$, ut Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia

ferentia duo puncta vicinque A, & B, e quibus describantur
duo arcus ad idē intervallum quodcunque, qui se intersecent
in F, & F, Possent ex alijs duobus pun-
ctis C, & D, alij arcus se secantes in G,
& H, describuntur ad quodvis interval-
lum, siue idē quod prius, siue diversum.
Si igitur agantur recte EF, GH, transi-
bunt ambe per centrū: quare punctum
I, in quo coeunt, erit centrum. Quod autē linea EF, GH, per cē-
trum transiant, ita demonstrabitur. Ducantur recte AE, AF,
BE, BF, quae inter se aequales erunt, ob aequalitatem circuli.
Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, aequalia sunt
lateralibus BE, EF, trianguli BEF, & bases quoque AF, BF,
aequales: Erunt anguli AEF, BEF, aequales. Rursus ductae
sint AB, quae secet EF, in K; quoniam latera AE, EK, trianguli
AEK, aequalia sunt lateralibus BE, EK, trianguli BEK, & an-
guli AEK, BEK, & anguli AKF, BKF, aequales, ideoque recti. Quare
cum EF, dividat rectam AB, in circulo bisariam, & ad an-
gulos rectos; transibit per centrū ex corollario propo. 1. huius
lib. Eadem ratione ostendetur GH, transire per centrū.



8. primi

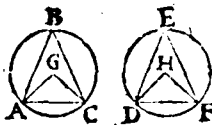
4. primi

THEOR. 23. PROPOS. 26.

25.

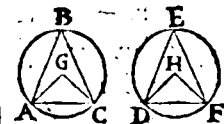
IN æqualibus circulis, æquales anguli
æqualibus peripherijs insistent, siue ad cen-
tra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorū cētra G, H, cō-
stituti sint primo ad cētra anguli æquales AGC, DHF. Dico
peripherias AC, DF, qb^o insitūt,
siue sup quas ascēderūt, esse æqua-
les. Sumantur enim in peripherijs
ABC, DEF, duo pūcta B, E, ad q
recte ducant AB, CE, DE, FE, cō-
nectanturq; recte AC, DF. Quo-
nam igitur anguli B, & E, dimi-
di sunt equaliū angulorum G, & H, erunt ipsi æquales inter
se: Quare ex definitione sēgmēta ABC, DEF, similia erunt.



20. terci.

Et quia latera $A G, G C$, trianguli $A G C$, æqualia sunt lateribus $D H, H F$, trianguli $D H F$, propter circularū æqualitatem, & anguli, quos conuñt G, H , æquales, ex hypothesi; erunt bases $A C, D F$, æquales: Cum igitur segmenta similia $A B C, D E F$, sint super lineas æquales $A C, D F$, erunt ipsa inter se æqualia: Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta $A C, D F$, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ $A C, D F$: Quod est propositum.



+ primi

24 tertij.

S I N T, secundo ad peripherias constituti duo anguli æquales B, E ; dico rursus, peripherias $A C, D F$, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta $A B C, D E F$, similia. Cum igitur sint super æquales lineas $A C, D F$: (cum enim anguli G, H , æquales sint, quod sint dupli angulorum æqualium B, E ; erunt, ut prius, rectæ $A C, D F$, æquales) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta $A C, D F$ æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

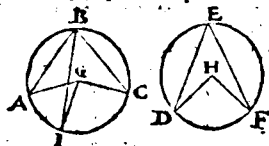
20. tertij.

24 tertij.

S C H O L I O N

H A R C secunda pars breuiter ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H , dupli sunt angulorum æqualium B, E , erunt ipsi inter se æquales. Quare ut ostensum est prius, peripheriæ $A C, D F$, super quas ascenderunt, æquales erunt.

Q U O D si dicti anguli fuerint inæquales, maior insisset maiori peripheria, quam minor. In circulis enim æqualibus



$A E C, D E F$, sit angulus $A G C$, ad centrum maior angulo $D H F$, ad centrum: Iti angulus $A B C$, ad circumferentiam maior angulo $D E F$, ad circumferentiam. Dico peripheriam $A C$, maiorem esse peripheria $D F$. Si enim fiat angulus $C G I$, angulo $D H E$, & angulus $C B I$, angulo $D E F$, æqualis; erunt, ut ostensum est, peripheria $C I, D F$, æquales;

20 tertij.

tes;

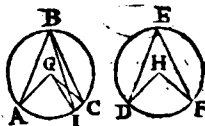
les; Ac propterea A C, maior, quam D F.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistant, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primo anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripherijs A C, D F; Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis po-



26. tertij.

natur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales.

INSISTANT secundo eisdem peripherijs æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, ut A B C, maior est; fiat angulo E æqualis angulus A B I; eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod est absurdum.

26. tertij.

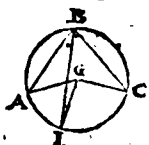
SCHOLION.

HÆC secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniā anguli A B C, & E, dimidii sunt angulorum A G C, & H, quos iā ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.

20. tertij.

SI vero peripheria fuerint inæquales, insister maioriori maiori angulus, siue ad centrum, siue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholii precedentis sit peripheria A C, maior, quam peripheria D F. Dico angulum A G C, maio-

rem esse angulo DHF ; & angulum $\angle B C$, maiorem angulo



$\angle B I, D E F$, aequales. Quare & angulus $A G C$, angulo $D H F$, & angulus $A B C$, angulo $D E F$, erit maior.

Ex hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, qua in eodem circulo aequales arcus intercipiunt, se mutuo non



secantes, esse parallelas. Et si sint parallele, ab ipsis arcus aequales intercipi. In circulo enim $A B C D$, recta $A D, B C$, intercipient arcus aequales $A B, D C$. Dico $A D, B C$, esse parallelas. Ducta namque recta

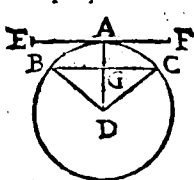
$A C$, cum arcus $A B, D C$, ponantur aequales, erunt anguli $A C B, C A D$, ipsis insistentes, aequales; qui cum sint alterni, erunt $A D, B C$, parallelae.

SINT iam $A D, B C$; parallelae. Dico arcus interceptos $A B, D C$, esse aequales. Cum enim sint parallelae $A D, B C$, ducta recta $A C$; erunt anguli alterni $A C B, C A D$, aequales; ac proinde arcus $A B, D C$, quibus insistent, aequales erunt.

VISUM est quoque hoc loco adponere sequens theorema ad ea, quae sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta quae ex medio puncto peripheriae alicuius ducitur tangens circumulum, parallela est rectae lineae; quae peripheriam illam subtendit.

IN circulo $A B C$, cuius centrum D , ducatur ex A , puncto medio peripheriae $B A C$, linea $E F$ tangens circumulum. Dico $E F$,



parallelam esse rectae $B C$, arcu $B A C$, subtendenti. Ducta enim ex centro D , ad punctum contactus A , recta $D A$, connexisque rectis $D B, D C$, erunt anguli $A D B, A D C$ circumferentibus aequalibus $A B, A C$, insistentes, aequales: Sunt autem & latera $B D, D C$, trianguli $B D C$ lateribus $C D, D G$, et anguli

$C D G$, aequalia, utrumque; utriusque. Ergo & anguli ad G , aequales

27. terij.

27. primi.

29. primi.

26. terij.

27. terij.

4. primi

les sunt super bases GB, GC ; ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC illis deinceps recti sunt. Sum autem & anguli GAE, GAF recti, quod DA perpendicularis sit ad EF ; Ergo $EF, BG, parallelæ$ sunt. Quod est propositum.

18. tercij.
28. primi

THEOR. 25. PROPOS. 28.

27.

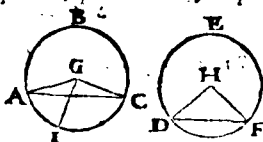
IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiore quidem maiori, minorem autem minori.

IN circulis æqualibus ABC, DEF , quorum centra $G, & H$, sint rectæ æquales AC, DF . Dico maiore peripheriam ABC , æquale esse maiori DEF ; & minore AC , minori DF . Ductis. n. rectis AG, GC, DH, HF , erunt latera AG, GC , trianguli AGC , æqualia lateribus DH, HF , trianguli DHF ; Sunt autem & bases AC, DF , æquales: igitur anguli $G, & H$, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ AC, DF , quibus insunt, æquales erunt, & quæ abla-
te ex totis æqualibus, relinquunt æquales ABC, DEF . In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

8. primi
26. tercij.

SCHOLIUM.

Quoniam si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior lineæ, maiore peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nā si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior lineæ auferet minorem peripheriam, & minor. In circulis. n. æqualibus



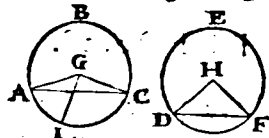
ABC, DEF , quorum centra $G, & H$, sit recta AC , maior, quam DF . Dico peripheriam AC , semicirculo minorem, maiorem esse peripheriam DF ; At peripheriam ABC , mi-

Q 4 minorem

25. primi

26. tercij.

norem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponitur autem basis A C, maior base D F. Igitur angulus A G C, maior erit, angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H F, æqualis; et inque propterea peripheria C I, peripheria D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F.

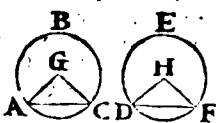


Ideoque reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales.



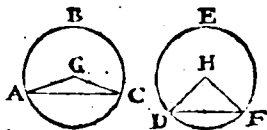
Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Sunt autem & anguli G, H, æquales, quod æqualibus peripheriis A C, D F, insistant: Igitur bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

27. tercij.

4. primi

SCHOLIUM.

Si autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorem



maior lineæ, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat semio. Nam si de segmentis maioribus semicirculo minoribus, subtendens maiorem minorem lineæ, quam minorem.

rem.

rem. In circulis enim equalibus ABC, DEF , quorum centra G, H , sint peripherie semicirculo minores AC, DF , sitque AC , maior, quam DF ; Ac proinde ABC , minor quam DEF . Dico lineam AC , maiorem esse, quam DF . Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF , erit angulus AGC , maior angulo DHF , ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC trianguli AGC equalia sint lateribus DH, HF , trianguli DHF , erit basis AC , maior base DF , &c.

24. primi

SUNT autem proxime antecedentes quatuor propositiones 25. 27. 28. & 29. intelligenda etiam in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo equalis anguli equalibus peripheriis insistant, &c. ut constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in uno eodemque circulo.

PROBL. 4. PROPOS. 30.

29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

SIT peripheria ABC , secunda bifariam. Ducatur recta subtendens AC , qua diuisa bifariam in D , erigatur perpendicularis DB , quæ peripheriam ABC , bifariam secabit in B . Ductis enim rectis AB, CB , erunt latera AD, DB , trianguli ADB , æqualia lateribus CD, DB , trianguli CDB ; Sunt autem & anguli ad D , æquales, nempe recti: igitur & bases AB, CB , æquales erunt; Ac propterea peripheriæ AB, CB , erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus: Quod erat faciendum.



4. primi
28. tertij.

THEOR. 27. PROPOS. 31.

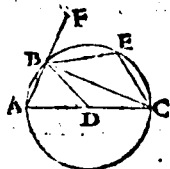
30.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui uero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris

ioris

ioris segmenti, recto quidē maior est: minoris autē segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI ABC, cuius centrū D, diameter sit AC, cōstituatque in semicirculo angulus ABC, existetq; angulus BAC, in maiori segmento CAB, constituatur quoq; in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto; & angulū BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulū maioris segmenti cōprehensum recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti cōprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducantur enim rectæ BC, BD,



& extendatur AB in F. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC angulo DCB, æqualis, deoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC, BCA, æqualis erit: Est autem & angulus FBC externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

QUONIAM vero in triangulo ABC, duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

RURSUS quia in quadrilatero ABEC, intra circulū descripto, duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

AMPLIUS cum angulus rectus ABC, pars sit anguli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cū angulus segmenti minoris, comprehensus

5. primi

32. primi

17. primi

22. terciy.

hensus recta BC , & peripheria BEC , pars sit quoque anguli recti FBC ; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est &c. Quod erat demonstrandum.

A 21 A demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter AC , & centrū D , sit angulus ABC , quem dico esse rectū. Ducta n. recta BD , erunt anguli DBA , DAB , æquales, quod rectæ DA , DB , æquales sint: Cū igitur angulus BDC , externus æqualis sit duobus angulis internis DBA , DAB , in triângulo ABD : Erit angulus BDC , duplus anguli DBA ; Eodem modo erit angulus ADB , duplus anguli DBC ; atque adeo duæ anguli ad D , duplæ erunt totius anguli ABC . Cū igitur anguli ad D , sint duobus rectis æquales, erit angulus ABC , eorū dimidiū, rectus: quod est primū.

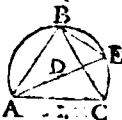


5. primi

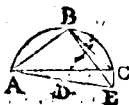
32. primi

13. primi

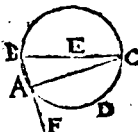
S 2 T. rursus in segmento maiori, cuius centrum D , angulus ABC , quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE , & coniuncta recta BE ; erit angulus ABE , in semicirculo rectus. Quare angulus ABC , pars recti, recto minor erit: quod est secundum.



S 1 T. iterum in segmento minori, cuius centrum D , angulus ABC , quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE , occurrens peripheriæ productæ in E , & coniuncta recta BE , erit angulus ABE , in semicirculo rectus; quicum sit pars anguli ABC , erit angulus ABC , recto maior: quod est tertium.



I A. M. vērō proponatur segmentum maius ABC , & segmentum minus ADC , quorū centrū B . Dico angulū CAB , segmenti maioris, esse recto maiorem; At angulū CAD , segmenti minoris, recto minorem. Ducta enim diametro CB & recta BAF , erit angulus BAC , in semicirculo, rectus, atque adeo ei deinceps FAC . Cum igitur angulus rectus BAC , sit pars anguli CAB , segmenti maioris: & angulus GAD , segmenti minoris, pars quoque



quoque anguli recti FAC ; constat utrumque.

C O R O L L A R I V M.

Hinc manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus equalis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit equalis. Quod quidem constat ex priori demonstratione.

E X C A M P A N O.

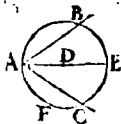
Ex hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnavimus in propos. 16. huius lib. quarum una est.

T R A N S I T V R a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

A L T E R A vero est eiusmodi.

C O N T I N G I T reperire maius, & minus eodem; igitur continget reperire æquale.

I N circulo enim ABC , cuius centrum D , & diameter AE , ducatur recta AB . Erit igitur angulus ABB , segmenti maioris, recto maior. Quare si $A'B$, moveatur versus AE , circa A , punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE , perveniat, ubi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si ulterius moveatur ad AC , faciet a fortiori angulum ACF , segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum uterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, utrosque esse prædictas consequentias.

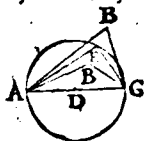


S C H O L I O N.

M A N E F E S T V M quoque est conversam huius theorematis. Hoc est, segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculus est. Nam si esset maior, angulus in eo foret acutus; si minus, obtusus; & sic de reliquis partibus theorematis.

Hinc etiam perspicuum est, si angulo recto recta subtensa bisariam secetur, & ex puncto divisionis circulus describatur
ad

ad intervallum dimidia subiens; circulum transire per angulum rectum. Angulo enim recto $\triangle ABC$, subiens AC , bisariam secetur in D , puncto, ex quo ad intervallum DA , vel DC , circulus describatur. $\triangle AEC$, quem dico transire per B , si enim transeat circa B , vel ultra, ductus rectis AE , CE , erit angulus $\triangle AEC$, rectus quoque. Quare anguli recti B , & E , equales erunt; quod est absurdum, cum angulus E , sit necessario, vel maior, vel minor angulo B . Transit igitur circulus per punctum B , quod est propositum.



31. tertij.

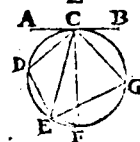
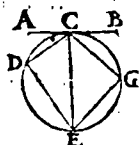
22. primi

THEOR. 28. PROPOS. 32.

31.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producaturs quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB , circulum CDE , in C , puncto, a quo ducatur recta CE ; dividens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE , CDE . Dico angulum $\triangle ACE$, æqualem esse angulo $\triangle CGE$, in alterno segmento; & angulum $\triangle BCE$, angulo $\triangle CDE$, in alterno quoque segmento. Transeat enim primo recta CE , per centrum. Erit igitur uterque angulus $\triangle ACE$, $\triangle BCE$, rectus: sunt autem & anguli $\triangle CGE$, $\triangle CDE$, in semicirculis recti; igitur angulus $\triangle ACE$, angulo $\triangle CGE$; & angulus $\triangle BCE$, angulo $\triangle CDE$, æqualis est.



18. tertij.

31. tertij.

NON transeat iam CE , recta per centrum. Ducta igitur recta CF , per centrum, connectatur recta EF , eritque CF , perpendicularis ad

18. tertij.

ad

31. tertii

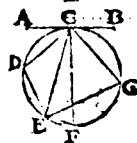
ad A B, & angulus C E F, rectus; ac propterea reliqui anguli E C F, E F C, æquales erunt uni recto; ut angulo recto A C F. Dempto ergo communi angulo E C F, erit reliquus A C B, reliquo C F E, æqualis.

21. tertii



Est autem angulus C F E, æqualis quoque angulus C G E, cum uterque sit in segmento C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis erit. Quoniam uero in quadrilatero C D E G, duo anguli C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: Sunt autem & duo anguli A C E B C E, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem; &c. Quod erat ostendendum.

22. tertii



13. primi

Sunt autem & duo anguli A C E B C E, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem; &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM

POTEST theorema hoc conuersi hoc modo.

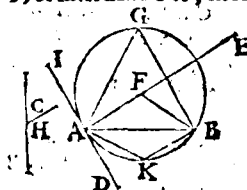
SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

31. tertii

IN eadem constructione transeat prius recta C E, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tangere circulum. Quoniam angulus C G F, rectus est; erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam uero C E, non transeat per centrum; construatque figura, ut supra. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E; in alterno segmento maiori, & hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo E C F, erit angulus A C F, æqualis duobus

21. tertii

F, & intervallo FA, circulus describatur A G B, transibis per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod descriptum est super A B, esse æquale angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, trahitur, & ei perpendicularis est D A, tanget D A recta circulum in A,



32. tertij.

per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter angulus D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno.

S I T tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A. E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, describiturque erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo alterno I A B, hoc est, angulo dato obtuso H. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descriptimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

33.

PROBL. 6. PROPOS. 34.

A D A T O circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

D A T U S circulus sit A B C, a quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo

17. tertij.



32. tertij.

D. Ducatur recta E F, tangens circulum in A; Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulū A C B, in segmento ablato A G B, æqualem esse dato angulo D. Est enim angulus A C B, æqualis angulo alterno F A B, hoc est, angulo D. A dato ergo circulo abscidimus segmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.

T H E O R.

THEOR. 29. PROPOS. 35.

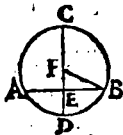
34

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E; Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primo utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus, æquale esse ei, quod sub reliquis duobus comprehenditur, rectangulo.



TRANSAT secundo CD, sola per centrum F, dividaturque prius rectam AB, bisariam, ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniam igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB; Sunt. n. rectæ FD, FB, æquales: Est autem quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FE, EB; Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB; cum AE, EB, rectæ sint æquales.



3. tersij.

5. secundi

47. primi

Dividat iam CD, transiens per centrum rectam AB, non bisariam. Secetur ergo AB, bisariam in G, ducanturque rectæ FG, FB, erique FG, perpendicularis ad AB. Quoniam uero rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato

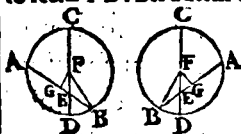
3. tersij.

R

rectæ

5. secundi
47. primi

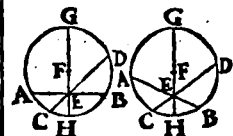
rectæ FE, æquale est quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, æquale quadratis rectarum FG, GE; & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; Erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB.



Dempto ergo cōmuni quadrato rectæ FG, remanebit rectangulū sub CE, ED, una cum quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiā rectangulū sub AE, EB, una cum quadrato rectæ GE, æquale est eidem quadrato rectæ GB: Igitur rectangulū sub CE, ED, una cū quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, una cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.

5. secundi

TERTIO neutra per centrū transeat, siue una illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrū F,



& punctū sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangu-

lum sub CE, ED, æquale esse quoq; eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, siue sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositum.

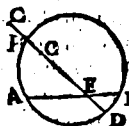
SCHOLIION.

CONVERTI poteris theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus.

SECENT

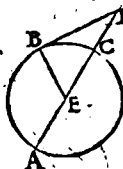
SECEM se mutuo recta AB , CD , in E , sitque rectangulum sub AE , EB , aequale rectangulo sub CE , ED . Dico quatuor puncta A , D , B , C , in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circumferentiam posse describi. Describatur enim per tria puncta A , D , & B , circulus aliquis, (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 4. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C , transibit aut ultra C ; vel circa, ut per F . Quoniam ergo rectangulum sub FE , ED , aequale est rectangulo sub AE , EB ; & rectangulum sub CE , ED , ponitur quoque aequale eidem rectangulo sub AE , EB : Erunt rectangula sub CE , ED ; & sub FE , ED , aequalia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C , quod erat propositum.



THEOR. 30. PROPOS. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum secet, altera uero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, aequale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum ABC , punctum sumatur D , a quo linea ducatur DA , secans circulum in C , & linea DB , circulum tangens in B . Dico rectangulum sub DA , DC , aequale esse quadrato rectae DB . Transeat enim primo recta DA , per centrum E , & iungatur recta EB , quae perpendicularis erit ad DB . Quoniam igitur CA , diuisa est per aequalia in E , & ei addita in rectum & continuum CD , erit rectangulum sub DA , DC , una cum quadrato rectae EC , hoc est, cum quadrato rectae EB ,



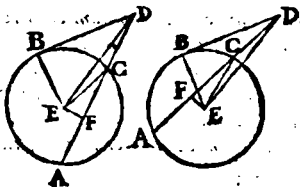
R 2 aequale

47. primi

æquale quadrato rectæ DE: Est autem quadratum rectæ DE, æquale quadratis rectarum EB, BD; Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum DB, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale; Quod est propositum.

Non transeat iam DA, per centrū E. Diuisa ergo AC, bisariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF, critque

18. tertij.
3. tertij.



EB, ad B D, perpendi-
cularis; & EF, ad AC.
Quoniam igitur CA,
diuisa est per equalia in
F, & ei addua recta CD,
erit rectangulum sub
DA, DC, una cum
quadrato rectæ CF, æ-

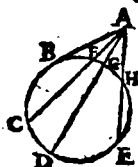
6. secundi

quale quadrato rectæ DF. Addito igitur communi qua-
drato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, una cum
quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum
DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, æquale
quadratum rectæ EC, ideoque quadratū rectæ EB; Et qua-
dratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE.
Quare rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato re-
ctæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadra-
tum rectæ DE, æquale sit quadratis rectarum DB, BE, erit
& rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ
EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo cō-
muni quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA,
DC, quadrato rectæ DB, æquale; quod est propositum.
Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c.
Quod erat demonstrandum.

47. primi

47. primi

COROLLARIUM. I.

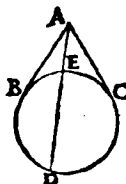


Hinc manifestum est, quod si a puncto
quouis extra circulum assumpto plurae linae
rectæ circulum secantes ducantur, rectangula cō-
prehensa sub totis lineis, & partibus exteriori-
bus, inter se sunt æqualia. Ut sit ex A, ducan-
tur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in
F, G, H, erunt rectangula sub A G, A E, scilicet
sub

sub A D, A G; & sub A B, A H, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula dicta rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.

COROLLARIUM. II.

CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quam quadratum rectæ A C, æquale rectangulo sub A D, A E; Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt.

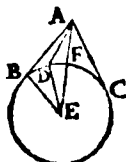


36. tertij.

36. tertij.

COROLLARIUM. III.

PERSPICUUM denique est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas A B, A C, duci possit tertia A D, circulum eundem tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta A B, erit angulus A D E, maior angulo A B E.



18. tertij.

21. primi

8. tertij.

ALITER. Erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, ut ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrū E, quæ circulum secet in F, erit A D, cum sit propinquior minimè A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior est. Solum igitur duæ rectæ dacentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 37.

36.

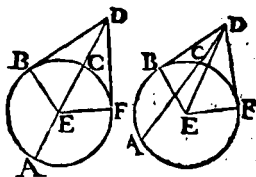
SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, com-

R 2 apprehenditur

prehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum ABC , cuius centrum E , punctum sumatur D , a quo ducatur recta DA , circulum secans in C , & recta DB , incidens in circulum, ad punctum B ; sitque rectangulum sub DA , DC , æquale quadrato rectæ DB : Dico DB , circulum tangere in B . Ducatur enim AF , tangens

17. tertij.



36. tertij.

circulum, & iungantur rectæ EB , EF . Quod si DA , secans non transeat per centrum E , iungatur quoque recta DE : Quoniam igitur rectangulo sub DA , DC , æquale est quadratum rectæ tangentis DF ; Et eidem rectan-

gulo sub DA , DC , æquale ponitur quadratum rectæ DB , erunt quadrata rectarum DF , DB , inter se æqualia, ideoque & rectæ DF , DB , æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF , FE , trianguli $D FE$, æqualia sunt lateribus DB , BE , trianguli $DB E$, & basis DE , communis; erunt anguli $D FE$, $DB E$, æquales: Atqui angulus $D FE$, rectus est, quod AF , circulum tangat: Igitur & angulus $DB E$, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. DB , circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandū.

8. primi

18. tertij.

S C H O L I O N.

EST autem hoc theorema conversum præcedentis theoremat, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI TERTII.



E V C L I D I S

ELEMENTVM IIII.



DEFINITIONES.

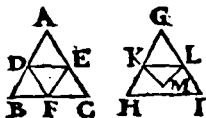
I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cū singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.



GENS Euclides in quarto hoc libro de varijs inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus; nec nō de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa eadem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut

circa figuram describi, incipiens a rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F , trianguli interni DEF , tangant latera AB, AC, BC , trianguli externi ABC , dicetur triangulum DEF , in triangulo ABC , esse inscriptum. At quoniam angulus M , trianguli KLM , non tangit latus HI , trianguli GHI , non dicetur triangulum KLM , inscribi in triangulo GHI ; quamvis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L , tangant duo latera GH, GI .



II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E CONTRARIO dicitur triangulum ABC , describi circa triangulum DEF , quoniam singula latera illius singulas huius angulos tangunt, &c. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

III.

FIGURA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cū singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

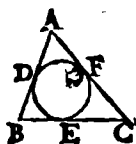


UT si tangant anguli A, B, C , trianguli ABC , peripheriam circuli ABC , dicitur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si unus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

III I.

FIGURA uero rectilinea circa circumlum describi dicitur, cū singula latera eius, quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.

At vero, si latera trianguli ABC , singula tangant peripheriam circuli DEF ; dicitur triangulum circa circum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figure, cui inscribitur.

VI.

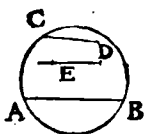
CIRCULVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figure, quam circumscribit, angulos.

VICISSIM dicitur circulus DEF , inscriptus esse in triangulo ABC : At vero circulus ABC , descriptus esse circa triangulum ABC : Idem iudicium habeo de alijs figuris rectilineis, que in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus, dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur; cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Ut recta linea AB , quoniam eius extrema A , & B , in periphe-



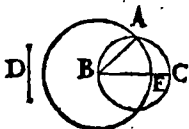
peripheria circuli ABC , existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicitur: Non autem recta E , nec CD quia hac unum duntaxat extremum, nempe C , habet in peripheria circuli; Illa vero nullum.

I.

PROBL. I. PROPOS. I.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

15. seri. 7.



IN circulo ABC , coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D , quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. (Cum enim diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta, diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi una æqualis) Ducatur diameter BC . Itaque si data recta D , æqualis fuerit diametro, aptata erit BC , illi æqualis: Si vero D , minor fuerit diametro, abscindatur BE , æqualis ipsi D , & centro B , intervallo autē BE , circulus describatur EA , secans circulum ABC , in A ; Ducta igitur recta BA , erit ea aptata in circulo ABC , æqualis datæ rectæ D . Est enim BA , æqualis ipsi BE ; & D , æqualis eidē BE , per constructionē: Quare AB , & D , inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

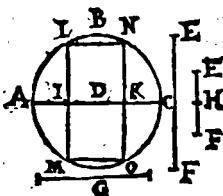
EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo ABC , cuius centrum D , accommodanda sit recta

cta

Et æqualis rectæ EF, quæ diametro maior non sit, & altera recta G. parallela. Ducatur per centrum D, diameter AC, rectæ G, parallela. Quod si recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si uero EF, diametro minor fuerit, ea secta bifariam in H, abscindatur DI, ipsi HB, & DK, ipsi HF. æqualis, ut tota IK, toti EF, sit æqualis. Et per I, K, ad angulos rectos ipsi AC, ducantur LM, NO; iungaturq; LN. Dico LN. accommodatam esse æqualem ipsi EF, & ipsi G, parallelam. Cum enim LM, NO, equalliter a centro distent, ipse æquales inter se erunt: quæ cum diuidantur bifariam in I, & K, quod ad angulos rectos secantur a recta AC, per centrum D, transeunt; erunt & earum dimidiæ LI, NK, æquales. Quia uero LI, NK, parallele etiam sunt; erunt quoque LN, IK, æquales, & parallele. Quare cum IK, æqualis sit ipsi EF, & parallela ipsi G; erit etiam LN, æqualis ipsi EF, & ipsi G, parallela. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.



31. primi

11. primi

14. tertij.
3. tertij.

28. primi

33. primi.

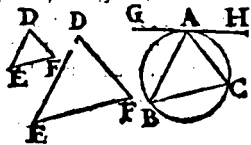
30. primi

PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

Si in circulo ABC, dato describendū triangulū æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatq; angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC, angulo E; atq; extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam usque in puncta B, & C, coniungaturque recta BC. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione: Quare anguli C, & F, inter se quoq; erunt æquales. Similiter quia angulus B, æqualis est angulo HAC, & eidem angulo HAC, æqualis est, per constructionē, angulus E; erunt etiā anguli B, & E, inter se æquales.



32. tertij.

32. tertij.

Cum

32. primi

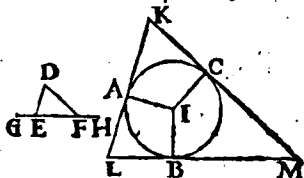
Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis F, & E, trianguli DEF, erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Equiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

3.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum ABC, describendum sit trian-
gulum æquiangulum dato triangulo DEF. Productio late-
re EF, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, du-
catur recta utcumque AI, & fiat angulus AIB, æqualis an-



gulo DEG; & angu-
lus BIC, angulo DFH;
Deinde ex A, B, C, edu-
cantur ad AI, BI, CI,
perpendiculares KL,
LM, MK, quæ circ-
lum tangent in punctis

A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in' pun-
ctis K, L, M; (si enim duceretur recta AC, fierent duo an-
guli KAC, KCA, duobus rectis minores; quare AK,
CK, coibunt, &c.) Descriptum est igitur circa circulū trian-
gulum KLM, quod dico esse æquiangulū triangulo DEF.
Quoniam omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales
sunt quatuor rectis, ut ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit;
& anguli IAL, & IBL, sunt duo recti; erunt reliqui AIB,
& L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli DEG,
DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales
AIB, & DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqua-
lis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse
angulo DFE. Reliquus igitur angulus K, reliquo angu-
lo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æqui-
angulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c.
Quod efficiendum erat.

32. primi

32. primi

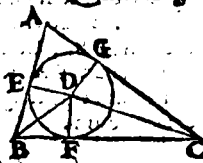
PROBL

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere.

4.

SIT describendus circulus in dato triangulo ABC . Diuisis duobus angulis ABC , ACB , bifariam rectis BD , CD , quæ intra triangulum cocant in D ; ducantur ex D , ad tria latera, perpendiculares DE , DF , DG . Quoniam igitur duo anguli DBE , DEB , trianguli DBE , æquales sunt duobus angulis DBF , DFB , trianguli DBF , uterque utriusque, & arsus $B D$, commune; erunt quoque latera DE , DF , æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF , DG , in triangulis DCF , DCG . Cum igitur tres rectæ DE , DF , DG , sint æquales; circulus ex D , ad intervallum DE , descriptus transibit per reliqua puncta F , & G ; tangetq; latera trianguli in E , F , G , per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod perpendicularia sint ad semidiametros DE , DF , DG . In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.



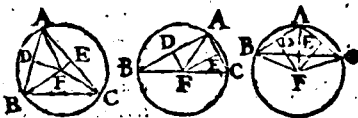
15. primi

PROBL. 5. PROPOS. 5.

5.

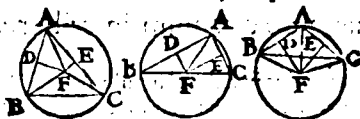
CIRCA datum triangulum circulum describere.

SIT circulus describendus circa datum triangulū ABC . Diuidantur duo latera AB , AC , (quæ in triangulo rectangulo, uel obtusangulo sumenda sunt circa rectum, uel obtusum angulum) bifariam in D , & E , punctis, ex quibus educantur DF , EF , perpendiculares ad ducta latera, cocantes in F . (Quod enim cocant, patet.



tet.

tet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, uel intra triangulum, uel



in latere BC, uel extra triangulum. Ducantur rectae FA, FB, FC. Quoniam igitur latera

4. primi

A D, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus B D, D F, trianguh BDE, & anguli ad D, recti: erunt bates FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectae FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

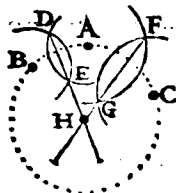
COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si uero sit in latere BC, angulum BAC, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulum BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

CONTRA uero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum tueri, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum.

SCHOLIUM.

COLLIGITUR etiam ex hoc problemate, quam arde describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat.



Nam si data puncta tribus rectis inuergantur, ut constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur. Quod tamen facilius efficitur praxi illa, quam tradidimus. propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo, duo arcus describantur se

intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur

DH.

*D H. Item ex A, & C, quomodo alio intervallo, vel etiam, si
placet, eodem, alij duo arcus delineentur secantes se in F, &
G, punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in
H. Dico H, esse centrū circuli transcuntis per data puncta A,
B, & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, di
viderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bisariam a
rectis D H, F H, cen demonstratum est in praxi illa propositionis
25. lib. 3. Quare ut in hoc 5. problemate Euclides ostendit,
H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti.
Quod est propositum.*

PROBL. 6. PROPOS. 6.

6.

IN dato circulo quadratum describere.

S I T in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscri
bendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D,
secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur re
ctæ A B, B C, C D, D A. Dico A B
C D, esse quadratum inscriptum in dato
circulo. Nam quia latera E A, E B, trian
guli A E B, æqualia sunt lateribus E C,
E B, trianguli C E B, cum omnia sint ex
centro; & anguli contenti sunt recti; erūt
bases A B, B C, æquales. Eadem ratione
æquales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et
rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D,
æqualia inter se sunt. Sunt autem & anguli recti, cum om
nes in semicirculo existant. Quare quadratum erit A B
C D; proptereaque in dato circulo quadratum descripsi
mus. Quod erat faciendum.



4. primi

31. secij.

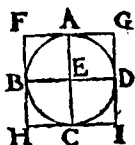
PROBL. 7. PROPOS. 7.

7.

**CIRCA datum circulum quadratum
describere.**

S I T circa datum circulum A B C D, cuius centrum E,
describendum

describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos, & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares



FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico FHIG, esse quadratū circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FEB, sint recti, erūt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. Quare & FH, GI parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ

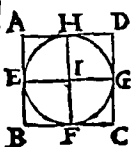
erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogrammum est ACHF, erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: sed ACH, est rectus, igitur & AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus, angulos H, I, G, rectos esse, & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGHI, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bisariam in E, F, G, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æqua-



les sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales, & parallelæ. Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadem ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erunt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur patall'ogramma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt rectis AH, EB, DH, AE; sunt autem hæ inter, se æquales, cum sint dimidiæ æqualium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH,

33. primi

IG,

I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad intervallum I E, transibit quoque per puncta F, G, H; qui cum contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum descriptimus. Quod efficiendum erat. 29. primi

PROBL. 9. PROPOS. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera A B, D A, trianguli A B D, æqualia sunt; erunt anguli A B D, A D B, æquales: est autem angulus B A D, rectus; Quare A B D, A D B, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & ideo inter se æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, sint æquales; erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, intervallum E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descriptimus, quod erat faciendum.



SCHOLIUM.

QUOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribasur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, ut ex 7. propos. huius lib. constas, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, ut ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



10.

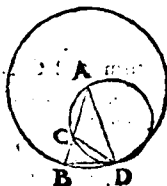
PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulū constituere;
quod habeat utrumq; eorum, qui ad basin
sunt, angulorum, duplum reliqui.

11. secundi. S V M A T V R quævis recta linea AB , quæ diuidatur in
 C , ita ut rectangulū sub AB, BC ; æquale sit quadrato rectæ
 AC . Deinde centro A , interuallo uero AB , circulus descri-

3. quarti

batur, in quo accommodetur, recta BD , æqualis ipsi AC , iun-



1. quarti.

gaturque recta AD . Quoniam autem
rectæ AB, AD , æquales sunt, erit trian-
gulum ABD , isosceles. Dico utrumq;
angulorum ABD, ADB , duplum esse
reliqui anguli A . Ducta enim recta
 CD , describatur circa triangulū ACD ,
circulus DCA . Quoniam igitur re-
ctangulum sub AB, BC , æquale est
quadrato rectæ AC , hoc est, quadrato

37. tersij.

rectæ BD ; & recta AB , secat circulum DCA : tanget re-
cta BD , eundem circulum DCA , in D . Quare angulus

32. tersij.

BDC , æqualis est angulo A , in altero segmento $CA D$.

32. primi

Addito igitur cōmuni CDA , erit totus angulus ADB , æqua-
lis duobus angulis CAD, CDA ; sed his eundem æqualis est

5. primi

etiam angulus externus BCD . Angulus ergo BCD , æqualis
erit angulo ADB , hoc est, angulo ABD , cum ABD, ADB ,

6. primi

æquales sint; ac propterea rectæ CD, BD , æquales erunt:
Est autē BD , æqualis posita rectæ AC . Igitur & CD , ipsi

5. primi

CA , æqualis erit, ac propterea anguli CAD, CDA , æquales.
Cum igitur angulus A , æqualis sit ostēsus angulo BDC , erūt

quoque anguli BDC, CDA , æquales; ac propterea angulus
 ADB , duplus erit anguli CDA , hoc est, anguli A , sibi æqua-
lis. Quare & angulus ABD , duplus erit eiusdē anguli A . Iso-
sceles ergo triangulum cōstituiamus, habens, &c. Quod erat
efficiendum.

SCHOLIION.

NON est autem quod se excrucienti Campanus, & Pele-
rius, ut probent, rectam BD , ita applicari circulo DCA , ut cū
nullo

nullo modo feces. Nā prorsus ea quod quadratū recta BD, æqua
le est rectangulo sub AB, BC, ostensum est in ultima propos.
3. lib. rectam BD, perpendicularē esse ad semidiametrum circuli
ex D, ductam. Quare circuli tanget, & nulla ratione secabit.

PROBL. II. PROPOS. II.

II.

IN dato circulo, pentagonum æquila-
terum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum penta-
gonum æquilaterum, & æquiangulum. Construatür triangu-
lum isosceles PGH, ita ut uterq; angulorū G, H, duplus sit
reliqui F. & in circulo inscribatur triangulum ACD, æquian-
gulum, triangulo FGH, & uterq; angulorū ACD, ADC,
bisariam diuidatur rectis CE, DB, atque rectæ iungantur,
AB, BC, CD, DE, EA. Dico penta-
gonum ABCDE, in circulo dato
inscriptum, esse æquilaterum, & æqui-
angulum. Cum enim uterque an-
gulorum ACD, ADC, duplus sit
anguli CAD; & diuisus bisariam;
erunt quinque anguli ADB, BDC,
CAD, DCE, ACE, æquales. Quare arcus AB, BC, CD,
DE, EA, super quos ascenderunt, atq; idcirco & rectæ AB,
BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Acquilaterum est igitur
pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æqua-
les sunt, addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB;
Anguli ergo AED, BAE, dictis arcibus insistentes æqua-
les erunt. Eodē modo æquales erunt cuncti horū angulorū
reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcibus; Acquian-
gulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cū & æquilate-
rum esse sit ostensum, inscriptū erit in dato circulo penta-
gonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendū erat.

10. quarti

2. quarti

9. primi



26. tertij.

29. tertij.

27. tertij.

SCHOLIUM

Q U O D si datur recta linea terminata CD, super ea
S 2 consti-

10. quari

constituamus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. Fias triangulum Iſoſceles $F G H$, habens quolibet angulorum G, H , duplum reliqui anguli F . Deinde conſtituam anguli $A C D$, $A D C$, æquales angulis G, H , coeuntibus rectæ $C A$, & $D A$, in A , quæ efficiunt angulum $C A D$, æqualem angulo F ; atque propterea trianguli $A C D$, utriusque angulorum $A C D, A D C$, duplus eris reliqui anguli $C A D$. Iam vero circa triangulum $A C D$, circulus describatur $A B C D E$; In quo cum ſit inſcriptum triangulum $A C D$, ſc. anguli $A C D, A D C$, biſariam ſecentur, inſcribetur æquius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus eſt recta $C D$: Quod eſt propoſitum.



32. primi

3. quari

12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

11. quari

Si r. circ. datum circulum $A B C D E$, deſcribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Inſcribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum $A B C D E$, & ex centro F , ducantur rectæ $F A, F B, F C, F D, F E$, ad quas ducant perpendicularæ $G H, H I, I K, K L, L G$, coeuntes in G, H, I, K, L . Cum in anguli $G A E, G E A$, duobus ſint ætatis minores, coibunt rectæ $A G, E G$, ad partes G ; & ſic de alijs. Et quia ipſæ tangent circulum, per coroll. propoſ. 16. lib. 3. erit deſcriptum pentagonum $G H I K L$, circa circulum; quod dico eſſe æquilaterum, ac æquiangulum. Duſtis enim rectis $F G, F H, F I, F K, F L$; erunt quadrato rectæ $F H$, æqualia tam quadrato rectarum $F A, A H$, quam rectarum $F B, B H$: Quare quadrato rectarum $F A, A H$, æqualia erunt quadratis rectarum $F B, B H$. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium $F A, F B$, remanebunt quadrato rectarum $A H, B H$, æqualia; ideoque & rectæ $A H, B H$,



11. propoſ.

47. primi

B H,

BH, æquales erunt: Quoniam etgo latera AF, FH, trian-
guli AFH, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH;
Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, ut ostensum
est: erunt anguli AFH, BFH, æquales; Igitur & angu-
li AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli
BFH; & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo
ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, &
angulū BIC, anguli BIF. Cum igitur anguli AFB, BFC,
sint æquales, quod insistant circumferentijs AB, BC, quæ
æquales sunt, cum a rectis æqualibus subtendantur AB, BC;
erunt & dimidij eorum BFH, BFI, æquales. Quoties
cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales
sint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus il-
lis adiacens commune BF, erunt & latera BH, BI, æqua-
lia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta
HI, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus GH, re-
ctam duplam esse rectæ HA: Sunt autem ostensæ æquales
HB, HA; igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erūt.
Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales
esse cuilibet rectarum HI, HG. Acquilaterum ergo est pen-
tagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est an-
gulos BHF, BIF, æquales esse, ac dimidios angulorum
BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æqua-
les. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, erunt
æquales cuilibet angulorum BHA, BIC. Acquiangulum
igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum &
æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum cir-
culum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. quod
efficiendum erat.

8. primi

4. primi.

27. tertij.

28. tertij.

26. primi

PROBL. 13. PROPOS. 13.

13.

IN dato pentagono æquilatero & æqui-
angulo circulum inscribere.

Si r inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE;
Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, bisariam rectis
AF, BF, quæ coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF,

9. primi

5 3 sint

sint minores duobus rectis, coibunt necessario rectæ AF, BF: Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus

4. primi



CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF, erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli BAE, BCD, ponantur æquales, & BAE, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Divisus est ergo

angulus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDB, DEA, divisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniam igitur duo anguli FGA, FAG, trianguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF, subiectum uniaequalium angulorum, commune; erunt rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet illarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & intervallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam uero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum rectis FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

26. primi

14.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulū circulū describere.

SIT circa pentagonū ABCDE, æquilaterū, & æquiangulum, circulus describendus. Divisis duobus angulis BAE,



ABC, bifaria rectis AF, BF, quæ corant in F; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, ut in precedenti problemate, reliquos etiā angulos BCD, CDE, DEA, secari bifaria; Erunt ergo oēs anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo

duo

duo anguli æquales sunt FAB , FBA , erunt rectæ FA , FB , æquales. Eademq; ratione erunt reliquæ EC , FD , FE , cuiuslibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F , interuallo autē FA , transibit quoq; per puncta B , C , D , E . Circa datū ergo pentagonū, &c. Quod faciendum erat.

6. primi

PROBL. 15. PROPOS. 15.

15.

- IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo $ABCDEF$, cuius centrum G , inscribendū hexagonum æquilaterū, & æquiangulum. Ducta diametro AD , describatur circulus ex centro D , interuallo uero DG , qui secet circulū datū in punctis C , & E , e quibus per centrū G , rectæ extendantur CF , EB . Si igitur cōnectantur rectæ AB , BC , CD , DE , EF , FA , inscriptum erit in dato circulo hexagonum A^*CDEF ; quod di-



co esse & æquilaterum, & æquiangulum. Cū enim recta GC , æqualis sit rectæ GD , & recta DC , æqualis eidem rectæ DG , ex definitione circuli; erunt & rectæ GC , DC , æquales inter se. Ideoq; triangulum CDG , erit æquilaterū. Quare tres anguli CGD , GDC , DCG , æquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD , tertia pars unius recti. Eodē modo erit angulus DGE , tertia pars unius recti. Sunt autē tres anguli CGD , DGE , EGF , æquales duobus rectis: Reliquus igitur angulus EGF , tertia quoq; pars est unius recti. Sūt ergo tres anguli CGD , DGE , EGF , inter se æquales; quibus cū etiā æquales sint anguli FGA , AGB , BGC , erūt sex anguli ad centrū G , æquales. Quare circūferentię, quibus insistūt, ac propterea rectę AB , BC , CD , DE , EF , FA , æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonū $A B C D E F$. Rursus quia circūferentia BC , æqualis est circūferentiæ AF ; si addatur communis $CDEF$, erunt circūferentiæ $BCDEF$, $AFEDC$, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF , AFC , æquales erunt. Similiterq; ostēdemus, reliquos angulos BCD , CDE , DEF , EFA , æquales esse cuilibet istorū. Quare æquiangulū quoq; est hexago-

5. primi

32. primi.

13. primi

15. primi

25. terci.

29. terci.

27. terci.

num A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonū æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendū erat.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

CARTESIVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatere, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa idem hexagonum describemus circulum.

16.

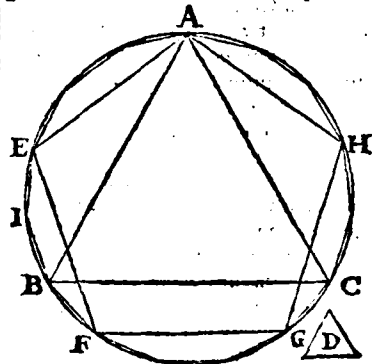
PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatere D, inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum,

2. quarti

28. tertij.



eruntque tres arcus A B, B C, C A, æquales. Quam igitur partium æqualium quindecim est circumfereñcia tota A B C, talium quinque erit arcus A B, quæ tertia pars est totius circumfereñtiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum

11. quarti.

28. tertij.

A E F G H, eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A.

HA, æquales. Qualium igitur partium æqualiū quindecim est tota circumferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens totius circumferentiae. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres, continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circumferentiae. Quare ducta recta B I, subtendet decimam quintam partem totius circumferentiae; cui si aliae quatuordecim æquales in circulo accomodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod & æquiangu-
1. quartus
27. terrij.

Quod erat faciendum.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangu-
1. quartus
27. terrij.

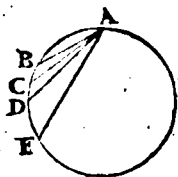
SCHOLIION I.

Ex huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, ac ars quædam, qua infinita propemodū figura in dato circulo inscribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod sit latus trianguli æquilateri, & recta A E, a quinario, quod sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficiuntur 15. Quare ex dictis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angularumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc est, 3. exceditur a denominatore lateris A E, nempe a 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figura 15. laterum, angularumque æqualium, ut demonstratum fuit. Hac fere arte usus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

Si in circulo ab eodem puncto inscribantur
duo.

duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter dicta latera inclusus, tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR in circulo $ABCDE$, initio semper facto a puncto A , plurima latera; Hexagoni quidem AB , pentagoni vero AC , & quadrati AD , trianguli denique æquilateri AE . Quoniã igitur denominator lateris AB , nempe 6. excedit denominatorem lateris AC , nempe 5. unitate;



continebit arcus BC , inter dicta latera inclusus unum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium: Nam ex multiplicatione 5. cum 6. produciuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circumferentia, tali 5. est arcus AB , sexta pars circumferentia; & talium 6. est arcus AC ,

quinta pars circumferentia. Igitur arcus BC , unam partem continebit partem. Pari ratione arcus BD , continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium: Nam denominator lateris AB , uidelicet 6. superat denominatorem lateris AD , nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24. Ita quoque arcus BE , comprehendet tria latera figuræ 18. laterum. Arcus vero CD , complectetur unum latus figuræ 20. laterum; & arcus CE , duo latera figuræ 15. laterum. Arcus denique DE , continebit unum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

B X C A M P A N O.

OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, aut circumscripta.

est

est quoque equiangularis. Nam figure inscripte anguli, cum insistant arcibus equalibus, æquales erunt. Anguli uero circumscriptæ, æquales ostendentur, ductis a centro rectis lineis ad omnes angulos, & ad puncta. quibus latera circulum tangunt, ut in pentagono est factum, propos. 12.

P O R R O qualemunque figuram æquilateram & æquiangulari in circulo nouimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si attem imitemur, quæ tradita sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

R V R S V S inscripta figura quacunque æquilatera. & æquiangulari in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplicata. Diuisi etenim arcibus, quos latera subtendunt, bisariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 14. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figuræ 31. 64. 128. laterum, &c.

SCHOLIUM. II.

O M N E S figure æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt officio Isoscelium triangulorum, ut recte hoc loco docet Peletarius.

I M P A R I U M enim laterum figura inscribent officio triagulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad uerticem sunt, angulorum. Vt officio Isoscelis, cuius uterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad uerticem, descripti in circulo, inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulū æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulū æquilaterū erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius uterq; angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad uerticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, uispe pentagonū, in circulo, si duo anguli æquales secantur bisariam, ueluti propos. 11. fuit offensum. At Heptagonū, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triagulū Isosceles habens utrumq; angulorum ad basin triplum eius, qui ad uerticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad uerticem. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quales est Hexagonum, in circulo inscribetur officio Isoscelis, cuius uterq; angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad uerticem, si uterq; distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad uerticem, &c.

27. terræ.

6. primi

23. primi

25. primi

P A R I U M

P A R I U M vero laterum figura in circulo inscribentur, officio Isoscelium, quorum anguli aequales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Ut quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur officio Isoscelis, cuius uterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quarta parti circumferentia. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos aequales ei, qui ad verticem; subiudens ipsi tres partes circumferentia, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis, cuius uterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sexta parti circumferentia, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis habentis utrumque angulorum ad basin triplum sesquialterum angulo ad verticem, &c.

S i igitur inuenta fuisset ars, qua Isoscelia triangula construerentur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricavit habens utrumque angulorum ad basin dupli anguli ad verticem, facile in circulo describerentur figura omnes laterum imparium. Quod si arcus earum dividerentur bifariam, inscriberentur quoque omnes figura parium laterum, atque adeo qualibet circumferentia circuli in quolibet aequales partes Geometricè divideretur. Qua res summam Astronomis afferret utilitatem. Verum hac ars adhuc ignota existit: Non enim recte sibi eam vendicavit Oronius Finas in libello hactenus, ut ipse ait, desiderato, de absoluta rectilinea rum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsa sint, ac sophistica, ut Geometricè offensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erroribus Oronii.

Q U O N I A M vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni aequaliteri, & aequianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annexere praxin quandam, qua una eademque opera Ptolemaeus lib. 1. magna constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum aequilaterum, & aequiangulum. Sic enim datus cir-

culus

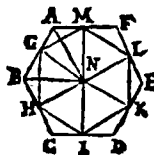
culus ABC , cuius centrum D ; ducta autem diametro BC , erigatur DA , perpendicularis ad BC : Deinde diuisa semidiametro CD , bifariam in E , ducatur recta EA , cui aequalis absindatur EF . Itaque si ducatur recta AF , eris AF , latus pentagoni, & DF , latus Decagoni in dato circulo inscribendi, ut ipse demonstrat. Casuum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non uidetur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in prop. 19. differenda.



NON erit autem praeter insitum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus, videlicet.

S. I bifariae sectiones laterum figurae equilateralæ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idem centrū habens.

S. I T enim figura æquilatera, & æquiangula $ABCDEF$, cuius latera bifariam secantur in G, H, I, K, L, M , innēti rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG . Dico figuram $GHIKLM$, inscriptam figuræ $ABCDEF$, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera subtendunt angulos æquales cōprehensos æqualibus rectis, utpote dimidijs laterum æqualium, æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF , quam tres FLM, MLK, KLE , duobus sunt rectis æquales; Sunt autem $AMG, LMF; FLM, KLE$, inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque a basibus æqualibus: Erunt reliqui anguli GML, MLK , æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura $GHIKLM$. Quod



4. primi

3. primi.

8. primi.

13. primi

autem

autem idem habeas centrum, ita ostendetur. Ex centro N , figura $ABCD EF$, ad omnes angulos figurae inscriptae ducantur



rectae NG , NH , &c. iunctis quoque re
His NA , NB . Quoniam igitur AG ,
 GN , latera trianguli AGN , aequalia
sunt lateribus BG , GN , trianguli
 BGN , suntq; basis AN , BN , cum
sint semidiametri circuli circa figurā
descripti, aequales: Aequales erunt an
guli AGN , BGN , ideoq; rectis. Qua-

3. primi

re NG , perpendicularis est ad latus AB ; Eodemq; modo reli
qua NH , NI , &c. perpendicularares erunt ad latera BC ,
 CD , &c. Quae cum ostendant distancias rectarum AB , BC , &c.
equalium a centro N ; aequales ad invicem erunt. Circulus igitur
ex N , intervallo NG , descriptus, per reliquos angulos H ,
 I , K , L , M , incidet; Ac propterea N centrum est figurae
 $GHIKLM$. Quod est propositum.

14. terrij.

FINIS ELEMENTI QUARTI.



E V C L I D I S

ELEMENTVM V.



DEFINITIONES.

I.

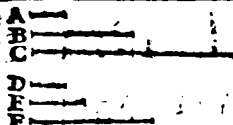
P A R S est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.



E **G I T** in precedensibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero in duobus sequentibus, de eadem distinas non absolute, sed pro ut una ad aliam referitur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. In hoc quidem quinto libro decet proportionum quantitarum continuarum in genere, non descendendo ad ullam eius speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. In 6. lib. vero ostendit, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Ut igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, que ad demonstrationes proportionum adhibentur.

I T A Q U E ait magnitudinem illam minorem, que maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellavi partem. Ut quoniam magnitudo *A*, ter sumpta, metitur magnitudinem *B*; sexies autem sumpta, magnitudinem *C*; dicetur magnitudo *A*, pars magnitudinum *B*, & *C*.

At



At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & E sed sumpta bis, excedit magnitudinem I, & sumptat, deficit a magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

D V P L E X autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodē deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc in loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia ut ex lib. 7. constabit, pars aliquanta non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertia, quales sunt duo binarii. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc in loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamē in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

M V L T I P L E X autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

V T in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc utramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metiatur. Itaque pars ad multiplex refertur,

feretur, & multiplex ad partem, ita minor quantitas mensuratur maiorem, dicatur pars maioris; Maior uero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

Satis autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, qua perfecte metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. ut uult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

QUANDO due quantitates eiusdem generis, ut duo numeri, due lineæ, due superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una maior est, quam altera, uel minor, uel æqualis, appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (ut alijs placeat) Proportio. Itaque si compareretur linea aliqua cum superficie quapiam, uel numerus cum linea, non diceretur ea comparatio proportio, quod neque linea, & superficies, neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamuis amba sint eiusdem generis, non diceretur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QUAMVIS autem in solidis quantitatibus proprie reperiatur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatibus, cuiusmodi sunt tempora, soni, uoces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Ut cum dicimus, tempus tempore esse maius, uel minus, uel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora considerantur, ueluti quantitates.

CÆTERVM in omni proportionem ea quantitas, quæ ad
T aliam

aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione linea 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si e contrario consideretur proportio linea 3. palmorum, ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens vero linea 6. palmorum, & sic in ceteris.

DE PROPORTIONIBVS.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, uel ob hanc praecipue utilitatem, ut ea, quae in his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quae in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio linea 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hec enim proportio in base numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis uero proportio ea est, quae in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati, ad latus eiusdem quadrati. Hec enim proportio in numeris reperiri non potest, ceu in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quaeuis duae quantitates commensurabiles: Irrationalem uero eam, quam habent duae quaelibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates commensurabiles, quae habent unam communem

munem partem aliquotam, seu quas eadem mensura metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est utriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineâ 20. palmorum; Ita quoque eadem lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicuntur, quia saltem unitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri: Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. quamvis enim qualibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, utpote partem dimidiam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota unius, quantumvis minima, alteram metiri potest, ut demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. ultima. Quo in lib. multæ alia lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter dictas duas. Itaque in numeris invenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo dividi solet Proportio in proportionem equalitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, ut inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, ut inter 20. & 10. inter 81. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duo-

bus eam connexionem, ut omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, non recte a quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multe proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis; cum multe proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori vero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; ut a nobis factum est.

R V R s v s proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius sub diuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales siue magnæ, siue parvæ fuerint, eandem semper habeat proportionem æqualitatis) subdividitur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quædo maior quantitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c.

Pro-

Proportio minoris inaequalitatis est, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item linea 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem haec diuisio inanis & superuacanea, ut multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. qua 2. ad 4. Sed multum inter se differunt, cum ualde diuersus sit usus utriusque, ut perspicuum est ijs, qui uel mediocriter in rebus geometricis, & regula Algebrae sunt uersati. Haec igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complebitur omnes proportioniones, nulla seclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inaequalitatis, quam minoris inaequalitatis, quatenus solas proportioniones rationales comprehendunt, subdividemus; quonia de quantitatibus, quae habent proportioniones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inaequalitatis, distribuitur in quinque genera, ut in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio minoris inaequalitatis in eadem genera secatur, si modo singulis uocabulis preponatur praepositio (sub) ut in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora uero duo ex illis tribus composita, ut manifestum est. Cur uero tantum sint quinque haec genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inaequalitatis, prope finem omnium proportionum ostendemus.

PROPORTIO Multiplex, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, decies, centies, &c. continet. qualis est proportio 20. ad 4. Nam 20. comprehendunt 4. quinquies. Item linea 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c. Hæc autem sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla; si ter, tripla; si decies, decupla; si centies, centupla, &c. Itaque proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemque modo definienda erunt relique proportionες multiplices: ut proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicitur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

PROPORTIO superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper unam eius partem aliquotam, scilicet dimidiam, tertiam, quartam, &c. qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & adhuc unitatem, quæ dimidia pars est 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & adhuc lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c. Hæc quoque proportio in infinita genera dividitur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est medietas minoris quantitatis, constituitur proportio
sequi-

sesquialtera ; Si est tertia pars, exurgit proportio
sesquitercia ; si quarta, sesquiquarta ; si millesima,
sesquimillesima, &c. Unde ex ipso met vocabulo faci-
les erunt definitiones omnium proportionum super-
particularium. Erit enim proportio sesquioctava, quā
do maior quantitas minorem semel includit, & insu-
per octavam partem minoris : qualis est inter 9. &
8. & inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iu-
dicium.

PROPORTIO superpartiens, est habitudo
maioris quantizatis ad minorem, quando maior mi-
norem semel duntaxat continet, & insuper aliquot
eius partes aliquotas, non efficientes unam aliquotā.
qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continet semel
5. & insuper tres unitates, quarum qualibet est pars
aliquota, utpote quinta, huius numeri 5. Constat
autem ternarium ex illis compositum, non esse partem
unam aliquotam numeri 5. Dixi partes illas aliquo-
tas non debere constituere unam partem aliquotam,
ob multas proportionēs, quæ primo aspectu videntur
esse superpartientes, cum tamen sint superparticu-
lares ; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quam-
vis enim 10. contineant semel 8. & duas unitates,
quarum qualibet est octava pars numeri 8. tamen
quia binarius ex illis unitatibus compositus, est
quarta pars 8. non dicenda est ea proportio su-
perpartiens, sed superparticularis, nempe sesqui-
quarta. Itaque, ut duæ quantitates dicantur habere
proportionem superpartientem, necesse est, ut maior
quantitas minorem contineat semel, & plures eius
partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituent

nam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt. Diuiditur primo proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes unam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c. Diuiditur deinde quodlibet horum generum, habita ratione partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inaequales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duae illae partes fuerint quintae, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inaequales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur superdecupartiens undecimas; Quod si decem illae partes sint decimae tertiae, uocabitur proportio superdecupartiens decimae tertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus. Ne autem proportionum superpartientes uel inter se confundantur, uel cum proportionibus superparticularibus, diligenter consideranda sunt ea, quae sequuntur. Primum, in pronuntiatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter demonstrat, quotnam partes aliquotae minoris quantitatis in maiore supersint; alter uero, quotae partes, aut quatae sint, indicat. Ut in proportionem supertripartiente octauas, denotan-

denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas; posterior autem ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octavas minoris. Deinde in qualibet proportionem superpartiente duos prædictos numeros, qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, eiusmodi esse debere, ut non habeant ullam partem aliquotam communem, præter unitatem, quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota. Tales sunt duo prædicti numeri 3. & 8. Nam sola unitas, ut constat, est utriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octavas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter unitatem aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, se ipsum, & his repetitus, senarium metitur. Quocirca talis proportio vinctupanda erit sesquialtera, cum maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadrupartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. eam partem aliquotam, præter unitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit unicuique, denominare convenienter omnes proportionem superpartientes. Perspicuum est ex dictis relinquitur, cur proportionem superpartientem divisimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias,

tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prateruenientes superbipartientem quartas, sextas, octavas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omiſſæ, ſint ſuperparticulares, confunderentur proportionēs ſuperpartientes cum proportionibus ſuperparticularibus, ſi & ipſæ in numerum proportionum superbipartientium referretur. Quo modo autem dignoſcendum ſit, an duo quilibet numeri propoſiti habeant, præter unitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica edocetur, demonſtrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

PROPORTIO multiplex ſuperparticularis, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, uel quater, &c. continet, & præterea unam eius partem aliquotam; cuiuſmodi eſt proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, utpote cum dupla) & inſuper comprehendunt unitatem, quæ eſt quarta pars minoris; qua in re proportioni ſuperparticulari, nimirum ſeſqui quartæ eadem proportio propoſita ſimilis eſt. Diuiditur autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita. Veluti multiplex, in duplam ſuperparticularem; triplam ſuperparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & inſuper unam partem minoris quantitatis aliquotam. Vnumquodque ruruſus horum generum in infinita alia ſubdiuiditur, habita ratione proportionis ſuperparticularis. Nam proportio tripla ſuperparticularis, continet ſub ſe triplam ſeſquialteram, (ut quando maior quantitas minorem

rem

rem ter continet, & praterea dimidiam eius partem; triplam sesquiterciam; triplam se/qui/quantam, & ita infinitas alias.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habundo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complicitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes unam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes unam, ob causam dictam in proportionem superpartiente. Nam, si partes illae aliquotae unam efficere, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis: Ut proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas; quia duae sextae conficiunt unam tertiam partem: Quare uocabitur proportio tripla sesquitercia. Distribuitur autem hac proportio primo, habita ratione proportionis multiplicis. Ut multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c. Deinde quolibet harum, habita ratione numeri, partium, sub se continet genera infinita. Ut sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c. Postremo quavis istarum, habita ratione partium aliquotarum, in genera adhuc infinita secatur. Ut tripla supertripartiens, diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuius ex dictis depromere, &c.

OMNIA uero, quae dicta haecenus sunt de quinque his generibus proportionum rationalium maioris in-

inequalitatis, intelligenda sunt quoq; de quinque generibus correspondentibus minoris inequalitatis, praemissa tamen semper praepositione (sub,) ut dictum est. Nisi in exemplis adductis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportionales minoris inequalitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias: Ita proportio 3. ad 11. est sub tripla superbipartiens tertias: Atque ita de ceteris.

C A E T E R U M ex dictis perspicue colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inequalitatis, quam quinque iam exposita. Cum enim, ut Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quaecunque, inter quas, ut diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, ut omnis proportio rationalis quarumcumque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; quare ratione constituitur proportio multiplex: aut semel tantummodo, ac praeterea unam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis; aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque uero alio modo minor quantitas a maiore contineri potest. Eadem

ratione

ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inaequalitatis.

QVONIAM vero non exiguus est usus denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, a quibusnam numeris singulae proportionales denominantur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, & aperte habitudinem unius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplae, est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octupla, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquinta, est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquinta, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, ut arbitror, quod Euclides in lib. 6. & ceteri Mathematici, appellent denominatorem cuiusvis proportionis, quantitatem illius, quia denominator, ut diximus, ostendit, quanta sit una quantitas ad alteram, cum qua confertur, ut ex propositis exemplis constat.

Ex dictis autem facile colligi potest denominator cuiusque proportionis. Denominator .n. proportionis multiplicis, quaecunque ea sit, est numerus integer; quia maior quantitas aliquoties minorem debet continere. Vt proportionis dupla denominator, est 2. Noncupla 9. Centupla 100. millecupla 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentiū, sunt partes aliquotae a dictis denominatoribus denominatae: Vt denominator proportionis subdu-

subdupla, est $\frac{1}{2}$; subnoncupla, $\frac{1}{9}$; subcentupla, $\frac{1}{100}$; submillecupla, $\frac{1}{1000}$; Denominator autē proportionis subquintupla est $\frac{1}{5}$. Eodē modo & denominatores aliarū proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicius, est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est unitas; denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, ut ex dictis exemplis patet.

DENOMINATOR cuiusvis proportionis superparticularis, est unitas cum parte una aliquota: quoniam maior quantitas debet minorem semel tantum, & unam eius partem aliquotam comprehendere. Ut proportionis sesquialtera denominator, est $1\frac{1}{2}$; sesquioctava, $1\frac{1}{8}$; sesquimillesima, $1\frac{1}{1000}$, &c. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores una tantum unitate minores sunt earundem denominatoribus. Ut denominator proportionis subsequaltera, est $\frac{2}{3}$; subsequioctava, $\frac{8}{9}$; subsequimillesima, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquota, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus unitate maior: Ut denominator proportionis subsequidecima est $\frac{10}{11}$, &c.

DENOMINATOR cuiusvis proportionis superpartientis, est unitas cum pluribus partibus aliquotis non efficientibus unam: quia maior quantitas debet semel tantum minorem continere, & plures eius partes. Ut denominator proportionis supertripartientis

tis septimas, est $1\frac{2}{3}$; supertripartientis uigesimas, $1\frac{3}{20}$; &c. Denominatores autem proportionum sub-
superpartientium, sunt fractiones, quarum numera-
tores tot unitatibus minores sunt, quam earundem
fractionum denominatores, quos partibus aliquotis
maior quantitas minorem superat. Ut denominator
proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$;
subsupertripartientis uigesimas, $\frac{20}{23}$; &c. Inueni-
tur autem denominator cuiuslibet proportionis sub
superpartientis, si pro numeratore fractionis suma-
tur denominator partium aliquotarum, cui si addatur
numerus partium, habebitur eiusdem fractionis deno-
minator. Ut denominator proportionis subsuperqua-
dripartientis undecimas, est $\frac{11}{12}$; Denominator autem
proportionis subsupertripartientis quintas est hac
fractio $\frac{5}{8}$. Eademque ratione reperimus & aliarum
proportionum subsuperpartientium denominatores.

D E N O M I N A T O R cuiusvis proportionis
multiplicis superparticularis, est numerus cum una
parte aliquota: quia maior quantitas continere de-
bet minorem aliquoties, & insuper unam eius partem
aliquotam. Ut denominator proportionis tripla ses-
quiseptima, est $3\frac{1}{7}$. Quintupla sesquiquarta, $5\frac{1}{4}$, &c.
Denominatores autem proportionum submultiplicium
superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratores
numeri sunt. Ut denominator proportionis subtripla
sesquiseptima, est $\frac{7}{22}$; subquintupla sesquiquarta, $\frac{4}{29}$; etc.
Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportio-
nis submultiplicis superparticularis, si pro numerato-
re fractionis sumatur denominator partis aliquotae,
qui si multiplicetur per denominatorem proportionis
multipli-

multiplicis, addaturque unitas numero producto, habebitur denominator eiusdem fractionis. Vt denominator proportionis subquadruple sesquiseptimae, est $\frac{6}{7}$, &c.

DENOMINATOR cuiusvis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus cum pluribus partibus aliquotis, non constituentibus unam: quoniam maior quantitas minorem debet aliquoties comprehendere, & eius plures partes aliquotas non facientes unam. Vt denominator proportionis triplae superquincupartientis octauas, est $3\frac{1}{8}$; quadruple superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$, &c. Denominatores uero proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt. Vt denominator proportionis subtriplo superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{29}$; subquadruple superbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplo superoctupartientis decima tertias, est $\frac{13}{24}$, &c.

DENOMINATOR denique proportionis aequalitatis, perpetuo est unitas: quia una quantitas debet alteram
sequei duntaxat continere.

III.

PROPORTIO vero est rationum
similitudo.

Quon hoc loco interpretes proportionem appellat, illud
Græcis ἀναλογία plerisque autem latinis proportionalitas
dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quanti-
tatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel
plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncu-
pari: Ut si proportio quantitatis A, ad quā-
titatem B, similis fuerit proportioni quanti-
tatis C, ad quantitatem D, dicitur habitu-
do inter has proportiones, proportionalitas.
Eodem modo, si similis fuerit proportio E,
ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hac
similitudo proportionalitas. Multa autem



habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim
comparationem duarum quantitatum, proportionem appella-
bimus; habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem)
a scriptoribus, praesertim Boetio, & Iordano, describuntur;
inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres,
Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica,
seu harmonica: Verum Euclides de sola Geometrica agit in hoc
libro; quae quidem duplex est, continua altera, in qua singula
quantitates intermediae bis sumuntur, ita ut nulla fiat pro-
portionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit
& antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantita-
tis subsequens, consequens vero quantitatis praecedens: Ut
si dicatur, quae est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabi-
tur hac proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu
non continua, in qua singula quantitates intermediae semel tan-
tum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nulla;
quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens
santum, vel consequens tantum. Ut si dicatur, quae est propor-
tio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportio-
nalitas hac, discreta, siue non
continua.

V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicata se se mutuo superare.

QUONIAM Euclides in tertia definitione habitudinē duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat proportionem, seu rationem; explicat nunc in hac 5. definitione, quid nam requirant duæ quantitates eiusdem generis, ut proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitates, proportionē habent inter se, ut max dicemus. Aut igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum viriuis multiplicata ita augetur, ut alteram tandem superet; adeo ut si alterutra quantumvis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Ut diameter, & latus eiusdem quadrati, dicuntur habere proportionem 3 (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter consituant triangulum Isosceles, erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habens, (quamvis nondum sis nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, ut ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curvilinea cum rectilincis proportionem habebunt, quia & æqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est consensu duobus arcibus circularum, ad modum Luna nove, quædo falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadravit; hoc est, ille cuidam lunule, hic vero parabole quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, ut & quadratum detur maius ea lunula, ac parabolæ; Atque e contrario lunula & parabola maior eo qua

20. primi.

dr. 21.

drato. Hoc idem demonstratur a Proclo in angulis rectilineis, ac curvilineis. Ostendit enim, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curvilineum aequalem. Sit enim angulus rectus ABC , contentus rectis aequalibus AB , BC , circa quas semicirculi describantur ADB , BEC .



Quoniam igitur anguli semicirculorum ABD , CBE , sunt aequales; addito communi angulo mixto ABE , fiet angulus totius curvilineus DBE , toti angulo recto ABC , aequalis. Similiter ostendes, angulum curvilineum IGK , aequalem esse obtuso $F GH$; nec non curvilineum OMP , acuto LMN , idemmodo hic ab angulis semicirculorum LMO , NMP , auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea LM , & curva MP ; Ex quibus constat, alterutram angularum multiplicatum, posse alteram excedere; quare proportionem inter se habebunt. At uero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomocunque multiplicata, infinitam nequis superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, ullam habebit proportionem. Denique non censetur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumvis multiplicatus, minor adhuc semper existit quoniam angulo rectilineo, etiam minimo: seu propos. 16. lib. 3. demonstravimus. Itaque ut apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, voluit hac definitione, eas intelligi, quae hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata, alteram possit superare, aliam non. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum; iubet toties multiplicare unam propositarum magnitudinum, quae proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus.

PERSPICUUM est ex his, quam inepte, & quam falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. At enim Euclides non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duae quaecunque

propositæ quantitates habeant. Itaque ut inquit, uult Euclides, si magnitudo *A*, ad magnitudinem *B*, referatur, & amba multiplicentur aqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcun que æque multiplicia, nempe *C*, tam multiplex ipsius *A*, quam



multiplex *D*, ipsius *B*, habebunt magnitudines *A*, & *B*, eam inter se proportionem, quam earum æquemultiplicia *C*, & *D*. Non aduertit autem, hoc quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimum quintum huius lib. ubi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportionem esse, hoc est, *A*, & *B*, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æquemultiplicia *C*, & *D*. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter *C*, & *D*, quàm illa inter *A*, & *B*; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter *A*, & *B*; Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, ut liquido constat ex verbis Euclidis.

V I.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque uel una deficiunt, uel una æqualia sunt, uel una excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc in loco Euclides, quasnam condiciones requirant apud Geometras, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut rectius exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportionem magnitudinum, tam rationales,

quam irrationales. Sins igitur quatuor magnitudines *A*, prima; *B*, secunda; *C*, tertia; & *D*, quarta, sumanturque prima, & tertiae aequemultiplicia quaecunque; *E*, quidem ipsius *A*; & *F*, ipsius *C*: Item sumantur secunda, & quarta alia quaecunque aequemultiplicia; *G*, quidem ipsius *B*; & *H*, ipsius *D*, siue hac duo posteriora sint ita multiplicia secunda, & quarta, sicut priora duo multiplicia sunt prima, & tertia, siue non. Quod si iam inter se conferantur sumpta aequemultiplicia ea, quae inter se respondent, ut multiplex prima, & multiplex secunda inter se, hoc est *F*, & *G*; Item multiplex tertia & multiplex quarta inter se, hoc est *F*, & *H*; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se se habere, ut si *E*, multiplex prima magnitudinis *A*, minus fuerit, quam *G* multiplex secunda magnitudinis *B*; etiam *F*, multiplex tertia magnitudinis *C*, minus sit quam *H*, multiplex quarta magnitudinis *D*: Aut si *E*, aequale fuerit ipsi *G*; etiam *F*, aequale sit ipsi *H*; Aut denique si *E*, maior fuerit quam *G*; etiam *F*, maior sit quam *H*; (quod est utrumque ab utroque vel vna deficere, vel una aequalia esse, vel una excedere) ita ut in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, ut nunquam *E*, minus sit quam *G*, quin & *F*, minus sit quam *H*; & ut nunquam *E*, aequale sit ipsi *G*, quin & *F*, ipsi *H*; sit aequale; Denique ut nunquam *E*, maior sit quam *G*, quin & *F*, maior sit, quam *H*. Si inquam deprehensum fuerit, aequemultiplicia quoniam accepta, perpetuo se ita habere; ut dictum est, dicatur eadem esse proportio prima magnitudinis *A*, ad secundam magnitudinem *B*, quae est proportio tertia magnitudinis *C*, ad quartam magnitudinem *D*. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex *E*, deficere a multiplici *G*; non autem multiplex *F*, deficere a multiplici *H*; Aut *E*, aequale esse ipsi *G*, at *F*, non aequale ipsi *H*; Aut denique *E*, excedere ipsum *G*, at *F*, non excedere ipsum *H*, quamuis in infinitis alijs multiplicibus condicio praedicta reperitur, nulla ratione dicentur quantitates propositae eandem habere proportionem, sed diuersas, cum in defin. 8. fiet perspicuum.



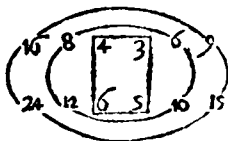
ITAQUE ut demonstratione aliqua concludantur qua-

tionem hanc exponant, Dicant enim Euclidem uelle, cum de-
mum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum
prima & tertia aequae multiplicia, a secunda & quarta aequae
multiplicibus, utrumque ab utroque, vel una deficiunt pro-
portionaliter, hoc est, in eadem proportionem; vel una aequa-
lia sunt, vel una excedens proportionaliter, si ea sumantur, qua
inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earum
aequae multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandem proportio-
nem habet multiplex prima ad multiplex secunda, quam mul-
tiplex tertia ad multiplex quarta. Sed quis non uidet, si ita
intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod
sane absurdum est. Praeterea si Euclides uult, eas magnitudi-
nes in eadem esse proportionem, quarum aequae multiplicia (si
sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est)
in eadem proportionem existunt; cur obsecro in 4. Theoremate
huius libri demonstras, si fuerint quatuor magnitudines in ea-
dem proportionem, earum aequae multiplicia eandem quoque ha-
bere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc de-
finitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstra-
ri, quod ridiculum est; ueluti eo in loco demonstrabimus. Ac-
cedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theo-
remata quinti huius lib. non posse demonstrari, ut proprijs in
locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, ut exposui-
mus, ita ut, propositis quatuor magnitudinibus in eadem pro-
portionem, si multiplex prima deficiat a multiplici secunda, uel
aequale sit, uel excedat; etiam multiplex tertia deficiat a mul-
tiplici quarta, uel aequale sit, uel excedat, quicumque sit ille
defectus, excessusue. Nam in 4. postea Theoremate demonstra-
bitur, dictum defectum, excessumue esse proportionalem.

Porro Campanus conatur ostendere, definitionem
hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam
si de quocumque intelligeretur, essent quatuor hi numeri 4. 3.

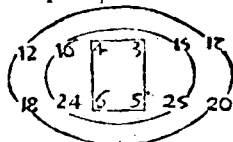
6. 5. in eadem proportionem. Si enim
primi & tertij, uelut 4. & 6. su-
mantur aequae multiplices nume-
ri, ut dupli, 8. & 12. Item secun-
di & quarti, nempe 3. & 5. aequae
multiplices, ut dupli quoque, 6.

& 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secun-
di, quam



V 4 di, quam

di, quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemq; cernitur si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, ut aequae multiplicia accepta una excedant se se quomodo documque, & non requiritur, ut proportionaliter se mutuo saperent, erit eadem proportio 4. ad 3, quae est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquicertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus aequae multiplicium, proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quae est 6. ad 5. quod eorum aequae multiplices non se se excedant proportionaliter, ut consistat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamvis enim numeri aequae multiplices adducti se se una excedant; tamen quamplurimi alij repertiuntur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel aequalis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim primi & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. At secundi & quarti, quincuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplice



sem quarti, sed deficiet. Quod si primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secundi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi aequalis 12. multiplici secundi; At vero 18. multiplex tertij, aequalis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur qualibet aequae multiplicia duorum numerorum sic se habere, ut si multiplex primi excedit multiplex secundi, multiplex tertij excedat quoque multiplex quartus; quamvis id in non nullis aequae multiplicibus ita esse contingat non dicitur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, ut adhuc clarius constabit ex 8. definitione.

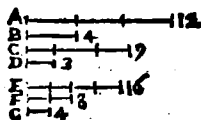
CAETERVM definitio ista completitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, si modo secundas ponatur, ut quatuor habeantur. Exempli causa; Eandem dicitur proportio 9. ad 6. quae 6. ad 4. quoniam aequae multiplicia quaecumque sumpta ad 9. & 6. vel una deficiunt ab aequae multi-

multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel aequalia sunt, vel una excedunt, & c.

VII.

E A N D E M autem habentes rationem magnitudines, Proportionales uocentur.

U T si magnitudinum A, B, C, D , eadem sit proportio A , ad B , quæ C , ad D ; dicentur dictæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E , ad F , quæ F , ad G ; dicentur magnitudines E, F, G , proportionales. Sunt autem quadam magnitudines proportionales cōtinuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G ; Quædam vero proportionales sunt non continue, sed discrete, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D . In his enim interruptio fit proportionum; in illis uero nequaquam, ut dictum est in 4. definitione.



VIII.

CVM uero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excefferit multiplicem secundæ; At multiplex tertix non excefferit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

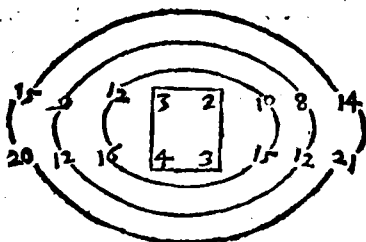
DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debant quatuor magnitudines, ut maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens.

dicens. Si sumpta sint aequae multiplicia prima & tertia; Item alia aequae multiplicia secunda & quarta; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex prima maius esse multiplici secunda, multiplex autem tertia non esse maius



multiplici quarta, sed vel minus, vel aequale; dicitur maior esse proportio prima magnitudinis ad secundam, quam tertia ad quartam: ut perspicuum est in appposito exemplo, in quo prima magnitudinis A, & tertia C, sumpta sunt triplicia E, & F, secunda vero B, & quarta D, quadruplicia G, & H; Et quoniam E, multiplex prima maius est quam G, multiplex secunda; At F, multiplex tertia maius non est quam H, multiplex quarta, sed minus; idcirco maior esse dicitur proportio A, prima magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertia, ad D, quartam. Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quam tertia ad quartam, aequae multiplicia secundum quamvis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem prima excedat multiplex secunda, at multiplex tertia non excedat multiplex quarta; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque fieri, ut tam multiplex prima maius sit multiplici secunda, quam multiplex tertia multiplici quarta: Item ut & multiplex prima minus sit multiplici secunda, & multiplex tertia multiplici quarta: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex prima superat quidem multiplex secunda, at multiplex tertia, vel minus est, vel aequale multiplici quarta: propterea maiorem dicitur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, ut perspicuum est in sequenti exemplo. Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut aequae multiplicia earum, iuxta quasvis multiplicationes accepta, vel una deficiant, vel una aequalia sint, vel una excedant, seu in 6, defin. suis expositum: Ut autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex secunda, multiplex vero tertia non superet multiplex quarta; quemvis iuxta innumeras multiplicationes.

tionem, æque multiplicia prima, ac tertia excedant æque multiplicia secunda, & quarta. Quod si aliquando e contrario multiplex prima deficiat a multiplici secunda, non autem multiplex tertia a multiplici quarta; dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamvis secundum plurimas multiplicationes, æque multiplicia prima & tertia deficiant ab æque multiplicibus secunda, & quarta. Ut in eisdem numeris, minor dicitur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.



IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

QUONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quæ interpres, ut dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedens, & consequens, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, ut minimum, duo antecedentia, ac duo consequentia. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines. At vero si fuerit continua, erunt cum minimis tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens unius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscumque, solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X.

C V M autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quā habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

S I N T magnitudines A, B, C, D, E , continue proportionales, ita ut ea sit proportio A , ad B , quae B , ad C ; & C , ad D ; & D , ad E . Proportio igitur A , magnitudinis prima ad C , magnitudinem tertiam, dicitur

31

54

36

24

ABCDE

duplicata eius proportionis, quam habet A , magnitudo prima ad B , magnitudinem secundam: quoniam inter A , & C , duae proportionales reponuntur, quae aequales sunt proportioni A , ad B ; ut proportio A , ad B ; & B , ad C . At proportio A , magnitudinis prime ad D , magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet

A , magnitudo prima ad B , magnitudinem secundam: quia inter A , & D , reperiuntur tres proportionales, quae aequales sunt proportioni A , ad B , nimirum proportio A , ad B ; B , ad C ; & C , ad D . Sic quoque proportio A , ad E , dicitur quadruplicata proportionis A , ad B ; propterea quod quatuor proportionales intericiuntur inter A , & E , quae aequales sunt proportioni A , ad B , & c.

Q U O D si e contrario ea sit proportio E , ad D , quae D , ad C ; & C , ad B ; & B , ad A ; dicitur proportio E , ad C , duplicata proportionis E , ad D : At vero proportio E , ad B , dicitur triplicata proportionis E , ad D ; sic quoque proportio E , ad A , dicitur quadruplicata proportionis E , ad D , & c.

I N T E R -

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitio-
ne; si proponantur aliquot quantitates continue propor-
tionales, proportionem primæ quantitatæ ad tertiam, esse duplam
proportionis primæ quantitatæ ad secundam, eo quod Euclides
illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo vo-
lunt, proportionem primæ quantitatæ ad quartam, esse triplam
proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c.
Quod tamen nulla est ratione concedendum. Nec enim Encli-
des hoc significare voluit, sed decem tantummodo, proportionē
primæ quantitatæ ad tertiam, appellari duplicatam eius pro-
portionis, quam habet prima quantitas ad secundam; prop-
terea quod inter primam quantitatē, ac tertiam reperiantur
duæ proportionēs æquales ei proportioni, quā habet prima quan-
titas ad secundam, & sic de cæteris, ut diximus. Non autem,
illam duplam esse huius, intellexit, ne Theorema proponeres,
quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirma-
bit, in his numeris continuis proportionalibus 25. 5. 1. propor-
tionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius
sit quinquupla? At vero, illam dici huius duplicatam, nemo in-
ficiabitur, eo quod his sit posita, & continua. proportio 25. ad
5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis
5. ad 1. cum illa minor sit, hæc autem maior? Dixerit tamen
illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius
quinta pars. Quare & si proportio 25. ad 1. dicitur duplica-
ta proportionis quinquuple, tamen decupla proportio est eiusdē
dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est pro-
portionis quadrupla, cum tamen quadrupla duplicata, sit sede-
cupla, ut hic patet 16. 4. 1.

ITENQUE hoc in loco Euclides explicat tantum, quid
nam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplica-
tæ, &c. ut demonstrationes sequentium librorū percipiantur,
rebusq; possint materialibus accommodari. Non autem deser-
minat, quæ nam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel qua-
drupla, &c. Quare cum ex propositione 20. lib. 6. constet, pro-
portionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportio-
nis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, col-
legendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus ter-
minis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est
primi termini ad tertium; ita ut si prioris quadrati latus fue-
rit

vit trium palmorum, posterioris autem unius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita ut illud novies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. ut in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportionem lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita ut illud sit huius novæ pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. ut in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. ultima, demonstratur, sphaeras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphaeram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphaeram, cuius diameter est unius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur tripla proportionis, cum hic perspicitur 27. 9. 3. 1. Q. E.

CÆTERVM proposita quacumque proportionem rationis, seu denominator in se ipsum multiplicetur, exurgit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur proposita proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadrupla, in se, producantur 16, ideo proportio sedecupla, dicitur duplicata quadrupla proportionis, ut hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E converso, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadrupla, in se, producantur $\frac{1}{16}$, dicitur proportio sub-sedecupla, duplicata proportionis subquadrupla. Quod si denominator rursus in dictum productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicata; ut in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producantur 64. denominator proportionis, quæ quadrupla dicitur triplicata, ut hic videtur, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, invenitur denominator proportionis quadruplicata, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicata denominator producitur ex denominatore proposita proportionis bisposito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatam proportionis triplæ, produciatur ex 3. denominatore triplæ proportionis,

portionis bis posito, in hanc modum 3. 3. ac sic multiplicato : Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplae proportionis, quae duplicata dicitur tripla, ut hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatae gignitur ex proposita proportionis denominatore ter posito, et sic multiplicato. Ut in dato exemplo, denominator triplicatae proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic. 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater posito, Quinquuplicata ex eodem quinquies posito, ac ita multiplicato, &c. Quo circa proportio duarum quantitatuum, quibus nullum interponitur medium, sapit naturam quodam modo lineae, cum ex nulla alia proportione producat : Proportio vero, cuius quantitates intercipiunt unicum medium in continua proportionalitate, habet conditionem superficiei quadratae, quoniam gignitur ex duabus proportionibus aequalibus, quemadmodum & quadratum ex duabus lineis aequalibus conficitur. Denique proportio, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interjiciuntur, obinet naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus aequalibus proportionibus, quemadmodum etiam cubus ex tribus lineis aequalibus confurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebra regulam exposuerunt, &c.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes uero consequentibus.

DEFINIVIT. supra proportionalitatem, proportionem esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quavis proportionem dici similes; Verum etiam, terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologas, ut dicantur antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportionem inter se, nec non consequentes inter se, ut intelligeremus

in

in quam plurimis demonstrationibus, qua nam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & qua nam consequentia, cen in 6. lib. perspicuum fiet.



Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D; propter similitudinem enim proportionum, necesse est, miramq; magnitudinem antecedentem vel aequalem esse utrique consequenti, vel eodẽ modo maiorem, aut minorem; Alias non haberet utraque antecedens ad utranque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus proportionis, utpote dimidio maiores. Aliud exemplum uides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, ubi tam E, & F, homologue sunt, quam F, & G, ut constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æque multiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secunda, & quarta magnitudinum, nempe consequentium. Ha enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, ut ex hac definitione constat, in magnitudinibus uero non proportionalibus dissimiles.

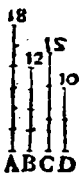
ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus uarie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; cen in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & usus eiusdem in 6. lib. consideratur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

XII.

ALTERNATA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi ex proportionibus.

portionibus, quorum frequentissimus est usus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, uel disiuncta proportionalitas: Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique uocatur proportio ex aequalitate, seu aqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, inseritur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A , ad B , quam C , ad D , & propterea concludamus, eandem esse proportionem A , ad C , quæ est B , ad D , dicemur argumentari a permutata proportionem. Græci scriptores in hac argumentatione utuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A . ad B , ita C , ad D ; Igitur permutando, seu vicissim; erit quoque A , ad C , ut B , ad D . Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propo. 16. lib. huius. Cæterum in dicto modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, ut inter binas ut ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte inseritur; Vt linea A , ad lineam B , ita numerus C , ad numerum D ; ergo permutando, ut linea A , ad numerum C , ita linea B , ad numerum D ; cum nulla sit proportio linea ad numerum, aut contra, ut perspicuum est ex defin. 5.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, uelut ad consequentem.

Vt si ex eo, quod est A , ad B , ut C , ad D , inferamus, ita esse B , ad A , ut D , ad C , hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportionem. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A , ad B , ita

B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque
 $\begin{array}{c} 12 \\ 9 \quad 6 \quad 8 \\ | \quad | \quad | \\ \hline \end{array}$
 B, ad A, ut D, ad C; Quem quidem modum argu-
 mentiandi certum esse, ostendetur propos. 4 hu-
 ius lib. Porro dua priores magnitudines possunt
 esse unius generis, & posteriores alterius. Recte
 namque licebit inferre; ut se habet linea A, ad li-
 neam B, ita se habet triangulum, seu numerus C,
 ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo
 ut linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D,
 ad triangulum, seu numerum C.

XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sum-
 ptio antecedentis cum consequente, ceu
 unius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC; que DE, ad EF; Si igitur
 ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius AC,
 nempe antecedentis cum consequente,
 $\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ \hline D \quad E \quad F \end{array}$
 ad BC, consequentem, quam habet tota
 DF, antecedens nimirum cum conse-
 quente, ad EF, consequentem; Dice-
 tur huiusmodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex
 antecedente, & consequente componatur aliud nouum antece-
 dens. Hunc autem modum dicendi apud Gracos scriptores re-
 peries in hac argumentatione; Ut AB, ad BC, ita DE, ad
 EF, componendo ergo eris & AC, ad BC, ut DF, ad EF.
 Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio ex-
 cessus, quo consequentem superat antece-
 dens, ad ipsam consequentem.

¶ si dicatur, quæ proportio est totius AB , ad CB , ea est totius DE , ad FE ; Igitur erit & AC , excessus, quo antecedens consequentem superat, ad CB , consequentem, ut DF , excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad FE , consequentem. In divisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo dividendo, &c. Hac porro illatio ostenditur propos. 17. huius lib.

$$\frac{A \quad 12 \quad C4B}{D6 \quad F2E}$$

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

¶ Quod si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB , ad CB , ita tota DE , ad FE ; igitur ita etiam erit eadē AB , ad AC , excessum, quo consequentem superat antecedens, ut DE , ad DF ; Dicemur proportionem convertere. Unde fere loquuntur scriptores. Igitur per conversionē rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus propos. 19. huius lib.

$$\frac{A6 \quad C4B}{D \quad 12 \quad F8 \quad E}$$

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

S I N T plures magnitudines duabus A, B, C , & totidē
 D, E, F , sintque bina ac bina in eadem proportionē, hoc est,
 A , ad B , ut D , ad E ; & B , ad C , ut E , ad F . Si igitur infera-



tur, propterea eam esse proportionem A , ad
 C , prima ad ultimam in primis magnitudi-
nibus, quae est D , ad F , prima magnitudi-
nis ad ultimā in secundis magnitudinibus;
dicitur huiusmodi argumentandi formula
desumpta ex aequo, siue ex equalitate, in qua
scilicet extrema magnitudines, subducitis me-
dijs, colligunt habere unā, eandemque inter se
se proportionem, cum in altera definitione ex-

primitur. Quoniam vero duobus modis ex equalitate licet ar-
gumentari in proportionibus, uno quidem, sumendo binas ac
binas magnitudines in eadem proportionē, atque ordinate pro-
cedendo; altero vero, cum ordo inuertiatur; fit ut duplex sit
proportio ex equalitate, non quidem ratione proportionis extre-
morum, sed ratione proportionis magnitudinum intermedia-
rum. Id quod clarissime duae sequentes definitiones explicant.

XVIII.

ORDINATA proportio est, cum
fuerit, quemadmodum antecedens ad con-
sequentem, ita antecedens ad consequen-
tem; fuerit etiam, ut consequens ad aliud
quidpiam, ita consequens ad aliud quid-
piam.

V T quando fuerit A , ad B , ut D , ad E ; Rursus ut B ,
consequens ad aliud quidpiam, ut ad C , ita E , consequens ad
 F , aliud quidpiam; Ideoque concludatur A , ad C , ut D , ad
 F ; Di-

F; dicitur talis modus argumentandi ex equalitate, ordinata proportio, quod in utrisque magnitudinibus idem ordo in proportionibus seruetur. Hic autem modus demonstratur propos. 22. huius lib.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

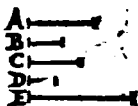
Sic, ut ex equalitate colligatur eadem proportio extremorum, ordo in proportionibus perturbetur, ita ut dicatur, quæ admodum A, ad B, Ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B. consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad F, antecedens magnitudinē; nuncupabitur huiusmodi modus argumentandi ex equalitate, Perturbata proportio, quod non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum. Consecutionem uero hanc naturaliam esse, ostendetur propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quæ ordinata, semper infert ex equalitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, cum propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.



VTVNTVR Euclidis interpretes hoc in libro, & in alijs, ubi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate

quodam, quod nō hic subijceremus, non inusile fore iudicavimus. Illud autem eiusmodi est.

Q V A M proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quævis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam.



V T, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Non enim ex hoc absurdum ali-

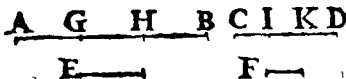
quod consequitur, quamvis ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, quam sane esse posse, dubitandū non est.

I.

THEOR. I. PROPOS. I.

SI sint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quā multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SI sint quotcunque magnitudines A B, C D, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex A B, ipsius E, vel C D, ipsius F. Cum enim A B, C D, sint æque multiplices ipsarum E, & F; si A B, dividatur in magnitudines A G, G H, H B, ipsæ E, æquales, & C D,



quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipsi F, æquales; erūt magni-

magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, erunt A G, C I, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt G H, & I K, simul, æqua es ipsis E, & F, simul; Nec non H B, & K D, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in A B, uel F, in C D, continetur, tones & E, F, simul, in A B, C D, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est A B, ipsius E, tam sunt multiplices A B, C D, simul, ipsarum E, & F, simul. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

2. *prop.*

S C H O L I O N.

Hoc idem demonstrabitur vniuersè in omni genere proportionis, *propos. 12.*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cū quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

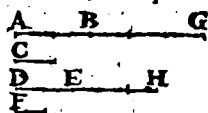
Si ita magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D B, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cū B G, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quam multiplex est D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartæ. Cum enim A B, D E, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æqua



x 4 les,

2. *prop.*

les, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erūt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi

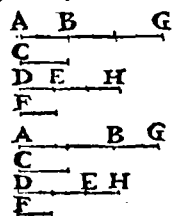


F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H; erunt totę multitudines A G, D H, æquales. Quare toties cōprehēditur C,

in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quarta: Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quarta. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint secundæ, & quarta; At quinta & sexta, æquales secun-



da, & quarta: Erit eadem ratione, tota A G, (prima, & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quarta. Semper enim A G, multitudo magnitudinū æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H; multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, cen perspicuum est in proposito schemate. Si vero tam prima

& tertia, quam quinta, & sexta æquales ponantur secundæ, & quarta, luce clarius existit, primam & quintam simul; atque tertiam & sextam simul, æquemultiplices esse; nimirum duplices, secundæ & quarta magnitudinum.

Hoc quoque ab Enclide concludetur in omni genere proportionis uniuerse propos. 24.

3.

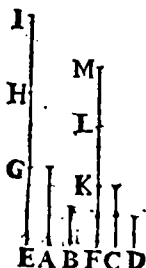
THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque

atque tertia quartæ; sumantur autem æque
multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æ-
quo, sumptarum utraque utriusque æque
multiplex, altera quidem secundæ, altera
autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B,
quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, &
F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo,
tam multiplicem esse E, ipsius B, quam est F, ipsius D; Nā
cum E, & F, sint æque multiplices ipsa-
rum A, & C; si distribuatur E, & F, in
magnitudines ipsis A, & C, æquales, ut in
E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt
tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt
in F, æquales ipsi C. Quoniam uero E G,
F K, æquales sunt ipsis A, & C; sunt au-
tem A, & C, æque multiplices ipsarum
B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, F K,
earundem B, & D, æque multiplices. Pa-
ri ratione erunt G H, K L; Itē H I, L M,
æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur E G,
prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est
multiplex F K, tertia quartæ D; Item G H, quinta tam
multiplex est eiusdem secundæ B, quam multiplex est K L,
sexta eiusdem quartæ D; Erit & E H, composita ex prima
& quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex
F L, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum
sit E H, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex
est F L, tertia quartæ D; sit autem & H I, quinta, tam mul-
tiplex secundæ B, quam est L M, sexta multiplex quartæ
D; Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multi-
plex secundæ B, quam est F M, composita ex tertia ac sex-
ta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fue-
rint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque
multiplex, atque tertia quartæ, &c.

Quod ostendendum erat.



2. quinsi.

SCHO-

S C H O L I O N.

OSTENDITUR hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ binæ sumptæ eandem habent proportionem.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si pro ut inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quavis multiplicationem. Dico quoque esse ut E, multiplicem primæ ad G, multiplicem secundæ, ita F, multiplicem tertiæ ad H, multiplicem quartæ. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B D, æque multiplices. Et quia

ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; sumptæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ; Item L, M, æque multiplices secundæ & quar-

3. quinsi.



& quartæ; sit ut si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis sit ipsi L, etiam K, ipsi M, sit æqualis: & si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus ipsarum E, & F, nec non magnitudinum G, & H. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F, Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse M, multiplici quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: Erit, ut E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

6. defin. 5.

6. defin. 5.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si quatuor quantitates fuerint proportionales, easdem, & contra, seu inuersa ratione, proportionales esse. Cum enim, propterea quod sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, ostensum sit, si I, multiplex primæ minor fuerit quam L, multiplex secundæ, uel æqualis, uel maior, etiam K, multiplicem tertiæ minorem esse, uel æqualem, uel maiorem M, multiplici quartæ; Perspicuum est, si e contrario L, maior fuerit quam I, uel æqualis, uel minor, etiam M, maiorem fore, uel æqualem, uel minorem, quam K, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si utraque I, K, minor est quam utraque L, M; erit contra utraque L, M, maior quam I, K, &c. Quare erit ut B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam.

6. defin. 5.

SCHOLIUM.

ORONTIUS quantum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, insert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est missofa, tum quia secundum hunc sensum demonstra-

ter conuerſum 6.



definitionis, per conuerſum eiufdem, atque idcirco idem per idem, quod eſt abſurdum; tum etiam, quia eodem modo ſtatim a principio licuiſſet illi inferre, ſic eſſe, per conuerſum 6. definitionis E, ad G, ut F, ad H. ſine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim eſt maior ratio in illis, quam in hijs. Reijcienda eſt ergo huiſcemodi demonſtratio, una cum expoſitione 6. definitionis, ut ſupra diximus. At iuxta noſtram interpretationem eiufdem definitionis conſtat ſolum, ſi I, minor eſt, quam L, uel æqualis, uel maior, etiam K, minorem eſſe, uel æqualem, uel maiorem, quam M; quem admodum & idem conſtat in æque multipli-

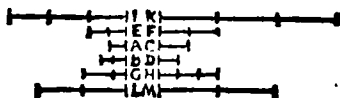
cibus E, F, G, H, ſi ſumantur, pro ut inter ſe reſpondent. Unde ex 6. defin. recte colligitur, ita eſſe E, primam ad G, ſecundam, ut eſt F, tertia ad H, quartam.

C A B T E R V M non uidetur hoc loco diſſimulandum Theorema quoddam antiquis mathematicis ualde familiare, quamuis a nemine, quod ſciam, ſit demonſtratum. Videlicet.

Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad ſecundam, & quartam magnitudines, eandem habebunt rationē: Necnon æque multiplices ſecundæ & quartæ ad primam & tertiā magnitudines. Et contra eandem rationē habebunt ſecunda & quarta, ad æque multiplices primæ & tertiæ; Necnon prima & tertia, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ.

Si T A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam, ſumanturque F, & F, æque multiplices ipſarum A, & C; Item G, & H, æque multiplices ipſarum B, & D. Dico ita eſſe F, ad B, ut F, ad D; Item G, ad A, ut H, ad C; Et e conuerſo,

verso, ita esse B, ad E, ut D, ad F; Item A, ad G, ut C, ad H. Sumantur enim rursus ipsarum E, F, aequae multiplices I, K; Item ipsarum G, H, aequae multiplices L, M. Erunt igitur ex aequo, ut ante probatum est,



I, K, aequae multiplices ipsarum A, C; Item L, M, ipsarum B, D, aequae multiplices. Quocirca si I, multiplex prima A, deficit a G, multiplici secunda B, etiam K, multiplex tertia C, deficit ab H, multiplici quarta, &c. Igitur erit ut E, prima ad B, secundam, ita F, tertia ad D, quartam. Eodem modo offenderetur, ut est G, ad A, ita esse H, ad C; Atque idcirco erit conuertendo, ut B, ad E, ita D, ad F; Item ut A, ad G, ita C, ad H,

3. quinti.

6. defin. 5.

6. defin. 5.

Ex quo constas modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometrae, maxime Apollonius Pergaeus, Archimedes, Theon, &c. Videlicet; Vt est A', ad B, ita est C, ad D; ergo ut duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius A, utpote E, ad B; ita quoque erit duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius C, quale est F, ad D. Item ut est A, ad B, ita est C, ad D; igitur ut A, ad duplum vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nempe ad G; ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, nimirum ad H.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI magnitudo magnitudinis aequae fuerit multiplex, atque ablata ablata: Etiam reliqua reliquae ita multiplex erit, ut tota totius.

ITA multiplex sit tota AB, totius CD, ut est multiplex AE, ablata ablata CF: Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquae CD, ut est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis uidelicet

i. quinti.



delicet ipsius GC, ut est AE, ipsius CF. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; erit tota AB, totius GF, ita multiplex, ut AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, ut una unius. Sed tam multiplex ponitur AB, ipsius CD, quam est multiplex AE, ipsius CF; Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam ipsius CD; atque idcirco æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, ut AB, ipsius CF, hoc est, ut tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, quam est tota AB, totius CD: quod est propositum.

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, ut ablata AE, ablata CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD,



i. quinti

esse sic multiplicem, ut est tota toti. Posita enim GA, ita multiplici ipsius FD, ut est AE, ipsius CF; erit tota GE, sic multiplex totius CD, ut AE, ipsius CF. Sed ita quoque multiplex est AB, eiusdem CD, ut AE, ipsius CF, ex hypothesi: Aequæ multiplices sunt igitur GE, AB, ipsius CD, atque adeo inter se æquales. Quare dempta communi AE, æquales erunt GA, EB; Ideoque æque multiplices ipsius FD, cum GA, sit multiplex posita ipsius FD: Atqui ita est multiplex posita GA, ipsius FD, ut AB, ipsius CD; Igitur & EB, reliqua sic erit multiplex ipsius FD, reliquæ, ut AB, tota totius CD; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM

UNIVERSE id ipsum demonstrabitur propos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, &c.

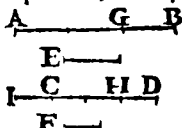
THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

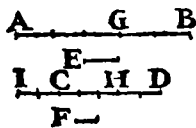
SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

SINT AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata quoque AG; erit reliqua GB, uel æqualis ipsi E, uel eius multiplex, alias inæqualis, uel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E; Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, ut HI, tertia cum sexta, quartæ F; Atque CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex quàm AB, ipsius E; Aequæ multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F; Ideoque æquales inter se. Quare dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. quod est propositum.



2. quinti.

SI T secundo GB, multiplex ipsius E; Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI, ita multiplici ipsius F, ut est multiplex GB, ipsius E, erit, ut prius AB, ita multiplex ipsius E, ut HI, ipsius F. Quare iterum æquales erunt HI, CD, atque adeo reliqua CI, HD;



2. quinti.

H D, sed C I, est ita multiplex ipsius F, ut G B, ipsius E, ex hypothesi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipsius F, quam G B, ipsius E, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiples, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM

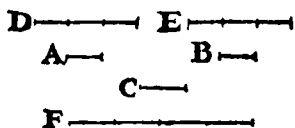
H O C quoque ostendemus univérse propos. 24. in omni genere proportionis.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

S I N T duæ A, B, æquales inter se, & tertia quævis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C; Item C, ad A, & B. Sumantur D, E, æque multiples ipsarū æqualium A, B, eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rur-



sus F, utcumque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sūt, sit ut utraque vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quā

cunque multiplicationē id fiat. Quare cum D, E, æque multiples primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplici secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinū, &c.) vel æquales, vel maiores; Erit ea proportio primæ A, ad C, secundā, quæ tertiæ B, ad C, quartam. Eodem pacto ostendemus F, vel minorem esse utraque D, E, vel utrique æqualē, vel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat a D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartæ B, vel una æqualis sit, vel maior; Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartā B; quod est propositum. Posset brevius secunda hæc pars ostendi

6. defin. 5.

6. defin. 5.

per

per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione . Cum enim ostensum tam sit esse A , ad C , ut B , ad C , erit contra C , ad A , ut C , ad B . *Aequales ergo ad eandem, eandem habent rationem; Et eandem ad aequales. quod erat demonstrandum.*

S C H O L I O N.

P E R S P I C I V M est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionem Campani ac Oronii. Neq; enim per demonstrationem constat, utranque multiplicem D , & E , eandem habere proportionem ad multiplicem F ; sed solum, cū illa sint aequales, utranque esse uel minorem, uel aequalem, uel maiorem multiplici, F . Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt.

E O D E M fere modo ostendemus, aequales magnitudines ad alias inter se aequales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F , sumantur due aequales multiplices. Sint enim tam A , & B , inter se aequales, quam C , & D , inter se. Dico esse A , ad C , ut B , ad D . Sumptis enim E , & F , aequales multiplices ipsarum A , & B , prima, & tertia. Item G , & H , aequales multiplices ipsarum C , & D , secunda, & quarta. Erunt tam E , & F , inter se aequales, quam G , & H , inter se, ut constat ex his, quæ in 1. lib. docuimus, cum axioma sextum explicarem; quod E , & F , sint equalium A , & B , aequales multiplices, necnon G , & H , aequales multiplices quoque equalium C , & D . Quare si E , multiplex prima deficit a G , multiplici secunda, etiam F , multiplex tertia, ab H , multiplici quarta deficiet; et si equalis, equalis; & si superat, superabit. Eadem ergo est proportio A , prima ad C , secundam, quæ B , tertia ad D , quartam, ex defin. 5. Quod est propositum.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

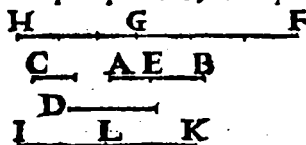
8.

I N A E Q U A L I V M magnitudinum
maior ad eandem, maiorem rationem ha-

Y ber.

bet, quam minor : Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiore.

S I N T magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor ; Terra autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportionem C, ad D. At e converso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad A B ; Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, ut sit reliqua E B ; Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D ; At H G,



multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed uel maior, uel æqualis. Quoniam igitur duæ F G, G H, æque multiplices sunt duarum

1. quinq.

B E, E A ; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, ut H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint posita C, & A E : Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proximè maior sit, quam H G, nempe dupla. Quod si dupla, maior non fuerit quam H G, sumatur tripla, uel quadrupla, &c. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quam H G, (alias I K, non erit multiplex ipsius D, proximè maior quam H G ; sed & I L, maior erit quam H G) & idcirco H G, erit uel æqualis ipsi I L, uel maior. Et quia F G, maior est posita quam D ; L K, uero æqualis eidem D ; erit quoque F G, maior quam L K ; Est autem H G, non minor, quàm I L, ut demonstratum est, sed uel æqualis, uel maior : Erit igitur tota F H, maior quam I K. Itaque cum F H, H G, sint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C ; Atque I K, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ ; sit autem F H, multiplex primæ, maior quàm I K, multiplex secundæ ; At H G, multiplex tertiæ non sit maior, quàm I K, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi (sumpta enim est I K, multiplex maior quàm H G) erit maior proportio A B, primæ ad D, secundam, quàm C, tertiæ ad D, quartam.

8. defn. 5.

Q U O N I A M uero e contrario I K, multiplex primæ D, (ponitur

D, (ponitur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda, & A B, quarta) maior est quam H G; multiplex secunda C; At I K, multiplex tertia D, maior non est, quam F H, multiplex quarta A B, immo minor, cum F H, maior sit, quam I K, ut ostensum est; Erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

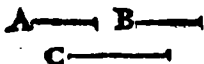
8. defn. 5.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, ex quoque sunt inter se æquales.

HABEANT primo A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera nempe A, maior & B, minor. Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quā B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesein. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat secundo C, eandem proportionem ad A, & B; Dico adhuc A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesein. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.



8. quinti.

8. quinti.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eandem

Y 2 maiorem

maio rem rationem habet, illa minor est.

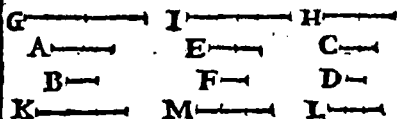
7. *quinti.* H A B E A T primo A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, haberent A, & B, eandem proportionem ad C; Si autem A, minor esset, quam B, haberet B, maior ad C, maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis uel minor quam C, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse, quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque uero B, maior erit quam A; alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quàm A; quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.
8. *quinti.*
7. *quinti.*
8. *quinti.*

II.

THEOR. II. PROPOS. II.

Q V A E eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.

- S I N T proportiones A, ad B; & C, ad D, eadem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, eadem esse inter se. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiples G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, E, aliz quæcunque æque multiples K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut E, tertia ad F, quartam; fit,



fit, ut si G, multiplex primæ deficit a K, multiplici secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, uel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, uel maior: sed (ut eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, uel æqualis, uel maior, est quoque H, minor, quam L, uel æqualis, uel maior, propterea quod ponitur esse E, primæ ad F, secundam, ut C, tertiæ ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplici secundæ B deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplici quartæ D; Et si G, æqualis est, uel maior quam K, etiam H, æqualis erit uel maior quam L. Idemque ostenditur accidere in quibuscunque æque multiplicibus. Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, tertiæ ad D, quartam, Quæ igitur eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Quod erat ostendendum.

6. defin. 5.

5. defin. 5.

6. defin. 5.

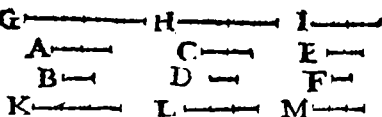
THEOR. 12. PROPOS. 12.

12.

SI sint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SI N T quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D; & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentium, nimirum A, ad B; ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes

consequentes
simul B, D, F.
Sumptis enim



G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, ut una unius nempe ut G,

1. quinti.

Y 3 ipsius

6. defn. 5.

ipſius A ; & omnes K, L, M, ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, ut una unius, nimirum in K, ipſius B. Quoniam uero ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut E, tertia ad F, quartam; ſit ut ſi G,

G ————— H ————— I ————— multiplex prima deficit a
A ————— C ————— E ————— K, multiplici
B ————— D ————— F ————— ſecundæ, defi-
K ————— L ————— M ————— ciat quoq; H,

multiplex tertiæ ^{ab} L, multiplici quartæ, & I, ab M; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, uel maior, æqualis quoque ſit H, ipſi L, & I, ipſi M, uel maior. Quare ſi G, minor eſt, uel æqualis, uel maior quam K, erunt & omnes G, H, I, omnibus K, L, M, minores, uel æquales, uel maiores. Quocirca ut eſt A, prima ad B, ſecundam, ita erit A, C; E, tertia ad B, D, F, quartæ. Si ſint itaq; magnitudines quocunq; proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

6. defn. 5.

13.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

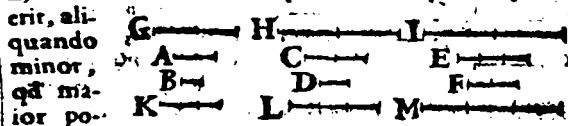
SIT A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, ſextam. Dico & proportionem A, primæ ad B; ſecundam eſſe maiorem quam E, quintæ ad F, ſextam. Sumpris enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam; ſit ut ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam

6. defn. 5.

L, mul-

L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando

1. defn. 5.



8. defn. 5.

SCHOLIUM.

QVOD si proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, sextam, erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor quam E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, ad F, maior quam C, ad D; sit ut si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit. Sed si H, deficit ab L, vel ei æqualis est, etiam G, deficiet a K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedat ipsam K; atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F, quod est propositum.

8. defn. 5.

8. defn. 5.

8. defn. 5.

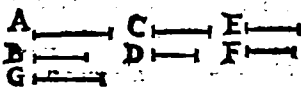
EODEM modo. Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

QVOD si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT proportio A, ad B, maior, quã C, ad D; & C, ad D, maior, quã E, ad F. Dico proportionem A, ad B, maiorem quoque esse,

Y 4 quam

quam E, ad F. Sit enim ut C, ad D, ita G, ad B, ita ut A, ad



B, maiorem habeat ra-
tionem, quam G, ad B.

Quo postea, erit ratio

G, ad B, maior quam

E, ad F; Cum igitur ra-

tio A, ad B, maior sit quam G, ad B; multo maior erit ratio

A, ad B, quam E, ad F.

I A M vero, si proportio A, ad B, minor fuerit, quam C,

ad D; & C, ad D, minor, quam E, ad F; demonstrabimus,

per ea, quæ in hoc scholio ostensa sunt, proportionem G, ad

B, minorem esse quam E, ad F. Cum ergo proportio A, ad

B, minor sit quam G, ad B; erit multo minor proportio A, ad

B, quam E, ad F.

14.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit
rationem, quam tertia ad quartam; Prima
uero quam tertia maior fuerit, erit & secun-
da maior quam quarta. Quod si prima fue-
rit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis
quartæ: Si uero minor, & minor erit.

S I T A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quar-
tam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, ma-
iorem quam D; Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqua-
lem quoque esse B, ipsi D; Si denique A, minor fuerit quā
C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primo A, maior quā

C, eritque propterea proportio A, maioris

ad B, maior quam C, minoris ad eandem B.

Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam,

ut A, tertia ad B, quartam; Proportio autem

A, tertiæ ad B, quartam, maior est, ut ostendi-

mus, quā C, quintæ ad B, sextam; Maior quoque erit

proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad

B, sex-

8. quinti.

13. quinti.

B, sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D, quod est propositum.

S I T secundo A, æqualis ipsi C, eritque idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur proportionem C, ad D, & C, ad B, eadem sunt proportioni A, ad B, erunt quoque inter se eadem proportionem C, ad D, & C, ad B; Ideoque æquales erunt B, & D, quod est propositum.

S I T tertio A, minor quam C, eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eadem: Quoniam, igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertia ad B, quartam minor, quam C, quinta ad B, sextam; Minor quoque erit proportio C, prima ad D, secundam, quam C, quinta ad B, sextam; Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

16. quinti.

7. quinti.

11. quinti.

9. quinti.

8. quinti.

13. quinti.

10. quinti.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

S I N T partium A, & B, æque multiplices C D, & E F. Dico ita esse C D, ad E F, ut A, ad B. Cum enim C D, & E F, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in C D,

quoties B, in E F. Diuidat ergo C D, in partes C G, G H.

H D, æquales ipsi

A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipsi B; eritque C G, ad E I, ut A, ad B, ex scholio propos 7. huius lib. quod C G, & A, æquales inter se sint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K; & H D, ad K F, ut A, ad B; Ideoque



11. *quinti.* B; Ideoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt

C G H D E I K F

12. *quinti.*

A ——— B ———

proportionē. Quo
circa ut CG, ad EI,
hoc est, ut A, ad
B, ita erit C D, ad
E F, nempe omnes

CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, simul, quod
est propositum. Partes itaque cū pariter multiplicibus, &c.
Quod erat demonstrandum.

16.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erūt.

15. *quinti.* SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim, seu permu-
tando, esse quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim
ipsarum A, B, æque multiplices E, F; Item ipsarum C, D,
æque multiplices G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum
E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ra-
tione erit G, ad H, ut C, ad

E ——— G ———
A ——— C ———
B ——— D ———
F ——— H ———

D. Cum igitur proportio-
nes E, ad F; & C, ad D, sint
eandem proportioni A, ad

11. *quinti.* B; erunt & ipsæ inter se eadem. Rursus quia proportio-
nes E, ad F; & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D,
erunt & ipsæ eadem inter se, hoc est, ut est E, prima ad F,
secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare si E,

14. *quinti.* maior est quam G, uel æqualis, uel minor, erit quoque F,
maior quam H, uel æqualis, uel minor, in quacunque mul-
tiplicatione. Est igitur A, prima ad C, secundam, ut B, ter-
tia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices pri-
mæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secun-
dæ, & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, uel una æqua-
les sint, uel una excedant, &c.) quod est propositum. Si qua-
tuor igitur magnitudines proportionales fuerint, &
uicissim proportionales erunt. Quod
ostendendum erat.

6. *defn. 5.*

SCHO-

SCHOLION

Ex hoc & illud demonstrabitur.

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

SIT enim ut *A*, prima ad *B*, secundam, ita *C*, tertia ad *D*, quartam. Dico, si *A*, prima maior est, quam *B*, secunda; & *C*, tertiam maiorem esse quartam *D*; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Erit enim permutando, ut *A*. ad *C*, ita *B*, ad *D*. Quare si *A*, maior est, quam *B*, erit & *C*, maior, quam *D*; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.



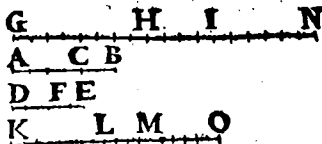
16. quinti.
14. quinti.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuise proportionales erunt.

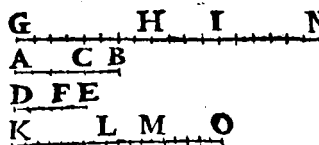
SINT compositæ magnitudines *AB*, *CB*, & *DE*, *FE*, proportionales, hoc est, *AB*, ad *CB*, ut *DE*, ad *FE*. Dico & diuise easdem proportionales esse, hoc est, ut est *AC*, ad *CB*, ita esse *DF*, ad *FE*. Ipsarum enim *AC*, *CB*, *DF*, *FE*, æque multiplices capiuntur eodem ordine *GH*, *HI*, *KL*, *LM*, eritque *GI*, ita multiplex ipsius *AB*, ut est *GH*, ipsius *AC*, hoc est



1. quinti.

1. quinsi.

hoc est, ut KL , ipsius DF ; sed ut est multiplex KL , ipsius DF , ita quoque multiplex est KM , ipsius DE . Aequae multiplices ergo sunt GI , KM , ipsarum AB , DE : Capian-



tur rursus IN , MO , aequae multiplices ipsarum CB , FE . Quoniam igitur sic est multiplex HI , prima secundae CB , ut LM , tertiae quartae FE ; Itē ita est multiplex IN , quinta secundae CB , quā MO , sexta quartae FE ,

2. quinsi.

erit & HN , sic multiplex secundae CB , ut LO , multiplex est quartae FE . Itaque cum sit AB , prima ad CB , secundam, ut $D-E$, tertia ad FE , quartam, sumptaeque sint aequae multiplices primae ac tertiae; Item secundae & quartae; sit ut si GI , multiplex primae AB , deficit ab HN , multiplici secundae CB , etiam KM , multiplex tertiae DE , deficiat ab LO , multiplici quartae FE ; & si aequalis, aequalis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc GI , ab HN , & KM , ab LO . Ablatis ergo communibus HI , LM , deficiet quoque GH , ab IN , & KL , ab MO . Quod si GI , aequalis fuerit ipsi HN , & KM , ipsi LO , erit & GH , aequalis ipsi IN , & KL , ipsi MO . Et si GI , excesserit ipsam HN , & KM , ipsam LO ; excedet quoque GH , ipsam IN , & KL , ipsam MO . Quam ob rem cum GH , KL , sumptae sint aequae multiplices primae AC , & tertiae DF ; Item IN , MO , aequae multiplices secundae CB , & quartae FE , ostensumque sit, aequae multiplices primae & tertiae ab aequae multiplicibus secundae & quartae uel una deficere, uel una aequales esse, uel una excedere; Erit AC , prima ad CB , secundam, ut DF , tertia ad FE , quartam. quod est propositum. Si compositae igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

6. defin. 5.

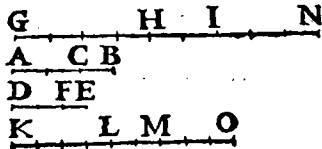
18.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisae magnitudines sint proportionales,

nales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

Si n̄ t̄ diuise magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales, hoc est, A C, ad C B, ut D F, ad F E; Dico eas etiam compositas proportionales esse, ut A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, ut prius, ipsarum A C, C B, D F, F E, æque multiplices G H, H I, K L, L M; Item ipsarum C B, F E, aliæ æque multiplices I N, M O; eruntque rursus G I,



K M, ipsarum A B, D E, æque multiplices. Item H N, L O, ipsarum C B, F E, ceu in præcedenti Theoremate ostensum fuit. Quoniam uero ponitur esse A C, prima ad C B, secundam, ut D F, tertia ad F E, quartam; sumptæque sunt æque multiplices primæ ac tertiæ; Item secundæ & quartæ; fit ut si G H, multiplex primæ deficit ab I N, multiplici secundæ, etiam K L, multiplex tertiæ deficiat ab M O, multiplici quartæ; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc G H, ab I N, & K L, ab M O: additis igitur communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Quod si G H, æqualis fuerit ipsi I N, & K L, ipsi M O, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O: Et si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O, excedet quoque G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici secundæ C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplici quartæ F E; & si æqualis, æqualis, & si excedit, excedit; erit A B, prima ad

C B, secundam, ut D E, tertia ad F E, quartam: quod est propositum. Itaque si diuise magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

1. quinti.

2. quinti.

6. defin. 5.

6. defin. 5.

THEOR.

19.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum : & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

SI TOTA A B, ad totam C D, ut ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam F D, ut est tota A, ad totam C D. Cum enim sit A B, ad C D, ut A E,

16. quinsi.

A E B

ad C F, erit & permutando A B,

17. quinsi.

C F D

ad A E, ut C D, ad C F. Di-

16. quinsi.

duendo ergo erit E B, ad A E, ut F D, ad C F: quare permutando rursus erit E B, ad F D, ut A E, ad C F, hoc est ut tota A B, ad totam C D, cum posita sit A B, ad C D, ut A E, ad C F; Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

Hic facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur a conuersione rationis, iuxta 16. defin.

16. quinsi.

SI TOTA ENIM A B, ad E B, ut C D, ad F D; Dico per conuersionem rationis esse quoque A B, ad A E, ut C D, ad C F; Cum enim sit

19. quinsi.

A B, ad E B, ut C D, ad F D; erit permutando A B, tota ad C D, totam ut E B, ablata ad F D, ablatam: ut igitur tota A B, ad totam C D,

16. quinsi.

ita A B, reliqua ad C F, reliquam. Permutando ergo rursus erit A B, ad A E, ut C D, ad C F: quod est propositum.

20.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, quae binae & in eadem ratione sumantur; ex aequo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sex-

ta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

S i n t tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F, sit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita D, ad E; maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B; At ut C, ad B, ita F, ad E; (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo ut C, ad B, ita F, ad E,) maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E; Quare D, maior erit, quam F; quod est propositum.

S i t secundo A, æqualis ipsi C; Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, erit A, ad B, ut C, ad B; est autem ut A ad B, ita D, ad E; Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B; At ut C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, uti prius. Quare erit D, ad E, ut F, ad E; Ideoque æquales erunt D, & F; Quod est propositum.

S i t tertio A, minor quam C; Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; sed ut A, ad B, ita D, ad E; Minor ergo proportio est D, ad E, quàm C, ad B; Est autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E; Igitur minor est proportio D ad E, quam F ad E; proptereaque D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & alie ipsi æquales numero, &c.

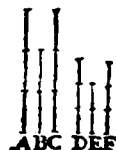
Quod erat ostendendum.



8. quinti.

13. quinti.

10. quinti.



7. quinti.

12. quinti.

9. quinti.



8. quinti.

10. quinti.

THEOR.

21.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & alix ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quæ tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

S I N T tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; Sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E; Sit autem primo A. prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita E, ad F: Maior ergo proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam uero ut B, ad C, ita D, ad E, erit conuertendo ut C, ad B, ita E, ad F. Quare maior erit proportio E, ad F, quam E, ad D: Ideoque maior erit D, quam F; quod est propositum.

8. quinti.



4. quinti.

10. quinti.



7. quinti.

9. quinti.

8. quinti.

S I T secundo A, ipsi C, æqualis; Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, erit A, ad B, ut C, ad B; sed ut A, ad B, ita est E, ad F: Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F; est autem, ex inuerfa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, uelut prius. Igitur erit ut E, ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit: quod est propositum.

S I T tertio A, minor, quam C; Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; Vt autem A, ad B, ita E, ad F: minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B.

Quoniam

Quoniam vero, ut ante, ex inuerſa ratione ut C. ad B, Ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F; quod eſt propoſitum. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ iſiſ æquales numero, &c. Quod oſtendendum erat.



10. quinti.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

22.

SI ſint quotcunq; magnitudines, & aliæ iſiſ æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Si ſint quotcunq; magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, ſitq; A, ad B, ut D ad E; & B, ad C, ut E, ad F. Dico quoque ex æqualitate eſſe A, ad C, ut D, ad F; Sumptis enim iſarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item iſarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item iſarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum ſit A, prima ad B, ſecundam, ut D, tertia ad E, quartam; erit quoq; G, multiplex primæ ad I, multiplicem ſecundæ, ut H, multiplex tertiæ ad K, multiplicem quartæ. Eadem ratione, cum ſit B, prima ad C, ſecundam, ut E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ ad L, multiplicem ſecundæ, ut K, multiplex tertiæ ad M, multiplicem quartæ.



4. quinti.

Quoniam igitur ſunt tres magnitudines G, I, L, & alię tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportionem ſumuntur, ſit ut ſi G, ſuperat iſam L, ſuperet quoque H, iſam M; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi deficit, deficiat. Itaq; cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiat una ab L, M, æquemultiplicibus ſecundæ C, & quartæ F, vel una æqua-

20. quinti.

Z les

6. defn. 5.

les sint, vel vna excedat, in quacūq; multiplicatione; Erit A, prima ad C, secundā vt D, tertia ad F, quartā. qđ est oppositū.



Quoniam si fuerint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiā C, ad N, vt F, ad O; Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cū. n. iā sit ostēsum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur aut C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliae tres D, F, O, quae binz in eadē rōne sumuntur : ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostēsa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodēq; modo idē ostēdetur in quinq; magnitudinib; per quatuor; sicut id in quatuor demonstratū fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaq; si sint quocūq; magnitudines, &c. Quod erat ostendēdū.

23.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliaq; ipsis æquales numero, quae binz in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earū proportio : Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



15. quinti.

15. quinti.

15. quinti.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliae tres D, E, F, sitq; perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoq; ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis. n. ipsarū A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Itē ipsarū C, E, F, æquemultiplicib; K, L, M; Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarū A, B, æquemultiplices; At vt A, ad B, ita est E, ad F. Igitur vt G, ad H, ita est E, ad F; Sed vt E, ad F, ita est quoq; L, ad M. qđ L, M,

L, M, sint ipsarū E, F. æquemultiplices. Igitur erit vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniā est B, prima ad C, secūdā, ut D, tertiā ad E, quartā; erit quoq; ut H, multiplex primæ ad K, multiplicē secundæ, ita I, multiplex tertiæ ad L, multiplicem quartæ. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadē rōne sumuntur, estq; earū proportio perturbata; sit ut si G, superat ipsā K, superet quoq; I, ipsam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cū G, I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, a K, & M, æquemultiplicibus secūdæ C, & quartæ F, uel una deficiant, uel una æqualia sint, uel una excedant; erit ut A, prima ad C, secundam, ita D, tertiā ad F, quartam.

Quod si fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata, ut si fuerit A, ad B, ut F, ad O; & B, ad C, ut E, ad F, & C, ad N, ut D, ad E. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, ut D, ad E; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quæ binæ in eadem sumuntur proportionē, estq; perturbata earum proportio: Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensā, erit ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem ostenderetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

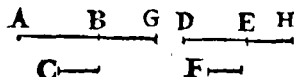
THEOR. 24. PROPOS. 24.

24.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

SIT AB, prima ad C, secundam, ut DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, ut EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, ut est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit ut EG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo ut

4. quinti.



C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, ut DE, ad F; & C,

22. quinti.

18. quinti.

22. quinti.

ad BG, ut F, ad EH; erit ex æquali AB, ad BG, ut DE, ad EH: componendo igitur erit ut tota AG ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, ut DH, ad EH; & BG, ad C, ut EH, ad F; erit ex æquali AG, ad C, ut DH, ad F, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theorema sextum huius lib. demonstrauit in æquemultiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

Si duę magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionē. & detractę quędam habeant ad easdem eandē proportionē: & reliquę ad easdem eandē proportionē habebūt.

HABEANT AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, ut DH, ad F. Item detractę AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem, ita ut sit quoque AB, ad C, ut DE, ad F; Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, ut EH, ad F. Cum enim sit ut AB, ad C, ita DE, ad F; erit conuertendo ut C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, ut DH, ad F; & C, ad AB, ut F, ad DE; erit ex æqualitate AG, ad AB, ut DH, ad DE. Diuidendo ergo erit ut BG, ad AB, ita EH, ad DE.

4. quinti.

22. quinti.

17. quinti.

Itaq;

Itaque cum rursus sit BG, ad AB, ut EH, ad DE; & AB, ad C, ut DE, ad F; erit ex equali BG, ad C, ut EH, ad F. 22. quinti.
Quod est propositum.

THEOR. 25. PROPOS. 25. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

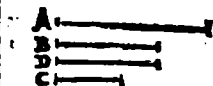
SIT AB, ad CD, ut E, ad F, sitq; AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F; Erit igitur AG, ad CH, ut E, ad F, hoc est, ut AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, ut ablata AG, ad ablatam CH; erit quoq; ut tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD. Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD: Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quam E, & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. 19. quinti.

SCHOLIION.

NECESSE est autem, si antecedens magnitudo unius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam, seu in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit ut AB, ad CD, ita E, ad F; & AB, maior quam E; erit quoq; CD, maior quam F. Item quia maior est AB, quam CD, erit quoque E, maior quam F. Quod si e contrario 14. quinti.

antecedens unius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, ut constat, si dicatur esse F , ad E , ut C D , ad A B . Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset una magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.

Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



Si T ut A , ad B , ita B , ad C . Sinq; A , maxima, & C , minima. Dico A , & C , simul maiores esse dupla ipsius B . Sumpta enim D , ipsi B , equali, erit, ut A , ad B , ita D , ad C . Igitur A ,

& C , simul maiores erunt, quam B , & D , simul, ut proxime demonstratum est, hoc est, quā dupla ipsius E . Quod est propositū.

Hic finem Euclides imponit quinto libro; Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus saepe numero grauissimi scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij utuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annexere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, nec non in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autē traduntur de magnitudinib; improporionalibus, quarum prima hac est.

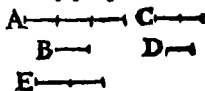
26.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartā: habebit cōuertēdo secūda ad primā minorem proportionē, quā quarta ad tertiam.

HABEAT A , ad B , maiorem proportionē, quā C , ad D . Dico proportionē B , ad A , minorem esse proportionē D , ad C . Intel.

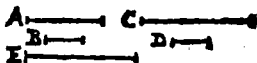
Intelligatur. n. esse E, ad B, ut C, ad D; eritq; proportio A, ad B, maior quoq; quā E, ad B; ac pro
 prerca A, maior erit quā E; Quare
 minor erit proportio B, ad A, ma-
 iorē quā B, ad E, minorē; Sed ut est
 B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad
 A, minor est quoque, quam D, ad C; quod est propositum.



10. quinti.
 8. quinti.
 4. quinti.

SCHOLIION

EODEM fere modo demon-
 strabim⁹, si prima ad secundā ha-
 buerit minorē proportionē, quā
 tertia ad quartam, cōuertendo



maiorē esse proportionē secundā ad primā, quā quarta ad tertiā;
 dūmodo vocem maioris musemus in vocem minoris, & contra.

SIT enim minor proportio A, ad B, quā C, ad D. Dico con-
 uertendo, B, ad A, maiorē habere proportionē, quā D, ad C. In-
 telligatur enim esse E, ad B, ut C, ad D; Eritq; proportio A, ad
 B, etiā minor, quā E, ad B; ac propterea A, minor erit, quā E.
 Quare maior erit proportio B, ad A, minorē, quā B, ad E, ma-
 iorē. Sed ut B, ad E, ita est cōuertēdo D, ad C. Igitur & propor-
 tio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

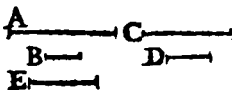
10. quinti.
 8. quinti.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

27.

SI prima ad secundam habuerit maio-
 rē proportionē, quā tertia ad quartam: Ha-
 bebbit quoq; vicissim prima ad tertiā maio-
 rē proportionē, quā secunda ad quartam.

HABEAT A, ad B, maiorem
 proportionem, quam C, ad D.
 Dico permutando maiorē esse
 quoque proportionem A, ad C,

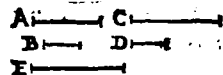


quā B, ad D. Intelligatur nāq; esse E, ad B, ut C, ad D, eritq;
 proportio A, ad B, maior etiā quā E, ad B; Ideoq; A, ma-
 ior erit quam E. Quare maior erit proportio A, ad C,
 quam E, ad C: Quoniam vero permutando, est ut E,

10. quinti.
 8. quinti.

16. quinsi. ad C, ita B, ad D; (cum posita sit E, ad B, ut C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D, quod est propositum.

S C H O L I O N



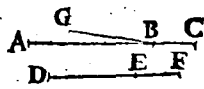
SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, vicissim prima ad tertiā minorem esse proportionē, quā secundae ad quartā.

SIT namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, ut C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; Ac propterea A, minor erit, quam E. Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C. Sed permutando, ut E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, ut C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoque erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

28. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem esse proportionem A C, ad B C, quam D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, ut D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, maior quoque, quam G B, ad B C; Ideoq; A B, maior quam G B. Addita ergo communis B C,



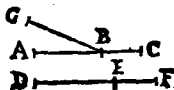
10. quinsi.

B C,

BC, fiet A C, maior quam G C; maiorq; propterea erit pro- 8. quinti
 portio A C, ad B C, quam G C, ad B C; Sed componendo,
 ut est G C, ad B C, ita est D F, ad E F; (quod posita sit GB, 12. quinti.
 ad B C, ut D E, ad E F,) Maior ergo etiam erit proportio
 A C, ad B C, quam D F, ad E F, quod est propositum.

SCHOLIUM.

E A D E M. ratione ostendetur, si pro-
 portio prima ad secundam minor fuerit,
 quam tertia ad quartam, minorem quo-
 que esse proportionem prima & secunda
 simul, ad secundam, quam tertia & quar-
 ta simul, ad quartam.



S I T minor proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Di-
 co & componendo minorem esse proportionem A C, ad B C, quā
 D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, ut D E, ad E F;
 eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque quam G B, ad B C;
 ideoq; A B, minor erit, quam G B. Addita ergo communi B C,
 fiet A C, minor, quam G C; minorq; propterea erit propor- 10. quinti.
 tio A C, ad B C, quam G C, ad B C. Sed componendo, ut G C, ad 8. quinti.
 B C, ita est D F, ad E F. (quod posita sit G B, ad B C, ut D E, ad
 E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam
 D F, ad E F, quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

29.

S I composita prima cum secunda ad se-
 cundam maiorem habuerit proportionem,
 quam composita tertia cū quarta ad quar-
 tam: Habebit quoque diuidendo prima ad
 secundam maiorem proportionem, quam
 tertia ad quartam.

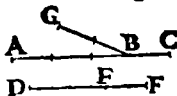
S I T maior proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F.
 Dico & diuidendo maiorem esse proportionē A B, ad B C,
 quam

10. quinti.

8. quinti.

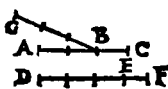
17. quinti

quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, ut D F, ad E F; eritq; proportio A C, ad B C, maior quoque proportionem G C, ad B C; ideoq; maior erit A C, quam G C. Abiata ergo cōmuni B C, maior erit A B, quam G B; Ac propterea maior erit, proportio A B, ad B C, quam G B, ad B C; sed diuidendo, ut est G B, ad B C, ita est D E, ad E F; (Posita namq; est G C, ad B C, ut D F, ad E F.) Igitur maior quoq; erit proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. quod est propositum.



SCHOLIUM.

Q U O D si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cū quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam: ut eodem modo potest ostendi, si modo vocem maioris ubiq; mutes in vocem minoris, & contra, cum in precedentibus factum est.



30.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

S I composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam cōposita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

29. quinti.



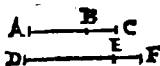
S I T maior proportio A C, ad B C, quā D F, ad E F. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionē A C, ad A B, quā D F, ad D E. Cum enim sit A C,

A C, ad B C, maior proportio, quam D F, ad E F; erit & diuidendo maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quare conuertendo minor erit proportio B C, ad A B, quam E F, ad D E; Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad A B, quam totius D F, ad D E. Quod est propositum.

20. quinsi.
26. quinsi.
26. quinsi.

SCHOLIUM.

NON dissimili ratione ostendimus, si composita prima cum secunda minorem habueris proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ & secundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam: dummodo ubique pro uoce maioris reponamus uocem minoris.



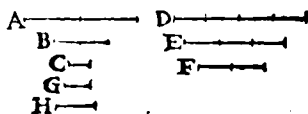
THEOR. 31. PROPOS. 31.

31.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiā, quam primæ posteriorum ad tertiā.

SINT tres magnitudines A, B, C, & alię tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam D, ad E; Item maior B, ad C, quam B, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut B, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C; Ideoq; B, maior quā G. Quare maior erit

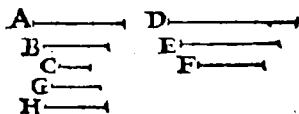
10. quinsi.
pro-



proportio A, ad G, mi-
norem . quam A, ad B,
maiolem ; Ponitur autē
proportio A, ad B, ma-
ior quam D, ad E: Mul-

to ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. In-
telligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea
maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Id eoq; A, ma-
ior erit , quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habe-
bit maiorem proportionem , quam minor quantitas H, ad
eandem C; Atqui vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F:
(quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G,
ad C.) maior ergo proportio quoq; est A, ad C, quam D,
ad F. Quod est propositum .

SCHOLION.



E A D E M ratione offen-
demus . si fueris proportio
A, ad B, que D, ad E; At
B, ad C, maior quam F, ad
F: Vel contra, si proportio

A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, que
E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A,
ad C, quam D, ad F, ceu in proposita figura cernere licet .

N O N dissimiliter demonstrabimus , si proportionem prio-
rum magnitudinum minores fuerint , etiam proportionem ex-
tremarum esse minorem .

Q V O D si plures fuerint magnitudines tribus , offende-
mus maiorem vel minorem quoque esse proportionem prima
priorum ad ultimam, quam primæ posteriorum ad ultimam, ea
methodo , quam propos. 22. tradidimus .

32.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines , & aliæ ipsis
æquales numero, sitq; maior proportio pri-
mæ priorum ad secundam , quam secundæ
post-

posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorū ad tertiā.

S I N T tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Item maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut D, ad E; A ——— D ———
eritq; propterea proportio B, B ——— E ———
ad C, maior, quam G, ad C, C ——— F ———
Ideoq; maior erit B, quam G. G ———
H ———

10. quinti.
8. quinti.

Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem: est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, ut E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoq; maior erit A, quam H. Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionē, quam H, minor ad eandem C: At ut H, ad C, ita est ex æqualitate D ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita est G, ad C; & ut E, ad F, ita est H, ad G,) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

10. quinti.
8. quinti.
23. quinti.

SCHOLIUM.

E A D E M ratione, si fueris A ——— D ———
proportio A, ad B, que E, ad B ——— E ———
F; At B, ad C, maior quam D, C ——— F ———
ad E. Vel cōtra, si proportio A, G ———
ad B, maior quam E, ad F; At H ———
B, ad C, eadem, que D ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F, ut in proposita figura perspicitur.

H A V D secus ostendemus, si proportionēs priorum magnitudinum.

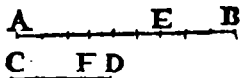
tudinū minores fuerint, etiā extremarū proportionē esse minore.
Q V O D si fuerint plures magnitudines tribus, demon-
 strabimus, maiorem quoque vel minorem esse proportionem pri-
 mæ priorum ad ultimam, quam primæ posteriorum ad ultimā,
 ea arte, quæ vsi sumus propos. 23. &c.

33. THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad to-
 tum, quam ablati ad ablatum: Erit & reli-
 qui ad reliquum maior proportio, quam
 totius ad totum.

S I maior proportio totius A B, ad totam C D, quā
 ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reli-
 quæ E B ad reliquam F D, maiorem esse, quam totius A B,
 ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B, ad C D,

27. quinti.



quam A E, ad C F, erit quo-
 que permutando maior pro-
 portio A B, ad A E, quā C D,
 ad C F; ac propterea, per con-

30. quinti.

27. quinti.

uersionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quā
 C D, ad F D. Permutando igitur, minor quoque erit pro-
 portio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc est, E B, reli-
 qua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem,
 quam tota A B, ad totam C D. quod est propositum.

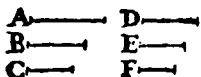
Q V O D si tota ad totam habuerit minorem propor-
 tionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad re-
 liquam minorem proportionem, quam tota ad totam, ut
 ea modo demonstrandi liquet.

34 THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunq; magnitudines, & alia
 ipsis æquales numero, sitq; maior propor-
 tio primæ priorum ad primam posteriorū,
 quam

quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem auté, quam prima priorum ad primam posteriorum.

SINT tres magnitudines A, B, C, & alie tres, D, E, F; Sit aut maior proportio A, ad D, quā B, ad E; Itē maior B, ad E, quā C, ad F. Dico, proportionē ipsarū A, B, C, simul, ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportionē C, ad F, & proportionē ipsarū B, C, simul, ad ipsas E, F, simul, minorem vero proportionē A, ad D. Cū. n. maior sit proportio A, ad D, quā B, ad E, erit permutando maior A, ad B, quā D, ad E. Igitur cōponēdo ma-



17. quinti.

ior erit proportio ipsarū A, B, simul ad B, quā ipsarū, D, E, simul ad E: pmutādo ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul quā B, ad E. Itaq; cū tota A, B, ad totā D, E, maiorē habeat proportionē, quā ablata B, ad ablata E; habebit quoq; reliqua A, ad reliquā D, maiorem proportionē, quā tota A, B, ad totā D, E. Eadē rōne, maior erit proportio B, ad E, quā totius B, C, ad totā E, F. Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quā B, C, totius ad totā E, F. Permutādo igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quā D, ad E, F; & cōponēdo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quā totius D, E, F, ad E, F; Et rursus pmutādo maior proportio oīum A, B, C, simul ad oēs D, E, F, simul, quā B, C, ad E, F; qđ est secundū. Itaq; cū sit maior proportio totius A, B, C, ad totā D, E, F, quā ablata B, C ad ablata E, F; erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquā D, quā totius A, B, C, ad totā D, E, F. qđ est tertiū. Quoniam uero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; erit permutando maior

18. quinti.

27. quinti.

33. quinti.

27. quinti.

28. quinti.

27. quinti.

19. quinti.

27. quinti.

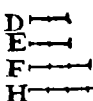
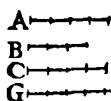
quoque

28. quinti.

27. quinti.

quoque B, ad C, quam E, ad F; & componendo maior totius B C, ad C, quam totius E, F, ad F; & rursus permutando maior B C, ad E, F, quam C, ad F. Est autem maior proportio A, B, C, ad D, E, F, ut ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F quam ultimæ C, ad ultimâ F; quod est primû.

Q V O D si fuerint quatuor magnitudines utrobique; cû ea dē hypotheti, hoc est, si sit quoque maior proportio C, ad F, quâ G, ad H; eadē consequentur. Ut. n. iam in tribus est o-



stensum, maior est proportio B, ad E, quâ B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H. Permutâdo ergo, maior erit A, ad

18. quinti.

27. quinti.

33. quinti.

B, C, G, quam D, ad E, F, H; & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H; & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quâ B, C, G, ad E, F, H, quod est secundum. Itaque cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablata B, C, G, ad ablatam E, F, H; erit & reliquæ A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quod est tertium. Quoniam vero ut in tribus est demonstratû, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, ut fuit ostensum; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam ultimæ G, ad ultimam H; quod est primum. Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque; & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.



EVLIDIS

ELEMENTVM VI.



DEFINITIONES.

I.

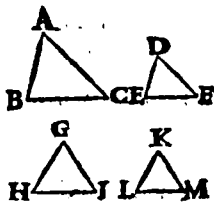
SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habet, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.



Triangula ABC , DEF , similia dicuntur, si fuerint æquiangulara, ita ut angulus A , angulo D ; & B , ipsi E ; & C , ipsi F , æqualis sit; Itæ latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, ut AB , ad AC , ita DE , ad DF ; & ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , & ut AC ,

ad CB , ita DF , ad FE .

QUOD si anguli unius æquales fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicuntur tales figura similes. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangularas et æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quampis inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera GHI , KLM . Propter laterum enim equalitatem



et

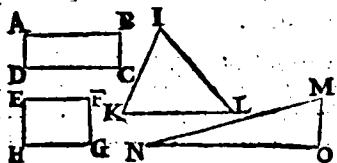
similitudinem

semper, erit GH , ad GI , ut KL , ad KM ; Item GH , ad HI , ut KL , ad LM ; & GI , & IH , ut KM , ad ML , cum semper sit proportio aequalitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis aequaliteris & aequiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octagonis, & de alijs id genus figuris rectilineis aequiangulis, atque aequaliteris.

II.

RECIPROCAE autem figurae sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

¶ Et si in parallelogrammis $ABCD$, $EFGH$, latera AB , BC , ita proportionalia fuerint lateribus EF , FG , ut utrobique sit & antecedens,



& consequens, diversarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio AB , ad EF , quae FG , ad BC ; seu AB , ad FG , ut EF , ad BC ; (utroque enim

modo AB , est antecedens unius proportionis & BC , consequens alterius, in figura $ABCD$; quemadmodum & primo modo EF , est consequens unius, & FG , antecedens alterius; vel secundo modo FG , consequens, & EF , antecedens, in figura $EFGH$,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quoniam similia non sint. Similiter erunt triangula IKL , MNO ; reciproca, si fuerint ut IK , ad MN , ita MO , ad IL ; uel ut IK , ad MO , ita MN , ad IL .

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur,

cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

S 1 linea recta quavis AB , ita diuidatur in C , inaequaliter, ut sit, quemadmodum tota AB , ad maius segmentum AC , ita AC , maius segmentum ad CB , minus segmentum; dicitur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docetis Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub alijs uerbis iam docuit lib. 2. propos. 11. ut fiet perspicuum propos. 30. huius lib. Sunt autem pene innumera dignitates, atque utilitates linearum hoc modo diuisarum, seu ex libris Stereometria conflatibus, praesertim lib. 13. ut non immerito a quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea est diuisa.



III.

ALTITUDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a uertice ad basin deducta.

S 1 a uertice A , trianguli ABC , ad basin BC , perpendicularis ducatur AG ; dicitur hac perpendicularis, altitudo trianguli ABC , ita ut tantam dicatur habere altitudinem dictum triangulum, quanta est perpendicularis AG . Sic etiam perpendicularis DH , ducta a D , uertice trianguli DEF , ad basin EF , ad partes E , protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF . Vnde si duarum figurarum perpendiculares a uerticibus ad bases, (sive ha protracta sint, sive non) demissa fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figura habere altitudinem. Tunc autem dictæ perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac uertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares AG , DH , triangulorum ABC , DEF , in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH , DHG ,



AGH 2 interius

28. primi.

incerni ex eadem parte sint duobus rectis aequales, tunc duo recti; erunt recta AG, DH , parallela; sunt autem & $AD,$



GH , parallela, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum eris $ADHG$; ac propterea latera opposita AG, DH , aequalia erunt. Eandem igitur dicetur dicta triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C , & F , bases vero AB , & DE ; non habebunt eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F , ad basin DE , protraham aequalis non est perpendiculari ex C , ad basin AB , deducta, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, ut manifestum est.

34. primi.

R E C T E vero ab Euclide altitudo figura cuiusvis definita est per lineam perpendicularem, qua a vertice ad basin deducitur: quoniam, ut scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse fixa, determinataque & non indefinita: Inter oēs autem rectas lineas, penes quas merito Geometra, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataque longitudinis, alie autem omnes incerta indeterminataque. Qua de re plura scripsimus ad initium cōmentariorum, quos in sphaeram Ioan. de sacro bosco edidimus.

V.

R A T I O ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

Q U O N I A M denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (ut denominator quadruple proportionis, nempe 4. ostendit, in quavis proportionem quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subqua-

subquadrupla videlicet $\frac{1}{2}$. indicat antecedentem esse partem
quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominatur a
Geometria, quanciscas proportionis; ut idem significet quantitas
alicuius proportionis, quod denominator. Vnde igitur in hac
definitione Euclides, proportionem aliquam ex duabus, vel plu-
ribus proportionibus compositam, quando harum denominatores,
seu quantitates inter se multiplicatae effecerint illam proportio-
nem, seu (ut verbi Zambertius) effecerint illius proportionis
quantitatem, seu denominatorem. Vt proportio duodecupla
componi dicitur ex dupla & septupla; quoniam denominator
proportionis duodecuplae, nimirum 12. produciuntur ex multipli-
catione denominatoris duplae proportionis, nempe ex 2. in deno-
minatore septuplae, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duode-
cupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex mul-
tiplicatione 3. in 4. produciuntur eadem 12. denominator scilicet
duodecuplae proportionis. Eadem ratione proportio trigecu-
pla componi dicitur ex dupla, tripla, & quinquapla. Nam
habetur denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati faciunt 30.
denominatorem illius.

PROPO. quemadmodum in magnitudinibus, continuae
proportionibus, proportio prima ad ultimam componi dicitur
ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, &
tertia ad quartam, &c. cum illa ex his intermediis constet, &
illius denominator ex harum denominatoribus inter se multipli-
catis producat, cum in quinto libro defin. 10. exposuimus:
ita ut si fuerint duae proportionibus aequales intermediae, dica-
tur proportio prima magnitudinis ad ultimam, duplicata pro-
portionis primae ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiam
in magnitudinibus quibuscunque ordine positae, proportio pri-
ma ad ultimam dicitur componi ex proportionibus primae ad se-
cundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c.
donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis
prima magnitudinis ad ultimam, consurgit ex denominatoribus
proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod
quidem primo, inductione quadam Theonis Alexandrini, qua
hoc in loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus
demonstrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Ascalo-
nisa lib. 2. Archimedis de sphaera & cylindro, theoremate
4. & in 1 lib. Apollonii Pergei de conicis elementis, propos. 11.

altera autem a Visellione lib. 1. propos. 19. sua perfectissime, comprobabimus.

THIBITON igitur rempropositam ita conatum absolvo. Habetur AB, ad CD, rationem datam, utvisi duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandem quoque datam. Dico quod ipsius AB, ad EF, ratio constet ex AB, ad CD; & ex CD, ad EF; vel quod ipsius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipsius CD, ad EF, rationis quantitate, efficiat ipsius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sic enim primum AB, quam CD maior; & CD, quam EF; & sic quidem AB, ipsius CD, dupla, & CD, ipsius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autem CD, dupla est AB, erit AB, ipsius EF, sexcupla. Quoniam si triplicam alicuius duplicamus, fit sexcupla; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, dividatur AB, in ipsi CD, equalia, hoc est, AG, & GB; & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; equalis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est. Id propterea & GB, ipsius EF, tripla est. Totae igitur AB, ipsius EF, sexcupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, utraque ipsarum AB, & EF, idipsam colligitur. Sic enim rursus AB, ipsius CD, tripla; At CD, ipsius EF, fit dimidia. Et quoniam CD, ipsius EF, dimidia est; Ipsius autem CD, tripla est AB; erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsam semel, & dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est; & CD, ipsius EF, dimidia; quodum AB, equalium ipsi CD, trium, saluum est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD; & CD, ad EF, ratione.

SED iam rursus si CD, utraque ipsarum AB, & EF, maior

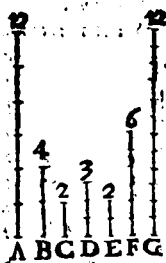
maior, & sit quidem AB , ipsius CD , dimidium, & CD , ipsius EF , sesquialterum. Quoniam igitur, qualium est AB , duorum, talium est CD , quatuor; qualium autem CD , quatuor, talium EF , trium. Et qualium igitur AB , duorum, talium EF , trium. Conne-
ctitur igitur rursus ratio ipsius AB , ad EF , per CD , medium limitem, qua duorum est ad tria. Si-
militer quoque & in pluribus, & in reliquis casu-
bus. Et manifestum est, quod si a composita ratio-
ne quavis una compositarum auferatur, uno sim-
plicium eiectione, reliqua compositarum assumantur.



Hec ad verbum desumptas ex Theone, iuxta interpreta-
tionem Zamberti.

EVTOCII vero demonstratio ita se habet.
SINT tres magnitudines A, B, C . Dico proportionem
 A , ad C , compositam ex proportionibus A , ad B ; & B , ad C .
Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc prin-
cipio; Quantitatem, seu denominatorem cuiusvis proportio-
nis multiplicatam in consequentem magnitudinem proportio-
nis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denomina-
tor indiget habitudine antecedentis ad consequentem, necesse
est, consequentem sumptam secundum denominatorem hoc est,
multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt
quia 12. ad 3. habens proportionem quadruplam, idcirco 3
multiplicata in 4. producit 12, &c. Sit

igitur proportionis A , ad B , denominator
 D ; proportionis vero B , ad C , denomina-
tor sit E ; & D , multiplicans E , produ-
cat F . Dico F , esse quantitatem, seu deno-
minatorem proportionis A , ad C , hoc est,
si multiplicetur F , in C , produci A .
Cum enim D , sit denominator proportio-
nis A , ad B , si multiplicetur D , in
 B , producat A . Eadem ratione, si
 E , multiplicetur in C , producat B ;
producat quoque G , ex multiplica-
tione F , in C . Ostendendum ergo est G ,
aequalem esse ipsi A ; atque adeo ex multiplicatione F , in C , pro-
duci A . Quoniam F , & B , multiplicantes C , produ-

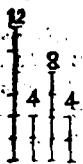


A a 4 cuni

18. septimi
17. septimi

cum G , & B ; Nam ex F , in C , fit G ; & ex E , in C , fit B , ut dictum est, erit ut F , ad E , ita G , ad B . Rursus quia D , multiplicans E , & B , producit F , & A , erit ut E , ad B , ita F , ad A ; & permittendo ut E , ad F , ita B , ad A ; & convertendo rursus, ut F , ad E , ita A , ad B . Ut autem F , ad E , ita ostensum est esse G , ad B . Igitur ut A , ad B , ita G , ad B . Ideoque aequales erunt quantitates A , & G . Quam ob rem cum G , producat ex F , in C , producat quoque A , ex F , in C ; proptereaque F , quantitas erit proportionis A , ad C ; quod est propositum.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad ultimam componitur ex proportionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad

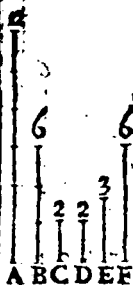


ABCD

quartam, &c. Ut si fuerint quatuor magnitudines A , B , C , D , componitur proportio A , ad D , ex proportionibus A , ad B ; B , ad C ; & C , ad D . Nam si intelligantur eae magnitudines A , C , D , componitur proportio A , ad D , ex proportionibus A , ad C ; & C , ad D , ut ostensum est: A s; aera eadem ratione, proportio A , ad C , componitur ex proportionibus A , ad B , & B , ad C . Igitur proportio A , ad D , componitur quoque ex proportionibus A , ad B ; B , ad C ; & C , ad D . Quod est propositum. Idem carnes in 5. 6. 7. vel quocunque magnitudinibus.

VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A , B , C . Dico proportionem A , ad C , componi ex proportionibus A , ad B ; et B , ad C . Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutoij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D , denominator proportionis A , ad B ; & E , denominator proportionis B , ad C ; A s; F , denominator proportionis A , ad C . Demonstrandum est igitur F , produci ex D , in E . Quoniam quod ex F , prima quantitate in C , quartam producat, aequale est ei, quod



ABCDEF

ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producat^{ur} A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producit^{ur} A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producit^{ur} antecedens A,) erit ut F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur F, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producat^{ur} antecedentem F. quod est propositum. Hæc Viellio.

19. septimus

Idem ostenditur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio.

ITA QVIA cum proportio extremorum componatur ex proportionibus intermedijs, cū demonstratum fuit; nihil aliud colligendum erit, quando proportio aliqua ex duabus proportionibus dicetur esse composita, quam eam proportionem eandem esse, quæ illa, quam habet prima aliqua quantitas ad tertiam, si modo tres quantitates ita coordinentur, ut proportio prima ad secundam sit eadem, quæ altera componentium, & proportio secundæ ad tertiam eadem, quæ reliqua componentium. Vt, quædo dicitur proportio 16. ad 12. composita esse ex proportionibus 8. ad 3. & 2. ad 4. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres quilibet numeri 24. 9. 18. secundum proportionē 8. ad 3. & 2. ad 4. (est enim ut 8. ad 3. ita 24. ad 9. & ut 2. ad 4. ita 9. ad 18.) eam esse proportionem 16. ad 12. quam habens 24. ad 18. Vt manifestum erit proposit. 23. huius lib.

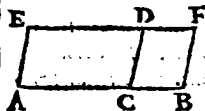
QVANTUM VERO autem prædictis definitionibus Euclidis addendam esse censemus sequentem sextam quæ multum conducet, ut recte intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurima alia decimi libri. Ea autem est eiusmodi.

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatū, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quā

fit ea, secundum quam applicatur.

SIT data recta linea AB , supra quam constituatur parallelogrammum $ACDE$, quod non occupet totam lineam



AB , sed desit CB , & ducta BF , parallela ipsi CD , donec cum ED , protracta conveniat in F , completur totum parallelogrammum $ABFE$. Parallelogrammum igitur $A'D$, applicatum secundum rectam AB ,

deficere dicitur parallelogrammo DB , ita ut DB , appelletur defectus.

VERSUS sit data recta linea AC , supra quam constituatur parallelogrammum $ABFE$, quod habeat latus AB , maius, recta data AC , & ducatur CD , ipsi BF , parallela. Parallelogrammum igitur AF , applicatum secundum rectam AC , excedere dicitur parallelogrammo DB , ita ut DB , vocetur excessus.

Hic autem defectus DB , vel excessus, in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem, vel Rhombus, vel Rhomboides, ut perspicuum est.

I.

THEOR. I. PROPOS. I.

TRIANGULA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

SENT duo triangula ABC , DEF , quorum bases BC , EF , habent eandem altitudinem. Item duo parallelogramma CG , EH , eiusdem altitudinis, quorum eadem bases BC , EF . Dico ita esse triangulum ABC , ad triangulum DEF ; & parallelogrammum CG , ad parallelogrammum EH , ut est basis BC , ad basin EF . Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas GH , LN . (Nam ut in defin. 4. dictum

rum est, triangula & parallelogramma, cum desuper eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelae.

fic enim per perpendicularares a verticibus ad bases demissas aequales erunt) & ex B L, sumantur quotcū-



que rectae B L, I K, K L ipsi B C, aequales; Item ex H N, abscindantur quotcūque rectae F M, M N, aequales rectae E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectae A I, A K, A L, D M, D N. Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, A L K, super aequales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se aequalia. Eadem ratione aequalia erunt tria-

38. primi

gula D E F, D F M, D M N. Quam multiplex est ergo recta C L, rectae B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quam multiplex est recta E N, rectae E F, tam quoque, multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F; quia in tot triangula aequalia sunt diuisa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas aequales sectae fuerunt totae rectae C L, E N. Quoniam uero si

basis C L, aequalis fuerit basi E N, necessario triangulum A C L, aequale est triangulo D E N; & si C L, maior fuerit quam E N, necessario A C L, maius est quam D E N; & si minor, minus; deficient propterea una C L, recta, & triangulum A C L, aequemultiplicia primae magnitudinis B C, & tertiae A B C, ab E N, recta, & triangulo D E N, aequemultiplicibus secundae E F, & quartae D E F, uel una aequalia erunt, uel una excedent, si ea sumantur, quae inter se respondent. Quare quae proportio est primae B C, ad secundam E F, basis ad basin, ea est tertiae A B C, ad quartam D E F, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita triangulum ad triangulum, quod est propositum.

38. primi

Quoniam autem ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita parallelogrammum C G (quod duplū est trianguli A B C, per 34. propositionem primi.) ad parallelogrammum E H (quod est duplū trianguli D E F) perspicuū est, ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogram-

6. definit. 5.

11. quinti.

11. quinti.

num,

num, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumen-
to confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex
punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG, nec nõ
ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH. Triangula igitur & pa-
rallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se ha-
bent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

SED & conversum bular demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGULA, & parallelogramma, quæ
ita se habent inter se, ut bases, eandem habent
altitudinem, æqualesue.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & paral-
lelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, ut ba-
ses BC, ad basim EF. Dico eorum altitudines, nimirum per-
pendiculares AI, DK, esse æqua-



res. Si enim non sunt æquales, sit
AI, si fieri potest, maior, quàm DK.
Abscissa igitur IL, ipsi DK, æqua-
li, ductaque LM, ipsi BC, paral-
lola, qua latuit AC, fecerit N, con-
iunctaq; recta BN, erit NBC, triangu-

I. sexti.

II. quinti

9. quinti.

lũ ad triangulum DEF, ut basis BC, ad basim EF; cum altitu-
dines LI, DK, ponantur æquales. Sed sunt etiam ABC, ad
DEF, ut BC, ad EF. Fieri igitur triangula NBC, ABC, ad
triangulum DEF, eandem habent proportionem; Ac proinde
æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo
inaequales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est
ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostende-
mus, parallelogramma NMBG, AGBC, æqualia esse, si
altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.
ADDIT hoc in loco Federicus Commandinus aliud theo-
rema, quod nos breviter demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGULA, & parallelogramma, quo

rum,

rum æquales sunt bases, uel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines.

SIT duo triângula ABC , DEF ; & parallelogramma $AGBC$, $DEFH$, habensia bases æquales BC , EF . Dico esse triângulum ABC , ad triângulum DEF , & parallelogrammum $AGBC$, ad parallelogrammum $DEFH$, ut altitudo AI , est ad altitudinem DK .



Si enim sumantur rectæ IL , KM , basiBUS BC , EF , æquales, ducanturque rectæ LA , MD ; erit triângulum ALI , triângulo ABC , æquale, cum sint super bases æquales LI , BC , & inter easdem parallelas AG , IB . Eodem modo æquale erit triângulum DKM , triângulo DEF . Quare erit, ut ABC , ad DEF , ita ALI , ad DKM . Est autem, ut ALI ad DKM , ita AI , ad DK . (Nam si bases ponantur AI , DK , erunt rectæ æquales LI , KM , altitudines.) Igitur & ABC , ad DEF , erit, ut AI , ad DK . Quod est propositum.

QUONIAM uero est, ut ABC , ad DEF , ita parallelogrammum $AGBC$, triânguli ABC , duplum, ad parallelogrammum $DEFH$, triânguli DEF , duplum; Eris quoque $AGBC$, ad $DEFH$, ut AI , ad DK . Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur LG , MH . Idem sequetur, si triângula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

Hoc uero conuersemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGULA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut altitudines, æquales habent bases.

SIT triângulum ABC , ad triângulum DEF ; & parallelogrammum $AGBC$, ad parallelogrammum $DEFH$, ut altitudo AI , ad altitudinem DK . Dico eorum bases BC , EF , æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit BC , si fieri po-



test,

38. primi.

7. quinti.

1. sexti.

15. quinti.

11. quinti.

11. quinti.

es 9. quinti.



test; maior, quoniam EF. Abscissa igitur BL, ipsi EF, equalis, du-
ctaq; recta LA, erit, ut proxime demonstravimus, ABL, ad
DEF, ut AI, ad DK: Sed ut AI, ad
DK, ita posuimus esse ABC, ad DEF.
Igitur ABL, ABC, ad DEF, ean-
dem habens proportionem; Ac proin-
tinenter se aequalia sunt, pars & to-
de m. Quod est absurdum. Non er-
go inaequales sunt bases BC, EF,
sed aequales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili
enim argumento, ducta LM, ipsi GB, parallela, ostendamus,
parallelogramma MGBL, AGBC, aequalia esse, si bases BC,
EF, dicantur inaequales.

IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiam
si triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita ut ali-
tudines sint ipsorum latera, vel unum fuerit rectangulum, alte-
rum vero non. Nos assumpsimus casum difficultionem, quando
scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio ma-
iore indiget quandoque constructione.

2.

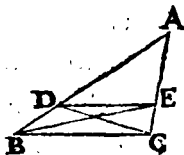
THE O R. 2. PROPOS. 2.

SI ad unum trianguli latus parallela du-
cta fuerit recta quaedam linea, hæc propor-
tionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si
trianguli latera proportionaliter secta fue-
rint, quæ ad sectiones adiuncta fuerint recta
linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus
parallela.

37. primi

IN triangulo ABC, ducatur recta DE, parallela late-
ri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter
in D, & E, hoc est, esse ut AD, ad DB; ita AE, ad EC.
Ductis enim rectis CD, BE, erunt triangula DEB, DEC,
super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE,
BC,

B C, constituta, inter se æqualia. Quare ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C; Atqui ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita basis A D, ad basin D B, (cum hæc triacula sint eiusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi A B;) & eadem ratione, ut triangulum A E D, ad triangulum D E C, ita basis A E, ad basin E C. Ut igitur A D, ad D B, ita A E, ad E C.



(cum hæc duæ proportionēs eadem sint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, uel trianguli A E D, ad triangulum D E C.) quod est propositum.

S E C U N D A M recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam esse reliquo lateri B C. Ductis enim rursus rectis C D, B E, erit ut basis A D, ad basin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem ut A D, ad D B, ita A E, ad E C; igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E ad E C: Sed rursus ut basis A E, ad basin E C, ita triangulum A E D, ad triangulum D E C, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C: Acqualia ergo sunt triacula D E B, & D E C: Ac propterea cum eandem habeant basin D E, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est D E, ipsi B C; quod est propositum. Si itaq; ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Q uod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

S I trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt

rationem

7. quinti.

1. sexti.

11. quinti.

1. sexti.

11. quinti.

1. sexti.

11. quinti.

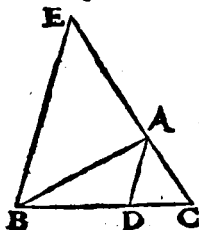
9. quinti.

39. primi.

3.

rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a uertice ad sectionem producitur, ea bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo ABC , recta AD , secet angulum BAC , bifariam. Dico esse ut BA , ad AC , ita BD , ad DC . Agatur enim per B , recta BE , parallela ipsi AD , donec cum



CA , producta conueniat in E ; eritque angulus EBA , æqualis alterno BAD ; & angulus E , externo DAC . Cum igitur duo anguli BAD , DAC , æquales ponantur; erunt & anguli EBA , & E , inter se æquales; Ideoque rectæ BA , EA , inter se æquales. Vt igitur EA , ad AC , ita BA , ad eandem AC ; Atqui ut EA ,

ad AC , ita BD , ad DC , cū in triangulo BCE , recta AD , sit parallela lateri BE ; Igitur ut BA , ad AC , ita BD , ad DC , quod est propositum.

SIT iam ut BA , ad AC , ita BD , ad DC . Dico rectam AD , bifariam secare angulum BAC . Agatur enim rursus per B , recta BE , ipsi AD , parallela coeuens cum CA , protracta in E . Quoniam igitur ut BA , ad AC , ita ponitur BD , ad DC ; ut autem BD , ad DC , ita est EA , ad AC ; (quod in triangulo BCE , recta AD , sit lateri BE , parallela) Erunt ut BA , ad AC , ita EA , ad eandem AC . Acquales igitur sunt BA , & EA , inter se; ac propterea anguli ABE , & E , æquales erunt. Cum igitur angulus ABE , æqualis sit alterno BAD ; & angulus E , externo DAC , erunt & duo anguli BAD , DAC , inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

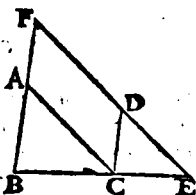
THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

S I N T æquiangula triangula ABC, DCE , sintque æquales anguli ABC, DCE ; & ACB, DEC ; & BAC, CDE . Dico esse AB , ad BC , ut DC , ad CE ; & BC , ad CA , ut CE , ad ED ; & AB , denique ad AC , ut DC , ad DE ; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE , secundum lineam rectam, ita ut angulus DCE , externus sit æqualis interno ABC ; pariterque externus ACB , interno DEC . Et quia duo



anguli ABC, ACB , minores sunt duobus rectis; est autem angulo ACB , æqualis angulus DEC ; erunt & anguli B , & E , duobus rectis minores. Quare rectæ BA , & ED , productæ ad partes A, D , coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F . Quoniâ uero angulus externus DCE , æqualis est interno opposito ABC ; parallelæ erunt CD , & BF . Eadem ratione, parallelæ erunt CA , & EF , quod angulus externus ACB , sit æqualis interno DEC . Parallelogramum est igitur $ACDF$; proptereaque recta AF , æqualis rectæ CD ; & recta CA , rectæ DF . Quoniam igitur in triangulo BEF , recta AC , parallela est lateri EF , erit AB , ad AF , hoc est, ad DC , (quæ æqualis est ipsi AF), ut BC , ad CE . permutando igitur erit AB , ad BC , ut DC , ad CE . Rursus quia in eodem triangulo BEF , recta CD , parallela est lateri BF , erit BC , ad CE , ut FD , hoc est, ut CA , (quæ æqua-

17. primi

11. prom.

28. primi

34. primi

2. sexti.

16. quinsi

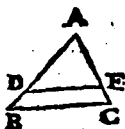
2. sexti.

Bb

æqua-

16. quinti. æqualis est ipsi FD) ad E D. permutando igitur erit B C, ad C A, ut C E, ad E D. Cum igitur sit A B, ad B C, ut D C, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D: erit & ex æquali A B, ad C A, ut D C, ad E D. quod est propositum. Æqui-angulorū ergo triangulorū proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.
22. quinti.

COROLLARIUM.



29. primi
4. sexti.

Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico triangulum A D E, toti triangulo A B C, esse simile. Acquiangula namque sunt, cum anguli A D E, A E D, æquales sint angulis A B C, A C B, externi internis; & angulus A, communis. Quare ut demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

SCHOLIUM.

Non alienum a nostro instituto esse putari, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de his, quæ vehuntur in aqua; Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.

Si ex duobus punctis cuiusvis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum uero intra lineam, dux parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.

Si recta A B, & ex punctis A, & C, educantur due parallelæ A D, C E, proportionem habentes, quam A B, B C, ita ut sit A D, ad C E, sicut A B, ad B C, vel C E, ad A D,

ut BC, ad AB. Dicere rectam, quae coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quae coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta BE, non transit per D, coeat cum AD, in F, puncto, quod sit vel supra D, vel infra, ut in prima figura.



Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula BAF, BCE, similia sunt; erit, ut AB, ad AF, ita BC, ad CE; Es permutando, ut AB, ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita erat quoque AD, ad CE; Igitur erit, ut AF, ad CE, ita AD, ad CE: Ac propterea aequales erunt rectae AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transsit ergo recta BE, per punctum D. Quod est primum.

Rursum si recta BD, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, ut in secunda figura. Quoniam ergo, per dictum coroll. triangula BAD, BCE, similia sunt; erit, ut AB, ad AD, ita BC, ad CE; & permutando, ut AB, ad BC, ita AD, ad CE: Vt autem AB, ad BC, ita quoque erat AD, ad CE; Igitur erit, ut AD, ad CE, ita AD, ad CE: Ac proinde aequales erunt rectae CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transsit ergo recta BD, per E. Quod est secundum.

Secundum vero est.

Si in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus dictum, in eadem rationes.

In triangulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur FA, secans DE, in G. Dicere esse, ut BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; erit ut AF, ad BF, ita AG, ad DG; & permu-



Bb 2 tando,

4. sexti.
16. quinti.
11. quinti
9. quinti

4. sexti.
16. quinti.
11. quinti.
9. quinti.

4. sexti.

16. quinsi. *sando, ut A F, ad A G, ita B F, ad D G. Atque eodem ar-*

11. quinsi.



gumento concludemus esse, ut A F, ad A G, ita F C, ad G E. Igitur eris, ut B F, ad D G, ita F C, ad G E; & permutando, ut B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod est propositum.

4. sexti.

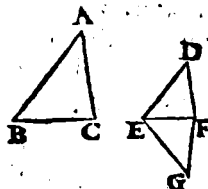
ALITER. Quonia triangula ABF, A D G, similia sunt, nec non triangula A F C, A G E, per coroll. huius propos. eris, ut B F, ad F A, ita D G, ad G A: Item ut F A, ad F C, ita G A, ad G E. Ex aequo igitur, ut B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod erat demonstrandum.

5.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangulara erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula A B C, D E F, latera proportionalia, sitque A B, ad B C, ut D E, ad E F; & B C, ad C A, ut E F, ad F D; & A B, denique ad A C, ut D E, ad D F. Dico triangula esse æquiangulara, angulum scilicet A, æqualem



esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F; sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C, convellantque rectæ E G, F G, in G; eritque reliquus angulus G, reliquo

32. primi

4. sexti.

11. quinsi.

9. quinsi.

4. sexti.

angulo A, æqualis. Acquiangulara igitur sunt triangula A B C, G E F. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; Vt autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F, igitur ut G E, ad E F, ita D E, ad E F, eandem: proptereaque æquales erunt G E, D E. Rursus, quoniam ut B C, ad C A, ita E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D;

F D; erit ut E F, ad F G, ita eadē E F, ad F D; ideoque æqua-
les erunt F G, F D. Itaque cum latera E G, F G, æqualia
sint lateribus D E, D F, utrumque utriusque; & basis com-
munis E F, erunt anguli G, & D, æquales; ac propterea re-
liqui anguli G E F, reliquis angulis D E F, D F E, æquales
erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo
A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque
modo angulus D F E, angulo B, & angulus D E F, angulo
C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur trian-
gula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostenden-
dum erat.

9. quinsi.

8. primi

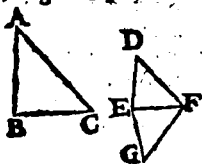
4. primi

THEOR. 6. PROPOS. 6.

6.

SI duo triangu-
la unum angulum uni
angulo æqualem, & circum æquales angu-
los latera proportionalia habuerint: æqui-
angula erunt triangu-
la, æqualesque habe-
bunt angulos, sub quibus homologa latera
subtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E,
trianguli D E F, sintque latera A B, B C, proportionalia la-
teribus D E, E F, hoc est, sit A B, ad B C, ut D E, ad E F.
Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulū
scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim
æquales anguli homologa latera re-
spiciunt. Fiat angulo B, æqualis
angulus F E G, & angulo C, an-
gulus E F G; eritque, ut in præ-
cedenti propos. dictum est, trian-
gulum G E F, triangulo A B C,
æquiangulum. Quare ut A B, ad
B C, ita G E, ad E F; sed ut A B, ad B C, ita ponitur D E,
ad E F; igitur ut D E, ad E F, ita G E, ad eandem E F; ac
idecirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E,



4. sexti.

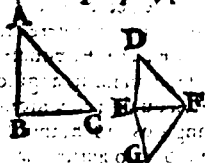
1. quinsi.

9. quinsi.

Bb 3 E F,

4. primi

ET, æqualia sint lateribus GE , EF , & anguli ipsi contenti æquales quoque; (nam angulo B , cui factus est, æqualis angulus $FE G$, æqualis est positus angulus DEF , propterea; æquales ad invicem erunt anguli DEF , GEF ,) erunt reliqui anguli D , EFD , reliquis angulis G , $EF G$, æquales. Cum ergo angulus G , sit æqualis angulo A , & angulus $EF G$, angulo C , erunt etiam angulis A , C , æquales anguli D , EFD ; & ob id æquiangula erunt triangula ABC , DEF . quod est propositum. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem; &c. Quod etiam demonstrandum.



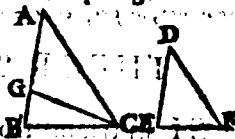
7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum uero simul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIT angulus A , trianguli ABC , æqualis angulo D , trianguli DEF ; & latera AC , CB , circa angulum ACB , proportionalia lateribus DF , FE , circa angulum F , hoc est, sit ut AC , ad CB , ita DF , ad FE ; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B , & E , sit uel minor recto, uel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet ACB , & F , circa quos sunt latera proportionalia, nec non & angulos B , & E , æquales esse. Sitenim primo tam B , quam E , recto minor: Quo posito, si anguli ACB , & F , non sunt æquales, sit ACB , maior, quam F ; fiatque ipsi F , æqualis ACG . Cum igitur, & angulus A , angulo D , ponatur

ponatur æqualis, erit & reliquus $\angle A G C$ reliquus $\angle B$, æqualis; ideoque triangula $A G C$, $D B F$, æquiangula erunt.

Quare ut $A C$, ad $C G$, ita $D F$, ad $F E$; sed ut $D F$, ad $F E$, ita ponitur $A C$, ad $C B$: Vt igitur $A C$, ad $C G$, ita eadem $A C$, ad $C B$; ac propterea, æquales erunt $C G$, $C B$, & anguli $C B G$, $C G B$, æquales.



Cum igitur angulus B , ponatur recto minor, erit & $C G B$, minor recto, ideoque ei deinceps $\angle A G C$, recto maior; cum $\angle A G C$, $C G B$, sint duobus rectis æquales; Est autem ostensus angulus $A G C$, angulus B , æqualis. Maior igitur recto est angulus E ; Sed positus est etiam recto minor: quod est absurdum.

Sed secundo tam B , angulus, quam E , recto non minor, eritque ut prius angulus B , angulo $C G B$, æqualis, ideoque & $C G B$, recto non minor erit, ac propterea anguli $C B G$, $C G B$, in triangulo $B C G$, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis, quod est absurdum: Non ergo inæquales sunt anguli $A C B$, & F , sed æquales, ac idcirco reliqui etiam anguli B , & E , æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

ADDIDIT Euclides, utrumque angulorum reliquorum B , & E , debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam alias, manente eadem hypothesis, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo $A B C$, sit $C G$, æqualis ipsi $C B$, habebunt duo triangula $A B C$, $A G C$, unum angulū uni angulo æquale, immo angulum A , communem; & circum alios angulos $A C B$, $A C G$, latera proportionalia, hoc est, ut $A C$, ad $C B$, ita eadem $A C$, ad $C G$, cum æquales ponantur recta $C B$, $C G$: & tamen non sunt nullo modo æquiangula triangula $A B C$, $A G C$, ut constat. Quod ideo evenit, quia non uterque angulorum $A B C$, $A G C$, minor est recto, vel non minor. Immo $A B C$, est quidem recto minor, $A G C$,

32. primi

4. sexti.

11. quinti.

9. quinti.

5. primi

13. primi

17. primi

32. primi

7. quinti.

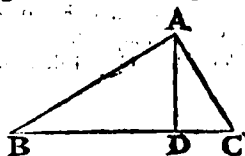
5. primi
32. primi.
8.

non recto maior. Cum enim EG , CB , latera aequalia sint, & idem anguli CBG , CGE , aequales; erit uterque eorum recto minor, ac propterea EG , recto maior.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC , angulus BAC , sit rectus, a quo ad basin perpendicularis agatur AD . Dico triangula ADB , ADC , similia esse & toti triangulo ABC , & inter se. Cum enim in triangulis ABC , DBA , anguli BAC , & ADB , sint recti, & angulus B , communis, erunt, & reliqui anguli ACB , & DAB , æquales. Aequiangulum est igitur triangulum DBA , triangulo ABC , ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, erit ut CB , ad BA , ita BA , ad BD ; & ut BA , ad AC , ita BD , ad DA ; & ut BC , ad CA , ita BA , ad AD . Quare simile est triangulum ADB , toti triangulo ABC . Eodem modo ostendetur triangulum ADC , simile eidem triangulo ABC ; Nam anguli BAC , & ADC , sunt recti, & angulus C , communis; ac propterea reliqui anguli ABC , & CAD , æquales. Quare ut BC , ad CA , ita CA , ad CD ; & ut CA , ad AB , ita CD , ad DA ; & ut CB , ad BA , ita CA , ad AD . Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB , & ADC , cum anguli ADB , ADC , sint recti, & anguli ABD , CAD , ostensi æquales, nec non anguli BAD , ACD ; Atque idcirco sit ut BD , ad DA , ita DA , ad DC , &c. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.



32. primi

4. sexti.

32. primi

4. sexti.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, perpendicularē quæ in rectangulo tri-
gulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportio-
nalem inter duo basis segmenta: Item, latus utrumlibet angulum
rectum ambiens, medium proportionale inter totam basin, & illud
segmentum basis, quod dicto lateri adiacet.

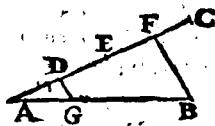
Ostensum est enim, esse ut BD , ad DA , ita DA , ad DC ;
ac propterea DA , esse mediam proportionalem inter BD , & DC :
Item esse ut CB , ad BA , ita BA , ad BD ; & ideo BA , mediam
esse proportionalem inter CB , & BD : Denique esse ut BC , ad
 CA , ita CA , ad CD ; ideoque CA , esse proportionalem mediam
inter BC , & CD . Quod est propositum.

PROBL. I. PROPOS. 9.

II.

A DATA recta linea imperatam par-
tem auferre.

IMPERATUR, ut ex linea AB , auferamus partem
tertiam. Ex A , ducatur recta AC , utcumque faciens angu-
lum CAB ; & ex AC , abscindantur tot partes æquales cu-
iuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB , ut
in proposito exemplo tres AD ,
 DE , EF . Deinde ex F , ad B ,
recta ducatur FB , cui per D , pa-
rallela agatur DG . Dico AG ,
esse partem tertiam imperatam.



Nam cum in triangulo ABF , lateri FB , parallela sit recta
 DG ; erit ut FD , ad DA , ita BG , ad GA ; componendo
igitur, ut FA , ad DA , ita BA , ad GA : sed FA , ipsius
 AD , est tripla ex constructione; Igitur & BA ipsius AG ,
erit tripla, ideoque AG , erit tertia pars ipsius AB , quæ im-
perabatur. A data ergo recta linea imperatam partem ab-
stulimus. Quod faciendum erat.

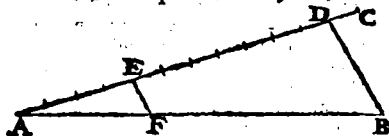
2. sexti.

18. quinti.

SCHOLION.

Quod si ex AB , auferenda sit pars, quæ contineat qua-
tuor undecimas ipsius AB , sumenda erunt ex AC , undecim
partes

partes aequales usque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium.



Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus ut DA, ad AE, ita BA, ad AF: Quare,

4. quinti.

& conueniendū est AF, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor undecimas ipsius AD, ex constructione; Igitur & AF, eadē pars erit rectae AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AB, pars completens quoscunque partes ipsius aliquotā.

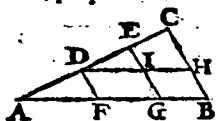
11

12.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam infectam similiter secare, ut data altera recta secta fuerit.

SIT recta AB, secanda similiter, ut secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quae sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungantur datae duae lineae ad



A, facientes angulum quemcumque BAC, & connectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelae ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, ut est secta AC, in D, & E. Nam ut AD, ad DE, ita AF, ad FG; Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I, erit rursus ut DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; quod FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Itaque datam rectam lineam infectam similiter secimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

2. sexti.

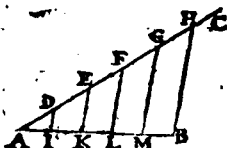
2. sexti.

34. primi

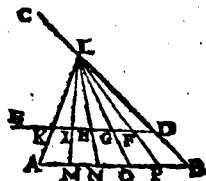
SCHO.

SCHOLIUM

Ex hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio dividendi lineam rectā datam in partes quoscunque aequales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus. Sit enim data recta AB , dividenda in quinque partes aequales. Ducta recta AC , faciente cum AB , quemcunque angulū CAB , sumatur ex ea quinque partes aequales AD, DE, EF, FG, GH . Quia igitur linea recta AH , utcunque est divisa, si ex H , ad B , ducatur recta HB , & huic ex punctis D, E, F, G , parallela agantur DI, EK, FL, GM ; erit AB , similiter divisa, ut AH , cum constet ex demonstratione huius problematis. Cum igitur AH , sit divisa in quinque partes aequales, erit & AB , in totidem aequales partes divisa. Haud aliter in plures partes aequales dividetur eadem recta AB .



Hic rationi dividenda linea recta in quoscunque partes aequales, adiungi possunt aliae non inveniendae. cum propos. 10. lib. 1. sumus polliciti. Sit enim rursus data linea recta AB , dividenda in quinque partes aequales. Ducatur ex B , recta BC , utcunque faciens angulum cum AB ; Deinde ex assumpto puncto D , agatur DE , parallela ipsi AB , ex qua abscindantur quinque aequales partes DF, FG, GH, HI, IK , ea lege tamen, ut DK , minor sit quam AB . Postremo ex A , per K , recta ducatur AL , occurrens ipsi BC , in L , puncto, a quo per puncta F, G, H, I , recta ducantur LP, LO, LN, LM , quas dico dividere rectā AB , in quinque partes aequales. Cum enim DE , sit parallela ipsi AB , erit angulus LKI , angulo LMA , & angulus LKI , angulo LMA , aequalis: est autem angulus ALM , communis; Aequiangula igitur sunt triangula LKI, LMA , ac propterea ut LI , ad IK , ita LM , ad MA ; Item eadem ratione, ut LI , ad IH , ita LM , ad MN : sed ut LI , ad



29. primi

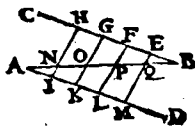
4. feci.

ad

7. quinti.
11. quinti.
9. quinti.

ad IK , ita LI , ad IH , quod aequalis sumptis sint IK , IH ; igitur ut LM , ad MA , ita eadem LM , ad MN ; ideoque aequaliter erunt AM , MN . Non aliter ostendens MN , aequaliter esse ipsi NO , & NO , ipsi OP , & OP , ipsi PB . Divisa est ergo AB , in quinque partes aequales. Quod est propositum.

ALITER. Ab extremis punctis A , & B , educantur duae rectae BC , AD , inter se parallelae; Et ex BC , abscindantur quatuor partes aequales. BE , EF , FG , GH , ut sint tot partes una minus, in quas est linea dividenda; His autem ex AD , totidem aequales resciuntur AI , IK , KL , LM . Ductis igitur rectis EM , FL , GK , HI , secantibus rectam AB , in NO , P , Q ;



33. primi

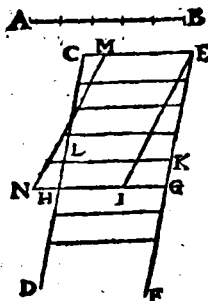
dico ipsam AB , sectam esse in quinque partes aequales. Cum enim aequales sint, & parallelae GH , IK , erunt & HI , GK , parallelae; Eademque ratione parallela erunt GK , FL , EM . Quare cum AM , secta sit in quatuor aequales partes, erit & AQ , similiter in quatuor partes aequales divisa, ut constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione divisa erit & BN , in quatuor partes aequales, eo quod BH , in totidem est partes aequales divisa. Quare cum tam AN , quam BQ , aequalis sit singulis partibus NO , OP , PQ , erunt omnes quinque partes AN , NO , OP , PQ , QB , inter se aequales. Quod est propositum.

ALITER. Preparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum. Ductis duabus rectis inter se parallelis utrunque CD , EF ; ex utraque abscindantur partes inter se aequales quocunque, saltem tot, in quas partes dividenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde officio circini capiatur longitudo rectae AB , dividenda, eaque ex aliquo puncto lineae CE , ut ex E , transferatur in instrumentum ad punctum I , illius linea, qua tot spatia terminat, in quas partes linea proponitur dividenda, qualis in exemplo est recta GH ; ea enim includit quinque spatia. Postremo ex E , ad I , recta ducatur EI , quam dico divisam esse in quinque aequales partes. Cum enim GK , HI , aequales sint, & parallelae, erunt quoque GH , KL , parallelae; Eodemque modo omnes linea inter rectas CD , EF ,

33. primi

inter

inter se parallela ostenduntur. Quare, ut ex demonstratione huius 10. propos. liquet, quemadmodum EG , diuisa est in quinque partes aequales, ita similiter in totidem diuisa erit EI . Si igitur officio circini singulae partes linea EI , transferantur in rectam propositam AB , ipsi EI , aequalem, diuisa erit & AB , in quinque partes aequales. Quod est propositum.



ALIQUANDO autem necesse est lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadē linea transferatur ab M , usque ad N , punctum linea GH , protracta, erit quoque MN , diuisa in quinque partes aequales. Vt constat, si ducatur ex M , ipsi EG , parallela, usque ad rectam GH . Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipienda erunt partes parallelarum CD , EF , minores, &c.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, Licebis nobis facili negotio datam lineam secare in duas partes, quae habeant proportionem quamcunque datam. Id enim non raro a Geometris exigitur.

SIT secunda recta AB , in duas partes, quae habeant proportionem inter se, quam recta C , & D . Ex A , ducatur linea AE , faciens angulum A , quemcunque, ex qua abscindatur recta AF , ipsi C , & FG , ipsi D , equalis: Ducta deinde GB , ducatur ei per F , parallela FH . Dico AB , sectam esse in H , secundum proportionem C , ad D . Hoc autem manifestum est, cum sit, ut AF , ad FG , atque adeo, ut C , ad D , ita AH , ad HB .



2. sexti.

POSTREMO inferemus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de η , quae uelantur in aqua. Nimirum.

SIT duae rectae lineae secantur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediae sectiones

ctiones in eadem proportionione cum quibuslibet segmentis duobus.

S E C E N T V R rectæ AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita ut sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD; Item AF, ad FB, ut CH, ad HD. Dico sectiones inter medias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis AE, CG, vel cum duobus FB, HD; hoc



est, esse AE, ad EF, ut CG, ad GH. Item FB, ad EF, ut HD, ad GH. Cum enim sit, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; Erit componendo, ut AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, ut AF, ad FB, ita CH, ad HD; Erit componendo, ut AB, ad FB, ita CD, ad HD; & convertendo, ut FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaque cum sit, ut FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et ut AB, ad EB, ita CD, ad GD; Erit ex aqno, ut FB, ad EB, ita HD, ad GD; Et convertendo, ut EB, ad FB, ita GD, ad HD; Et per conversionem rationis, ut EB, ad EF, ita GD, ad GH; Et dividendo, ut FB, ad EF, ita HD, ad GH. Quod est secundum.

22. quinti.

R V R S V 3, quia est, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; Et ut EB, ad EF, ita GD, ad GH; Erit ex aqno, ut AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est primum.

B R E V I V S ita propositio demonstrabitur hoc modo. Conveniant duo puncta A, & C, in unum, ut fiat angulus BCD, vel BAD; iunganturque rectæ DB, HF, GE. Quia igitur est, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; Parallela erit GE, ipsi DB. Rursus, cum sit, ut AF, ad FB, ita CH, ad HD; Parallela erit eadem ratione HF, ipsi DB. Quare & GE, HF, inter se parallela sunt: Ac propterea erit, ut AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est propositum.

2. sexti.

30. primi

2. sexti.

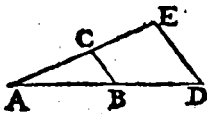
10.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

D V A B V S datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinvenire.

S I N T due rectæ AB, AC, ita dispositæ, ut efficiant angulum

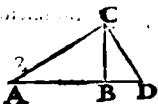
angulum A, quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam uolumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse ut AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triangulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC, erit ut AB, ad BD, ita AC, ad CE; Sed ut AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD: Vigetur AB, ad AC, ita AC, ad CE. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



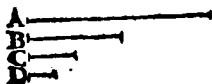
2. sexi.
7. quini.

SCHOLIUM.

ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Duce recta date AB, BC, consisnansur ad angulum rectum ABC; & coniungatur recta AC. Producta autem AB, antecedente, ducatur ex C, ad AC, perpendicularis CD, occurrens ipsi AB, producta in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD, sit rectus, & ab eo ad basin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. 8. propos. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, ut AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod est propositum.



INVENTA autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inuenieris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C; & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis,



ctiones in eadem proportionione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECENTVR rectæ AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita ut sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD; Item AF, ad FB, ut CH, ad HD. Dico sectiones inter medias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis AE, CG, vel cum duobus FB, HD; hoc



est, esse AE, ad EF, ut CG, ad GH. Item FB, ad EF, ut HD, ad GH. Cum enim sit, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; Erit componendo, ut AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, ut AF, ad FB, ita CH, ad HD; Erit componendo, ut AB, ad FB, ita CD, ad HD; & convertendo, ut FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaque cum sit, ut FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et ut AB, ad EB, ita CD, ad GD; Erit ex aqno, ut FB, ad EB, ita HD, ad GD; Et convertendo, ut EB, ad FB, ita GD, ad HD; Et per conversionem rationis, ut EB, ad EF, ita GD, ad GH; Et diuidendo, ut FB, ad EF, ita HD, ad GH. Quod est secundum.

RURSUS, quia est, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; Et ut EB, ad EF, ita GD, ad GH; Erit ex aqno, ut AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est primum.

BREVIVS tota propositio demonstrabitur hoc modo. Cū veniant duo puncta A, & C, in unum, ut fiat angulus BCD, vel BAD; iunganturque rectæ DB, HF, GE. Quia igitur est, ut AE, ad EB, ita CG, ad GD; Parallela erit GE, ipsi DB. Rursus, cum sit, ut AF, ad FB, ita CH, ad HD; Parallela erit eadem ratione HF, ipsi DB. Quare & GE, HF, inter se parallela sunt: Ac propterea erit, ut AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est propositum.

10.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SI NT duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, ut efficiant angulum

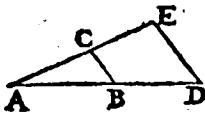
22. quinti.

2. sexti.

30. primi

2. sexti.

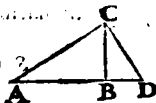
angulum A, quemcumque, sitque inveniendi illis tertia proportionalis, sicut quidem AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam uolumus esse antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipsi AC. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipsi AC, productæ in E. Dico CE, esse tertiam proportionalem, hoc est, esse ut AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triângulo ADE, lateri DE, parallela sit recta BC, erit ut AB, ad BD, ita AC, ad CE; Sed ut AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipsi BD: Vrgitur AB, ad AC, ita AC, ad CE. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adiutuenimus. Quod erat faciendum.



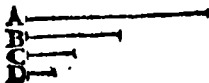
2. sexti.
7. quinti.

SCHOLIUM.

ALITER idem demonstrabimus, hoc modo. Dæ rectæ datæ AB, & C, constituantur ad angulum rectum ABC; & conjungatur recta AC. Producta autem AB, antecedens, ducatur ex C, ad AC, perpendicularis CD, occurrens ipsi AB, producta in D. Dico BD, esse tertiam proportionalem. Cum enim in triângulo ACD, angulus ACD, sit rectus, & ab eo ad basin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. 2. propos. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc est, ut AB, ad BC, ita erit BC, ad BD. Quod est propositum.



INVENTA autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inuenieris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis A, & B, adiungetur tertia proportionalis C; & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis,



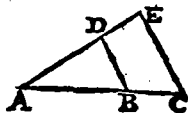
sionalis, sexta, septima, octava, &c.

10.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inueni-
da sit quarta proportionalis; sicut quidem A B, ad B C, ita
A D, ad quartam. Disponantur primæ duæ A B, B C, se-
cundum lineam rectâ, quæ sit A C:
Tertia uero A D, cum prima A B,
faciat angulum A, quemcunque.
Deinde ex B, ad D, recta ducatur
B D, cui per C, parallela ducatur
C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico
D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in trian-
gulo A C E, lateri C E, acta sit perpendicularis B D, erit ut
A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est
proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quar-
tam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



2. sexti.

SCHOLIION.

HINC facile elicimus, quoniam pacto, datis duabus rectis
lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportionem re-
periri possint. Si enim data sint duæ rectæ lineæ
A, B, in quacunque proportionem, si tertia quali-
bet accipiat C, & ei quarta proportionalis in-
ueniatur D, ut sit quemadmodum A, ad B, ita C,
ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte
inueniuntur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ
semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMUS etiam cum Pappo sequens proble-
ma. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartâ inueni-
re, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam.

SINT

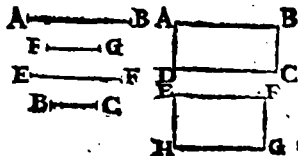
D B E. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. II. PROPOS. 16.

15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C, ut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehensum sub extremis A B, B C; rectangulum uero E F G H, comprehensum sub medijs E F, F G. Dico rectangula A C, E G, esse æqualia. Cū enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit ut A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelograma A C, E G, æqualia erunt. Quod est propositum.



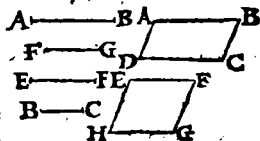
14. sexti.

CONTRA uero, sint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, esse proportionales, hoc est, esse ut A B, ad F G, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia sint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & C; erunt latera circa hosce angulos reciproca, sicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint,

14. sexti.

fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION



IDEM verum est, etiam si parallelogramma AC, EG , non sint rectangula, dummodo sint equiangula, ita ut anguli distis rectis lineis comprehensi sint aequales. Veluti

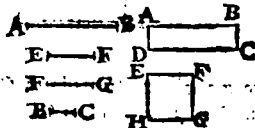
manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.

16.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT tres lineæ rectæ $AB, EF, \& BC$, proportionales, ut quidem AB , ad EF , ita EF , ad BC , sitque rectangulum $ABCD$, contentum sub extremis AB, BC ; &



quadratum mediæ EF , sit $EFGH$. Dico æqualia esse rectangulum AC , & quadratum EG . Sumpta enim recta FG , quæ æqualis sit ipsi EF , erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC , proportionales, ut quidem AB , ad EF , ita FG , ad BC ; eritque quadratum EG , comprehensum sub medijs EF, FG , propter æqualitatem rectarum EF, FG ; Quare rectangulum AC , comprehensum sub

extremis

extremis AB, BC , æquale est quadrato EG , hoc est, rectangulo sub medijs EF, EG , comprehenso: Quod est propositum.

SED sint iam æqualia rectangulum AC , & quadratū EG . Dico esse ut AB , ad EF , ita EF , ad BC . Cum enim æqualia sint rectangula AC , & EG , erit ut AB , ad EF , ita FG , ad BC . Ut autem FG , ad BC , ita est EF , ipsi FG , æqualis, ad eandem BC . Quare ut AB , ad EF , ita est EF , ad BC . Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

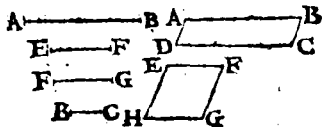
16. sexti.

15. sexti.

7. quinti.

SCHOLIUM.

EADEM omnino consequuntur, etiam si parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut EG , sit Rhombus, & AC , Rhomboides. Non enim dissimilis eris in his demonstratio, ut figura indicat.



COROLLARIUM.

Ex posteriori huius theorematum parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasvis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC , comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF , ostensum fuit, esse ut AB , ad EF , ita EF , ad BC . Quare EF , media est proportionalis inter AB , & BC .

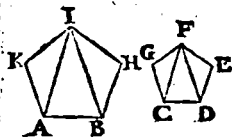
PROBL. 6. PROPOS. 18.

19.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describere.

SIT data recta AB , super quam describendum sit rectilineum

32. primi



Rectilineum rectilineo C D E F G, simile similiterque positum, Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coequantque rectæ A I, B I, in puncto I; eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis, totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rursus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H; conveniantque B H, I H, in puncto H; eritque eadem ratione triangulū B H I,

triangulo D E F, æquiangulum. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K; coequantque A K, I K, in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G E, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura existerint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, simile esse, similiterque positum. Cum enim angulus I A B, constitutus sit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis; Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit, & reliqui reliques, ut constat ex constructione. Quare æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam vero ita est A B, ad B I, ut C D, ad D F; & ita B I, ad B H, ut D F, ad D E; erit ex æquo ita A B, ad B H, ut C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia sunt. Sunt autem & latera circa æquales angulos H & E, proportionalia, ob triangula æquiangula B H I, D E F. Rursus ita est H I, ad I B, ut E F, ad F D; & ita I B, ad I A, ut F D, ad F C; & ita I A, ad I K, ut F C, ad F G; Quare ex æquo erit ita H I, ad I K, ut E F, ad F G; & ideo latera quoque circa angulos H I K, E F G, proportionalia, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data
ergo

4. sexti.

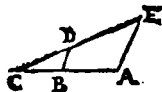
22. sexti.

4. sexti.

4. sexti.

22. sexti.

SINT tres rectæ AB, BC, CD ; oporteatque inuenire quartam, quæ ad CD , tertiam sit, ut AB , prima ad BC , secundam. Disponantur prima dua AB, BC , in directum, ut faciant rectam AC : Tertia vero CD , cum secunda BC , faciat angulum C , quemcunque.



Deinde ex B , ad D , recta ducatur BD , cui per A , parallela ducatur AE , occurrens rectæ CD , producta, in E . Dico ED , esse quartam, hoc est, esse ED , ad DC , tertiam, ut est AB , prima ad BC , secundam. Hoc autem manifestum est, cum AC, EC , proportionaliter secentur in B , & D .

2. sexti.

PROBL. 5. PROPOS. 13.

9.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ AB, BC , quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC . Diuisa AC , bisariam in E , ex E , centro, & intervallo EA , uel EC , semicirculus describatur ADC ; Deinde ex B , ad AC , perpendicularis educatur BD , ad circumferentiam usque. Dico BD , esse mediam proportionalem. Ductis enim rectis AD, CD , erit angulus ADC , rectus in semicirculo existens. Cum igitur ex angulo recto ADC , trianguli rectanguli ADC , deducta sit ad basin AC , perpendicularis DB , erit per corollarium 8. propos. huius lib. BD , media proportionalis inter AB , & BC . Duabus ergo datis rectis lineis, mediâ proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



31. tertij.

SCHOLION.

PERSPICUUM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo a quonvis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, mediam esse proportionalem,

CC

inter.

inter duo diametri segmenta, qua a perpendiculari facta sunt.

D sturenim semicirculus ABC , & ex puncto D , diametri



AC , ducatur ad circumferentiam recta DB , perpendicularis ipsi AC . Dico DB , esse proportionalem mediam inter AD , & DC , id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur recta AB , CB , fiet angulus

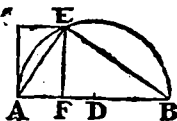
31. tercij.

ABC , rectus; Quare per coroll. propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF , media proportionalis inter AE , & EC . Item GH , inter AG , & GC , &c.

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

SIT data recta AC , & diuidenda proponatur recta AB , (quæ minor non sit quam dupla ipsius AC , sed uel dupla, uel maior) ita ut inter huius segmenta, media proportionalis sit AC . Disponantur rectæ AB , AC , ad angulum rectum BAC , & diuisa AB , bisariam in D , ex D , centro, intervallo autem DA , uel DB , semicirculus describatur AEB . Deinde per C , ducatur ipsi AB , parallela CB , secans circumferentiam in E , puncto, a quo demit-



tatur ad AB , perpendicularis EF . Dico AC , esse mediam proportionalem inter segmenta AF , FB . Ducis enim rectis AE , BE ,

34. primi

28. primi

erit ut iam est demonstratum, ex coroll. 8. propos. huius lib. EF , media proportionalis inter AF , & FB . Cum igitur EF , æqualis sit ipsi AC , eo quod parallelogrammum sit $ACBF$; (sit enim CE , ipsi AF , parallela per constructionem, & AC , ipsi BF , propter angulos rectos CAF , & EFA ;) erit & AC , media proportionalis inter AF , & FB . Quod est propositum.

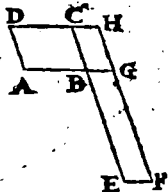
13.

THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQUALIVM, & unum unæquale

lem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB, & BG, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstravimus. Producantur iam DC, & FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma DB, BF, erit ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH. Sed ut DB, ad BH, ita est AB, basis ad basin BH, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter ut BF, ad BH, ita est basis EB, ad basin BC: Igitur ut AB, ad BG, ita est EB, ad BC, quod est propositum.



CONTRARIO, sint iam latera circa æquales angulos ABC, EBG, reciproca, hoc est, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, esse æqualia. Facta enim eadem constructione, cum sit, ut AB, ad BG, ita EB, ad BC; Vt autem AB, ad BG, ita DB, ad BH; & ut EB, ad BC, ita BF, ad idem BH: erit quoque ut DB, ad BH, ita BF, ad idem BH; Ac idcirco æqualia erunt parallelogramma DB, BF. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

CC 2 THEOR.

7. quinsi.
1. sexsi.

1. sexti.

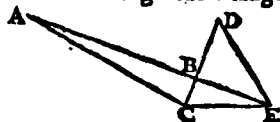
9. quinsi.

14.

THEOR. 10. PROPOS. 15.

AEQUALIVM, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SINT duo triacula æqualia ABC , DBE , habentia angulos, qui ad B , æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse ut AB , ad BE , ita DB , ad BC . Coniungantur triacula ad angulos æquales, ita ut



AB , BE , unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC , DBE , sint æquales; erunt & DB , BC , una recta li-

nea, seu demonstratum est, ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE ; quoniam æqualia sunt triacula ABC , DBE , erit ut ABC , ad BCE , ita DBE , ad idem BCE ; sed ut triangulum ABC , ad triangulum BCE , ita est basis AB , ad basin BE , quod hæc triacula eiuſdem sint altitudinis; & similiter ut DBE , ad BCE , ita basis DB , ad BC ; Quare ut AB , ad BE , ita DB , ad BC . Quod est propositum.

IA M uero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B , reciproca, hoc est, ut AB , ad BE , ita DB , ad BC . Dico triacula ABC , DBE , esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit ut AB , ad BE , ita DB , ad BC ; ut autem AB , ad BE , ita triangulum ABC , ad triangulum BCE ; & ut DB , ad BC , ita triangulum DBE , ad triangulum idem BCE : Erit ut ABC , ad BCE , ita DBE , ad idem BCE ; propterea; æqualia erunt triacula ABC , DBE .

7. quinti.

2. sexti.

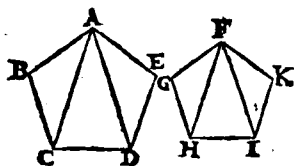
1. sexti.

9. quinti.

triangula ABC , FGH , habentia angulos BAC , GFH , æquales; Item angulos ACB , FHG ; ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt. Ea-

dem ratione erunt similia triangula AED , FKI .

Deinde quia est ut AC , ad CB , ita FH , ad HG , ob similitudinem triangulorum ABC , FGH ; ut autem CB , ad CD , ita



est, ex hypotesi, HG , ad HI , ob similitudinem polygonorum; Ex æquo erit ut AC , ad CD , ita FH , ad HI . Et quoniam angulus BCD , æqualis ponitur angulo GHI ; est autem & ablatum ACB , ostensus æqualis ablato FHG ; erit & reliquus ACD , reliquo FHI , æqualis. Quare triangula ACD , FHI , æquiangula erunt, ideoque similia.

Dico præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis. Quoniam similia sunt triangula ABC , FGH , erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC , FH : Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD , FHI , duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC , FH . Quare ut triangulum ABC , ad triangulum FGH , ita erit triangulum ACD , ad triangulum FHI . Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE , ad triangulum FKI , ut ACD , ad FHI . Atque ita proportionalia sunt triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Ut autem unum antecedens ad unum consequens, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

De c o postremo, polygonis inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit ut triangulum ABC , ad triangulum FGH , ita polygonum $ABCDE$, ad polygonum $FGHIK$; Triangulum

6. sexti.

4. sexti.

12. quinti.

6. sexti.

19. sexti.

12. quinti.

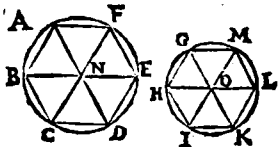
15. quinti.

gulum uero ABC , ad triangulum FGH , habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG : habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorumdem laterum homologorum AB, FG .

Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

Quod si polygona similia, fuerint aequaliter, & equiangulara, diuiduntur quoque in similia triangula, & numero equalia, ductis e centrīs circularum ipsa circumscribentium



ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, aequaliter, & equiangulara $ABCDEF, GHILKM$, que circumscribantur a circulis circa centra N, O , ex quibus recte ducitur

NA, NB , &c. Dico triangula $NC D, OIK$, similia esse. Quoniam anguli CND, IOK , aequales sunt; (quod aequae submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrumque spaciū N, O , quatuor rectis aequalens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & quantitate aequales, subtenso nimirum a basibus aequalibus, consentaneis lateribus aequalibus.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum utrobique sit proportio aequalitatis; Similia erunt triangula $NC D, OIK$. Eademque est ratio de ceteris. At uero haec triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygoni sint ipsorum triangulorum aequae multiplicia, ut patet, habebunt utique eandem cum ipsis proportionem.

6. sexti.

15. quinti.

P O R R O ex hoc theoremate persacile demonstrabimus ibere.

theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

Si linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

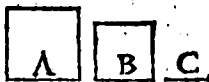
Si T primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, ut constat ex 1. defin. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est dupla proportionis, ut hic apparet. 1. 2. 4.



Si T iam quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, ut dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis dupla, ut in exemplo adducto superius apparet.

COROLLARIUM.

Hic manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similitudine descriptum.



Hoc non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematum, ex suo theoremate: Vt perspicuum est in hac figura apposita.

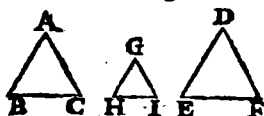
THEOR.

20.

THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia,
& inter se sunt similia.

SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis



rectilinei GHI; Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdem rectilinei GHI; erunt per communem sententiam, anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandem similitudinem latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea uidelicet, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI; erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, et nimirum, quæ angulos ambiunt æquales; Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

II. quins;

21.

THEOR. 16. PROPOS. 22.

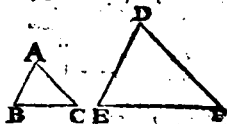
SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales,

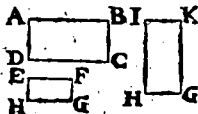
ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum
rectilineum descripsimus; Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

DICUNTUR autem rectilinea super lineas rectas de-
scripta, esse similia & similiter posita, quando anguli aequales
constituuntur super ipsas rectas lineas, & reliqui aequales sem-
per ordine se se consequuntur, nec non, & latera proportiona-
lia. Ut triacula ABC, DEF ,
non solum erunt similia, sed etiā
super rectis BC, EF , similiter de-
scripta, si anguli B, C , aequales
fuerint angulis E, F , & ita sit



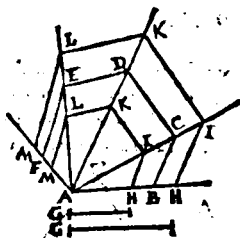
AB , ad BC , ut DE , ad EF , &c. At super rectas BC, DE ,
non dicuntur similiter esse descripta, cum anguli B, C , non sint
aequales angulis D, E . Similiter re-
ctangula AC, EG , similia, dicuntur
similiter esse descripta sup rectas DC ,
 HG , quoniam ut AD , ad DC , ita
est EH , ad HG , &c. At vero rectan-
gula AC, IG , non dicuntur similiter descripta super rectas
 DC, HG , quamvis sint similia, ut manifestum est. Eadem ta-
men similiter erunt descripta super rectas DC, IH , vel super
rectas AD, HG .



Omnes autem figura secundum constructionem huius proble-
matis descriptae, sunt necessario similiter posita, ut patet in re-
ctilineis $ABHIK, CDEFG$, super lineas AB , & CD , de-
scriptis. Item omnes aequaliter figura, & aequiangulae, sunt
quoque posita similiter.

FORTASSIS autem expeditius Problema propositum
conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo $ABCDE$,
super datam rectam G , describendum simile rectilineum, simi-
litterque positum. Productis duobus lateribus AB, AE , cir-
ca angulum A , educantur ex A , per omnes alios angulos re-
cta AC, AD, AE , quantumlibet. Deinde ex AB , abstin-
datur AH , aequalis data recta G , vel certe ex ipsa AB , ulte-
rius producta, si uidelicet G , fuerit maior, quam AB . Post
hac per H , agatur recta HI , lateri BC , parallela, & per
 I , recta

I, recta FK, lateri C D, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suis habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF; factumque



erit, quod proponitur. Cum enim angulus A, sit communis; & angulis ABC, AFE, aequales sint anguli AHI, AML; Nec non & angulis ACB, ACD; aequales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, aequalis sit angulus HIK; Eodemque modo angulus CDE, DEF, aequales sint anguli IKL, KLM: Aequiangula vrant rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum aequales angulus habent proportionalia. Cum enim triangu-
la AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit, ut AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus, ut BC, ad CA, ita HI, ad IA; Et ut CA, ad CD, ita IA, ad IK; Ac proinde, ex equo, ut BC, ad CD, ita HI, ad IK, &c. Igitur, ex defn. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, & similiter posita.

29. primi

4. sexti.

17.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Si vnt triangula similia ABC, DEF, habentia angulos aequales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF. Sint enim primum latera BC, EF, aequalia; eruntque propterea triangula inter se aequalia, habebuntque proportionem aequalitatis, quemadmodum & latera homologa; Atqui proportio aequalitatis



26. primi

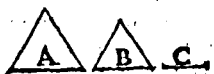
litas duplicata solum efficit proportionem æqualitatis : (Possitis enim tribus magnitudinibus æqualibus , dicitur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis , quam habet prima ad secundam , ut constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis , sicuti & prima ad secundam .) Igitur triangulum ABC , ad triangulum DEF , proportionem habet duplicatam eius , quam habet latus BC , ad EF . Quod est propositum .

S I T secundo BC , latus latere EF , maius ; & ex BC , ab scindatur rectis BC , EF , tertia proportionalis BG , ducaturque recta AG . Quia igitur est ut AB , ad BC , ita DE , ad EF ; erit permutando ut AB , ad DE , ita BC , ad EF : Vt autem BC , ad EF , ita est per constructionem EF , ad BG : Vt ergo AB , ad DE , ita erit EF , ad BG . Quare cum triangula ABG , DEF , habeant latera circa angulos B , E , æquales reciproca , ipsa inter se æqualia erunt ; & propterea ut triangulum ABC , ad triangulum DEF , ita erit triangulum ABC , ad triangulum ABG ; Vt autem triangulum ABC , ad triangulum ABG , eiusdem altitudinis , ita est basis BC , ad basin BG . Igitur ut triangulum ABC , ad triangulum DEF , ita est BC , ad BG . Atqui cum tres lineæ BC , EF , BG , sint proportionales , erit proportio primæ BC , ad tertiam BG , duplicata proportionis BC , primæ ad EF , secundam . Quare & triangulum ABC , ad triangulum DEF , proportionem habet duplicatam proportionis BC , ad EF . Similia igitur triangula inter se sunt , &c. Quod erat demonstrandum .

COROLLARIUM.

H I C manifestum est , si tres rectæ lineæ proportionales fuerint ; ut est prima ad tertiam , ita esse triangulum super primam descriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum .

S I N T enim tres rectæ proportionales A , B , C ; & super primam A , & secundam B , constituta triangula A , & B , similia , similiterque descripta .



Dico,

11. sexti.

11. quinsi.

15. sexti.

7. quinsi.

1. sexti.

19. *sexti.*



Dico, ut est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B: Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

B O D A M modo ostendes, ita esse triangulum supra secundum ad triangulum supra tertiam simile similiterq; descriptu, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundat, & A, tertiam constituentur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

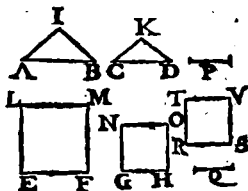
18.

THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

S I N T polygona similia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; Item angulos B, G, & sic deinceps. habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem A B, ad B C, ita F G, ad G H; & ut B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primo, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint A C, A D, F H, F I; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia, cum propter similitudinem habeant angulos numero æquales. Quoniam uero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesis, & circa ipsos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula

nales, ut quidem AB , ad CD , ita EF , ad GH ; Constituan-
turque super AB , CD , duo quæcunque rectilinea similia
similiterque descripta ABI , CDK ; Item super EF , GH ,
alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta,
 EFL , $GHON$. Dico, & hæc rectilinea esse propor-
tionalia, ut quidem ABI , ad
 CDK , ita EM , ad GO . In-
ueniatur enim rectis AB ,
 CD , tertia proportionalis P ;
& rectis EF , GH , tertia pro-
portionalis Q . eritque ex
æquo, ut AB , ad P , ita EF ,
ad Q : Vt autem AB , ad P ,
ita est rectilineum ABI , ad
rectilineum CDK , simile similiterque descriptum, ex corol-
lario propositionis 20. huius lib. uel si fuerint triangu-
la, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut EF , ad Q , ita re-
ctilineum EFL , ad rectilineum $GHON$. Igitur ut ABI , ad
 CDK , ita erit EM , ad GO . Quod est, propositum.



11. sexti.

22. quinti.

11. quinti.

...E. CONVERSO, sint iam dicta rectilinea proporcio-
na. Dico quatuor rectas AB , CD , EF , GH , esse quoque
proportionales, ut quidem AB , ad CD , ita EF , ad GH .
Inueniatur enim tribus rectis AB , CD , EF , quarta pro-
portionalis RS , super quam describatur rectilineum $RS-$
 $V T$, simile rectilineo EM , & ob id rectilineo GO , simili-
terque positum. Quoniam igitur est, ut AB , ad CD , ita
 EF , ad RS ; erit quoque, ut iam est ostensum, ut ABI ,
ad CDK , ita EM , ad RV . Vt autem ABI , ad CDK ,
ita quoque ponitur EM , ad GO : Igitur erit ut EM , ad
 RV , ita EM , ad GO ; Ac idcirco equalia erunt RV , GO .
Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessa-
rio, ut mox ostendemus, super rectas RS , GH , æqua-
les. Quare erit ut EF , ad RS , ita EF , ad GH . Ponitur
autem EF , ad RS , ut AB , ad CD . Igitur erit ut
 AB , ad CD , ita EF , quoque ad GH . Quam-
obrem si quatuor rectæ lineæ pro-
portionales fuerint, &c. Quod
erat demonstan-
dum.

12. sexti.

21. sexti.

11. quinti.

9. quinti.

7. quinti.

11. quinti.

Dd

LEMMA

L E M M A .

14. quinsi.

Q U O D autem aequalia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV , consistent super rectas aequales, ita ostendetur. Si enim inaequales sunt GH, RS ; sit GH , maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH , ad HO , ita RS , ad SV ; Ponatur autem GH , maior quam RS ; erit quoque HO , maior quam SV ; & propterea rectilineum GO , maius rectilineo RV , cum hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesein. Non ergo inaequales sunt rectae GH, RS . quod est propositum.

A L I T E R. Sint duo rectilinea ABC, DEF , aequalia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectae AB, DE , esse aequalia. Si enim ad



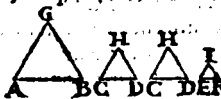
credatur aequalia, sit AB , maius, quam

DE ; inueniaturque rectis AB, DE , tertia proportionalis G . Quoniam ergo est, ut AB , ad DE , ita DE , ad G ; Est autem AB , maior, quam DE : Erit quoque DE , maior, quam G ; ac propterea multo maior AB , quam G . Ut uero AB , ad G , ea est rectilineum ABC , ad rectilineum DEF , per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. Igitur cum AB , maior sit, quam G , erit quoque rectilineum ABC , maius rectilineo DEF : quod est absurdum, cum positum sit aequale. Non ergo maior est AB , recta quam recta DE . Sed neque minor erit eadem ratio-

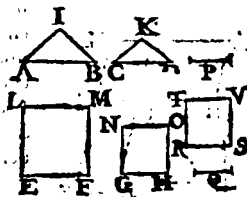
ne; quia & rectilineum ABC , minus ostenderetur
rectilineo DEF ; quod est contra hypothefin. Qua-
re aequales sunt rectae AB , DE .

SCHOLIUM

EODem modo, si fuerint tres rectae proportionales; erunt
& rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportiona-
lia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis,
habebimus quatuor rectae pro-
portionales. Igitur & quatuor
rectilinea proportionalia, ut hic
Euclides demonstravit. Cum igitur
id, quod a secunda est descriptum, aequale sit ei, quod a ter-
tia, eo quod & linea secunda sit aequalis tertiae; manifestum
est, quod proponitur.



BREVIVS tota hac propositio demonstrabitur, hoc ma-
do. Ponatur primo esse ut AB , ad CD , ita EF , ad GH . Di-
co esse quoque ut AB , ad CD , ita EF , ad GH . Cum
enim sit proportio rectilinei
 AB , ad CD , duplicata
proportionis AB , ad CD ; ite
proportio rectilinei EM , ad re-
ctilineum GO , duplicata pro-
portionis EF , ad GH : erunt
proportionis AB , ad CD ; &
 EM , ad GO , aequales; qua-
doquidem duplicata sunt pro-



19. vel 20.
sexii.

portionem aequalium AB , ad CD ; & EF , ad GH . Quod est
primum. Rursus ponatur secunda esse, ut AB , ad CD , ita EF ,
ad GH . Cum enim sit proportio AB , ad CD , duplicata
proportionis AB , ad CD ; Item proportio EM , ad GO , dupli-
cata proportionis EF , ad GH : Erunt proportionis AB , ad
 CD ; & EF , ad GH , aequales; quandoquidem earum propor-
tiones duplicatae sunt.

AB , ad CD , aequales ponuntur. Quod est

secundum.

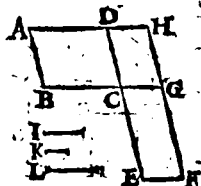
19. vel 20.
sexii.

24.

THEOR. 17. PROPOS. 13.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

S I N T parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G: Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut B C, C G, efficiant



unam lineam rectam; Quo facto, cum anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Procl'o demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H. Sumpta iam recta I, quacunque, inueniatur ratio BC, C G, & I, quarta proportionalis K:

Item etibus D C, C E, & K; quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H; Ve autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K; erit quoque ut A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendens esse, ut H C, ad C F, ita K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. definitur huius lib. componitur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; hoc est, ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque

12. sexti.

1. sexti.

11. quinti.

22. quinti.

demque ratione ostendemus, proportionem $A C$, ad $C F$, componi ex proportionibus $B C$, ad $G E$, & $B C$, ad $C G$; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, ut $B C$, $C E$, efficiant unam rectam lineam, &c. Acquiungula itaque parallelogramma $A C G F$, rationem habent, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

EXPLICITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniungatis parallelogrammis, ut prius, cum sit ut $A C$, ad $C H$, ita $B C$, ad $C G$; & ut $C H$, ad $C F$, ita $D C$, ad $C E$; Propositio autem $A C$, ad $C F$, componatur, per definitiorem, ex intermedijs proportionibus $A C$, ad $C H$, & $C H$, ad $C F$, componitur quoque eadem proportio $A C$, ad $C F$, ex proportionibus $B C$, ad $C G$, & $D C$, ad $C E$, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.

DEMONSTRAT hoc in loco Federicus Commandinus nonnulla alia ad compositionem proportionum pertinentia non inutilia, quæ nos quoque asserre decrevimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

TRIANGULA, quæ unum angulum utriusque angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

SINT triangula $A B C$, $D E F$, angulum C , angulo F , habentia æqualem. Dico proportionem trianguli $A B C$, ad triangulum $D E F$, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportionibus $B C$, ad $E F$, & ex proportionibus $A C$, ad $D F$; Vel ex proportionibus $B C$, ad $D F$, & proportionibus $A C$, ad $E F$. Complexis enim parallelogrammis $C G F H$, erunt ea æquiungula; atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula $A B C$, $D E F$, cum ipsis, quorum sunt dimidia, eandem habeant proportionem; Erit



D d 3 quoque

.11

1. sexti.

.111
L

23. sexti.

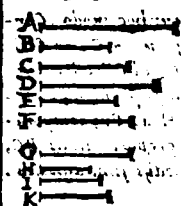
15. sexti.

quoque proportio ABC, ad DEF, composita ex proportionibus internum BC, AC, ad latera EF, DF.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

Hoc, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos 23. Sint enim tres proportionēs A, ad B; C, ad

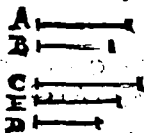


D; & E, ad F. Oportet iam ex ipsis anā proportionem componere. Fias ut A, ad B, ita G, ad H; & ut C, ad D, ita H, ad I; & ut E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim composita sit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; quod his illa sumpta sint aequales.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportionē maiore C, ad D. Fias, ut A, ad B, ita C,



ad E; statimaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportionē C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si pro-

portio C, ad E, hoc est A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.

IIII.

TRIANGULA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quę sub lateri-

bus æqualem angulum comprehendentibus
continentur.

SINT triangu- ABC , DEF , angulum A , angulo D ,
habentia æqualem. Dico esse ABC , ad DEF , ut rectang-
ulum sub AB , AC , ad rectangulum sub DE , DF . Ductis
nim ad AC , DF , perpendicularibus BG , EH , erunt trian-
gula ABG , DEH , æquianguli, ut constas ex coroll. 1. propos.
32. lib. 1. cū duo anguli A , AGB ,
duobus angulis D , DHE , sint
æquales. Igitur erit, ut GB ad
 BA , ita HE ad ED : Ut au-
tem GB , ad BA , ita est rectan-
gulum sub BG , AC , ad rectan-
gulum sub BG , AC . (Nam si
bases ponantur GB , BA , erit eorum eadem altitudo AC .)
Et eadem ratione, ut HE , ad ED , ita est rectangulum sub
 EH , DF , ad rectangulum sub DE , DF . Rectangulum igitur
sub BG , AC , ad rectangulum sub AB , AC , est, ut re-
gulum sub EH , DF , ad rectangulum sub DE , DF ; et per
mutando, rectangulum sub BG , AC , ad rectangulum sub
 EH , DF , ut rectangulum sub AB , AC , ad rectangulum
sub DE , DF . sed ut rectangulum sub BG , AC , ad rectan-
gulum sub EH , DF , ita est triangulum ABC , ad triangu-
lum DEF , quod hac triangu-
la sint rectangulorum illorum
dimidia. (Habens enim easdem cum illis bases AC , DF , al-
titudinesque easdem BG , EH ; ac proinde inter easdem cum
illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangu-
lum ABC , ad triangulum DEF , ut rectangulum sub AB ,
 AC , ad rectangulum sub DE , DF . Quod est propositum.



4. sexti.

1. sexti.

11. quinti.

15. quinti.

41. primi

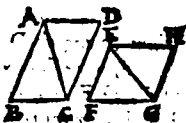
PARALLELOGRAMMA inter se æqui-
angula, eandem habent proportionem, quam
rectangula sub lateribus ipsorum æqualem an-
gulum continentibus comprehensa.

V.

SINT parallelogramma $ABCD$, $EFGH$, æquian-
gula inter se, quorum anguli B , & F , sint æquales. Dico esse,

Dd 4 us

in BD, ad FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quae angulos aequales B, F, subtenent, habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, aequalem. Quare, ut iam demonstravimus, erit, ut ABC, ad EFG, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG, ipsorum dimidia; Erit quoque ut BD, ad FH, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.



15. quinti.
12. quinti.

VL

TRIANGULA, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportionibus basium, & proportionibus altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportionibus basium BC, ad EF, & proportionibus altitudinis AI, ad altitudinem DK. Sum enim primo altitudines aequales, bases vero vel aequales erant, vel



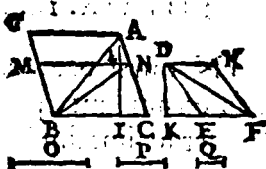
7. quinti.
1. sexti.

inequales: Fiatque, ut BC, ad EF, ita L, ad M; Ut autem AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto, erit M, ipse N, aequalis, quod & AI ipse DK, aequalis ponitur; Ac proinde erit L, ad N, ut L, ad M, hoc est, ut BC, ad EF. At vero, ut BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum

DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. Igitur quoque erit, ut L, ad N, ita triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH; sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, basium BC, ad EF; & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF.

¶ parallelogrammi CG , ad parallelogrammi EH , ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

Si NT iam altitudines AI , DK ; inaequales, & AI , maior; bases vero BC , EF , vel aequales, vel etiam inaequales. Fiac, ut AI , ad DK , ita O , ad P ; & ut BC , ad EF , ita P , ad Q . Abscissa deinde IL , aequali ipsi DK ; ducatur per L , ipsi BC , parallela LM , secans AC , in N , iungaturq; recta BN . Quoniam igitur



est triangulum ABC , ad triangulum NBC ; & parallelogrammum CG , ad parallelogrammum CM , ut altitudo AI , ad altitudinem IL , vel ad DK , ipsi IL , aequali, hoc est, ut O , ad P , per ea, quae ad 1. propos. huius lib. ostendimus: Et ut triangulum NBC , ad triangulum DEF , & parallelogrammum CM , ad parallelogrammum EH , ita est, basis BC , ad basin EF , (cum eandem sit altitudo) hoc est, ita P , ad Q , erit ex aequo ABE , ad DEF , & CG , ad EH , ut O , ad Q . Quare cum proportio O , ad Q , componatur ex proportione O , ad P , hoc est, altitudinis AI , ad altitudinem DK ; & ex proportione P , ad Q , hoc est, basis BC , ad basin EF : Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC , ad triangulum DEF , & parallelogrammi CG , ad parallelogrammum EH . Quod est propositum.

Eodem modo ostendetur proportio trianguli DEF , eius altitudo minor est, ad triangulum ABC , & parallelogrammi EH , ad parallelogrammum CG , composita esse ex proportione basis EF , ad basin BC , & proportione altitudinis DK , ad altitudinem AI . Si enim fiat, ut EF , ad BC , ita Q , ad P ; & ut DK , ad AI , ita P , ad O , & reliqua fiant, ut prius, erit triangulum DEF , ad triangulum NBC , & parallelogrammum EH , ad parallelogrammum CM , ut EF , ad BC , hoc est, ut Q , ad P . Item triangulum NBC , ad triangulum ABC , & parallelogrammum CM , ad parallelogrammum CG , ut LI , seu DK , ad AI , hoc est, ut P , ad O . Ex aequo igitur erit, ut DEF , ad ABC , & EH , ad CG , ita Q ad O . Quocirca cum proportio Q , ad O , componatur ex proportione Q , ad P , hoc est, EF ,

1. sexti.

1. sexti.

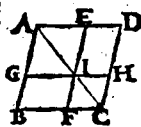
E F, ad B C, & ex proportione P, ad O, hoc est, D K, ad A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eisdem proportionibus.

22.

THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

Es t o parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctū I, ducantur rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma circa diametrum, nempe E G, F H, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam



angulus G A E, idem est qui angulus B A D; & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B. C D. Quare æquiangulum est E G, ipsi B D: Et eadē ratione eidem B D, æquiangulum erit F H.

Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum sit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, ut perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. uel. etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. erit ut A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursum erit ut B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item ut C A, ad C D, ita I A, ad I E. Ex æquo igitur, ut B C, ad C D, ita G I, ad I E; ac propterea & latera circa angulos B C D, G I E, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum

4. sexti.

22. quinti.

num

num F H, simile esse eidem parallelogrammo B D; atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

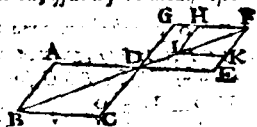
21. sexti.

S C H O L I O N.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius, esse talia, quæ habeant unum angulum cum toto parallelogrammo communem, ut manifestum est ex forma demonstrationis.

Q U O D si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam conficiatur parallelogrammum aliud; ita ut duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, ipsæ fore mediæ ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim A B C D, diameter B D, sit producta ad F, circa quam conficiatur parallelogrammum D E F G, cuius duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, simile esse parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter se sunt equiangula, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam quia angulus A, equalis est angulo alterno A D G; huic autem equalis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. Rursus quia anguli A D C, G D E, ad verticem, sunt æquales, erunt his quoque oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur equiangula sunt G E, A C, parallelogramma. Quod autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, equiangulum sit triangulo D G F; & triangulum B C D, triangulo D E F, ut constat ex propos. 29. lib. 1. Erit ut B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rursus ut A D, ad D B, ita G F, ad F D; & ut D B, ad D C, ita F D, ad F E, ac propterea ex æquo ut A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. Non ferri ostendetur, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse.

Quare



34. primi

15. primi

34. primi

4. sexti.

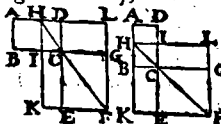
28. sexti.

Quare similia sunt parallelogramma $A C$, $G F$: Quod si circa eandem diametrum confitas parallelogrammum $H I K I$, habens latera parallela lateribus parallelogrammi $A C$, idem demonstrabitur. Nam productis $A D$, $C D$, donec occurrant rectis $F K$, $F H$, productis in E , & G ; erit $H K$, simile ipsi GE , ut Euclides demonstravit: Atqui eidem & E , simile est quoque $A C$, ut nunc ostendimus. Igitur & $H K$, $A C$, inter se similia sunt. Quod est propositum.

$S E D$ & absoluemus cum Peletario sequens problema.

D A T I S duobus parallelogrammis æqui-
angulis, sed non similibus: ex quouis illorum
alteri simile rescare.

D V O parallelogramma equiangula, sed non similia, sint
 $A B C D$, $C E F G$, & ex $A B C D$, abscindendum sit parallelogrammum ipsi $C E F G$ simile. Contingantur ambo ad angulos æquales $B C D$, $E C G$, ita ut



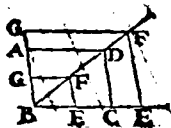
fit una linea recta $B C G$, & propterea ut ad pprii. i. & lib. i. demonstratum est, $E C D$, quoque una recta linea. Deinde ducta diameter $F C$,

producatur, donec in H , secet uel latus $A D$, uel latus $A B$; & per H , ducatur $H I$, parallela ipsi $A B$, uel ipsi $A D$. Dico parallelogrammum abscissum $H C$, simile esse ipsi $C F$. Si enim totum parallelogrammum $K L$, compleatur, erunt $H C$, $C F$, circa diametrum; Quare inter se similia, ut Euclides demonstravit in hac propositione.

$E A D B M$ autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, ut fiat simile alteri. Sit enim augendum $A B C D$, ut fiat ipsi $C E F G$, simile. Contingantur uti prius, & diameter $F C$, extendatur, donec in H , secet uel latus $B A$, protractum, uel latus $D A$, protractum. Deinde per H , ducatur $H I$, parallela ipsi $A D$, uel ipsi $A B$, donec secet uel $C D$, protractam, uel $C B$, protractam in I . Dico parallelogrammum auctum $H C$, simile esse parallelogrammo $C F$. Nam si

compleatur totum parallelogrammum $K L$, consistens $H C, C F$, circa diametrum; Quare similia inter se erunt.

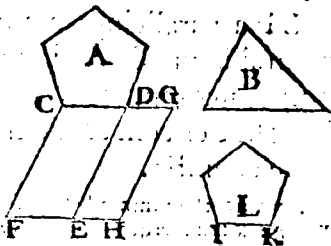
P R O B L E M A. autem est ex demonstratione huius theorematum facta ab Euclide, & ex probatione theorematum a nobis propositi in hoc Scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, Verum etiam similiter posita. Unde propositio quouis parallelogrammo $A B C D$, si maius debeat describi illi simile similiterque possumus, producendum eris latius unum, nempe $B C$; Atque ex E , quolibet puncto infra C , ipsi $C D$, parallela $E F$, ducenda, secans diametrum $B D$, producta in F ; & per F , ducenda $F G$, parallela ipsi $A D$, occurrens recta $B A$, producta in G . Erit enim parallelogrammum $G E$, simile similiterque possumus ipsi $A C$, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum eris punctum E , supra C , & reliqua peragenda, ut prius; cum figura indicat.



PROBL. 7. PROPOS. 25.

D A T O. rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

S I data duo rectilinea A , & B , & que constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A , æquale vero ipsi B . Super $C D$, unum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constitutur parallelogrammum $C E$, in quouis angulo, æquale rectilineo A ; Et super rectam $D E$, in angulo $E D G$, qui æqualis sit angulo $D C F$, parallelogrammum $D H$, æquale ipsi B ; cuiusque $C D G$, linea una



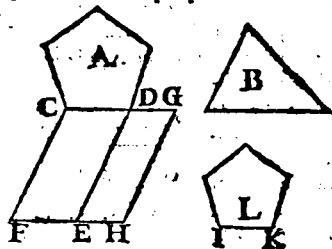
44. vel 45. primi.

una

17. *sexii.*

18. *sexii.*

una recta, nec nō F E H, ceu demonstratum fuit propos. 45. lib. 1. Inueniatur iam inter rectas C D, D G, tertia proportionalis I K, super quam constituitur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positū. Dico L, æquale etiā esse alteri rectilineo B. Cū enim sint proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit p coroll. propos. 20. huius lib. ut C D, prima ad D G, tertiā, ita A, rectilineum super primam C D, ad rectilineum L, super I K, secundam simile similiterq; descriptū.



1. *sexii.*

Vt autem C D, ad D G, ita est parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiusdem altitudinis. Igaur erit ut C E, ad D H, ita A, ad L. Vt autē C E, ad D H, ita est A, ad B, propter æqualitatem parallelogrammorum, & horum rectilinearum. Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; proptereaq; æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

11. *quinti.*

9. *quinti.*

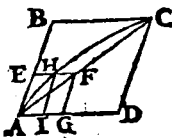
23.

THEOR. 19. PROPOS. 26.

SI a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

E x parallelogrammo B D, abscissum sit parallelogrammum E G, simile similiterq; positum, habens cum ipso angulū cōmunem E A G. Dico E G, consistere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ si fuerint una linea

linea recta, perspicuum est, cum $A F$, sit diameter ipsius $E G$, & $A C$, diameter ipsius $B D$, paral. logrammum $E G$, consistere circa diametrum $A F C$, totius parallelogrammi. Quod si $A F, C F$, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter $A C$, secans latus $E F$, in H puncto, per quod ipsi $F G$, parallela agatur $H I$. Quoniam igitur parallelogramma $B D, E I$, sunt circa eandem diametrum $A H C$, ipsa erunt similia, similiterque posita. Quare erit ut $B A$, ad $A D$, ita $E A$, ad $A I$: Sed ut $B A$, ad $A D$, ita quoque est $E A$, ad $A G$; quod parallelogramma $B D, E G$, ponantur similia, similiterque posita. Igitur erit ut $E A$, ad $A I$, ita $E A$, ad $A G$. Ac propterea æquales erunt rectæ $A I, A G$; pars, & totum; quod est absurdum.

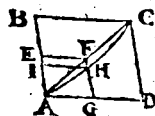


24. sexto.

11. quinti.

9. quinti.

Quo d si dicatur recta $A H C$, secare alterum latus $F G$; Tunc ducta $H I$, parallela ipsi $E F$, erunt rursus similia parallelogramma $B D, I G$, similiterque posita. Quare erit ut $D A$, ad $A B$, ita $G A$, ad $A I$: Sed ut $D A$, ad $A B$, ita quoque est $G A$, ad $A E$, ob similitudinem parallelogrammorum $B D, E G$; Igitur erit ut $G A$, ad $A I$, ita $G A$, ad $A E$; ideoque æquales erunt rectæ $A I, A E$; pars & totum: Quod est absurdum. Itaque si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.



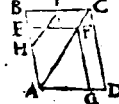
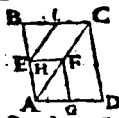
24. sexto.

11. quinti.

9. quinti.

SCHOLIUM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensur, hoc modo. Divisis lateribus $A B, B C$, bisariam in punctis H, I , sine punctum H , cadat in punctum E , sine supra, sine infra; dicantur rectæ $H I, A F$. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est ut $A B$, ad $B C$, ita $A E$, ad $E F$; Vt autem tota $A B$ ad totam $B C$, ita est dimidia $H B$, ad dimidiam $B I$; Erit ut $H B$, ad $B I$, ita $A E$, ad $E F$. Triangula igitur $H B I, A E F$, cum habeant circa



angulos

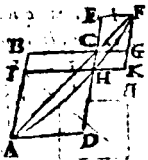
15. quinti.

11. quinti

esse CB; ad BA, ita FE, ad EC; eo quod parallelogramma BD, EG, ponantur similia similiterque descripta; Igitur & FE, ad EC, hoc est, ad sibi aequalen KH, maiorem habebis proportionem, quam HB, ad BA, hoc est, quam FK, ad KH. Quam ob rem cum FE, ad KH, maiorem habeat proportionem, quam FK, ad eandem KH, eris FE, maior quam FK, pari quam totam: Quod est absurdum.

10. quinti.

Quod si quis dicat, rectam AHF, secare latum CD. Tunc per H, ducta recta BC, parallela HI, que occurrat rectae FG, producta in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma ID, EK, per ea, que ad propp. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut HD, ad DA, ita FK, ad KH. Habes autem CD, ad DA, maiorem proportionem, quam HD, ad DA; Es igitur CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterque posita sunt concessa; Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi aequalen KH, maiorem habebis proportionem, quam FK, ad KH; ideoque FG, maior eris, quam FK, pari quam totam: Quod est absurdum.

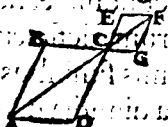


8. quinti.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli B, E, sunt aequales; itaque ut AB, ad BC, ita CF, ad FE; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos aequales B, E, latera proportionalia, ac ideoque equiangula erunt, habebuntque angulos BCA, EFC, aequales. Addito ergo communi angulo BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, aequales; sed hi inter parallelas BC, EF, aequales sunt duobus rellis. Quare & BCA, BCF, duobus erunt rellis aequalis; Ac propterea AC, FC, unam component rectam lineam. Quod est propositum.

25.

6. sexti.



29. primi

14. primi

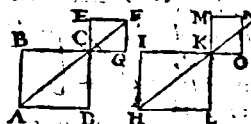
RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, ut ostenditur, circa eandem cum tota diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longiora EG, circa eandem cum tota diametrum, consistens,

Et erit

24. sexti.

erit EG , ipsi BD , simile similiterque positum. At ut si in rectangulo IL , quod sit aequalitatem ipsi BD , sumatur HM , aequalis ipsi EF , & MN , aequalis ipsi AF , &c. erit quidem rectangulum MO , aequale & simile rectangulo EG , propter aequalitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti, & ob id simile rectangulo IL ; sed tamen quia non est similiter positum, non consistit circa eandem circumscriptam IL , diametrum.

Idem quoque hic perspicitur in rectangulis, quorum unus est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se



communi, ut duo latera unius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualis sunt parallelogramma rectangula BD , EG , & IL , MO ; in quibus EG , quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo BD , quoniam est similiter positum; At vero MO , minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo IL , quia non est similiter positum, quamvis simile sit, cui prorsus sit aequale ipsi EG . Nam KM , aequalis est ipsi EF , & MN , ipsi EC , &c.

26.

THEOR. 26. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod a dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETERECTA AB , diuisa bisariam in C , superque eius dimidiam BC , constituitur quodcunque parallelogrammum $CDEB$, cuius diametrum BD . Si igitur compleatur totum paralle-

parallelogrammum $A B E H$, erit parallelogrammum $A D$, super dimidiam $A C$, consistens, applicatum secundum $A B$, deficiens parallelogrammo $C E$, & existens simile defectui $C E$. Dico parallelogrammum $A D$, ad dimidiam $A C$, applicatum, deficiensque parallelogrammo $C E$, maximum esse omnium, quæ secundum $A B$, rectam applicantur, deficiuntque parallelogrammis similibus similiterque positis ipsi $C E$. Sumpto enim puncto G , utrunque in diametro $B D$, & ductis per G , rectis $F G I$, $K G$, quæ sint parallelæ rectis $A B$, $B E$, erit parallelogrammum $F K$, secundum rectam $A B$, applicatum, deficiens parallelogrammo $K I$, quod ipsi $C E$, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum $C E$, diametrum. Quoniam uero complementa $C G$, $G E$, æqualia sunt; si addatur commune $X I$, erunt quoque æqualia $C I$, $K E$: Est autem $C I$, æquale ipsi $C F$, propter bases æquales $A C$, $C B$. Igitur & $C F$, $K E$, æqualia erunt; additoque communi $C G$, æqualia erunt parallelogrammum $A G$, & gnomon $L M$. Quare cum $C E$, maius sit gnomoni $L M$, (continet enim $C E$, præter gnomonem parallelogrammum adhuc $D G$), erit quoque $A D$, æquale existens ipsi $C E$, propter bases æquales $A C$, $C B$, maius quam parallelogrammum $A G$, eodem parallelogrammo $D G$. Eodemque modo ostendetur $A D$, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam $A B$, applicantur, ut punctum G , sit inter puncta B , & D ; hoc est, quæ occupant maiorem lineam dimidia $A C$, habentque minorem altitudinem, quam $A D$; dummodo defectus similes sint ipsi $C E$.

A L I T E R demonstrabitur $A D$, maius esse parallelogrammo $A G$, hoc modo. Parallelogramma $F D$, $D I$, sunt æqualia, cum bases $H D$, $D E$, sint æquales: Est autem $D I$, maius quam $G E$, hoc est, quam complementum $C G$, sibi æquale, parallelogrammo $D G$; Igitur & $F D$, maius erit, quam $C G$, parallelogrammo eodem $D G$. Ac idcirco addito communi $C F$, maius erit $A D$, quam $A G$, parallelogrammo eodem $D G$.

Q U O D si punctum G , sumatur in diametro $B D$, producta extra parallelogrammum $C E$. Tunc ducta per G , recta

Ec 2 HM,



24. sexti.

43. primi

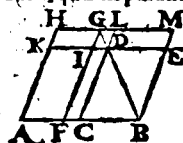
36. primi

36. primi

36. primi

43. primi

HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq; rectis AA, BE, pro
tractis in H, & M; Itē ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammū AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM, quod ipsi CE, est simile similiterque positi, cum sit circa eandem diametrum cum



24. *sexi.*

34. *primi*

36. *primi*

CE; Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, deoque æqualia parallelogramma HD, DM. Cum igitur DM, sit æquale complemento DF, erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL; Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iisdem argumentis concludens AD, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam dimidia AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

MANIFESTUM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidia AC, qualis est AK, in priori figura, vel minorem, cuiusmodi est AF, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

27.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ simi-

16. sexti.

L N, æquale & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi E G: atque adeo circa eandem diametrum cum E G, consistet, quæ sit BF. Productis iam rectis Q P, & P R, erit

24. sexti.



43. primi

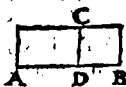
36. primi

parallelogrammū A P, ad rectam A B, applicatū, deficient parallelogrammū P B, & simile est ipsi E G, & propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. Nā cū P G, æquale sit & P R, emēto P E: suadetur cōmune P B, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, quod æquale est ipsi E R, propter bases æquales B A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C. (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficient parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

MOVENT hoc in loco dubium quoddam Iacobus Petrarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Quare de re consule eorum commentarios.

P A S T I C V M autem ex dictis est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficient quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficient quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum consentum sub A B, & D C; Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratū C B; continetur quoque A C, sub segmentis A D, D B, per applicationē factam.



P R O B L.

PROBL. 9. PROPOS. 29.

28.

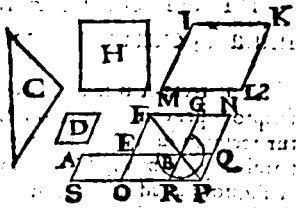
A D datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

A D datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri, parallelogrammo D. Divisa A B, bisectione E; super dimidiam E B, construatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum. Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G constituitur quadratum H, æquale, cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile uero ipsi E G, similiterque positum; eritque propterea I K L M, maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C,

8. sexti.
4. secundi.
5. sexti.

tuna cum parallelogrammo E G, æquale. Cum igitur ob similitudinem M K, E G, sit ut M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, uel minora, esset quoque M K, uel æquale ipsi E G, uel minus, ut perspicuum est. Productis igitur F E, F G, ut rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N, erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cui sit æquale ipsi M K, & simile. Quare O N, E G, circa eandem diametrum consistent, quæ sit F P. Productis iam A B, G B, ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conveniat in S; erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. Nam cum A O, E R, sint æqualia; & E R, æqua-

26. sexti.
24. sexti.
36. primi



43. primi. le complementis BN, erit & A O, ipsi BN, æquales. Adde-
 ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni EPN. At-
 qui gnomon EPN, æqua-
 lis est rectilineo C, (nam
 cum M X, hoc est, ON,
 æquale sit rectilineo C,
 una cum E G; Si auferatur
 commune E G, remane-
 bunt æqualia gnomon
 EPN, & rectilineo C.)
 Igitur & A P, æquale est
 rectilineo C. Ad daram ergo rectam A B, dato rectilineo C,
 æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens
 parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod
 faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam ter-
 minatam, extrema, ac media ratione secare.

29. sexti. SIT recta A B, secunda extrema ac media ratione. De-
 scripto super eam quadrato ABCD, ad latus D A, applicetur
 rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens
 parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, eritque proportio
 A F, quotus quadratum, cum quadrato solum quadratum
 sit simile. Secet deinde recta E F, rectam A B, in H. Dico
 A B, in G, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim
 æqualia sint D F, & A C; si dematur com-
 mune A E, remanebunt æqualia G H, H C;
 quæ cum habeant angulos æquales A H F,
 B H E, utpote rectos; erunt latera circa illos
 reciproca; hoc est, erit ut E H, hoc est, ut
 A B, sibi æqualis, ad H F, hoc est, ad A H,
 sibi æqualem, ut A H, ad H B. Quare secta
 est A B, extrema ac media ratione, per de-
 finitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c.
 Quod erat faciendum.

ALITER ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ debeat, AB, AH, HB, sitq; rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato medię AH, erunt ipsę proportionales, ut AB, quidē ad AH, ita AH, ad HB. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

17. sexti.

ALITER totum problema conficiemus. Diuidatur AB, in C, ita ut rectangulum sub recta AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. Erunt enim rursus, ut prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

18. secundi

17. sexti.

SCHOLIUM.

HABET admiranda hæc sectio linea extrema ac media ratione insignis milites, proprietatesque, cœ in libris Stereo metria manifestum erit, ut nō sine causa a plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilem eiuſ vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

31.

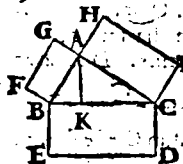
IN rectangulis triangulis, figura quęuis a latere rectum angulum subtendēte descripta, æqualis est figuris, quę priori illi similes, & similiter positę a lateribus rectū angulum continentibus describuntur.

TRIANGULUM rectangulum sit ABC, habens angulum B AC, rectū; describaturq; super BC, quęcunq; figura rectilinea BCDE, cui similes similiterq; positę super AB, AC, constituentur ABFG, ACHI. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AF, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per corollarium propos. 8.

18. sexti.

huius

huius lib. ut BC , ad CA , ita CA , ad CK . Quare ut BC , ad CK , prima linea ad tertiam, ita figura BD , super primam ad figuram CH , super secundam similiter posita, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. & conuertendo ut CK , ad BC , ita figura CH , ad sicuti BD . Non secus ostendetur, esse quoque ut BA , ad BC , ut figuram BG , ad figuram BD ; cum tres nunc BC , BA , BK , sint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est ut CK , prima quantitas ad BC , secundam, ita CH , tertia ad BD , quartam; Item ut



24. quinq.

BK , quinta quantitas ad BC , secundam, ita BG , sexta ad BD , quartam; erit ut prima CK , cum quinta BK , ad BC , secundam, ita tertia CH , cum sexta BG , ad BD , quartam. Sunt autem prima CK , & quinta BK simul æquales secundæ BC ; ergo tertia CH , & sexta BG , simul æquales quoque erunt quartæ BD . In rectangulis igitur triangulis, figura quævis, &c. Quod erat ostendendum.

8. sexti.

ALITER. Cum triangulo ABC , simile sit triangulum KAC , sintque homologa latera ipsorum BC , CA ; (Nam est ut BC , ad CA , in triangulo ABC , ita CA , ad GK , in triangulo KAC) habebit triangulum KAC , ad triangulum ABC , duplicatam proportionem eius, quam habet CA , ad BC . Habet autem

19. sexti.

& figura CH , ad figuram BD , proportionem duplicatam proportionis CA , ad BC . Quare erit ut triangulum KAC , ad

19. uel 20. sexti.

triangulum ABC , ita figura CH , ad figuram BD . Eadem ratione ostendetur esse, ut triangulum KBA , ad triangulum

11. quinti.

ABC , ita figuram BG , ad figuram BD . Quoniam ergo

24. quinti.

rursus est, ut KAC , prima quantitas ad ABC , secundam, ita CH , tertia ad BD , quartam; Item ut KBA , quinta ad

ad ABC , secundam, ita BG , sexta ad BD , quartam; Item & prima KAC , composita cum quinta KBA , ad secundam ABC , ita composita tertia CH , cum sexta BG , ad quartam BD . Sunt autem KAC , KBA , prima & quinta simul, æquales secundæ ABC ; Igitur & CH , BG , tertia & sexta simul, æquales erunt quartæ BD .

ALITER. Ut quadratum rectæ AC , prima quantitas, ad quadratum rectæ BC , secundam quantitatem, ita est figura CH , tertia quantitas, ad figuram BD , quartam quantitatem,

titatem,

titatem, cum utraque proportio sit duplicata proportionis
 $A C$, ad $B C$. Simuliter erit ut quadratum rectæ $A B$, quinta
 quantitas, ad quadratum rectæ $B C$, secundâ quantitatē, ita
 figura $B G$, sexta quantitas, ad figuram $B D$, quartam quan-
 titatem. Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nempe
 quadratum rectæ $A C$, cum quadrato rectæ $A B$, ad secundâ,
 hoc est, ad quadratum rectæ $B C$, ita tertia quantitas cum sex-
 ta, nimirum figura $C H$, cum figura $B G$, ad quartam,
 nempe ad figuram $B D$: Sunt autem quadrata rectarum
 $A C$, $A B$, simul æqualia quadrato rectæ $B C$. Igitur & fi-
 guræ $C H$, $B G$, figuræ $B D$, æquales erunt.

19. vel 20
sexti.

24. quinti.

47. primi

S C H O L I O N.

VIDES igitur, longe esse universalius theorema hoc
 Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque de-
 scriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola
 quadrata includit, ut propos. 47. primi lib. monuimus. Est ta-
 men & theorema illud, quod ibi ex Pappo stemusursumur, ad-
 huc universalius hoc, cum illud de omni triangulo, paralelo-
 grammis que etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tan-
 tummodo rectangulo, figuris que similibus, & similiter possi-
 sis, proponatur.

CONVERTEMUS etiam theorema hoc ex Campano no-
 aliter, quam 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

SI figura, quæ ab uno laterum trianguli de-
 scribitur, æqualis sit eis, quæ & reliquis triangu-
 li lateribus describuntur, figuris similibus simi-
 literque positis: Angulus comprehensus sub re-
 liquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETERMINEMUS triangulum $A B C$, sitque figura quavis super
 latere $B C$, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus simili-
 terque descriptis super reliqua latera $A B$, $A C$. Dico angulum
 $B A C$, esse rectum. Ducatur enim $A D$, ad $A C$, perpendiculari-
 ter, quæ sit ipsi $A B$, æqualis, & connectatur recta $C D$. Quoniâ
 igitur angulus $C A D$, rectus est, erit figura super $C D$, (quæ
 similis

31. sextus

similis sit ei, quæ super B C, similiterque posita) descripsi equalis figuris super A D, A C, descriptis, quæ ei similes sunt, similiterque posita: Est autem figura super A D, æqualis figuræ super A B, ob æqualitatem laterum; Quare figuræ super C D, æqualis erit figuris super A B, A C. Cum igitur figuræ super B C, eisdem figuris super A B, B C, æqualis ponatur; erunt figuræ super C D, B C, inter se æquales, ac propter rectæ C D, B C, æquales erunt, ut constat ex lemmate ptopos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus A B, A C, trianguli A B C; & basis D C, ostensa est quoque æqualis basi B C; erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit B A C; quod est propositum.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela; tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperiuntur.

HABEANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, ut quidem A B, ad A C, ita D C, ad D E; componanturque ad angulum A C D, ita ut latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua B C, C E, rectam componere lineam. Cum enim parallela sint A B, D C, erit angulus A, alterno A C D, æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem A C D, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula A B C, D C E, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erunt inter

29. primus



inter se æquigula, habebuntq; æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursum additis communi ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis; ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: Ac idcirco BC, CE, unam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangu-
 32. primi
 14. primi

6. sciti.

S C H O L I O N.

DEBENT autem prædicta duo triangu-
 32. primi
 14. primi

QVOD si uterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangu-
 32. primi
 14. primi



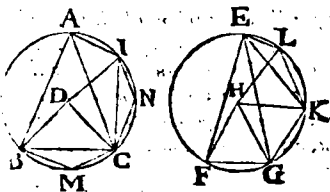
THEOR.

32.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circularis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper uero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales ABC , EFG , quorum centra D , H ; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque



BC , FG , quibus ad centra quidem insistant anguli BDC , FHG ; ad circumferentias uero anguli BAC , FEG . Dico esse ut arcus BC , ad arcum FG , ita

angulum FHG ; & angulum BAC , ad angulum FEG ; & sectorem BDC , qui rectis BD , DC , & arcu BC , continetur, ad sectorem FHG , quem comprehendunt rectæ FH , HG , & arcus FG . Ductis enim rectis BC , FG , appendentur ipsis in circulis æquales rectæ, CI , quidem ipsi BC , At uero GK , KL , ipsi FG : ducanturque rectæ ID , AH , LH . Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC , CI , erunt quoque æquales arcus BC , CI , ac propterea anguli BDC , CDI , æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG , GK , KL , & anguli FHG , GHK , KHL . Quia multiplex ergo est arcus BCI , ipsius arcus BC , tam multiplex erit angulus BDI , seu aggregatum angulorum prope centrum D , insistentium arcui BCI , anguli BDC : Et quia multiplex est arcus $FGKL$, ipsius arcus FG , tam multiplex erit angulus FHL , seu aggregatum angulorum prope centrum H , arcui $FGKL$, insistentium, anguli FHG : quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI , FHL , in quos arcus æquales secti sunt arcus BCI , $FGKL$. Quomodo

uero

1. quarti.

28. tertii.

27. tertii.

Uero si arcus BCI , æqualis fuerit arcui $FGKL$, necessario angulus BDI , angulo FHL , æqualis est; Ac proinde si arcus BCI , maior fuerit arcui $FGKL$, necessario angulus BDI , maior erit angulo FHL ; & si minor, minor. Deficient propterea una arcus BCI , & angulus BDI , æque multiplicia primæ magnitudinis BC , & tertię BDI , ab $FGKL$, arcu, & angulo FHL , æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG , & quartę FHL (uel una æqualia erunt, uel una excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quare quæ proportio est arcus BC , primæ magnitudinis, ad arcum FG , secundam magnitudinem, ea erit anguli BDI , tertię magnitudinis, ad angulum FHL , quartam magnitudinem.

27. tertij.

6. defin. 5.

Quoniam autem uero, ut angulus BDI , ad angulum FHL , ita est angulus BAC , ad angulum FEH , cum illi horum sint dupli; perspicuum est, ita esse quoque angulum BAC , ad angulum FEH , ut est arcus BC , ad arcum FG . Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus uisum sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducatur rectæ IA , KE , LE .

15. quinti

20. tertij.

11. quinti.

CONSTITVANTUR iam in segmentis BC , CI , anguli $BM C$, CNI , qui æquales erunt, cum insistant arcibus æqualibus BAC , CBA . Quare similia erunt segmenta $BM C$, CNI , atque adeo inter se æqualia, propterea quod sint super rectas BC , CI , quæ inter se sunt æquales. Additis igitur triangulis BDI , CDI , quæ æqualia quoque sunt, sicut sectores BDI , CDI , æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI , sectoris BDI , quàm est multiplex arcus BCI , ipsius arcus BC . Similiter ostendemus, sectorem FHL , tam multiplicem esse sectoris FHL , quam multiplex est arcus $FGKL$, ipsius arcus FG . Quoniam uero si arcus BCI , æqualis fuerit arcui $FGKL$, sector quoque BDI , sectori FHL , æqualis est; (ceu in sectoribus BDI , CDI , ostensum fuit.) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI , & sector BDI , æque multiplicia primæ magnitudinis BC , & tertię BDI , ab arcu $FGKL$, & sectore FHL , æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG , & quartę FHL ; uel una æqualia erunt, uel una excedent; si ea sumantur, quæ

27. tertij.

24. tertij.

4. primi

6. defn. 5.

quæ inter se respondent. Quamobrem quæ proportio est arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit sectoris B D C, tertie magnitudinis, ad sectorem F H G, quartam magnitudinem. In æquibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM. I.

11. quinti.

Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, ut est in angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est, proportio ni arcus ad arcum. Quare & inter se eadem erant.

COROLLARIUM. II.

38. sexti.

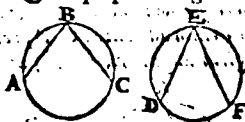
PERSPICVVM quoque est, ut est angulus ad centrum ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, ut sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum. Nam ut est angulus in centro ad angulum rectum in centro, ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit ut angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 4. propos. lib. 5. demonstravimus. Quod est primum. Quomodo igitur est ut angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & convertendo, ut quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur. Cum sit, ut angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 4. lib. 5. ostendimus, ut quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.

33. sexti.

SCHOLIUM.

CETERVM ex theoremate hoc luce clarius colligi angulum, qui circumferentia alicui insidet, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, ut vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sini enim circuli æquali.

aequales ABC, DEF , in quibus anguli ad circumferentiam con-
 sistunt sine B, E , maior quidem B , minor autem E . Quo posito
 erit arcus AC , maior arcu DF , ut propterea reliquis arcibus
 ABC , minor reliquo arcu DEF . Quare proportio anguli B ,
 ad angulum E , est maioris inaequa-
 litatis, & proportio vero arcus
 ABC , ad arcum DEF , mino-
 ris inaequalitatis. Non ergo ea-
 dem est proportio anguli ad an-
 gulum, quae arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super
 quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DE , sum demum
 erit angulus B , ad angulum E , ut arcus AC , ad arcum DE , ut
 recte demonstravit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum
 esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus,
 angulum insistere segmento, seu arcui: id quod in expositione
 definitionis 8. lib. 3. monuimus.

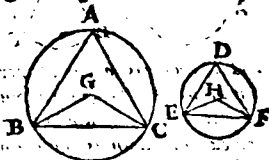


NON obscure quoque ex hoc theoremate deduci potest, simi-
 litudinem segmentorum in circulis, similem, quae Euclides de-
 finitione 10. lib. 3. definitur per angulos aequales in ipsis segmen-
 tis existentibus, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferen-
 tiae similes, ad integras circumferentias circularum eandem ha-
 beant proportionem, & propterea qualis pars est una circum-
 ferentia totius suae circumferentiae, talis quoque sit alia circum-
 ferentia similis totius suae circumferentiae; veluti in expositi-
 one praedicta definitionis docuimus. Sine enim primum duo cir-
 culi aequales ABC, DEF , in quibus anguli ad circumferentiam
 consistunt aequales BAC, EDF ; Quo posito, segmenta
 BAC, EDF , iuxta Euclidis definitionem praefatam dicentur
 similia. Manifestum autem est,
 eorum circumferentias habere
 eandem proportionem ad inte-
 gras circularum circumferen-
 tias. Cum enim ob circularum



aequalitatem, arcus BC, EF , quibus anguli aequales insistant, = 6. tertij.
 sine aequales, & efficiantur reliquas circumferentias BAC, EDF ,
 esse quoque aequales. Quare ad totas circumferentias, quae aequa-
 les etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt. Atque
 idcirco, quae pars est arcus BAC , totius circumferentiae $ABCA$,
 eadem pars erit arcus EDF , totius circumferentiae $DEFD$.

Si nunc facunde duo circuli inaequales ABC, DE in cuius anguli ad circumferentias constituantur aequalis AC, EDF. Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex eadem sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ductis enim ad centra G, H, rectae BG, CG, EH, FH. Quam igitur anguli A, & D, aequales ponuntur, erunt quoque ad



centra anguli G, & H aequales, cum hi illorum dupli-
cantur. Quare quoniam rectae
ad angulum G, eandem habent
rationem, quoniam ad angulum
H. Aequi ut quoniam

est ad angulum G, ita est ad
circumferentiam ABCA, ad arcum BC. Et ut quoniam rectae ad
angulum H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF,
ex coroll. 2. huius propos. 33. Igitur ut tota circumferentia
ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD,
ad arcum EF. Dividendo ergo erit, ut arcus BAC, ad
arcum BC, ita arcus EDF, ad arcum EF. Et convertendo rursus,
ut arcus BC, ad arcum BAC, ita arcus EF, ad arcum EDF.
Ac propterea componendo, ut circumferentia tota ABCA, ad
arcum BAC, ita circumferentia tota DEFD, ad arcum EDF.
Et rursus convertendo, ut arcus BAC, ad totam circumferentiam
ABCA, ita arcus EDF, ad totam circumferentiam
DEFD. Quos circa quoque pars est arcus BAC, totam circumferentiam
ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totam circumferentiam
DEFD.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ut circulo-
rum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt
aequales, quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habere
proportionem ad circulos suos integros.

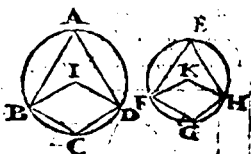
MANIFESTUM etiam est ex dictis, angulos insistentium
in circulis similibus, siue ad centra, siue ad circumferentias
insistentium, aequales esse inter se. Sine enim in circulis ABCD,
EFGH, quorum centra I, K, arcus similes BCD, FGH, quibus
insistent, ad centra quidem anguli I, & K, ad circumferentias
autem anguli A, & E. Dico tam illos, quam hos esse
inter se aequales. Constituamus enim in dictis arcibus anguli
BCD

20. terrij.

7. quinsi.

21. quinsi.

BCD, FGH, qui æquales erunt, ex defin. segmentorum simili-
lium; Sunt autem tam anguli
C, & A, quam G, & E, duobus
rectis æqualis: Ablatis igitur
æqualibus C, & G; reliqui A,
& E; ac proinde eorum dupli
I, & K, æquales erunt.



22. sexii.

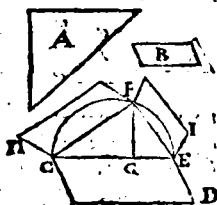
Vicissim quoque liquet,
arcus, quibus insistant sine ad cetera, sine ad circumferentias, an-
guli æquales, similes esse. Nam si anguli A, et E, fuerint æquales,
erunt & reliqui duorum rectorum C, & G, æquales. Igitur, per definitio-
nem, arcus BCD, FGH, similes sunt, quibus dicti anguli A, &
E, insistant. Quod si I, & K, æquales sint, erunt et eorum dimidii A,
et E, æquales. Quare, ut prius, arcus BCD, FGH, similes sunt.

Quoniam vero Euclides multa dixit de inuentione li-
nearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum
proportionalium inuestigatione nobis prescripsit; non abs re me
facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata,
quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium ner-
funtur, scien non inuincunda, loco appendicis, partim ex peritiis Geo-
metris, partim ex inuentis propriis, huic sexto libro annexam;
quippe quæ ex demonstratis ab Euclido facili negotio deducun-
tur; Hinc autem exordium capiemus.

A D A T O rectilineo imperatam partem au-
ferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relin-
quitur, simile sit cuius rectilineo dato, simili-
terque positum.

I.

S I T ex rectilineo A, auferenda
tertia pars, quæ similis sit, simili-
terque posita rectilineo B, relin-
quaturque rectilineum eidem B, simile,
& similiter positum. Constituantur
rectilineum CD, æquale quidem ipsi
A, simile vero ipsi B, superque unum
eius latus CE, semicirculus descri-
bat CFE. Deinde ablata parte ter-
tia GE, imperata videlicet, ex CE, agat GF, ad CE, perpendiculari-
ris, conuenianturque rectæ CF, EF, super quas constructæ rectilinea



25. sexti.

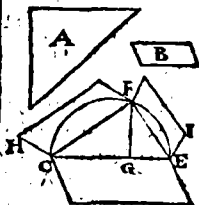
9. sexti.

13. sexti.

Ff 2 FH,

18. sexti.
31. terti.
31. sexti.

FH, FI , similia similiterque posita ipsi ΔD . Dico igitur scilicet esse, quod iubetur. Cum enim angulus $C F E$, rectus sit, quippe qui in semicirculo existit; erit rectilineum CD , aequale rectilineis HF, FI ; atque adeo si auferatur rectilineum



4. sexti.
8. sexti.

FI , simile ipsi B , ex rectilineo CD , hoc est, ex sibi equali A , relinquitur rectilineum HF , simile quoque ipsi B . Quod autem rectilineum ablatum FI , sit tertia pars rectilinei CD , ita ostenditur. Quoniam est ut recta CG , ad GF , ita recta CF , ad FE , eo quod triangula, CGF, CFE , similia: Habes autem CG , ad GE ,

proportionem duplicatam proportionis CG , ad GF , propterea quod proportionales sint tres rectae CG, GF, FE , ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectilineum HF , ad rectilineum FI , proportionem quique habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE ; Erit ut recta CG , ad GE , ita rectilineum HF , ad rectilineum FI ; quandoquidem haec proportionis duarum aequalium proportionum duplicatae sunt. Componendo igitur erit, ut CE , ad GE , ita duo rectilinea HF, FI , simul, hoc est, rectilineum CD , quod est illis aequale, ad rectilineum FI . Est autem CE , ipsius GE , tripla, per constructionem; Igitur & rectilineum CD , triplum erit rectilinei FI . At propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.

19. vel 20.
sexti.

Q U O D si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id brevissime, hac arte. Rectilineum datum A ,

45. primi



renocetur ad parallelogrammum BG , sibi equalis; & ex latere BD , auferatur DE , tertia pars imperata, & per E , agatur ipsi CD , parallela EF . Dico EC ,

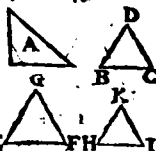
1. sexti.

tertiam esse partem ipsius BG , hoc est, rectilinei dati A . Cum enim sit ut DE , ad DB , ita EC , ad CB ; sit autem per constructionem DE , ipsius DB , pars tertia; erit & EC , ipsius CB , tertia pars. Quod est propositum.

II.

D V O B V S datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

SINT data duo rectilinea A , & BCD , quibus inveniendum sit tertium proportionale. Constituantur ipsi A , rectilineum aequale EFG , simile vero similiterque positum ipsi BCD . Deinde lateribus homologis EF , BC , inveniatur tertia linea proportionalis HI , super quam constituatur rectilineum HIK , simile similiterque positum ipsis EFG , BCD . Dico HIK , esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectae EF , BC , HI , erunt & rectilinea EFG , BCD , HIK , ab illis descripta (cum sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum ergo EFG , per constructionem, aequale sit ipsi A ; erunt & rectilinea A , BCD , HIK , proportionalia.



25. sexti.

11. sexti.

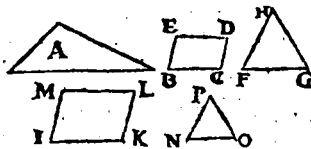
18. sexti.

22. sexti.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

III.

TRIA rectilinea data sint A , $BCDE$, FGH , quibus quartum sit inueniendum proportionale. Constituantur rectilineum $IKLM$, aequale quidem ipsi A , simile vero simili terq; positum ipsi $BCDE$. Tribus deinde rectis IK , BC , FG , inuenta quarta proportionali NO , constituatur super NO , rectilineum NOP , ipsi FGH , simile similiterque positum. Dico NOP , rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectae IK , BC , FG , NO , sint proportionales, erunt & rectilinea similia similiterq; posita ab ipsis descripta $IKLM$, $BCDE$, FGH , NOP , proportionalia. Cum igitur $IKLM$, constructum sit aequale ipsi A ; erunt & quatuor rectilinea A , $BCDE$, FGH , NOP , proportionalia.



25. sexti.

12. sexti.

18. sexti.

22. sexti.

DV O BV S datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

IIII.

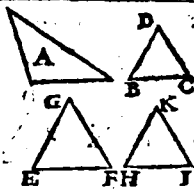
SINT duo rectilinea A , BCD , quibus medium inueniendum est proportionale. Constituantur rectilineum EFG , aequale ipsi A , & simile similiterque positum ipsi BCD . Duabus deinde rectis EF , BC , inuenta media proportionali HI , constituatur super HI , rectilineum HIK , simile similiterq; pos-

25. sexti.

13. sexti.

18. sexti.

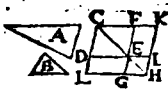
22. sexti.



A L I T E R.

45. primi

25. sexti.



tum ipsi EFG, BCD. Dico HIK, medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres recte EF, HI, BC, erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita, &c.

Sic rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammum quoddamque CDEF; Ipsi vero B, æquale parallelogrammum EGHI, simile vero si-

militerque positum ipsi CDEF. Connectanturque hæc parallelogramma ad angulos æquales, ut DE, EI, efficiens unam lineam, ac propterea, per ea, quæ ad 15. propos. 1. lib. demonstravimus, una quoque linea componatur ex FE, EG; perficiaturque totum parallelogrammum KL. Dico utrumlibet EK, vel EI, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint, similiterque posita DF, GI, erit ut DE, ad EF, ita EI, ad EG. Permutando ergo ut DE, ad EI, ita FE, ad EG. Ut autem DE, ad EI, ita DF, ad EK; & ut FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur ut DF, ad EK, ita EK, ad GI, &c.

1. sexti.

26. sexti.

1. sexti.

V.

Quod etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DF, GI, similia sint, similiterque posita, consistentes ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, æqualia erunt. Ut autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI, eo quod utraque proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, ut DF, ad EK, ita EK, ad GI.

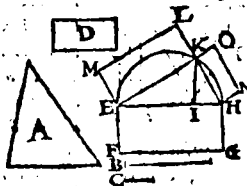
D A T O rectilineo duo rectilinea æqualia constituit, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

S I T datum rectilineum A, dataq; proportio rectæ B, ad C, oporteatq; constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantq; proportionem, quam B, & C, ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiusvis D. Confirmatur rectilineum EFGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi D. Dico

25. sexti.

deinde

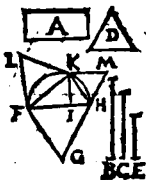
deinde latere eius EH , in I , secundum proportionem B , ad C ,
(quod facile fiet, si conficiatur una linea ex B , & C . Nam tunc
similiter secanda erit EH , &c.) describatur circa E , H , semicir-
culus EKH , & ex I , ducatur ad E , H , perpendicularis IK , con-
nectanturq; rectæ EK , HK . Describantur iam ex E , K , H ,
rectilineæ EKL , M , KHN , O , ipsi, E , G , vel ipsi D , similia si-
militerq; posita; quæ dico aqua-
lia etiã esse ipsi E , G , seu ipsi A ,
habereque proportionem datam
 B , ad C . Cum enim angulus
 EKH , in semicirculo existens
rectus sit, erunt rectilineæ EL ,
 HO , equalia rectilineo E , G , cū
sint similia inter se, similiterq;
descripta. Quoniam vero est, ut



E , I , ad I , K , ita E , K , ad K , H , cum trian-
gula EIK , EKH , simi-
lia sint; Est autē E , I , ad I , H , in proportione duplicata proportio-
nis E , I , ad I , K , quod tres E , I , I , H , sint, ex corollario pro-
por. 8. lib. huius, proportionales: Item E , I , ad H , O , in proportio-
ne duplicata erit, quam habet latus E , K , ad latus homologum
 K , H ; erit ut E , I , ad I , H , hoc est, ut B , ad C , ita E , L , ad H , O . Da-
to ergo rectilineo A , exhibuimus duo equalia E , L , H , O , quæ si-
milia sunt, similiterque posita dato rectilineo D , habentque pro-
portionem inter se datam B , ad C .

D A T O rectilineo, duo rectilinea equalia ex-
hibere, quæ cuius rectilineo similia sint, simili-
terque descripta, lateraque eorum homologa
habeant inter se proportionem datam.

D E T U R rectilineum A , & proportio
recta B , ad rectam C , oporteatque constitui
re duo rectilinea ipsi A , equalia, & similia
ipsi D , pposita, similiterq; posita, quorū la-
tera homologa pportionē habeant, quā B , ad
 C . Invenit ipsi B , C , tertia pportionali E ,
fiat rectilineū FGH , quale ipsi A , & simi-
le similiterq; positi ipsi D . D. n. s. q. latere
 FH , in I , & in pportione B , ad C , describatur cir-
ca F , H , semicirculus FKH ; et ex I , ducatur ad F , H , perpendicularis
 IK ,



F 4 I K ,

TK, contineturque recta FK, HK. Describamur iam ex
FK, HK, rectilinea FKE, HKM, ipsæ FGH, vel ipsæ D, simi-
lia, similiterque posita. Dico hac rectilinea aequalis esse ipsæ

FGH, vel ipsi A, eorumque latera boud-
ga FK HK, proportionem habere datam
rectæ B, ad rectam C. Cum enim angulus
FKH, in semicirculo reſtus ſit, erunt recti
linea FK L, HK M, rectilincæ FGH, ideò
et rectilincæ A, equalia. Quoniã rectæ
FI I, ad IK, ita FK, ad HK, ob ſimili-
tudinem triangulorum FIK, FKH: Eſt
autem FI, ad IH, in proportionẽ duplicatã

proportionis FI, ad IK, (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. & huius lib.) At propterea in proportionem duplicatam proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (equalis proportioni FI, ad IH, ex constructione,) in duplicata est proportionem proportionis B, ad C, ex definit. Igitur eadem meritis proportio FK, ad IK, qua B, ad C, quandoquidem ipsarum duplicatae proportionibus FI, ad IH, & B, ad E, aequales sunt.

VII.

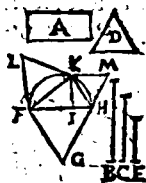
Dv o b v s datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuius rectilineo dato.

Quod si rectilinea data sint A & B , quibus equalis sit con-

struendi, simile similiterq; pos-
 itum ipsi C. Fiat ipsi A, aequale
 DEF, simile autē similiterque
 positū ipsi C. Itē ipsi B, aequale
 confituitur G F H, simile vero
 eidem C, similiterq; positū. De-
 inde rectilinea DEF, GFH, ita
 inter se connectantur, ut latera
 eorum homologa EF, FH, confi-

ruant angulum FFH , re $\overline{H\overline{H}}$, cui subtrahatur recta EH , ex qua
describatur rectilineum IHE , simile similiterque positum ipsis
 DEF , GPH , hoc est, ipsi C . Perspicuum autem est EHI , ac

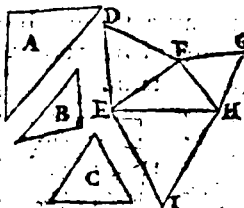
BREVES. Cōstituitur parallelogrammū aequalē dō-



31. சென்னை.

31. *sexii.*

4. *sexsi.*



25. *Saxi.*

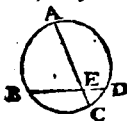
12. *sexii*.

31. *sexii*.

duas rectilineis A, B , per ea, quæ ad propos. 45. lib. 2. docui-
mur. Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale
rectilineum $E H I$, quod simile sit, similiterq; positum alteri
dato rectilineo C ; constitutum eris rectilineum $E H I$, æquale
duobus rectilineis A, B , & simile, similiterq; positum rectilineo C .

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo se-
cuerint: Erunt segmenta unius segmentis alte-
rius reciproca.

In circulo $A B C D$, se mutuo secant rectæ $A C, B D$, in E .
Dico segmenta $A E, E C$, esse reciproca segmen-
tis $B E, E D$: Hoc est, esse ut $A E$, ad $B E$, ita
 $E D$, ad $E C$: Vel ut $A E$, ad $E D$, ita $B E$, ad
 $E C$. Cum enim rectangulum sub $A E, E C$,
comprehensum æquale sit rectangulo sub $B E$,
 $E D$, contento; erunt latera circa æquales angulos reciproca.
Quod est propositum.



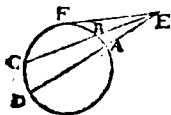
25. sexti.

35. tertij.

14. sexti.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod,
ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ cir-
culum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra
circulum reciproca. Quod si ab eodem pun-
cto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc
media proportionalis inter quamlibet rectam,
quæ circulum secet & eius segmentum exterius.

Extra circulum $A B C D$, sumatur punctum E , a quo
cadant rectæ $E C, E D$, secantes circulum in A, B . Dico
rectas $E C, E B$, esse reciprocas rectis $E D$,
 $E A$: Hoc est, esse, ut $E C$, ad $E D$,
ita $E A$, ad $E B$: Vel ut $E C$, ad $E A$, ita
 $E D$, ad $E B$. Ducta enim $E F$, tangente
circulum in F , erit rectangulum sub $E C$,
 $E B$, quadrato rectæ $E F$, æquale; Item rectangulum sub $E D$,
 $E A$, eidem quadrato rectæ $E F$, æquale. Quare & rectangula
sub $E C, E B$, & sub $E D, E A$, æqualia erunt: Ac propterea
latera eorundem circa angulos æquales reciproca. Quoniam autem qua-
drato rectæ $E F$, æquale est rectangulum sub $E C, E B$: Item re-
ctangulum sub $E D, E A$, erant tres rectæ $E C, E F, E B$. Itemq;
tres



VIII.

IX.

36. tertij.

14. sexti.

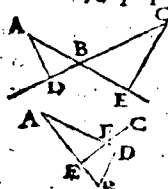
36. tertij.

tres ED, EF, EA , proportionales, atque ad EF , mediam proportionalem inter quolibet lineam quae circumscritur, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

X.

Si duae rectae lineae sese mutuo secuerint, & a duobus eorum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duae lineae, quarum una inter terminum, & sectionem, altera vero inter eundem terminum, & suam perpendicularem interjicitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciproce.

Duae rectae AB, CB , se mutuo secant in B , & ex terminis A, C , ad ipsas demittantur perpendiculares, AD , quidem ad CB , at vero CE , ad AB ; quae perpendiculares cadunt in AB, CB , prout rectas ultra B , si angulus ABC , fuerit obtusus, in ipsas vero introsum, si idem angulus acutus fuerit, ut figura indicant. Dico rectas AB, BE , quarum prior interjicitur inter terminum A , & sectionem B , posterior vero inter sectionem B , & perpendicularem suam CE , quae nimirum ad ipsam AB , ducitur reciprocas esse duabus CB, BD , (quae inter similes terminos includuntur) hoc est, esse ut AB , ad BC , ita BD , ad BE : Vel ut AB , ad BD , ita BC , ad BE . Cum enim anguli ABD, ADB , trianguli ABD , aequales sint angulis CBE, CEB , trianguli CBE . (Nam ADB, CEB , recti sunt; & ABD, CBE ,



ad verticem in priori figura, in posteriori autem unus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE , equiangula. Quare erit ut AB , ad BD , ita CB , ad BE : Ac propterea permutando quoque, ut AE , ad BC , ita BD , ad BE . Quod est propositum.

4. sexti.

Porro eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE , in posteriori figura se mutuo secantium in F , erunt reciproca. Cum enim triangula AFF, CFD , sint equiangula; erit ut AF , ad FE , ita CF , ad FD : Et permutando quoque, ut AF , ad CF , ita FE , ad FD .

4. sexti.

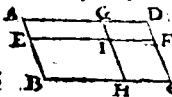
XI.

IN parallelogrammo, duae rectae lateribus parallelis se mutuo secantes, diuidunt parallelo-

grammum

grammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

IN parallelogrammo $ABCD$, dua rectae EF , GH , lateribus AD , DC , parallelae se mutuo secant in I . Dico quatuor parallelogramma EG , GF , BI , IC , esse proportionalia. Cum enim sit ut EI , ad IF , ita EG , ad GF . Item ut EI , ad IF , ita BI , ad IC . Erit quoque ut EG , ad GF , ita BI , ad IC , quod est propositum.



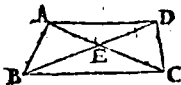
i. sexti.

ii. quinti.

XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor trian- gula proportionalia.

DIVIDANT diametri AC , BD , se mutuo secantes in E , quadrilaterum $ABCD$. Dico qua- tuor trian- gula AED , CED , AEB , CEB , esse proportionalia. Erit enim ut AE , ad EC , ita trian- gulum AED , ad trian- gulum CED ; & trian- gulum AEB , ad trian- gulum CEB . Quare ut trian- gulum AED , ad trian- gulum CEB ; ita trian- gulum AEB , ad trian- gulum CEB . Eademque ratione ostendes esse ut BE , ad EA , ita BEC , ad DEA , cum utraq; propor- tio eadem sit proportioni BE , ad EA . Constat ergo propositum.



i. sexti.

XIII.

A D A T O puncto in latere trian- guli lineam rectam ducere, quae trian- gulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT trian- gulum ABC , oporteatque a dato puncto D , in eius latere BC , lineam rectam ducere, quae trian- gulum secet in duo segmenta secundum propor- tionem datam E , ad F . Diuidatur BC , in G , secundum proportionē E , ad F , cadatque primo punctum G , in datum punctum D , ducaturque recta DA . Quoniam igitur est ut BD , ad DC , ita trian- gulum BDA , ad trian- gulum CDA , secabis recta DA , trian- gulum datum secundum propor- tionem datam BE , ad GC , hoc est, E , ad F .



i. sexti.

C. A. D. A T secundo punctum G , inter C , & D . Ducatur ergo recta DA , cui per G , parallela agatur GH , coniungaturque recta

recta DH. Dico rectam DH, secare triangulumdem secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium BDHA,



ad triangulum CDH, ut L, ad F, seu ut BG, ad GC. Ducta enim recta GA, erunt tria angula HGA, GHD, equalia, cum sint super

37. primi

eandem basin GH, & inter easdem parallelas GH, DA. Addito igitur communi triangulo CGH, fiet equalia triangula CGA, CDH: Ac proinde triangulum ABC, eandem habebis proportionem ad CGA, & ad CDH. Dividendo igitur, erit ut triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium BDHA, ad triangulum CDH. Est autem BGA, ad CGA, ut BG, ad GC. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulum CDH, ut BG, ad GC, hoc est, ut E, ad F. Quod est propositum.

7. quinti.

7. quinti.

1. sexti.

CADAT tertio punctum G, inter B, & D, ducaturq; recta DA, cuius transversus per G, agatur parallela GH. Dico igitur,



rectam ducta DH, secare triangulum ABC, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum BDH, ad trapezium CDHA, ut E, ad F. Ducta enim recta GA, erunt

37. primi

7. quinti.

12. quinti.

1. sexti.

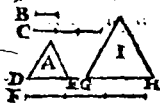
ut prius triangula HGA, GHD, equalia; additoq; communi BGH, equalia fient BGA, BDH. Quare erit ABC, ad BGA, ut ad BDH. Dividendo ergo erit ut CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH; & consequendo, ut BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA. Est autem BGA, ad CGA, ut BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit ut BG, ad GC, hoc est, ut E, ad F. Quod est propositum.

HINC perspicuum est, quoniam modo imperata pars et triangulo sit auferenda per lineam rectam, que a quocunque puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dno puncto ductam dividatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator unitate minor sit decem: partem imperate, (ut secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, ut manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator aequalis est denominatori partis, cum priori denominatori proportionis multiplicis addatur unitas, que ante deerat.

DA T O rectilineo simile similiterque pos-
tum rectilineum describere, maius, vel minus,
secundum proportionem datam.

XIIII.

SI T rectilineum datum *A*, cui simile similiterque positi-
um sit describendum maius, secundum proportionem datam *B*, ad
C. Tribus rectis *B*, *C*, & *DE*, (sit autem *DE*, unum latus recti-
linei dati quodcumque) inveniatur qua-
rta proportionalis *F*. Deinde duabus *DE*,
& *F*, inveniatur media proportionalis
G H, super quam ipsi *A*, describatur re-
ctilineum *I*, simile, similiterque positum. Dico *I*, maius esse quā
A, secundum proportionem datam *B*, ad *C*. Cum enim propor-
tionales sint tres recte *DE*, *G H*, & *F*, tria per coroll. propos.
19. vel 20. libri huius, ut *DE*, prima ad *F*, tertiam, hoc est,
per constructionem *B*, ad *C*, ita rectilineum *A*, super primam
ad rectilineum *I*, super secundā, illi simile similiterq; positum.

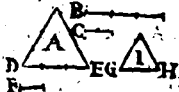


12. sexti.

13. sexti.

18. sexti.

NO N secus data rectilineo *A*, minus rectilineum *I*, descri-
bemus, illi simile similiterque positi-
um, secundum proportionem datam *B*, ad *C*.
Cen in hac figura factum esse cernis.
Eadem enim prorsus est constructio, at-
que demonstratio.



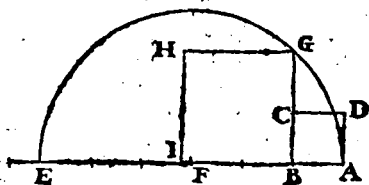
FA C I L E igitur ex his quadratum quodcumque, vel aliud
rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, etc.
Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia
pars, vel quarta, vel quinta, &c. servata nihilominus semper
eadem rectilinearum similitudine, quemadmodum & quadra-
torum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio *B*, ad *C*,
sumatur ut 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item ut 2. ad 1.
vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, ut
prius habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod
propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadru-
plum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quar-
ta, &c. eius, quod proponitur.

NO N videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri,
qua ipse facili duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadra-
tum, seu parallelogrammum quodcumq; oblatum. Ex hac enim
constituemus quoq; rectilineum simile, similiterque descriptum

CHICOM

cuiusque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tamen si autem Aliterius huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit, non multum tamen eius demonstratio a precedenti differt, ut mox ostendimus.

SIT igitur quadratum $ABCD$, quincuplicandum. Producto latere AB , ad partes B , quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi AB , equales, a puncto B , incipiendo, ut

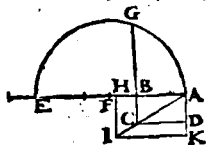


que ad E , ut sit BE , quincupla ipsius AB . Diuisa deinde tota AE , bisaria in F , describatur ex F , ad internallum FA , vel FE , semicirculus AGE , preter-

caturque latus BC , ad circumferentiam usque in G . Dico quadratum $BGHI$, ex BG , descriptum, quincuplum esse quadrati $ABCD$. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG , media proportionalis inter EB , BA . Igitur erit ut EB , prima ad BA , tertiam, ita BH , quadratum secundae, ad AC , quadratum tertiae, ex coroll. propos. 10. huius lib. Est autem EB , per constructionem, ipsius AB , quincupla. Igitur & quadratum BH , quadrati AC , quincuplum erit. Quod est propositum. Quia & recta BE , sumatur sexcupla lateris AB , erit & quadratum recta BG , quadrati $ABCD$, sexcuplum: Si autem BE fuerit tertia pars ipsius AB , erit & quadratum BH , tertia pars quadrati AC . Denique in quacunque proportionem sumatur BE , ad AB , eandem habebis quadratum BH , ad quadratum AC .

SIT rursus rectangulum $ABCD$, cui inueniendum simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere AB , producto sumatur BE , dupla ipsius AB . Diuisa deinde tota AE , bisaria in F ; & ex F , descripto semicirculo, ut prius, & producta CB ad G ; erit BG , unum latus rectanguli quaesiti. Quare si abscondatur AH , aequalis ipsi BG , & per H , agatur ipsi BC , parallela HI , occurrens diametro AC , protracta in I , perficiaturque parallelogrammum HK , erit HK , ipsi BD , simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse rectanguli

B D. Cum enim proportionales sint tres rectæ EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit ut prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulū HK, supra AH, secundā (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secundæ cona- lis) ad rectangulū BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterque descriptum.



EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quoddam ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Acque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectā BA, ex constructione.

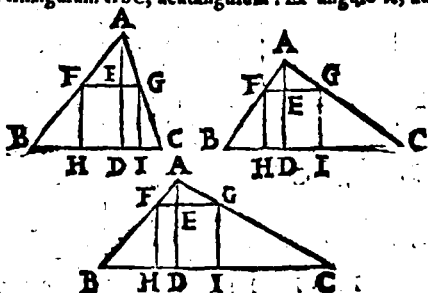
PRESIDIUM autem est, hanc operationem una cum eius demonstratione a nostra antea tradita non differre, nisi quod hac simul tradas inuentionem mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuū lineas EB, BA, quæ proportionem habet datam, ut statim, una operatione, mediā proportionalem obtineat, &c.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

Si datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo A, ad

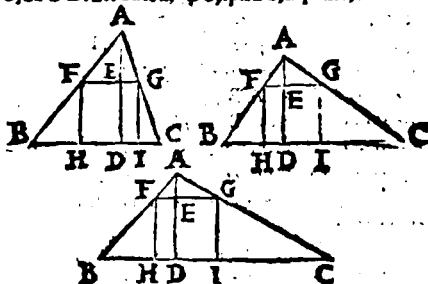
BC, perpē-
dicularis
demittatur
AD, quæ
in E, ita se-
cetur, per
ea, quæ in
Scholio p-
pos. 10 hui-
us libri do-
cuimus, ut
eadē sit p-
portio AE,
ad ED, quæ



A D, ad BC. Deinde per B, agatur FG, ipsi BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallela ducantur FH, GI. Dico FGHI, rectilineum triangulo ABC, inscriptum, esse quadratū. Cum enim FBG, ipsi C, sit parallela, erit ut ED, ad DC, ita FE, ad BG, ex scho-
lio

lio propos. 4. huius lib. & componendo, ut B C, ad D C, ita E G, ad E G. Sed ut D C, ad A D, ita est E G, ad A E; & per coroll. propos. 4. huius lib. triangula A D C, A E G, sunt similia. Igitur erit ex æquo, ut B C, ad A D, ita F G, ad A E. Quia uero per constructionem est, ut A D, ad B C, ita A E, ad E D; erit rursus ex æquo, ut B C, ad B C, ita F G, ad E D. Est autem B C, ipsi B C, æqualis, immo eadem: Aequalis igitur est & F G, ipsi E D. Quare erit F G, ipsi H I; & E D, ipsi F H, G I, æqualis existat; erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia inter se.

34. primi

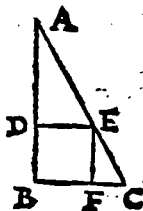


25. primi

Et quia anguli E D H, F H D, duobus rectis æquales sunt: Est autem E D H, per constructionem rectus: erit & F H D, rectus. Quocirca, per ea, quæ ad definit. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliquis angulis H F G, F G I, G I H, recti sunt; Ac propterea F I, quadratum est, quod est propositum.

Non secus idè problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum uel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, uel obtuso perpendicularem demittamus, seu in posterioribus duobus triangulis appareat.

4. sexti.



Quo d si in triangulo rectangulo quadratum describere liceat, ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulū rectū mutuoque diuidemus perpendicularē AB, in D, ita ut eadē sit proportio A D, ad D B, quæ A B, ad B C, & per D, quidem ipsi B C, parallelā ducemus D E; per E, uero ipsi A B, aliā parallelā E F. Quoniam igitur est, ut B C, ad A B, ita D E, ad A D; quoniam triangula A B C, A D E, similia sunt, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autē per constructionē, ut A B, ad B C, ita A D, ad D B. Erit ex æquo, ut B C, ad B C, ita D E, ad D B: Est autem B C, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Aequalis igitur est & D B, ipsi D B. Quare ut prius, D B E F, quadratum est. Quod est propositum.

FINIS ELEMENTI SEXTI



EVCLIDIS

EVLIDIS

ELEMENTVM VII.



DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quā unum-
quodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.



H A T T E N T S regis Euclides de prio-
ri Geometria parte, ea scilicet, quæ cir-
cā plāna uersatur, restabat alterā soli-
dorum. Verum ante ei necesse fuit de li-
neis commensurabilibus, & incommen-
surabilibus differere, quod ad propria-
tes corporum plurimorum, eorumque ma-
ximæ, quæ regularia nōminantur, demon-
strandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio literarū
requiratur, id quæ adeo, ut absque eis solidorum tractatio imper-
fecta sit, neque suis numeris absoluta. Hūc decedis, quod abs-
que eisdem lineis plurimā latera tam plātorum, quam solido-
rum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque usum,
neque exprimi quædant, neque intelligi: Nam pleraque laterū
sunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἀλογος, a Latinis Irrationales
appellantur: Vel certe, si non sunt Irrationales, longitudine
inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram nu-
merorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio,
ac intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, ut
absque his nullo modo cognoscantur, oportuit etiam numerorū
explicationem, ut doctrina suus ordo, ratioque constaret, lineis

ansepō. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometrica inferimus, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur. Incipiens igitur more suo a principio, desinit in initio unitatem, docetque eam esse, secundum quam unumquodque eorum, que sunt, unum esse dicitur: Nam secundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum unitas in numeris nullam suscipit divisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut in primo lib. docuimus.

II.

NUMERVS autem, ex unitatibus composita multitudo.

CUM numerus sit multitudo quedam ex unitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt unitates eum constituentes; Ita ut unitas sit pars cuiusvis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Ut numerus 8. compositus ex octo unitatibus, diuiditur in totidem partes, nempe unitates, quarum qualibet octava pars dicitur octavaria. Sic quoque numerus 100. ex centum unitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

Ex hoc sequitur, omnes numeros, quoscunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos una eademque mensura, nempe unitas, ut dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione convenire, cum plurima illarum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, ut clarissime lib. 10. ostenditur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON est dissimilis. hae definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continua exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hae solum proprie dicatur metiri eorum, ut ibidem Latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicitur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 50. 60. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 175. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cum illum singuli hi metiantur, ut perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; ut 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

III.

PARTES autem, cum non metitur.

Ad Euclides, numerum minorem maiori numeri, quem non metitur, non partem, sed partem appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, nisi per suas unitates, pars dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat unitates, quarum quilibet decimaoctaua, pars est huius numeri 18. Unde numerum 5. dicemus quinque partes decimaoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constas, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, ut volunt nonnulli; alioquin superflua eanem esset hac definitio quarta, qua partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quacunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura utramque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita ut si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum co-

minis mensura, illum metitur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & in reliquis.

Q V O D si roges, cur Euclides hoc in loco non solum eum numerum minorem definiat: qui maioris pars est; verum etiam illum, qui partes: non autem id ipsum quinceo lib. in magnitudinibus praestiteris: Neque enim magnitudinem illam minorem, quae maiorem non metitur, partes appellamus; sed tantum eam, quae maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, cen. propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inaequalibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cum ea per sepe sit incommensurabilis, ut aperte liber decimus demonstrabit, & quae adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, maior & maioris partes plures comprehendit, si illum non metitur. Refle igitur Euclides in quinceo lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicavit.

V.

MULTIPLEX uero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

Q V I A D M O D U M ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo ut numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Ut numerus 6. pars est numeri 10. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor non metitur, nullo modo eris maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fueris multiplex, minor maiorem non metitur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc definitio maior minoris multiplex.

VI.

P A R numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes aequales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR uero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui unitate differt a pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 17. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia unitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. uel etiam ab his 6. 12. 16. 58. 202. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, unitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium, atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque unitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit ut quemlibet parem aliquis numerus par, scilicet binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parē, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parē 4. Ita quoque par numerus 24. pari-

ter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est per numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM si recte duae proxima definitiones expendantur, perspicuum erit, fieri posse, ut unus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Unde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum, ut excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt utrique definitioni particulam, tantum; ita ut numerus pariter par, secundum eam, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, ut propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neque pariter impar, quod eum metiatur non tantum, ut dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam utriusque, ut constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diversa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hac omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetii, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidi.

clidie instituto, ut perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista: tantum, quam illi appendit, & ex propo. 32. 33. 34. lib. 5. ubi manifeste omnem numerum parum, quem aliquis par per parum metitur, pariter parē appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; cum denique, quem par numerus metitur & per parum numerum, & per imparem, vocat pariter parum, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter paros tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, ut sunt 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37. 39. 41. 43. 45. 47. 49. 51. 53. 55. 57. 59. 61. 63. 65. 67. 69. 71. 73. 75. 77. 79. 81. 83. 85. 87. 89. 91. 93. 95. 97. 99. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares, rursum eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec solum pariter pares, nec solum pariter impares illi sint. Sed hac planius in lib. 9. intelliguntur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

¶ Et hic numerus impar 15, impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3, eum metitur per 5. numerum imparē. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 205. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem unitas sola metitur.

Quod si numerum quempiam nullus numerus, sed sola unitas metiatur, ita ut neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus, quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola unitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

SICUT numerus ille, quem sola unitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter unitatem, nullus numerus, tamquam mensura communis metitur, quamvis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter unitatem metiantur, appellantur inter se primi. Ut 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia si sola unitas, mensura communis illos metitur: quamvis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 4. posteriores vero illi 2. 4. tamen nullus istorum utrumque metitur, sed sola unitas utriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter se dicuntur, quod præter unitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique unitas, & quilibet numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: quia sola unitas unitatem, & numerum quemvis metitur.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quæ numerus quispiam metitur.

NUMERVM, quem præter unitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam cum uterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, depro binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, om-

nes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, ut diximus.

XIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur . . .

De o numeris, vel plures, quos præter unitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus, quemadmodum & numerus ille, quem præter unitatem, numerus quilibet metitur, compositus nominatur. Hi numeri 2. 3. 4. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erant hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & se ipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NUMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

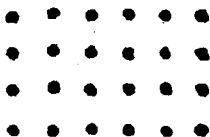
¶ Numerus 6. multiplicare dicitur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. unitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoque contra numerus 8. multiplicare dicitur numerum 6. si numerum 6. octies sumperimus, toties scilicet, quot unitates in multiplicante 8. continentur. procreauerimusque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicuntur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus

ptus fueris centies, millies, aut vicies, &c. genitive fueris
bi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus ali-
quis dicitur produci, gigni, procreari ex duobus numeris,
quando altero alterum multiplicante, productus fueris. *Vi* nu-
merus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur
ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. & e contrario.
Et sic de reliquis.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se
multiplicantes aliquem fecerint, qui factus
erit, planus appellabitur. Qui vero nume-
ri mutuo se se multiplicarint, latera illius
dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione minima
duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum sua
unitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum re-
ctangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplica-
ntes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, quod ip-
sum contineant, non secus, ac recta linea angulum rectum am-
bientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur,



ut latius lib. 2. explicamus.
Vi numerus 24. productus ex
multiplicatione minime numero-
rum 4. & 6. planus appellatur,
lateraque eius sunt 4. & 6. quia
eius unitates in longum, & latum
disposita, prout latera exigunt,

referunt parallelogrammum rectangulum, cuius unum latus
sex unitates, alterum vero 4. completitur. Eodem modo nume-
rus 64. genitus ex minime multiplicatione numerorum 8. & 8.
planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CARTERVM cum infinita sint genera numerorum pla-
norum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana
apud Geometras: Euclides solum definit planum quadrangula-
rem

rem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorū
mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc
solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte qua
drato geometrico, & figura altera parte longiori, similes sunt, et
auales, siue ambitum, siue aream, capacitatemque spectes. Ni-
hil autem dicis de numeris triangularibus, pentagonis, hexago-
nis, &c. quia hi, licet conveniant triangulo Geometrico, penta-
gono, hexagono, &c. quoad ambitum: tamen si aream, seu capa-
citatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod per-
spicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Aris-
toticam Iordanus perlegeris.

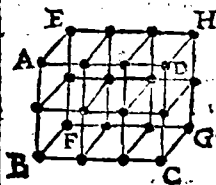
POTEST autem unus, idemque numerus planus plura
habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari
possit, ut numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum
etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3.
in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex mul-
tiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus
100. latera habet 5. & 20. 4. & 25. 2. & 50. 10. & 10. quod
ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gi-
gnantur.

QUIA vero omnem numerum planum metiuntur duo nu-
meri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sum-
ptus, quot sunt in altero unitates, ipsum procreat, liquido con-
stat, omnem planum numerum esse compositum; Quod etiam
de numero solido, qui iamiam definitur, dici potest. Verum
est, unitatem aliquando dici posse numerum planum, maxime
improprie; quia eius latera sunt duae unitates, quae multiplicae
se mutuo ipsam unitatem producant.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo se se
multiplicantes aliquem fecerint, qui pro-
creatus erit, solidus appellabitur: Qui au-
tem numeri mutuo se se multiplicarint, la-
tera illius dicentur.

Vt quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicauer, produciunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. produciunt numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius unitates in longum, latum atque profundum disposita referant figuram quandam solidam, quae Parallelepipedum nuncupatur, ut lib. 1. replicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & alius linem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 3. efficitur numerus 6. basis solidi numeri longa tres unitates, & lata duae. Es si hac basis in 4.



multiplicetur, hoc est, accipiamur quater, exurgit totus numerus solidus 24. altitudinem habens quatuor unitatum. Ad si numerus 2. in 4. multiplicetur, habebitur basis 8. unitatum, quae multiplicata in 3. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 3. unitates. Si denique

numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quae bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas unitates. Quae omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit A B C D, duodecim unitatum, cuius longitudo B C, quatuor unitates, & B A, latitudo, tres complectitur; superponetur ei altera basis similis, & equalis E F G H, ut totus numerus solidus contineat 24. unitates, eiusque altitudo B F, unitates duas. Similiter, si basis sit B C G F, octo unitatum, cuius longitudo B C, quatuor, & latitudo B F, duas continet unitates; superponetur ei alia duae bases similes, & aequales, fietque totus solidus numerus rursus 24. altitudinem B A, habens trium unitatum. Si denique basis sit A B F F, sex unitatum, cuius longitudo A B, tres continet, & latitudo B F, duas, superponetur illi tres aliae bases similes, & aequales, constabitque totus numerus solidus unitatibus 24. quoniam quatuor, altitudinem dabunt B C. Idem hic numerus solidus 24. habet haec latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producat. Eodemque modo de alijs numeris solidis indicandum erit.

DE NIQV

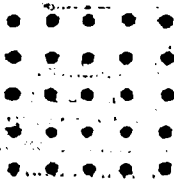
DENIQUE & unitas, aliquando solidus appellabitur numerus, & si non proprie, quia eius latera sunt tres unitates, ipsam unitatem ex mutua earum multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositae sunt parallelae, contineturque sub tribus numeris, omissis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob causam in praecedenti definitione datam, quia scilicet hi prorsus aequales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui aequaliter aequalis. Vel qui sub duobus aequalibus numeris contingitur.

PLANVM illum numerum, qui aequaliter aequalis est, hoc est, qui secundum unitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est aequalis, ita ut omnia latera sint aequalia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum aequalium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25, contentus sub numeris aequalibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius unitates in formam planam redigantur, refertur perfectum quadratum Geometricum, in omnibus lateribus habens quinque unitates, ideoque aequaliter aequalis erit.

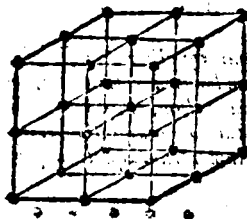


ALTERVTER autem numerorum aequalium, sub quibus quadratus numerus continetur, uel ex quorum multiplicatione producit, latus quadrati a Geometris, radix uero ab Arithmeticiis plerisque appellatur.

XIX.

C V B V S uero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum vocat. cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius unitates in longum, latum, atque profundum dispositæ, cubum Geometricum referunt, ita ut omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione trium æqualium numerorum inter se præducitur. Qualis est numerus 27, contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione tripla procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam solidam rectæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, æres unitates. Quare ipse numerus 27 est æqualiter



æqualis æqualiter.

Q V P L F B D T cetero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum tripla multiplicatione procreatur, Geometris latius cubi, plerisque autem Arithmetici radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; uel eadem pars, uel eadem

partes;

partes : Vel certe , cum primus secundum , & tertius quartum , æqualiter continet , eandemque insuper illius partem , uel easdem partes .

V T numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiusmodi sunt omnes numeri inæquales inter se collati) complecteremur , addidimus huic definitioni illa verba ; vel certe , cum primus secundum , & tertius quartum , æqualiter continet , eandemque insuper illius partem , uel easdem partes . Definitio etenim uulgata . Euclidis , quæ puto esse corruptam , cum manca sit , atque imperfecta , comprehendit solum proportionales numeros in proportione multiplici , submultiplici , & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis . Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales , cum primus secundi , & tertius quarti , æque multiplex est ; in submultiplici uero , cum primus secundi , & tertius quarti , eadem pars est ; & in reliquis proportio nibus minoris inæqualitatis , cum primus secundi , & tertius quarti , eadem partes fuerit , ut uult definitio Euclidis : At ne ro ex ea nequaquam deprehendere possimus , quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari , superpartiente , multiplici superparticulari , & multiplici superpartiente ; In his enim omnibus , primus numerus secundi , & tertius quarti , nec æque multiplex est , nec eadem pars , nec eadem partes ; sed primus secundum , & tertius quartum , æqualiter continet , puta uel semel , uel aliquoties , & eandem insuper illius partem , easdemue partes ; ut perspicuum est ex iis , quæ ducimus ad defin. 3. lib. 5. ubi omnes proportionales rationales copiose explicuimus . Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales sunt , cum primus secundi , & tertius quarti æque multiplex sit , nempe triplax . Item hi 4. 12. 9. 9. est enim primus secundi , & tertius quarti , eadem pars , nimirum tertia . Rursus proportionales sunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus secundi , & tertius quarti eadem partes sint , uidelicet tres partes quartæ . Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 11. 5. 24. 12. sunt numeri proportionales . Nam in primo exemplo primus numerus secundum , & tertius quartum , semel , & insuper

insuper eandem partem, nempe sextam; In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In ultima itaque semel primus secundum, & tertius quartum, bis, et praeerea easdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, non sit aequi multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus secundum, & tertius quartum, non aequaliter contineat, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.

NOTA ES CA. V. Q. V. E. igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus cōseruantur, quod primus secundi, & tertius quarti, aequi multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aequaliter, & insuper eandem partem, vel easdem partes. Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aequi multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aequaliter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numerus esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicantur quoque eandem habere proportionem, sciendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et e contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINITIO autem Euclides eorundemque numerus proportionales; qui proportionem eandem inaequalitatis habent. Nam si de proportionem aequalitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo; & tertium quarto aequalem debere esse, ut proportionales dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, aequales nomen tot ad eandem habere eandem proportionem: Et contra, eundem ad aequales eandem quoque habere proportionem; Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eundem habet proportionem, aequales esse. Cum enim aequales numeri sint eundem, vel aequi multiplices, vel eadem pars, vel eandem partes; Vel certe eundem aequaliter contineant, eandemque insuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus aequali sit vel aequi multiplex, vel eadem pars, vel eandem partes:

Vel certe illos equaliter contineas, eandemque insuper eorum partem, vel partes; perspicuum est, aequales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aequales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

R V R V S quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel aequemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum aqualiter continent, eandemque insuper eius partem, vel partes: Item quia idē numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel aequemultiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestum est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, aequales esse.

P A R E ratione inferiur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quae omnia perspicua sunt, si recte hac definitio intelligatur.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

N O N necesse est, ut planus numerus plano numero sit similis, quolibet duo illius latera quibusvis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quae sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundū suas unitates in formam planā redigantur, prout latera assumpta extigunt. Ut numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniā illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamvis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. vel 12. 2.

E O D E modo, ut duo numeri solidi similes sint, nō requi-

ritur, ut quævis tria unius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit. ut tria unius reperiatur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum unitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Ut numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQUE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperi queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, ut dictum est, & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8 nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NUMERVS ille, cui omnes sue partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ faciunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæc 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertijs denique numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in unam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & quæ uia, ac ratione procreentur, (hæc enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 7.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si uero minores, Diminutus.

Hi s. definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ alia, quibus proxime accedat postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrantis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes uti videntur.

XXIII.

NUMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, illum producit.

*V*t numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus secundum 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producat. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producit 12. Quia uero ut propos. 16. huius lib. ostendimus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplices numerum 3.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, uel pars, partesue; uel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, uel partes.

*S*i numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nempe quincuplus, dicitur

H b 2 hxc

hac comparatio, habitudinis, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudinis, qua idem numerus 20. cum numero 60 confertur, secundum quod illius tertia pars est 3 & sic de reliquis.

QVAB cum ita sint, perspicuum est, cum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aequi multiplex est 3, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, aequaliter continet, eandemque insuper illius partem, vel eandem partes, ut supra definit. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportionem minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HABC definitio, ut ad magnitudines pertinet, copiose explicata fuit in quinto lib. Unde cum omnia, qua ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QUOTLIBET numeris ordine positus, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertiū, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita se habere, pluribus verbis a nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

POSSUNT etiam huc referri definitiones illa in quinto libro tradita de alterna ratione, inuersaque; de compositione, dimissione, & conuersione rationis; de ratione ex aequalitate, & de proportionem ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportionem versantur, demonstrabuntur quoque in hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, uel multiplices.

II.

QUOLIBET numero sumi posse maiorem.

QUAMVIS enim numerus infinitè diminui nequeat, sed necessario ad unitatem individuum diminutio deueniat; tamen augeri potest infinitè per additionem continuam unita-

sis. Quare quolibet numero proposito maior ex-
le uidelicet, qui ex unius unitatis, uel etiam plurimum addu-
ne consurgis.

AXIOMATA, SIVE PRONVTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorū, uel
eiusdem æque multiplices sunt, inter se
sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque mul-
tiplex est, uel æque multiplices sunt æqua-
les, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualiū numerorum, uel
eiusdem, eadem pars, uel eadem partes fue-
rint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, uel æqua-
les, eadem pars, uel eadem partes fuerint,
æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per uni-

tates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsum-
met numerum metitur.

*N A M unitas sumpta toties, quot sunt in numero propo-
sito unitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per
unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex
suis unitatibus constitutum.*

V I.

O M N I S numerus se ipsum metitur
per unitatem.

*C V M quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis,
manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per unitatē.*

V II.

S I numerus numerum multiplicans, ali-
quē produxerit, metietur multiplicans pro-
ductum per multiplicatum, multiplicatus
autem eundem per multiplicantem.

*N U M E R V S enim A, numerum B, multiplicans pro-
ducit numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eun-
dem C, per A Cum enim ex defn. 15. nu-
merus B, toties compositus constituat ip-
sum C, quot s. nt in A, unitates, perspi-
cuum est B, metiri ipsum C, per A, &
eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam
B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, ut demonstra-
bitur propos. 16. huius lib.*

A B . . .
C

V III.

S I numerus numerum metiatur, & il-
le, per quem metitur, eundem metietur
per eas, quæ in metiente sunt, unitates,

H h 4 hoc

hoc est, per ipsum numerum metientem.

P T quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metitur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vias, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. sed numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metitur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quæ metitur, uel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

*M*ETIATUR enim numerus *A*, numerum *C*, per *B*. Dico *A*, multiplicatorem ipsum *B*, uel multiplicatum a *B*, producere ipsum *C*. Nam numerus *A*, numerum *C*, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, ipsum *C*, producit, per defin. 23. Cum ergo *A*, metiri ponatur ipsum *C*, per *B*; perspicuum est, numerum *A*, multiplicatorem ipsum *B*, uel ab eo multiplicatum, producere ipsum *C*.

X.

NUMERVS quocunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

*M*ETIATUR numerus *A*, numeros *BC*, *CD*. Dico eundem *A*, metiri quoque ex ipsis compositum *BD*. Cum enim *A*, metiatur ipsos *BC*, *CD*; erit tam *BC*, quam *CD*, ipsum *A*, multi-

A, multiplex: Dimi-
so ergo *BC*, in partes
BE, *EC*, ipsi *A*, aequa-
les, & ipso *CD*, in par-
tes *CF*, *FG*, *GD*, ei-

A
B *E* *C* *F* *G* *D*

dem *A*, aequales; erit numerus *BD*, compositus ex omnibus
partibus *BE*, *EC*, *CF*, *FG*, *GD*, ipsi *A*, aequalibus, multi-
plex ipsius *A*. Quare *A*, ipsum *BD*, metitur. Quod est pro-
positum.

XI.

NUMERVS quemcunque numerū
metiens, metitur quoque omnem nume-
rum, quem ille metitur.

METIATUR numerus *A*, numerum *B*; & *B*, nume-
rum *CD*. Dico eundem *A*, metiri quoque numerum *CD*, quē
B, metitur. Cum enim
B, metiatur ipsum *CD*,
erit *CD*, ipsius *B*, multi-
plex. Dimiso ergo *CD*, in
partes *CE*, *ED*, ipsi *B*,
aequales; metietur *A*, ip-
sos numeros *CE*, *ED*;
quandoquidem numerum *B*, tam numero *CE*, quam *ED*, aequa-
lem, metiri ponitur. Igitur idem *A*, per pron. 10, metietur
quoque numerum *CD*, ex *CE*, *ED*, compositum. Quod est
propositum.

A
B
C *E* *D*

XII.

NUMERVS metiens totum & abla-
tum, metitur & reliquum.

METIATUR numerus *A*, totum *BC*, & ablatum
BD. Dico eundem *A*, metiri quoque reliquum *DC*. Cum
enim *A*, metiatur & *BC*, & *BD*; erit tam *BC*, quam *BD*,
ipsius

ipſus A , multiplex. Diſiſo ergo tam BC , quam BD , in partes ipſi A , æquales; Erit reliquus numerus DC , uel una pars numeri BC , ipſi A , æqualis, uel plures, atque adeo DC , æqualis erit ipſi A , uel eius multiplex. Meſitur igitur A , ipſum DC .

Quod eſt propoſitum.

THEOR. I. PROPOS. I.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis; detrahatur ſemper minor de maiore; alterna quadam detractiōe, neq; reliquus unquā metiatur præcedentē, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

S I N T duo numeri propoſiti inæquales AB , CD , quorum CD , minor ex maiore AB , quoties poteſt, detrahatur; & reliquus EB , ex CD , quoties etiam poteſt; & reliquus FD , ex EB : Et in hac alterna detractiōe nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatē GB , quæ quidem præcedentis numerum FD , metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB , CD , eſſe inter ſe primos; hoc eſt ſolam unitatem communem meſuram eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H , communem meſuram, præter unitatem. Quia ergo H , metitur numerum CD ; & CD , numerum AE , (quod CD , uel pars ſit ipſius AE , uel certe ei æqualis, cum detractus ex AB , reliquerit numerum EB), metietur quoque H , ipſum AE : At H , metitur quoque eorum

A B, igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipsum C F; igitur & H, ipsum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, metietur quoque reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipsum E G; metietur etiā H, ipsum E G: Metiebatur autem & H, totum E B; Reliquam igitur unitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter se sunt. Quamobrè, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

CONVERTENS facile cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractioe; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit unitas.

SINT duo numeri inter se primi A B, C D, quorū minor C D, ex maiore A B, quoties potest, detrahatur; & reliquus F B, ex C D, quoties etiam potest; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractioe nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad unitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad unitatē detractio perveniat, si fieri potest, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerum F D, metitur; & F D, ipsum F G; metietur quoque G B, ipsum E G. Cum ergo G B, & se ipsum metiatur; metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compositum: Metiatur autem E B, ipsum C F; Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atq; adeo cū & ipsum F D, positus sit metiri; metietur quoque C D, ex C F, F D, compositum. At vero

$$\begin{array}{l} A \dots\dots\dots E \dots G \dots B \\ C \dots\dots\dots F \dots D \end{array}$$

12. pron.
11. pron.
12. pron.
11. pron.
12. pron.
11. pron.
10. pron.
11. pron.
10. pron.
C D,

11. *prop.* CD , metiatur ipsum AE : Igitur & eundem AE , numerus GB , metietur: Ac proinde cum & ipsum EB , metiatur, ut ostensum est; metietur & AB , ex viroque AE , EB , compositum. Quare cum numerus GB , metiatur numerus AB , CD , ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit unitas. Quod est propositum.
10. *prop.* $EODEM$ modo & hoc demonstrabimus.

Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, altera quadam detractio; detractio ad unitatem usque non perveniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad unitatem usque perveniret, essens propositi numeri inter se primi, ut Euclides demonstravit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detractio semper minor de maiore, altera quadam detractio; si nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit unitas; ipsi erunt inter se primi, ut Euclides demonstravit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus utrunque numerum propositum metiatur, ut perspicuum est ex demonstratione superiori. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB , metiri dicebatur præcedentem numerum FD , ostensum fuit, eundem reliquum GB , utrunque AB , & CD , metiri.

●.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBUS numeris datis non primis

MEET

inter se, maximam eorum cōmunem mensuram reperire.

D E N T V A duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B, quoties potest, relinquitq; E B, numerum, qui ex C D, subtractus relinquit F D, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alternatim quadam detractione; in qua quidē perueniatur ad numerum, qui præcedentē metiatur. Nam si ad unitatē deueniretur, numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentū ergo iam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquit, sed eum metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrunq; metiatur, ita ostendemus. Quia F D, metitur ipsum E B; & E B, ipsum C F; metietur quoque F D, ipsum C F; atq; adeo cū & seipsum metiatur, metietur & totū C D, ex C F, F D, compositum. At C D, ipsum A E, metitur; Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipsum E B; metietur etiā totum A B, ex utroque A E, E B, compositum. Metietur igitur F D, utrunquen umerum A B, C D.

A E B
C F D
G -----

Q V O D autem F D, sit maxima mensura communis illorū, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrunque A B, C D; Et C D, metitur ipsum A E; metietur quoque G, ipsum A E. Igitur & residuum E B: At uero E B, metitur C F; Metietur ergo & G, eundem C F; Igitur & residuum F D; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quā F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F D, maxima est mensura numerorum A B, C D.

Q V O D si minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquit, erit ipse maxima

1. septimi

11. pron.

10. pron.

11. pron.

10. pron.

11. 12. &

11. pron.

12. pron.



A B
C D

ma amborum mēſura com-
munis cum & ſe ipſum me-
tiatur. Duobus igitur nu-
meris datis non primis inter

ſe, &c. Quod erat faciendum.

C O R O L L A R I U M.

Ex hoc manifeſtum eſt, quod numerus metiens duos nume-
ros, metitur & maximam eorundem communem meſuram. Hoc
elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit F D, eſſe
maximam meſuram ipſorum A B, C D. Demonſtratum enim eſt
ibi, numerum G, ſi metiatur numeros A B, C D, metiri quoque
numerum F D, maximam eorum meſuram communem. Eademq;
ratio eſt de cæteris.

S C H O L I O N.

Ex diſtis facile cum Campano experiemur, an quolibet
numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint tres numeri

A B C
A
B
C
Primum ergo expetor,
per ea, quæ ad propoſ. i. docuimus,
an duo A, & B, ſint inter ſe primi:
Qui ſi fuerint inter ſe primi, non
erunt tres numeri A, B, C, inter ſe

compoſiti, quod nullam poſſint habere meſuram communem,
præter unitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

2. ſeptimi

Si vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, ſit eorum ma-
xima meſura communis in-
uenta D; qua ſi metiatur &
numerum C, perſpicuum eſt,
tres numeros A, B, C, eſſe in-
ter ſe compoſitos, cum habeant
numerum D, communem me-
ſuram.

Q U O D ſi D, maxima meſura numerorum A, & B, non
metiatur numerum C; Erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel
non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C,
inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe
inter ſe compoſiti, ita ut habeant numerum communem me-
ſuram, metietur eiſmodi communis meſura numerum D, ma-
ximam

maximam

maximam mensuram numerorum A , & B , per coroll. huius pro-

pos. Quare cum eadem illa mensu-

A

B

ra metiatur quoque numerum C , non

C

erunt inter se primi numeri C , & D .

D

Quod est contra hypothesim. Si autem

C , & D , non sint inter se primi, erunt

tres numeri A , B , C , inter se compo-

siti. Inuenta enim numerorum C , & D , maxima mensura

2. septimi

communis E ; cum E ,

metiatur ipsum D ; D ,

autem ipsos A , & B ;

A

B

11. prop.

metietur quoque E , eos-

C

dem A , & B . Quare

D E

cum idem E , metia-

tur quoque ipsum C ;

metietur F , tres nume-

ros A , B , C ; Ac propterea ipsi inter se sunt compositi. Quod

est propositum.

SIMILITER arte explorabimus, an plures numeri; quam

tres sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam

si dati numeri fuerint quatuor, experiendam ideris primum in

tribus; si quinque, in quatuor, & c. Reliqua autem perficien-

das, de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTUR tres numeri A , B , C , non primi inter se, quorum maximam men-

suram communem oporteat

A

reperire. Sit D , maxima

B D

mensura numerorum A ,

C E F

2. septimi

& B ; Si ergo D , metiatur

quoque

quoque ipsum C, perspicuum est D, esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per

coroll. propos. 2. huius lib.

numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B,

A.....

maior numerus minorem.

B..... D....

Quod est absurdum. Si uero

C..... E.. F---

D, nō metiatur ipsum C; erit

saltem D, & C, inter se com-

positi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi, metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C, erunt D, & C, inter se compositi. Sit eorum

2. *septimi*

maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura cōmunis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C. & D; at D, ipsos A, & B; metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

11. *prop.*

Quod autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem

tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod facendum erat.

COROLLARIUM.

Hinc perspicuum est, quod numerus metiens tres numeros, metitur quoque maximam eorum communem mensuram. Hoc colligitur ex ultima parte demonstrationis; Oñsum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque se-

-ndum

merum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in ceteris est ratio.

P A R titione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

S I N T duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primo A, & B, inter se primi. Quia igitur quaelibet unitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B.

A

B

S I N T deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compoliti, & metiatur A, ipsum B. Quo posito manifestum est A, partem esse numeri B.

A

B

S I D iam A, non metiatur ipsum B; inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E,

E F, quarum singulae ipsi C, sint aequales. Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque A D, pars

A .. D .. E .. F

B

C ..

eiusdem B: similiter & D E, & E F: Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter

II. alt.

alterius eadem pars : Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

Si **T** numerus **A**, eadem pars numeri **B C**, quæ est numerus **D**, numeri **E F**. Dico utrumque numerum **A**, & **D**, simul, utriusque numeri **B C**, & **E F**, simul eandem esse partem, quæ est uel **A**, ipsius **B C**, uel **D**, ipsius **E F**. Divi-

A			D	lis enim
B	G	C	E H F	numeris
				B C , E F ,
				in partes
				B G , G C ;
				E H , H F ,

ipsis **A**, & **D**, æquales; erit multitudo partium numeri **B C**, æqualis multitudini partium numeri **E F**, propterea quod eadem pars est **A**, ipsius **B C**, quæ **D**, ipsius **E F**. Quia igitur **A**, & **B G**, æquales sunt; si illis addantur æquales **D**, & **E H**; erunt **A**, & **D**, simul æquales ipsis **B G**, & **E H**, simul: Eodè argumento erunt **A**, & **D**, simul ipsis **G C**, & **H F**, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in **B C**, & **E F**; aggregatum numerorum **A**, & **D**, tot aggregatis partium numerorum **B C**, & **E F**, æquale erit, quoties **A**, in **B C**, uel **C**, in **E F**, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque **A**, & **D**, simul utriusque **B C**, & **E F**, simul, quæ est **A**, ipsius **B C**, uel **D**, ipsius **E F**. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

E O D E M modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

Si unitas numeri pars fuerit, & altera unitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas, uel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

H O C

Hoc autem perspicue in his apposis exēplis apparet. Eadem enim profus est demonstratio.

A . . . D . . . A . . . D . . .
B . G . C E . H . F B . G . C E . . H . . F

POSSUMVS etiam hanc propositionem ad quoscunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorū, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erant, quæ unus unius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorū eadē pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorum

DE, FG, A . . . B . . . C . . .
HI, simul D . . . K . . . E F . . . L . . . G H . . . M . . . I
eandem esse

partē, quæ est A, ipsius DE. Diuisis. n. numeris DE, FG, HI, in partes ipsi A, B, C, æquales; erit multitudo partiū numeri DE, æqualis multitudini partiū tam numeri FG, quā numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addatur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursus addantur æquales C, & HM, erunt quousq; A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erūt A, B, C simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatiū numerorum A, B, C, tot aggregatis partiū numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, cōtinetur. Quamobrē eadē pars erūt A, B, C, simul ipsorū DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco unius numerorū A, B, C, sumatur unitas, uel loco pluriū, uel etiā omniū, plures unitates, ut de duobus dictum est. Id quod sequentes figura indicant.

A . . . B . . . C . . . A . . . B . . . C . . .
D . K . E F . . L . G H . . M . . I D . K . E F . L . G H . M . I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile probemus, in hanc modum.

Si sint. quotcūque numeri quocunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erant & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, que in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint *A, B, C,* numeri numerorum *D, E, F,* æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes *A, B, C,* simul unum *D, E, F,* simul tam multiplices esse, quam est *A,* multiplex ipsius *D.* Cum enim tam sit multiplex *A,* ipsius *D,* quam est *B,* ipsius *E,* & *C,* ipsius *F;* erit e contrario *D,* eadem pars ipsius *A,* que *E,* ipsius *B,* & *F,* ipsius *C.* Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonstrata sunt, erunt *D, E, F,* simul eadem pars ipsorum *A, B, C,* simul, quæ *D,* ipsius *A;* Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes *A, B, C,* simul, omnium *D, E, F,* simul, quam est multiplex *A,* ipsius *D.*

QUOD si loco unius numerorum *D, E, F,* assumatur unitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures unitates, theoremata eodem modo demonstrabuntur, ut ex sequentibus figuris apparet.

<i>A .. B C</i>	<i>A .. B .. C ..</i>
<i>D .. E .. F</i>	<i>D .. E .. F ..</i>

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes: Et simul utrique utriusque simul eadem partes erit, quæ unus unius.

Si t numerus *A B,* eadem partes numeri *C,* quæ summus

merus DE, numeri F. Dico utrumque numerum AB, & DE, simul utriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ AB, ipsius C, uel A ... G ... B D ... H ... E DE, ipsius F. C ... F ...

Diuisis. n. numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eadem partes est numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG, numeri C, eadem est DH, numeri F; erit uterque AG, DH, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ AG, ipsius C, uel DH, ipsius F. Eadem ratione erit uterque GB, HE, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ GB, ipsius C, uel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, æquæ totæ partes eadem numerorum C, F, simul, quot partes eadem est numerus AB, ipsius C, uel DE, ipsius F. Ac proinde eadem partes erit uterque numerus AB, DE, simul, utriusque numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, uel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

s. septimi

SCHOLION.

SED & hanc propositionem ad quoscunque numeros extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quoscunque numeri quoscunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes; Et omnes omnium simul eadem partes erunt, quæ unus unus.

EADÉM enim est demonstratio, si modo pro quinta proposit. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio precedenti; ut hic perspicuum est.

A .. K .. B	C ... L ... D	E M F
G	H	I

7.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatuſ ablati: Et reliquuſ reliqui eadem pars erit, qualis totuſ totiuſ.

Si igitur numeruſ A B, eadem parte numeri C D, quæ ablatuſ A E, ablati C F. Dico reliquuſ E B, eadem eſſe parteſ reliqui F D, quæ eſt totuſ

A B, totiuſ C D. Ponatur enim E B, numeri G C, eadem parte, quæ eſt

A E, ipſiuſ C F, uel totuſ A B, totiuſ C D. Quia igitur A E, eadem eſt parteſ ipſiuſ C F, quæ E B, ipſiuſ G C; erit uterque A E, E B, ſimul eadem parteſ utriuſque, ſimul C F, G C, quæ A E, ipſiuſ C F, hoc eſt, quæ totuſ A B, totiuſ C D; Ac propterea cum A B, eadem ſit parteſ utriuſque numeri F G, C D, erunt ipſi numeri F G, G D, inter ſe æqualeſ. Dempto ergo comuni C F, æqualeſ remanebunt G C, F D. Eadem igitur parteſ erit E B, ipſiuſ F D, quæ ipſiuſ G C, hoc eſt, quæ totuſ A B, totiuſ C D. Si igitur numeruſ numeri parteſ fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

ſ. ſeptimi

SCHOLIION.

IDE M hoc theorema uerum eſt, etiam ſi ablata ſit unitaſ A E, uel reliqua fuerit unitaſ E B, uel denique & ablata, & reliqua ſit unitaſ, ut ex hiſ exempliſ apparet.

A . E . . . B A . . . E . B . . . A . E . B
G C . . F D G . . C F . . D G . . C . . F . D

C A R T E R U M & ex hiſ theorematiſ quinto lib. 5. ſimile hoc demonſtrabimus.

Si numeruſ numeri æque fuerit multiplex, atque ablatuſ ablati: Etiam reliquuſ reliqui ita

multi

multiplex erit, ut totus totius.

Quod quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quintæ lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB , totius CD , æque multiplex, atque ablati AE , ablati CF . Dico & reliquum EB , reliqui FD , ita esse multiplicem, ut est totus AB , totius CD . Cum enim

$A \dots E \dots B$
 $C \dots F \dots D$

AB , ipsius CD , sit æque multiplex, atque AE , ipsius CF ; erit e converso totus CD , totius AB , eadem pars, quæ

ablati CF , ablati AE . Quare & reliquus FD , reliqui EB , eadem pars erit, quæ totus CD , totius AB ; Ac proinde e converso EB , ita multiplex erit ipsius FD , ut AB , ipsius CD , est multiplex.

Si aliquando ex CD , ablata fuerit unitas CF ; nec reliqua sit unitas FD : vel denique & ablata sit unitas CF , & alia reliqua FD ; idem demonstrabitur, ut hac exempla com-
monstrant.

$A \dots E \dots B$
 $C \dots F \dots D$

$A \dots E \dots B$
 $C \dots F \dots D$

$A \dots E \dots B$
 $C \dots F \dots D$

THEOR. 6, PROPOS. 8.

8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablati: Et reliquus reliqui eadem partes erit, quales totus totius.

Si numerus AB , partes eadem numeri CD , quæ ablati AE , ablati

CF . Dico reliquum EB , eadem esse partes reliqui FD , quæ totus AB , co-

$A \dots K \dots E \dots B$
 $C \dots F \dots D$
 $G \dots L \dots I \dots M \dots H$

tius CD . Sumpto enim numero GH , æquali ipsi AB , erit

Ii 4 GH,

GH, eadem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuisio ergo GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE in partes AK, KE, numeri

CF; erit multitudi-
 A..... K..... E.... B do partium GI, IH,
 C..... F..... D multitudini partium
 G..... L... I..... M.. H AK, KE, æquales,
 eademque pars tam

GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatas GL, ablatas CF, erit & reliquus LI,

7. *septimi* reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, uel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius FD; erit uterque GA, IH,

6. *septimi* simul eadem partes ipsius CD, quæ uterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eadem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & uterque LI, MH, simul eadem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia uero si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AL, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt. Erit quoque EB, reliquus eadem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nempe, quæ uterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo nunc erit partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIION.

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quem admodum precedentē, quod nonnulli interpretes faciunt, quod non constabat hic, reliquum numerū EB, alius numerū eandem esse partes, quæ est numerus AB, numeri CF; ibi uero

perspicuum erat, reliquum EB , alicuius numeri eandem esse partem, quæ est AE , ipsius CF . Licet enim ipsius EB , duplū assumere, triplū, quadruplū, &c. donec EB , sit ita submultiplex numeri assumpti GC , ut AE , est submultiplex ipsius CF .

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et uicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadē pars erit, uel eadem partes & secundus quarti.

Si r numerus A , numeri BC , eadem pars, quæ numerus D , numeri EF , sintque A, BC , minores ipsis D, EF , singuli singulis. Dico & uicissim eandem partem esse, aut eandem partes A , ipsius D qua

lis est, aut quales BC , ipsius EF . Diuisis enim numeris BC, EF , in partes BG, GC , & EH, HF , ipsis A , & D , æquales; erit multitudo partium numeri BC , æqualis multitudini partium numeri EF .

Quia uero BG, GC , inter se sunt æquales, & minores quā EH, HF , quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus BC , toto EF , minor ponitur; Erit BG , ipsius EH , eadem pars, aut partes, quæ GC , ipsius HF ; ac propterea & uterque BG, GC , simul, nempe BC , secundus utriusque EH, HF , simul, nimirum EF , quarti eadem pars, uel partes, quæ BG , ipsius EH , hoc est, quæ A , primus ipsius D , tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIION.

Quod si loco primi numeri unitas accipiat, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit uicissim

5. uel 6.
seprimi.

A .
B . G . C
D
E H F

unitas tertij numeri eadē
pars, quæ secundus nume-
rus quarti; id, quod eo-
dem argumento confirma-
bitur, si loco partium af-
sumamus partem in demo-

stratione, ut ex hoc exemplo apparet.

10.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & al-
ter alterius eadem partes: Et uicissim, quæ
partes est primus tertij, aut pars, eadem
partes erit & secundus quarti, aut pars.

S I T numerus A B, eadem partes numeri C, quæ nume-
rus D E, numeri F, sintque A B, C, ipsis D E, F, minores,
singuli singulis. Dico & uicissim, numerum A B, eadem
partes esse, aut partem numeri D E, quæ numerus C, est nu-

A . . . G . . . B
C
D H E
F

meri F. Diuisis enim nu-
meris A B, D E, in partes
A G, GB, & D H, H E,
numerosum C, & F; erit
multitudo partiū in A B,
æqualis multitudini par-
tium in D E, & tam A G,
quam G B, eadem pars ip-

sus C, quæ tam D H, quam H E, ipsius F. Vicissim ergo ea-
dem pars erit, aut partes A G, ipsius D H, & G B, ipsius H E,
quæ C, ipsius F: Ac propterea eadē pars erit, uel partes A G,
ipsius D H, quæ G B, ipsius H E. Igitur & uterque A G, GB,
simul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes
utriusque D H, H E, simul, nimirum D E, tertij, quæ A G,
ipsius D H, hoc est, quæ C, secundus quarti F. Si nu-
merus ergo numeri partes fuerit, & al-
ter alterius, &c. Quod demon-
strandum erat.

seprimi

uel s.
septimi.

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. II.

12.

Si fuerit ut totus ad totum; ita ablatu
ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit,
ut totus ad totum.

Si t ut totus numerus A B, ad totum C D, ita abla-
tus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reli-
quum F D, esse, ut est to-
tus A B, ad totum C D.

Cum enim sit ut A B, ad C D, ita A E, ad C F, erit
per defin. 20. A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, uel æque
multiplex, uel eadem pars, uel eadem partes: uel certe
A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter contine-
bit, eandemque, insuper illius partem, uel eamdem partes. Sit
primum A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, æque multi-
plex. Quo posito erit e contrario C D, totus totius A B,
eadem pars, quæ ablatu C F, ablati A E, propter A B,
A E, æque multiplices ipsorum C D, C F. Igitur & reli-
quus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D,
totius A B; Ac propterea e contrario A B, ipsius C D, &
E B, ipsius F D, æque multiplex erit. Quare erit, per defin.
20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reli-
quum F D.

7. septimi

Si t secundo A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, ea-
dem pars, uel eadem par-
tes. Quo posito, erit & reli-
quus E B, reliqui F D, eadē
pars, uel partes, quæ totus
A B, totus C D; Ac proinde,
per defin. 20. erit ut totus

A . . . E . . B
C F . . . D
A E . . B
C F . . . D

7. uel 8.
septimi.

A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

CONTINEAT tertio A B, ipsum C D, & A E, ip-
sum C F, æqualiter, eandemque insuper illius partem, uel
partes. Quo posito, erit e contrario C D, totus totius A B, eadē
partes, quæ ablatu C F, ablati A E, ut mox demonstrabimus.

Reli-

8. *Septimus*

Reliquis igitur FD , reliqui EB , eadem quoque partes

$A \dots E \dots B$ $A \dots E \dots B$
 $C \dots F \dots D$ $C \dots F \dots D$

erit, quæ totus CD , totius AB : Ac propterea, e contrario AB ipsum CD , & EB , ipsum FD , æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes, ut mox ostendemus. Quare erit, per defn. 20. ut totus AB , ad totum CD , ita EB , reliquus ad reliquum FD .

Quod si AB , totus totum CD , æqualis fuerit, & ablatum AE , ablato CF ; perspicuum est reliquum EB , quoque esse æqualem reliquo FD : Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, ut totus ad totum, ita ablatum ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

$A \dots E \dots B$
 $C \dots F \dots D$

libus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, ut totus ad totum, ita ablatum ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Quod autem, si AB , ipsum CD , & AE , ipsum CF , æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius uel partes; e contrario CD , ipsius AB , &

$A \dots N \dots O \dots G \dots B$
 $C \dots I \dots K \dots D$
 $A \dots P \dots Q \dots H \dots E$
 $C \dots L \dots M \dots F$

CF , ipsius AE , sit eadem partes: Et si CD , ipsius AB , & CF , ipsius AE , sit eadem partes: e contrario

AB , ipsum CD , & AE , ipsum CF , æqualiter contineat; eandemque illius partem uel partes; hoc modo demonstrabimus. Contineat primo AB , ipsum CD , & AE , ipsum CF , æqualiter, nempe semel, uel bis, uel ter, &c. eandemque insuper partem, & B .

quidem

quidem ipsius CD , & HE , ipsius CF , ita ut numeri reliqui AG , AH , sint vel aequales ipsis CD , CF , uel eorum aequi multiplices. Diuisis igitur numeris CD , CF , in partes CI , IK , KD ; & CL , LM , MF , ipsis GB , HE , aequales; erit multitudo partium numeri CD , multitudini partium numeri CF , aequalis, quod GB , ipsius CD , sit eadem pars, qua HE , ipsius CF . Similiter diuisis numeris AG , AH , in partes AN , NO , OG ; & AP , PQ , QH , eisdem GB , HE , aequales; erit quoque multitudo partium numeri AG , multitudini partium numeri AH , aequalis: Cum enim AG , AH , vel aequales sint ipsis CD , CF , uel eorum aequi multiplices; erunt uel tot partes in AG , AH , quot in CD , CF ; uel certe numerus partium numeri CD , toties continebitur in AG , quoties numerus partium numeri CF , in AH ; proptereaque multitudo partium numeri AG , multitudini partium numeri AH , aequalis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB , HE , erit & multitudo partium numeri AB , multitudini partium numeri AE , aequalis: Atque adeo una pars numeri CD , eadem pars erit numeri AB , qua una pars numeri CF , est numeri AE . Quare cum multitudo partium numeri CD , aequalis sit multitudini partium numeri CF ; erit CD , eadem partes numeri AB , quae CF , ipsius AE .

CONTINEAT secundo AB , ipsum CD , & AE , ipsum CF , aequaliter; uidelicet semel, bis, ter, quaterne, &c. easdemque insuper partes illius, numerus quidem AB , partes GB , numeri CD , & numerus AE , partes HE , numeri CF , ita ut reliqui nume-

ri AG , AH , sint rursus uel aequales ipsis CD ,
 CF , uel co-
 $A \dots P \dots Q \dots G \dots I \dots B$ rru aequemul-
 $C \dots L \dots M \dots D$ tiplices. Di-
 $A \dots R \dots S \dots H \dots K \dots E$ uisis igitur
 $C \dots N \dots O \dots F$ numeris GB ,
 HE , in par-
 tes GI , IB , & HK , KE , numerorum CD , CF , erit
 multitudo partium ipsius GB , multitudini partium
 ipsius HE , aequalis. Simili modo, diuisis numeris
 CD , CF , in partes CL , LM , MD , & CN , NO ,
 OF , partibus GI , IB , & HK , KE , aequales, erit
 quoque multitudo partium ipsius CD , multitudo
 partium ipsius CF , aequalis, quod qualibet partium
 numeri GB , eadem pars sit numeri CD , qua ma-
 quaque partium numeri HE , est numeri CF . De-
 minque diuisis numeris AG , AH , in partes AP , PQ ,
 QG , & AR , RS , SH , eisdem partibus GI , IB , &
 HK , KE , aequales, erit & multitudo partium nume-
 ri AG , aequalis multitudini partium numeri AH .
 Cum enim AG , AH , uel aequales sint ipsis CD ,
 CF , uel eorum aequemultiplices; erunt uel tot partes
 in AG , AH , quot in CD , CF , uel certe numerus
 partium ipsius CD , toties continebitur in AG , quo-
 ties numerus partium ipsius CF , in AH ; propterea;
 multitudo partium numeri AG , multitudini partium
 numeri AH , aequalis erit: Quibus si addantur aequa-
 les multitudines partium numerorum GB , HE , erit
 quoque multitudo partium numeri AB , multitudo
 partium numeri AE , aequalis: Atque adeo una pars
 numeri CD , eadem pars erit numeri AB , qua una
 pars

pars numeri CF , est numeri AE . Quare cum multitudo partium numeri CD , equalis sit multitudini partium numeri CF ; erit CD , eadem partes numeri AB , quæ CF , ipsius AE . Quod est primo propositum.

IAM uero sit CD , ipsius AB , & CF , ipsius AE , eadem partes. Dico e contrario AB , ipsum CD , & AE , ipsum CF , equaliter continere, eandemque insuper illius partem, uel partes. Diuisis enim numeris CD , CF , in partes numerorum AB , AE , erunt ea multitudo inter se æquales. Item diuisis numeris AB , AE , in partes partibus numerorum CD , CF , æquales, erunt & hæ multitudo inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD , in AB , supereritque eadem pars, uel partes ipsius CD , quoties omnes partes numeri CF , continentur in AE , & quæ pars, aut partes ipsius CF , supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD , CF , & AB , AE . Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum AB , AE , contineant equaliter æquales multitudines partium numerorum CD , CF , & insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum CD , CF , multitudo æquales. Quam ob rem AB , ipsum CD , & AE , ipsum CF , equaliter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quod secundo est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

13.

SI sint quotcunque numeri proportionales,

nales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

S I N T quotcunque numeri proportionales A, B, C, D; E, F; hoc est, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul,

A C .. E ...
B D F

ut est A, ad B. Sint enim primū A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, eadem pars est, aut partes

e. nel 6.
septimi.

A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; erit quoque uterque A, C, simul utriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, uel E, ipsius F. Rursus quia uterque A, C, simul, tanquam unus, utriusque B, D, simul, tanquam unius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E, simul, amborum B, D, tanquam unius, & F, simul eadem pars, uel partes, quæ A, ipsius B. Quare, per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, quæ est ipsius A, ad B.

e. nel 6.
septimi.

S I N T secundo A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars,

3. septimi

A C E
B D . . F . . .

quæ D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo ut prius,

erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & e contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. Quare per defin. 20. eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem uerum est, etiam si aliquæ proportionēs multiplices, uel etiam omnes, sint numerorum ad ualorem. Est enim eadem semper demonstratio, ut hæc ap-
partet,

paret, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A... C... E... A... C... E... A... C... E...
B... D... F... D... D... F... B... D... F...

S I N T tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non
multiplices. Quia igitur, propter eandem proportionem,
A, ipsum B, & C, ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter conti-
net, eandemque

insuper partem, A... C... B...
uel partes; Erit B... D... F...

per lemma præce-

dentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, ean-
dem partes. Igitur ut prius, erunt omnes B, D, F, omnium
A, C, E, simul eandem partes, quæ est, ipsius A; Atque adeo
per idem lemma, e contrario continebunt omnes numeri
A, C, E, simul, omnes numeros B, D, F, simul, & A, ip-
sum B, æqualiter, eandemque insuper partem, uel partes.
Quare per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E,
simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B.

S I N T quarto & ultimo A, C, E, ipsis B, D, F, æqua-
les. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addan-
tur C, & D, fiunt A, C,

simul æquales ipsis B, A... C... E...
D, simul, quibus si rur- B... D... F...

sum addantur æquales
E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, si-
mul æquales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A, C, E, simul
ad omnes B, D, F, simul, cum utrobique sit proportio æqua-
litatis. Si sint igitur quocunque numeri proportionales,
erit, &c. Quod erat demonstrandum.

6. septimi

THEOR. II. PROPOS. 13.

14.

S I quatuor numeri proportionales sint:
Et uicissim proportionales erunt,

S I t A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim esse A, ad C,
K k ut

ut B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D; & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem,

A C A, ipsius B, & C, ipsius D,
B D eadem pars, uel partes. Vi-

9. vel 10.
septimi.

ciſſim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadē pars erit, uel partes: Ac proinde per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

S I N T secundo A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem C, ipsius D, & A, ip-

9. vel 10.
septimi.

A C sius B, eadem pars, uel
B D partes. Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadē

pars erit, uel partes: Atque adeo e contrario, uel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

S I N T tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo posito, erit ob eandem proportionem, uel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; uel certe

A C A, ipsum B, & C, ipsum D, cō-
B D tinebit æqualiter, eandemq; in-
super partem, uel partes; Atq;

9. vel 10.
septimi.

adeo e cōtrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C uel eadem pars, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eadem partes. Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, uel partes; Ac proinde per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

S I N T quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, uel æque multiplex;

A C uel certe C, ipsum D, & A, ip-
B D sum B, æqualiter cōtinebit, ean-

demque insuper partem uel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, uel eadem pars, uel certe, per

9 vel 10.
septimi.

per lemma propos. 1. huius lib. eadem partes. Vicissim er-
go & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, uel partes;
A & propterea & contrario uel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque
multiplex erit, uel certe, per lemma adductum, ipsum D,
& A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper
partem, uel partes. Quare per def. 20. eadem proportio
erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B,
ad D.

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, mi-
nor quàm C. Quoniam igitur æqua-
les numeri A, & B, æqualium nu-
merorum C, & D, uel eadem pars,
uel eadem partes sunt; Erit, per
def. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A C
B D

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, ma-
ior, quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqua-
lium numerorū C, & D, uel æque
multiplices sunt, uel certe illi hos
æqualiter continent, eandemque
insuper partem, uel partes; erit;
per def. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A C
B D

SINT septimo ac ultimo A, & C, inter se æquales, si-
ue ij maiores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales.
Quoniam igitur, ob eandem
proportionem, A, ipsius B, &
C, ipsius D, æque multiplex
est, uel eadem pars, uel eadem
partes; uel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter conti-
net, eandemque insuper partem, uel partes; suntque A, &
C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo
erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca,
si quatuor numeri proportionales sint, & uicissim propor-
tionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A C
B D

SCHOLIUM.

COACTE sumus in hac propositione, & duabus prece-
dentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certifi-
catis confirmare, una cum lemmae propos. 1. ut earum ueri-
tas

tas in omni genere proportionis rationalis apparet. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duas axas ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inaequalitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, ut perspicitur ex eorundem auctorum demonstrationib^{us} apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, ut nonnulli concedunt, quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellatis numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, ubi numeros proportionales dotuit esse, cum primus secundus, & tertius quartusque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, & c. Nam si existimaret maiorem numerum minoris partes esse, sciret scire dicere, cum primus secundus, & tertius quartus, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numerus proportionalis in omni genere proportionis comprehendisset, ut manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis superflua esse.

15. THEOR. 12. PROPOS. 14.

S I sint quocunque numeri, & alij illis æquales multitudinem, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

13. septimi S I N T quocunque numeri A, B, C, & alij eorundem D, E, F, sitque ut A, ad B, ita D, ad E; & ut B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse ut A, ad C, ita D, ad F. Quoniam est, ut A, ad B, ita D, ad E, erit unicuique, ut A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eadem ob causam, cum sit, ut B, ad C, ita E, ad F, erit unicuique, ut B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit ut A, ad D, ita C, ad F: Cum enim utraque proportio A, ad D; & C, ad F, eadem sit proportioni

portioni B, ad F, ut demonstratum est; & ipsæ inter se eadem erunt, ut mox ostendetur.) Ac proinde uicissim, ut A, ad C, ita D, ad F.

Quod si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem ut C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit ut A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quocunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

IDEM uerum est, si loco unius numeri unitas assumatur, uel etiam Ac plurimum plures unitates, ut in hoc exemplo perspicuum est.

A	D
B	E
C	F
G	H

LEMMA.

Quod autem dua proportionales numerorum, quæ eidem proportioni eadem sunt, inter se quoque sint

A	B	C
D	E	F

eadem, quales sunt in demonstratione proportionales A, ad D, & C, ad F, quæ eadem ostensa sunt proportioni B, ad E; ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, uel eadem pars, uel eadem

eadem partes; uel uerse B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quam E, ipsum F; continebit aequaliter, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defm. 20. numeri A, D, C, F, proportionales sunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.

Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 3. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

16. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI unitas numerum quempiam metiatur, &que autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et uicissim &que unitas tertium numerum metietur, & secundus quantum.

M A T H E M A T I C A. unitas A, numerum B C, & numerum D, numerum E F, &que. Dico uicissim unitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, &que metiri.

A. D. B' C, in unitates B G, B. G. H. C. E. I. K. F. G H, H C, & numero E F, in partes E I K.

K F, ipsi D, &equales; erit multitudo unitatum numeri B C, &equalis multitudini partium numeri E F, metieturque &que unitas A, numerum D, & unitas B G, ipsum E I, &que unitas G H, ipsum I K, & unitas H C, ipsum K F: atque idcirco eadem pars erit unitas A, numeri D, & unitas B G numeri E I, quae unitas G H, numeri I K, & unitas H C, numeri K F. Quare per ea, quae ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, simul numerorum E I, I K, simul, quae unitas B G, numeri E I, uel unitas H C, numeri K F. Itaque quia eadem pars est unitas H C, numeri K F, quae numerus B H, numeri E K, erit, ut hoc demonstrauimus, unitas H C, & numerus B H, simul, unitas

que

que numeri K F, & K, simul, eadem pars, quæ unitas H C, numeri K F, hoc est, quæ unitas A, numeri D; Ac proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, ex unitate H C, & numero B H, compositus, numerum E F, ex numeris K F, B K, compositum æque metietur. Si unitas igitur numerum quempiam metiatur, &c.. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

ILLUD idem, quod Euclides demonstravit (de numeris, propos. 13, ostendit hoc in loco separatim de unitate, & tribus numeris, propterea quod diuisio non est numerus. Quod, quidem breuiter ita nos demonstrabimus. Quia unitas A, numerum B C, æque metitur, atque numerus D, numerum E F; erit unitas A, eadē pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9, demonstrauimus, erit uicissim unitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numerum E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

17.

SI duo numeri mutuo se se multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita ut A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta D..... C..... enim unitate E; cū A, ipsum B, multiplicans faciat C; erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. Vicissim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, K k 4 metietur

15. defn.

15. septimi

[illegible]

S · C · H · O · L · I · O · N .

POTEST hac eadem propositio cum Campano in hoc
modum proponi.

S i duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur unus idemque numerus;

MULTIPLICET enim A , ipsum B , faciatque C . Dico eundem C , gigni, si B , ipsum A , multiplicet. Nam si primum, A , multiplicans ipsum B , faciat C , offendemus unitatem E , numerum B , & numerum A , numerum E .
 $A \dots B \dots$
 $C \dots \dots \dots$
 C , aequae metiri. At vero, si numerus B , ipsum A , multiplicet, etiam unius E , numerum B , & numerus A , numerum E , factum, per defin. 15. aequae metiatur. Idem ergo numerus C , gignitur ex multiplicatione B , in A , quamvis quidem ipsum numerus A , aequae metitur, atque unius E , ipsum B .

18.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans
fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem ra-
tionem

tionem habebunt, quam multiplicati.

NUMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, ut B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim unitate F, erit D, ex B, compositus toties, quoties unitas F, est in A, per defn. 15. Similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem unitas F, est in eodem A. Atque adgo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; A. proinde, per defn. 20. erit ut B, ad D, ita C, ad E; et permutando, ut B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duobus numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NUMERI A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D, fiet quoque idem A, ex B, in C, fiat D, ex C, in A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E, erit, ut A, ad B, ita D, ad E. Si duo igitur numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

13. septimi

16. septimi

17. septimi

SCHO.

S. C. H O L I O N.

H A N C p r o p o s i t i o n e m , & p r e c e d e n t e m , a d q u o t c u n q u e n u m e r o s c u m C a m p a n o a c c o m m o d a b i m u s h a c r a t i o n e .

S I n u m e r u s q u o t c u n q u e n u m e r o s m u l t i p l i c e t , u e l q u o t c u n q u e n u m e r i n u m e r u m q u e m p i a m m u l t i p l i c e n t ; H a b e b u n t p r o d u c t i n u m e r i e a s d e m r a t i o n e s , q u o s n u m e r i m u l t i p l i c a t i , u e l m u l t i p l i c a n t e s .

F I A N T e n i m E , F , G , e x A , i n B , C , D , u e l e x B , C , D , i n A . D i c o e a s d e m r a t i o n e s h a b e r e n u m e r o s p r o d u c t o s E , F ,

G , q u o s n u m e r i m u l t i p l i c a n t e s ,

u e l m u l t i p l i c a t i

B , C , D : h o c e s t ,

e s s e , u t B , a d C , i t a

E , a d F , e t u t C , a d D , i t a F , a d G . N a m c u m e x A , i n B , C , u e l

e x B , C , i n A , f i a n t E , F , e r i t h o c B , a d C , i t a E , a d F . S i m i l i t e r

q u i a e x A , i n C , D , u e l e x C , D , i n A , f i a n t F , G , e r i t q u o q u e

u t C , a d D , i t a F , a d G . A t q u e i t a d e c a t e r i s .

20. THEOR. 17. PROPOS. 19.

S I q u a t u o r n u m e r i p r o p o r t i o n a l e s f i e r i n t ; q u i e x p r i m o , & q u a r t o f i t , n u m e r u s , a q u a l i s e r i t e i , q u i e x s e c u n d o , & t e r t i o f i t , n u m e r o . E t s i q u i e x p r i m o , & q u a r t o f i t , n u m e r u s , a q u a l i s f u e r i t e i , q u i e x s e c u n d o , & t e r t i o f i t , n u m e r o ; i p s i q u a t u o r n u m e r i p r o p o r t i o n a l e s e r u n t .

S I N T q u a t u o r n u m e r i p r o p o r t i o n a l e s A , B , C , D , u t q u i d e m A , a d B , i t a C , a d D , f i a t q u e E , e x A , p r i m o a D , q u a r

D, quattuor, & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico nu-
 meros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A,
 in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad
 D, hoc est, ut A, ad B, ita G, ad
 E. Rursus quia ex A, & B, in
 C, fiunt G, & F; erit quoque,
 ut idem A, ad B, ita G, ad F.
 Quare, per lemma propos. 14.
 habebit G, ad E, & F, eandem
 proportionem; eam uidelicet,
 quam habet A, ad B; Ac pro-
 inde E, & F, numeri æquales
 erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus.

A . . .
 B . . .
 C . . .
 D . . .
 E . . .
 F . . .
 G . . .

17. septimi

18. septimi

S i d iam sit E, ex A, primo in D, quartū genus, equa-
 lis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatu-
 or numeros A, B, C, D, proportionales esse, ut quidē A, ad
 B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex
 A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, ita G, ad E, uel ad
 F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem
 rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex
 A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut A, ad B, ita idē
 G, ad eundem F. Quare proportionēs A, ad B, & C, ad D,
 cum eadem sint proportioni G, ad F, eadem inter se erunt,
 per lemma propos. 14. Ac proinde erit, ut A, ad B, ita C, ad
 D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c.
 Quod erat ostendendum.

17. septimi

18. septimi

SCHOLION.

POTERAT huius theorematīs prima pars proponi
 etiam ad hunc modum.

S i duo numeri duos numeros eandem, quā
 illi, habentes rationem multiplicent, antec-
 dens nimirum illorum consequentem horum,
 & consequens antecedentem; geniti ex ipsis,
 æquales inter se erunt.

IT A enim ostensum est numerum E, qui sit ex A, antece-
 dente,

dent, in D, consequentem; æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

20.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur; æqualis est ei, qui a medio efficitur; Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidē A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D,

æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur
A. se procreatur. Quia igitur
B. quatuor numeri A, B, D,
C. C, proportionales sunt, erit
numerus factus ex A, in C,

19. septimi æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur.

Sed iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipse B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D,

19. septimi tertium; erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, uel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c.

Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor uero minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportionem eadē, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita ut sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem A B; ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem

F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem: Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita E, ad F; erit uicissim, ut A B, ad E, ita C D, ad F; Atque

A . . . G . . B
C . . H . D
E
F

13. sepositi

adeo cum A B, C D, minores sint, quam E F, erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, uel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F, erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. Erigitur, ut A G, ad E, ita C H, ad F; & uicissim, ut A G, ad C H, ita E, ad F, uel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportionem ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

20. defn.

SCHOLION.

PARI ratione, & hoc uerum est, quod Campanus docet.

Q V O T.

QVOT LIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sint, siue diuersæ proportionales, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eadem cum eis proportionales habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

S I N T enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF , minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit

$A \dots K \dots B$	$C \dots L \dots D$	$E \dots M \dots F$
$G \dots \dots \dots$	$H \dots \dots \dots$	$I \dots \dots \dots$

proportio AB , ad CD , quæ CD , ad EF , siue non; ita ut non possint reperiri alij numeri ipsi AB, CD, EF , minores, quorum primus ad secundum sit, ut AB , ad CD ; & secundus ad tertium, ut CD , ad EF , &c. (quamuis tales proportionales reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB , ad CD , in numeris 4. ad 2. uel 2. ad 1. qui minores sunt ipsi AB, CD ; quemadmodum & proportionales numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesequiatarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiantur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8 & 10. proportio uero 20. ad 25. in 4. & 5. uel in 12. & 15.) Sine deinde totidem numeri G, H, I , non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G , ad H , ut AB , ad CD ; & H , ad I , ut CD , ad EF . Dico AB , ipsum G , & CD , ipsum H , & EF , ipsum I , metiri æque. Cum enim sit ut AB , ad CD , ita G , ad H ; erit uicissim ut AB , ad G , ita CD , ad H . Eodem modo, cum sit ut CD , ad EF , ita H , ad I , erit quoque uicissim, ut CD , ad H , ita EF , ad I . Quare AB , ipsius G , & CD , ipsius H , & EF , ipsius I , erit uel eadem pars, uel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Dimis enim, si fieri potest, AB, CD, EF , in $AK, KB; CL, LD; EM, MF$, partes numerorum G, H, I , erunt tot partes in AB , quot in CD , & in EF ; atque adeo AK , ipsius G , & CL , ipsius H , eadem pars. Erit ergo ut AK , ad G , ita

13. septimi

20. definitio

20. definitio

CL

CL, ad H; & vicissim ut AK, ad CL; ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, ut CE, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AE, CD, EF, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, æque metietur. Quod est propositum.

Q V O D si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportionem, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æque metiri. Nā per hanc propos. 21. A, B, cū sint minimi in proportionem A, ad B, æque metientur ipsos D, E, eademque ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æque metiatur, ac B, ipsum E, metientur æque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

19.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

S I N T tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, ut quidē A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse

A	H ...
B ...	D ...
C	E
G	F ...

I

ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim sit ut A, ad B, ita E, ad
 19. *septimi* F; erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui sit

A.....	H....	ex B, in E. Pari ratione,
B.....	D....	cum sit etiam ut B, ad
C.....	E.....	C, ita D, ad E, erit eide
G.....	F....	numero, qui sit ex B, in
		E, æqualis numerus, qui
		hæret ex C, in D; Atq; adeo

numerus genitus ex A, primo in F, quantum æqualis erit nu-
 mero ex C, secundo in D, tertium, productio. Quare erit

19. *septimi* ut A, ad C, ita D, ad F.

Q V O D si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit
 etiam C, ad G, ut H, ad D; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita
 H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, ef-
 se ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem ut C, ad G, ita H,
 ad D, erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bi-
 ni in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio
 perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris osten-
 sa, erit rursus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idẽ
 ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in
 quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluri-
 bus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine
 æquales, qui bini sumantur, &c. Quid ostendendum erat.

S C H O L I O N.

Q V O N I A M Euclides ex illis sex modis argumentandi
 in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explica-
 vit, & demonstrationibus confirmavit, duos tantum hic in nu-
 meris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione su-
 mitur, propos. 13 & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos.
 14 & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, brevis-
 ser reliquos quatuor modos in numeris, & alia quedam osten-
 dere; octo sequentibus theorematibus.

L

Si quatuor numeri proportionales sint: Et
 inuversa ratione, siue conuertendo proportiona-
 les erunt:

S I T

SIT, ut A , ad B , ita C , ad D . Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse ut B , ad A , ita D , ad C . Cum enim sit C , ad D , ut A , ad B , erit uicissim C , ad A , ut D , ad B . Rursus quia est D , ad B , ut C , ad A , erit uicissim D , ad C , ut B , ad A , hoc est, ut B , ad A , ita D , ad C . Quod est propositum.

13. septimi

Si compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

II.

SIT ut AB , ad CB , ita DE , ad FE . Dico & diuidendo, esse, ut AC , ad CB , ita DF , ad FE . Cum enim sit ut AB , ad CB , ita DE , ad FE , erit uicissim, ut totus AB , ad totum DE , ita ablati CB , ad ablatum FE : Ac proinde, ut totus AB , ad totum DE , ita reliquus AC , ad reliquum DF : hoc est, AC , ad DF , ut CB , ad FE . Vicissim ergo erit quoque AC , ad CB , ut DF , ad FE . Quod est propositum.

13. septimi

11. septimi

13. septimi

Si diuisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt.

III.

SIT ut AB , ad BC , ita DE , ad EF . Dico & componendo, esse ut AC , ad BC , ita DF , ad EF . Cum enim sit, ut AB , ad BC , ita DE , ad EF , erit uicissim, ut AB , ad DE , ita BC , ad EF : Ac proinde AB , BC , simul ad DE , EF , simul, ut BC , ad EF : Et uicissim AB , BC , simul, hoc est, totus AC , ad BC , ut DE , EF , simul, hoc est, totus DF , ad EF . Quod est propositum.

13. septimi

12. septimi

13. septimi

Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

IIII.

SIT ut AB , ad CB , ita DE , ad FE . Dico, per conuersionem

11.

ll

fionem

13. septimi. *tionem rationis esse quoque, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, erit vicissim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatum CB, ad ablatum FE; Ac proximè, ut totus AB, ad totum DE, ita, erit reliquum AC, ad reliquum DF, 11. septimi. Vicissim igitur, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*
11. septimi. *RVSES ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.*

V.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT ut AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item ut BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, ut est DH, compositum ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cui enim

A B : G D E H
C F
fit, ut BG, ad C, ita EH, ad F, erit conuertendo ut C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est ut AB, ad C, ita DE, ad F; & ut C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex aequalitate, ut AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, ut AG, ad BG, ita DH, ad EH. Itaque cum rursus sit, ut AG, ad BG, ita DH, ad EH: & ut BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex aequalitate, ut AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus.

VL

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant

habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eisdem eandem: Et reliqui ad eisdem eandem rationem habebunt.

SIT ut totus AB , ad C , ita totus DE , ad F ; Item ut detractus AG , ad C , ita detractus DH , ad F . Dico & reliquum GB , esse ad C , ut est reliquus HE , ad F . Cum enim sit, ut AG , ad C , ita DH ,

ad F ; erit con- $A \dots G \dots B \quad D \dots H \dots E$
uertendo, ut C , $C \dots F \dots$

ad AG , ita F ,

ad DH . Quia igitur est, ut AB , ad C , ita DE , ad F ; & ut C , ad AG , ita F , ad DH ; erit ex aequalitate ut AB , ad AG , ita DE , ad DH . Dividendo ergo ut GB , ad AG , ita HE , ad DH . Itaque cum rursus sit, ut GB , ad AG , ita HE , ad DH ; & ut AG , ad C , ita DH , ad F ; erit ex aequalitate, ut GB , ad C , ita HE , ad F . Quod est propositum.

ITEM & hoc demonstrabimus.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

VII.

SIT ut primus A , ad secundum BC , ita tertius D , ad quartum EF ; & ut primus A , ad quintum CG , ita tertius D , ad sextum FH . Dico ita esse A , primum ad BG , compositum ex secundo & quinto,

ut est D , tertius ad $A \dots D \dots$
 EH , compositum ex $B \dots C \dots G \dots E \dots F \dots H$

quarto & sexto. Cum enim sit, ut A , ad BC , ita D , ad EF ; erit conuertendo ut BC , ad A , ita EF , ad D . Quia igitur est ut BC , ad A , ita EF , ad D ; & ut A , ad CG , ita D , ad FH ; erit ex aequalitate ut BC , ad CG , ita EF , ad FH ; & componendo, ut BG , ad CG , ita EH ,

LI 2 ad

ad FH , & convertendo, ut CG , ad BG , ita FH , ad EH . Quoniam ergo est, ut A , ad CG , ita D , ad FH , & ut CG , ad BG , ita FH , ad EH , erit ex æqualitate, ut A , ad BG , ita D , ad EH . Quod est propositum.

D E M O N S T R A T I O ex his omnibus inferemus hoc theorema,

VIII.

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportionem, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam omnes hi simul ad eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportionem habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quā idem numerus ad hos omnes simul.

H A B E A N T quotcunque numeri A, B, C, D , ad eundem E , proportionem, quas eisdem F, G, H, I , habent ad eundem K : Hoc est, sit ut A, B , ad E , ita F, G , ad K ; & ut B, C ,

$A \dots B \dots C \dots D \dots E \dots$ $F \dots G \dots H \dots I \dots K \dots$

ad E , ita G, H , ad K ; & ut C, D , ad E , ita H, I , ad K . Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum A, D , ad E , eandem habere proportionem, quam hi omnes simul, hoc est, ipse F, I , ad K . Cum enim sit, ut A, B , primus ad E , secundum, ita F, G , tertius ad K , quartum: Item ut B, C , quintus ad E , secundum, ita G, H , sextus ad K , quartum; erit quoque, ut A, C , primus cum quinto, ad E , secundum, ita F, H , tertius cum sexto, ad K , quartum. Rursus quia est, ut A, C , primus ad E , secundum, ita F, H , tertius ad K , quartum: Item ut C, D , quintus ad E , secundum, ita H, I , sextus ad K , quartum; erit etiam, ut A, D , primus cum quinto, ad E , secundum, ita F, I , tertius cum sexto, ad K , quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

S E D habetis tam idem numerus E , ad numeros quoscunque

$A, B,$

$A B, B C, C D$, proportionales eandem, quoad numerum K , ad eundem $F G, G H, H I$; Hoc est, sit ut E , ad $A B$, ita K , ad $F G$; & ut E , ad $B C$, ita K , ad $G H$; & ut E , ad $C D$, ita K , ad $H I$. Dico esse, ut E ad omnes illos simul, nempe ad $A D$, ita K , ad hos omnes simul, nempe ad $F I$. Capponitur sit, ut E , primus ad $A B$, secundum, ita K , tertius ad $F G$, quartum. Item ut E , primus ad $B C$, quintum, ita K , sextus ad $G H$, sextum; erit quoque, ut E , primus ad $A C$, secundum cum quinto, ita K , tertius ad $P H$, quartum cum sexto. Rursus quia est, ut E , primus ad $A C$, secundum, ita K , tertius ad $F H$, quartum; Item ut E , primus ad $C D$, quintum, ita K , tertius ad $H I$, sextum; erit etiam, ut E , primus ad $A D$, secundum cum quinto, ita K , tertius ad $F I$, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B , inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi $A, \& B$. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam $A, \& B$. sint ergo, si

$A \dots \dots B \dots$
 $C \dots \dots D \dots$
 $E \dots \dots$

fieri potest, C, D , minimi in proportionem $A, \& B$, minoresque ipsis $A, \& B$. Quoniam igitur C, D , minimi sunt in proportionem $A, \& B$; metietur C , ipsum A , & D , ipsum B , æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E , ita ut C , toties metiatur ipsum A , & D , ipsum B , quoties unitas est in E . Itaque cum unitas numerum E , & numerus C , numerum A , æque metiatur; metietur & uicissim æque unitas numerum C , & numerus E , numerum A . Rursus quia unitas numerum E , & numerus D , numerum B , æque metitur; metietur quoque uicissim æque unitas numerum D , & numerus E , numerum B ; Atque adeo, cum idem nu-

21. septimi

15. septimi

numerus B, utrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesein. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B. minores; minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

22.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

S I N T numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, præter unitatem, comuni mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habeant numerum communem mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerum quidem A, toties, quoties unitas est in numero D; At vero ipsum B, toties, quoties unitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt unitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt unitates in E, producit ipsum B; sit, ut D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cum D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

9. præm.
18. septimo

SCHO-

SCHOLIUM.

HANC propositionem, & precedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QUOTCUNQUE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunque numeri inter se primi A, B, C . Dico eos minimos esse in continuatione suarum proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non possint, quamvis proportio duorum in minori-

bus numeris repetiatur. Si enim non sunt minimi, erunt aliqui alij minores

ipsis, nempe D, E, F , minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F , minimi, sunt in proportione numerorum A, B, C ; metietur D , ipsum A , & E , ipsum B , & F , ipsum C , aequè, per ea, quæ ad propas. 2. huius lib. demonstravimus; atque adeo secundum unum eundem numerum, qui sit G ; ita ut D , toties metietur ipsum A , & E ipsum B , & F , ipsum C , quoties unitas est in G . Quoniam igitur unitas numerum G , & numerus D , ipsum A , aequè metietur, metietur quoque vicissim aequè unitas numerum D , & numerus G , numerum A : Eademque ratione idem G , metietur & ipsum B , & ipsum C , aequè atque unitas ipsos E, F ; Atque idcirco A, B, C , cum habeant numerum G , communem mensuram, non erant inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesis. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C , minimi in continuatione proportionum A , ad B , & B , ad C ; sed ipsi A, B, C , minimi sunt.

Idem vero sunt A, B, C , in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metietur eos communi mensura numerus G , ita

15. septimi

ut G, toties metiatur ipsum A, quoties unitas est in D; & ipsum B, toties, quoties unitas est in E; & ipsum C, toties quoties unitas est in F. Quoniam igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties unitas est in D,

9. *prop.* E, F, fit ut D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportionem, quas A, B, C, per ea, quae ad *prop.* 18. huius lib. ostendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est *propositum*.

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D.

17. *prop.* A..... B..... Quoniam igitur D, metitur C; C..... D..... & C, ipsum A, metitur etiam D, ipsum A: Metitur autem &

ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem, numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesein. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quipiam metiatur, ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT uterque numerus A, B, ad C, primus, producturque ex A, in B, uel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse: Si enim C, & D, non sunt inter se primi, sit eorum communis mensura numerus E, mensurans ipsum D, toties,

quot unitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D; quot sunt unitates in F; sit

A B . . .
C
D
E F . . .

ut F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D; & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autem idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; erit ut E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia uero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri, erit B, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum fiat inter se primi, in sua proportionem minimi erunt. Acque igitur metentur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nisi mirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum B, metiatur utrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

9. *pron.*
16. *septimi*
19. *septimi*
25. *septimi*
23. *septimi*
21. *septimi*

THEOR. 25. PROPOS. 27.

26.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT

26. *septimi*

S. I. N. T. inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt, erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nempe C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

27.

THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint; Et quicquid ex eis gignentur, primi inter se erunt.

26. *septimi*

S. I. T. uterque A, & B, ad utrumque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B, & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim uterque A, & B, primus sit ad C, erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum uterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo

26. *septimi*

E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus est ad E; erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat ostendendum

28.

THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt:

Et

Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

S I N T primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursus fiat E, ex A, in A B
C, & F, ex C D
B, in D; E F
Dico B, F, G, 84. H, 16.

quoque esse inter se primos. Cum enim A, B, sint inter se primi, erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus.

R V R S V S, quia A, & B, sunt inter se primi, erit & C, factus ex A, in se, ad B, & D, genitus ex B, in se, ad A, primus. Erat autem & C, ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrumque B, D, primus erit; Ac proinde E, factus ex A, in C primus erit ad B, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi sint ad B, erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus. Eodemque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur uterque A, E, ad utrumque B, F, primus est; erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & B, primi sint ad B, erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus; necnon & H, ad A; Quare & genitus ex A, in G, ad genitum ex B, in H, primus erit: cum uterque A, G, ad utrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

17. septimi

17. septimi

17. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

18. septimi

THEOR. 28. PROPOS. 30.

29.

SI duo numeri primi inter se fuerint:

Etiam

Etiā uterque simul ad quemlibet illorum primus erit : Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit ; Etiā , qui in principio , numeri primi inter se erunt .

S I N T inter se primi $A B, B C$. Dico & utrumque simul $A C$, primū esse & ad $A B$, & ad $B C$. Si enim $A C$, AB , non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri possit, communī mensura numerus D . Quia igitur

D , metitur totum $A C$, & ablatum $A B$, metietur quoque reliquum $B C$. Non igitur primi inter se sunt $A B, B C$, cum eos metiatur numerus D . Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare $A C$, ad $A B$, primus erit. Eodemq; modo ad $B C$, ostendemus eundem esse primum.

S i utramque $A B, B C$, simul, primus sit ad unum aliquem illorum, uidelicet ad $A B$: Dico & $A B, B C$, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D . Quia igitur D , metitur $A B$, & $B C$; metietur quoque D , numerum $A C$, ex $A B, B C$, compositum ; Ac proinde $A C, AB$, non sunt inter se primi, cum eos numerus D , metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur AB, BC , inter se primi. Eodemq; argumento ostendemus $A B, B C$, inter se primos esse, si $A C$, ad BC , primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M .

Ex hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim $A C$, ad $A B$, primus est, erunt $A B, B C$, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & $A C$, ad $B C$, primus erit, per primam partem eiusdem. quod est propositum.

32.

THEOR. 29. PROPOS. 31.

O M N I S primus numerus, ad om-

nem

nem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præter unitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerus A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; At propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 30. PROPOS. 32.

33.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam unum eorum, qui in principio, metietur.

Duo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem unum ipsorum A, & B, si non utrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur uero ipsum C, toties, quot sunt unitates in numero E; ita ut C, fiat

ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quadruplus, æqualis est numero genito ex

A, secundo in B, tertiumque ut D, primus ad A, secundum, ita B, tertium ad E, quartum. Quia uero primus D, ad A, primus est, cum cum non metiatur, erunt D, & A, in sua proportionem minimi. Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; At proinde si D, non metitur, ip

19. septima
31. septima
23. septima
21. septima

sum

sum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint, aliquē, &c Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

E O D E M modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

Si duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipsum sit compositus: is ad unum eorum, qui in principio, compositus erit.

N A M ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compositus ad eum sit. Dico D, quoque ad unum ipsorum A, B, compositum esse. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit utique

A B esse. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit utique C rum compositus est; erit utique D A, & B, ad D, primus. Quare & C, ex illis genitus, ad eundem

D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur uel metiri ipsum C, uel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, uel ad B, cum non sit primus ad utrumque.

26. septimi

30.

PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Si r numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum cum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si uero compositus, metiatur eum numerus C, qui uel primus erit, uel compositus: Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, composi-

11. primi

tus

us fuerit, metietur eum alius numerus. Quia uero numerus non diminuitur infinite, ueniamus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes precedentes, metietur quoque compositum A. Omnem ergo compositum numerum, aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, uel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

31.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicumque A. Dico eum uel esse primum, uel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus uel primus sit, uel compositus; si quidem A, primus est, habetur primum: Si vero compositus, metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

PROBL. 3. PROPOS. 35.

34.

NUMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem ratio-

nem



nem habentium cum ipsis.

S I N T quocunque numeri A, B, C, habentes quacun-
que proportionēs, siue eadem sit. proportio A, ad B, quæ
B, ad C. siue non; oporteatque eundem reperire, qui in eis-
dem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt

A	B	C	inter se aut primi, aut
	D		compositi. Si primi
E	F	G	inter se sunt, erunt ipsi
H	I	K	in continuatione sua-
	L		rum proportionū mi-
			nimi, per ea, quæ ad
			propos. 24. huius lib.

demonstrauimus. Si uero non sunt inter se primi, inuenta
sit maxima earum communis mensura numerus D, qui me-
tiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G,
minimos esse in proportionibus numerorū A, B, C. Quod
enim easdem habeant proportionēs, quas numeri A, B, C,
sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per
E, F, G; sit, ut D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C.
Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus,
easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

Q U O D uero E, F, G, sint minimi omnium eandem ra-
tionem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet.
Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi
in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minores
H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, ut ad
propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per nume-
rum L. Quo posito L, multiplicans numeros H, I, K, pro-
ducat numeros A, B, C, & uicissim L, ipsos A, B, C, me-
tetur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans
D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium
facit eundem A; erit, ut E, primus ad H, secundum, ita L,
tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H: Igitur
& L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A,
B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis
numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypo-
thesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G,
minimi in continuatione proportionū A, ad B, & B, ad C,

3. septim.

9. pron.

9. pron.

8. pron.

19. septimi

sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quocunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIUM.

Hi sunt, maximam mensuram quolibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in ceteris ratio.

SCHOLIUM.

Ex his facilius comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quoscunque numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D,

F, siue illi sint in continuatione proportionis A, 16. B, 24. C, 36. D, 14. E, 81.

nis A, ad B, minimi, F, 2 G, 3.

siue non, reperiemus

duos in eadem proportionem minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportionem duorum A, & B, nempe illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

CAETERUM aliquando consingis unum numerorum E, F, G, inuentorum esse unitatem, quando scilicet D, maxima mensura uni ipsorum A, B, C, aequalis est, ut ex his exemplis

A ... B C A B .. C

D ...

D ..

E . F .. G ... E .. F . G ...

apparet. Manifestum est autem, inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam unitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36.

36.

DVOBUS numeris datis, reperire,

M m

quem

quem illi minimum metiantur, numerum.

S **E** **T** reperendus minimus numerus omnium, quos dati numeri *A*, & *B*, metiuntur. Sint primum dati numeri *A*, & *B*, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant *C*. Dico *C*, esse minimum, quē *A*, & *B*, metiuntur. Quod enim cum metiantur, perspicuum est. Nam cum producamur *C*, ex *A*, in *B*, uel ex *B*, in *A*; metietur *A*, ipsum *C*, per

7. *prop.*

A *B*

C

D —————

E ——— *F* ———

B; & *B*, eundem *C*, per *A*.

Uterque igitur *A*, & *B*, ipsum *C*, metitur. Quod autem

C, sit minimus omnium,

quos *A*, & *B*, metiuntur, sic

demonstrabimus. Si *C*, non

est minimus, metiantur, si fieri potest, *A*, & *B*, alium numerum *D*, ipso *C*, minorem; metiaturque *A*, ipsum *D*, per *E*, at *B*, eundem *D*, per *F*. Quo posito, tam ex *A*, in *E*, quam ex *B*, in *F*, & e contrario, produceretur numerus *D*. Quia igitur idem numerus *D*, sit ex *A*, primo in *E*, quantum, & ex

9. *prop.*

19. *septimi*

23. *septimi*

23. *septimi*

17. *septimi*

B, secundo in *F*, tertium; erit, ut *A*, primus ad *B*, secundum, ita *F*, tertius ad *E*, quantum. Igitur *A*, & *B*, (cum ponantur primi inter se, & ob id, in sua proportione minimi sint) æque metientur ipsos *F*, & *E*; nimirum *A*, ipsum *F*, & *B*, ipsum *E*. Quoniam uero *A*, multiplicans *B*, & *E*, facit *C*, & *D*, erit *C*, ad *D*, ut *B*, ad *E*: Ac propterea cum *B*, metiatur ipsum *E*, ut ostensum est; metietur & *C*, numerus numerum *D*, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur *A*, & *B*, metientur alium numerum minorem ipso *C*; atque adeo *C*, minimus est omnium, quos metiuntur.

S **I** **N** **T** secundo dati numeri *A*, & *B*, non primi inter se. Inueniantur *C*, & *D*, minimi in eadem proportione,

33. *septimi*

A *B*

C *D*

19. *septimi*

E

F —————

G ——— *H* ———

ut sint quatuor numeri proportionales, nempe *A*, ad *B*, ut *C*,

ad *D*. Quo posito, fiet idem

numerus, ex *A*, primo in *D*,

quantum, & ex *B*, secundo in

C, tertium. factus ergo sit *E*.

Dico *E*, hac uia procreatum esse

7. *prop.*

minimum, quem *A*, & *B*, metiuntur. Quod enim cum ne-

tiatur

tiantur, manifestum est. Nam cum tā A, multiplicatus a D, quam B, multiplicatus a C, ipsum E, producat; metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod uero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, uel H, ad G, metientur ipsos H, & G, æque; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia uero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; erit E, ad F, ut D, ad G; Ac propterea cū D, metiatur ipsum G, ut ostensum est; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdū. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

7. pron.

9. pron.

19. septimi

17. septimi

COROLLARIUM.

Hinc fit, si duo numeri multiplacent minimos tandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositus C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiorem in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiantur,

SCHOLIUM.

Hoc autem corollarium apud Campanum est propositio 34 huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37.

35.

SI duo numeri numerum quempiā me-

M m 2 tiantur :

tiantur : Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTUR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, sitque alius numerus E, minimus, quem ipse A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C D, metiri. Si enim E, ipsum C D, non metitur; ablato E, ex C D, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatum ex C D, quoties potest, numerum, si fieri potest, F D, minorem se, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum C F; metietur quoque tam A, quam B, ipsum C F. Itaque A, & B, cum metiantur totum C D, & ablatum C F; metientur & reliquum F D. Est autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim; Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

11. *pron.*

12. *pron.*

36.

PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

36. *septim.*

SIT inveniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primo C, ipsum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D, minimum inventum, quem A, & B, metiantur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiatur,

A . . . B . . . C
D
E —————

tiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E, & D, sit minimus, quem idem A, & B, metiuntur; metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum.

37. septimi

Sed iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim cum metiantur, ita ostendetur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit

36. septimi

A... B... C....
D.....
E.....
F.....

11. prom.

minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiantur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur idem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

37. septimi

37. septimi

COROLLARIUM.

SEQUITUR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; eundem minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

Mm ; SCHO-

SCHOLIION.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C , quemcunque numerum $D E$, sitque F , minimus, quem idem A, B, C , metiantur. Dico

$A... B... C...$

$D.....G—E$

$F.....$

& F , ipsum $D E$,

metiri. Si enim

non metitur, me-

tiatur eius parti

$D G$, relinquantque numerum $G E$, se minorem. Quoniam igitur A, B, C , ipsum F , metiuntur; & F , ipsum $D G$; metientur quoque A, B, C , eundem $D G$; Ac proinde, cum & totum $D F$, ponantur metiri; metientur & reliquum $G E$, ipsi F , minore. Quare F , non eris minimus, quem A, B, C , metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F , ipsum $D F$.

P A R I ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur numerum; locumque habebis hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inveniendus eris primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus eris minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

37.

THEOR. 34. PROPOS. 39.

S I numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

M E T I A T U R numerum A , numerus B . Dico A , habere partem aliquam a B , denominatam.

$A.....$ Metiatur enim B , ipsum A , toties, quot

$B.... C...$ unitates sunt in numero G . Quia igitur

unitas ipsum C , & B , ipsum A , æque me-

tiatur; & vicissim unitas æque ipsum B , & C , ipsum A , me-

tiatur; atque adeo eadem pars erit unitas ipsius B , quæ C ,

ipsius A : Est autem unitas pars ipsius B , denominata ab ip-

so B , ut ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C , pars

erit

5. septimi

erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendū erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nā cū B, pars denominetur a C, ſit aurē & unitas pars ipſius C, ab eodem C, denominatas A metietur unitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. Viciliū ergo & unitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandū erat.

25. ſeptimi

PROBL. 6. PROPOS. 41.

39.

NUMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, hoc eſt, qui ipſas denominent, D, E, F; minimusque, quem D, E, F. metiantur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim cuiusmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cū

D .. A. Secunda
E ... B. Tertia
F . . . C. Quarta
G
H

38. ſeptimi

D, E, F, ipſum G, metiantur, habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod uero G, ſit minimus illas partes habens, per ſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat. ſi fieri poteſt, H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, metientur ipſum numerum D, E, F, a parti-

39. ſeptimi

40. ſeptimi

bus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

Q U O D si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datae partes A, B, C, ipsius G, denominatae scilicet a D, E, F. Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L, metietur aequae unitas ipsorum I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G, vicissim ergo metietur quoque aequae unitas ipsorum D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G; atque adeo unitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, qua numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo unitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatae a D, E, F.

15. septimi Ex his autem sequitur, minimum numerum, quem quilibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes a numeris metientibus denominatas: OSENSUM enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

I AM vero, ut Campanus ait, si inventus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebimus secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Invenio enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H, triplus vero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatis habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & ceteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim

H, & I, & c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet a D, E, F, ita ostendimus. Quoniam D, E, F, metiuntur ip-

G.....	A D..
H.....	B E...
I.....	C F....
K-----M---	L
N-----P---	O

sum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquas multiples ipsius G; metiuntur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiples ipsius G. Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt a metiensibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

Quod autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus dictas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detrahto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C, metiuntur ipsum numeri D, E, F, a paribus dictis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L. Metiuntur autem & G, ablatum K M, sibi equalem: Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est, huiusmodi partes habens.

Non aliter ostendimus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, nampe N O, ipso prior, qui videlicet maior sit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detrahto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C; metiuntur ipsum numeri D, E, F, a paribus illis denominati. Ac idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metiuntur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo equalem. Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, ter-

I, certius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

H v c quoque referri potest sequens problema.

N V M E R V M reperire, qui minimus cū sit, habeat datas partes, hac lege, ut quilibet pars subsequenter partem contineat.

S I N T datae partes A, B, C; inveniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, ut pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quaeritur. Quod autem ha-

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.

D. E. F.

G.

H.

. Unitas

I.

K.

L.

M.

beas datas partes ordine praedicto, facile demonstratur. Nam cū ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties unitas in D: Est autem unitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque

adeo H, habet partem A, nempe numerum G, a D, denominatā. Deinde quia ex E, in F, fit G, erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nempe numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nempe unitatem. Quare numerus inventus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus dictas partes hoc ordine continens, hac ratione ostenditur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita ut K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab F, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, a D, denominata, erit K, toties in I,

quoties

quanties unitas in D; Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex R, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipso G, & K, multiplicans faciat H, & I, erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & I, fiant G, & K; erit, ut G, ad h, ita F, ad L. Et cum ex F, in unitatem, & M, fiant F, & L, erit, ut F, ad L, ita unitas ad M. Quoniam igitur est, ut H, ad I, ita G, ad K; & ut G, ad K, ita F, ad L; & ut F, ad L, ita unitas ad M; Erit, per lemma propo. 14. huius lib. ut H, ad I, ita unitas ad M. Ponitur autem H, numerus numero I, maior; unitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine praedicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

H. G. F. Unitas.
I. K. L. M.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Ut si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebis partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam a 5. & hac denique partem a 6. denominatam, ut manifestum est.

Quod si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, nempe secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de ceteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.



EVCLIDIS

ELEMENTVM VIII.



I. THEOR. I. PROPOS. I.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi uero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationē habentiū.



VMERORVM deinceps proportionaliū quotcunque A, B, C, D. extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentiū. Si enim non sunt minimi, erunt alijs ipsis minores, in eadem proportionē. Sint ergo ipsis minores in eadem rationē E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A, B, C, D, & alijs illis æquales multitudine E,

A	E ---	F, G, H,
B	F ---	q bini sumuntur,
C	G ---	& in eadē
D	H ---	rationē
		erit, ex q

14. septimi qualitate, ut A, ad D, ita E, ad H: Sunt autem A, & D, in
 13. septimi sua proportionē minimi, quod inter se primi esse ponantur.
 21. septimi Igitur A, ipsum E, & D, ipsum H, æque metietur, maior enim
 norem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores
 ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis rationē, sed ipsi
 minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri
 eandem

indeinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandū.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D , esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi $A, & D$, inter se primi sint, siue A, B, C, D , sint continue proportionales, ut vult Euclides, siue non. Ut hoc exemplum ostendis, in quo proportionales omnes diuersa sunt, quemadmodum in priori eadem semper proportio reperitur.

$A \dots$	$E \text{ ---}$
$B \dots\dots$	$F \text{ ---}$
$C \dots\dots\dots$	$G \text{ ---}$
$D \dots\dots\dots$	$H \text{ ---}$

PROBL. 1, PROPOS. 2.

2.

NUMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

S I N T minimi numeri datæ rationis $A, & B$, oporteatq; inuenire primum tres numeros minimos in proportionone data A , ad B . Multiplicans A , seipsum, & numerum B , faciat $C, & D$. Deinde B , multiplicans seipsum faciat E . Dico C, D, E , esse tres minimos in proportionone A , ad B ; hoc est, esse ut C , ad D , ita D , ad E . Quod enim proportionales sint in data proportionone

A , ad B , sic ostendemus. Cum ex A , in $A, & B$, fiat $C, & D$, erit ut A , ad B , ita C , ad D .

Rursus cum ex B , in $A, & B$, fiant $D, & E$; erit quoque, ut A , ad B , ita D , ad E . Quare proportionales sunt C, D, E , continue in proportionone data A , ad B . Quod uero in eadē ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extre-

$A \dots$	$B \dots$
$C \dots\dots$	$D \dots\dots$
$E \dots\dots\dots$	

$F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.$
 $K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.$

17. septimi

24. septimi

29. septimi

1. octavi.

mi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in seipso; sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; Erunt & C, B, extremi, inter se primi. Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

I A M uero ex A, in tres inuentos C, D, E, sunt F, G, H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F,

A..	B...		
C....	D.....	E.....	18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, eadem proportionem, quas C, D, E, habebunt ex
F, 8.	G, 12.	H, 18.	I, 27.
K, 16.	L, 24.	M, 36	N, 54. O, 81.

E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, erit quoque, ut A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in seipso; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nempe F, ex A, in C, & I, ex B, in E; erunt & F, I, extremi, inter se primi. Quare F, G, H, I, in sua proportione, quae est A, ad B, minimi sunt.

18. septimi

24. septimi

29. septimi

1. octavi.

N O N aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIION.

E O D E M modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quod A, B, multiplicantes C, &

18. septimi

For F, G , fecerunt: Item $\& G, H, I$, ex is , quæ ad propos. 18. huius lib. demonstramus, in eadem erunt ratione, in quæ C, D, F , hoc est, in quæ A, B ; quod B , multiplicans C, D, F , ipsos G, H, I , fecit. Sunt ergo F, G, H, I , in eadem ratione, in quæ A, B . Quod vero minimi sint, ostendetur, ut prius.

NON aliter si ex B , in quatuor inuentos I, H, G, F , fiat O, N, M, L , & ex A , in F , fiat K ; erunt K, L, M, N , quinque numeri minimi in data ratione A , ad B . Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A , multiplicetur in omnes inuentos, & B , in ultimum; siue B , in omnes inuentos, & A , in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A , ad B , minimi. Demonstravit enim Euclides, quatuor F, G, H, I , produci ex A , in C, D, E , & ex B , in E : Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B , in I, H, G , & ex A , in C .

COROLLARIUM. I.

Hanc fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E , extremi C , & E , facti sunt ex A , & B , in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I , extremi F , & I , geniti sint ex A , & B , lateribus in C , & E , quadratos ipsorum A , & B , hoc est, tam numerus F , ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A , quam numerus I , ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B , sic procreatus, ac propterea uterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

Si c etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub alijs denominationibus, quæ in Algebra solent explicari. Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

COROLLARIUM. II.

PERSPICUUM quoque est, extremos numeros proportionalem quotcumque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producantur, & ex propos. 19. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, B , & F, I , &c.

COROL.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quoscunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producantur ex illorum multiplicatione in alios quodam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producat ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, uel ex B, in C, & D; item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, uel ex B, in F, G, H; ut ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, appareat.

S C H O L I O N,

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab unitate, quod illorū quidē proportionēs a numero A, horū vero a B, denominantur, ut clarius demonstrabitur propo. 9. huius lib. sit ut extremi numeri quoscunque minimorum continue proportionalium sint ultimi tot continue proportionalium ab unitate, quorum proportionēs a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo uides C, & E, extremos trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse ultimos trium numerorum continue proportionalium ab unitate, quorum proportionēs denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse ultimos quatuor numerorum ab unitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quoscunque numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, nempe quæ ab unitate incipiat) continuas proportionales; id facile hac via consequetur. Inueniens duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab unitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi constituentur. Nam ultimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inueniens minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera a proportione, sumendi erunt octo numeri ab unitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam harum ultimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui

minimi sint in proportionē 3. ad 2. ut hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque in reliquis est ratio.

BORTIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant. Sumantur tot numeri continue ab unitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportionē fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet invenire in data proportionē. Nam ultimus numerus erit primus inveniendorum. Ut in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportionē sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidia, cuius mentio fit in proportionē sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportionē sesquiquinta, sumendi erunt quinque numeri ab unitate quincupli, ut hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportionē sesquiquinta, ut hic apparet, 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inveniri plures numeri continue proportionales, quam proposti sunt. Neque enim post 1296. alius numerus invenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionē sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inveniendi sint inter se primi, ut ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, ut ultimus non possit esse ad alium quempiam numerum, ut primus ad secundum, ut propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inveniantur

N n

niantur

niantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, uel B, ad C, uel C, ad D. Deinde iuxta uiam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D.

Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportionē, & in eadem quoque proportionē minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportionē, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi: Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quocunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

HÆC propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, ut ex eius demonstratione, & uerbu Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportionē. Immo si diuersa sint proportionē, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 12. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quod numeros continue proportionales. Etenim numeri quocunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportionē, ut constat ex 1. theor. Et uicissim, numeri extremi quocunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, uelut hic demonstratum est. At uero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quocunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ut

ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper e contrario, numeri extremi quotcumque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, ut manifestum est in exemplo nuper adducto 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

4.

RATIONIBVS datis quotcumque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

S I N T primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C. ad D, oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim

36. septimi

deinceps datas proportionibus habeant, ita ostendimus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, A, & B, multiplicantes ipsum H,

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ---- K ---- L ----

producent F, & E. Quare erit ut A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G, erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportionem, ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportionem existentes, nempe B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem.

9. prop.
18. septimi

21. septimi

N n 2 cedentem.

37. *septimi*

cedentem. Quarecum B, & C, ipsum K, metiantur, metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiantur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

36. *septimi*

S I N T deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. Inuenitur rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quopos B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non.

Metiatur primus;
A, 6. B, 5. C, 4. D; 3. E, 5. F, 7. Et quoties E, ipsum I, metitur, toties F, metiatur ipsum K. Dico

H, G, I, K, minimos esse in datis rationibus. Quod enim sint in datis rationibus deinceps proportionales, constat. Cum enim A, & B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G, ad I: & ut E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D, ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic ostendemus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsa, singuli singulis, si fieri potest L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; ipsi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nempe B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N; nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M metiantur; metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

31. *septimi*

37. *septimi*

S I D iam E, non metiatur ipsum I. Inuenito ergo nu-
mero

mero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L, & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Di-
co M, L, K, N, esse mi-
nimos in proportioni-
bus datis. Cum enim

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 36. N, 105.
O ---- P ---- Q ---- R ----

H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur; erit ut supra, quæ-
admodum H, ad G, ita M, ad L; & ut G, ad I, ita L, ad K;
Est autem eadem ratio, ut H, ad G, ita A, ad B;
& ut G, ad I, ita C, ad D; quod & A, B, ipsos H, G; & C, D, ipsos G, I, metiantur æque. Igitur ut A, ad B, ita M, ad L; & ut C, ad D, ita L, ad K. Atqui ut E, ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur: Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si nãque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportionem minimi sunt, ipsi æque metiuntur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metiuntur æque, uidelicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia uero ostensum est, esse ut G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, ut G, ad P, ita I, ad Q; Atque idcirco, metiente G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q, (quod E, F, in sua proportionem minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nempe antecedens E, antecedentem Q.) Ergo metientibus I, E, ipsum Q; metietur etiam K, quem minimum metiuntur L, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; proptereaque ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

Q u o d si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, ut

N n 3 nuper

36. septimi

21. septimi

37. septimi

21. septimi

37. septimi

36. septimi

nuper cum tertia proportionē data: Veluti si quarta propor-
tio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum
M, L, K;
A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2. N, mini-
mos deinceps
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.
pro-
portionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E,
ad F: Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiamus O, quem
T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M,
L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationi-
bus minimi. Si uero S, ipsum N, non metiatur; sumemus
O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum
O, metitur, to-
ties metiat K,
A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2. ipsum P; & L,
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105. ipsum Q; & M,
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70. ipsum R;
quoties uero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, me-
tuatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps
proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad
F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demo-
strabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, uel plu-
res rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationi-
bus datis quocunque in minimis numeris, &c. Quod fa-
ciendum erat.

SCHOLION.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nū
minimis, abfoluemus nihilo minus problema propofitum; sed
prius exhibende erunt rationes datæ in minimis numeris, ante-
quam ad intentionem minimorum numerorum deinceps propor-
tionalium aggrediamur, ut ex demonstratione manifestū est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propofitum
est 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic nō dantur numeri de-
inceps proportionales, ita ut quilibet intermedius sit & ante-
cedens, & consequens, licet proportionēs sint diuerſæ, quem-
admodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionales
tit. 36.

libus in datis rationibus, si y multiplicentur per quemcumque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, ut constas ex ys , quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstramus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SIN duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcumque C, D, posterioris uero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; uel ex proportionibus C, ad F; & D, ad E, ita ut latera unius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 29. lib. 6. docuimus. Faciant D, & B, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, 24. B, 48. A, & G, erit A, ad G, ut C, ad G, 18. E. Eodemque modo, quia E, C, 4. D, 6. E, 3. F, 16. multiplicans D, & F, fecit G, &

B; erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C ad E, & D, ad F, componitur.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, 24. B, 48. A, & G, erit A, ad G, ut C, ad G, 96. F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, ut D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex pro-

Nn 4 portioni

17. septimi

27. defin.

17. septimi

27. *defini.*

portionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numerationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

6.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

S I N T continue proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium ququam illorum ullum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. G, ad D; & D, ad E: A, uero ipsum B, non metiatur;

2. *offensi.*

neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod uero nec alius quisquam illorum ullum metiatur, sic demonstrabimus. Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, ut A, ad C, ita F, ad H. Quia uero est ut A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; At propterea F, non non erit unitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum unitas omnem numerum metiatur. Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit unitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, ut F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

3. *offensi.*

SCHO

SCHOLION.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam ullius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E ; & A , primus non sit multiplex secundi B . Dico neque alium quendam illorum ullius esse multiplicem. Quod enim nullus pro-

xime insequentis multiplex sit, constat. $A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.$

Nam cum sit, ut A , ad B , ita B , ad C ; C , ad D ; & D , ad E : non sit autem A , ipse B , multiplex; neque B , ipse C ; neque C , ipse D ; neque D , ipse E , multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum ullius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniam D , ipse E , non est multiplex: non metietur e contrario E , ipsum D , per ea, quæ in defn. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A ; Nam cum sit D , ad E , ut C , ad D ; B , ad C ; & A , ad B ; erit convertendo E , ad D , ut D , ad C ; C , ad B ; & B , ad A .) Et E , primus secundum D , non metitur; neque alius quisquam illorum ullum metietur. Quare e contrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum ullius erit multiplex, per ea, quæ in defn. 5. lib. 7. docuimus.

6. offani

Sed & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus uero secundum metiatur; & quicumque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicumque alius cuiuslibet sequentiam multiplex erit.

SINT

S I N T deinceps proportionales quoscunque numeri A, B, C, D, E ; & primus A , secundum B , metiatur. Dico & quilibet illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet

$A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.$ bet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum

fit, ut A , ad B , ita B , ad C ; C , ad D ; & D , ad E ; metiatur autem A , ipsum B ; & B , ipsum C ; & C , ipsum D ; & D , ipsum E , metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B , ipsos D , & E , hoc modo ostendetur.

11. pron. Quia B , ipsum C , metitur, & C , ipsum D ; metietur quoque B , ipsum D . Rursus quia D , ipsum E , metitur; metietur quoque B , (ipsum D , metiens) eundem E . Et sic de reliquis.

11. pron. **S** E D iam primus A , multiplex sit B , secundis. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit ut A , ad B , ita B , ad C ; C , ad D ; & D , ad E : fit autem A , ipseus B , multiplex; erit & B , ipseus C ; & C , ipseus

D ; & D , ipseus E , multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D , ipseus E , est multiplex; metietur e contrario E , ipsum D : sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A , continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metitur, ut demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

C O N V E R T E M U S etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

S I sint quoscunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, uel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

S I N T deinceps proportionales A, B, C, D, E ; & primus A , ut

A, vel alius quisque nullum a secundo *B*, metiatur. Dico neque *A*, primum, metiri *B*, secundum. Si enim *A*, *A*, 16. *B*, 24. *C*, 36. *D*, 54. *E*, 81. primus secundum *B*, dicatur metiri, metietur quoque, per ea, que secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicumque alius quemlibet sequentiū. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam ullum a secundo metiri ponatur. Non ergo *A*, ipsum *B*, metietur.

*I*tem vero *A*, primus, vel alius quisquam nullius a secundo *B*, sit multiplex. Dico neque *A*, primum multiplicem esse *B*, secundum. Si namque *A*, primus multiplex esse *A*, 81. *B*, 14. *C*, 36. *D*, 24. *E*, 16. dicatur *B*, secundum multiplex quoque erit quicumque alius cuiuslibet sequentium, ex his, qua secundo theoremate huius scholii demonstramus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam ullius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur *A*, ipsius *B*, multiplex erit.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

7.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

Sint deinceps proportionales *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, & *A*, primus extremum *E*, metiatur. Dico & *A*, primum metiri *B*, secundum. Si enim *A*, ipsum *B*, non dicatur metiri, ne *A*, 3. *B*, 6. *C*, 12. *D*, 24. *E*, 48. que alias quisquam ullum metietur. Quare nec *A*, ipsum *E*. Quod est absurdum. Ponitur enim *A*, metiri *E*. Igitur *A*, primus *B*, secundum metietur; Atque idcirco, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

6. postea

SCHOLION.

Ut theorema, quod secundo loco in scholio precedentiis propos. demonstravimus, convecimus, amplificabimus hanc propos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, uel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, uel illius esse multiplex; neque alius quisquam ullum metietur, uel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theorematē scholij precedentis.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportionē ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportionē cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportionē cadent.

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continui C, D; sitque ut A, ad B, ita E, ad F. Dico

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, .
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis i ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, ut A, ad B, atque adeo ut E, ad F, ita G, ad K. Quare cum G, & K, inter se primi sint, nempe extremi minimorum numerorum, ac pro-

3. scholij.

portio

pterea in sua proportionione minimi ; æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita ut numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, singuli singulos . Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producant, ex 9. pronunciato ; in eisdem rationibus erunt E L, M, F, in quibus G, H, I, K, ut ad propos. 18. lib. 7. demonstrauiamus . At G, H, I, K, sunt continue proportionales . Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt ; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B . Si igitur inter duos numeros medij continua proportionione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

23. & 21.
septimi

SCHOLIUM.

NON solum ex demonstratione cõstat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Oñsum enim est E, L, M, F, in eadẽ esse proportionem, in qua G H, I, K : Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADDEM hæc propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, unitas . Item si vel A, vel B, fuerit unitas, existentibus E, & F, numeris ; ut in exemplis apparet .

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel superparticularis cuiusvis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperitur inter binarium, & unitatem ; superparticularis vero inter numeros sola unitate differens ; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius : si inter duos numeros dupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis ; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis

inter binarium, & unitatem; vel inter numeros solz vnitate
differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros mini-
mos, qui eandem cum illis proportionem habent: quod fieri nul-
la ratione potest. Nam nec inter binarium & unitatem, nec
inter duos numeros sola vnitate differentes, ullus numerus
interponitur, tantum abest, ut aliquem medium proportiona-
lem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se
distantes interijciuntur solum numeri, quæ ab utroque vnita-
te differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium
proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Diffe-
rant numeri $A B$, $C D$, binario, inter quos cadat numerus
 $E F$, minor vnitate quam $A B$, maior vero quam $C D$, vnita-
te quoque. Dico $E F$, non esse medium proportionalem inter

$A B$, $C D$. Si enim dicatur esse
 $A \dots \dots G \cdot B$ $A B$, ad $E F$, ut $E F$, ad $C D$; ab-
 $E \dots \dots H \cdot F$ lato ex $A B$, numero $A G$, ipsi $E F$,
 $C \dots \dots D$ aequali, ut reliqua sit vnitas $G B$,
& ex $E F$, numero $E H$, ipsi $C D$,

equali, ut relinquatur etiam vnitas $H F$; erit quoque ut
 $A B$, totus ad $E F$, totum, ita $A G$, ablatum ad $E H$, abla-
tum, cum $A G$, $E H$, ipsi $E F$, $C D$, aequales sint, ex con-
structione. Igitur erit quoque reliquus $G B$, ad reliquum
 $H F$, hoc est, vnitas ad vnitatem, ut totus $A B$, ad totum $E F$,
maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo $E F$, me-
dius proportionalis est inter $A B$, & $C D$.

11. septimi

Ex quibus fit, nec illud intervallum Musicum, quod in
dupla proportionem consistit; ut Diapason, vel, ut vulgo dici-
tur, Octava; nec illud, quod in sesquioctava proportionem repe-
ritur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgo Secunda, bisariam pos-
se secari, hoc est, in duas proportionem aequales. Illa enim pro-
portio bisariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur,
inter cuius terminos medius proportionalis cadit. Vt quia
inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadrupla cadit me-
dius proportionalis numerus 12. hoc modo, 24. 12. 6. Idcirco
portio quadrupla bisariam diuisa esse dicitur in duas du-
plas proportionem. Cum ergo ostensum sit, inter numeros du-
plas proportionem, & superparticularis, qualis est sesquioctava,
non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum
est, Diapason, & Tonum, bisariam secari non posse. Unde
Diapason

Diapason prima sui dimissione in Diapente, & Diatessaron, quorum intervallorum illud in proportionem sesquialtera, hoc vero in sesquitercia consistit, apud Musicos secatur, ut hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquiterciam, tanquam in maximas sui partes inter se inaequales. Ita quoque Tonus in duo semitoniam, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, secari solet. Sed de his plura in Musica.

RURSUS ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusvis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea, quae ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri dupli sit quadrati ex latere descripti; quadratorum uero proportio sit duplicata proportionis laterum; sit, ut proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros dupla proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, ut ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. quae de re plura scribemus in 9. & ultima propos. lib. 10.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportionem ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportionem cadunt numeri, totidem & inter utrumque eorum, ac unitatem medij continua proportionem cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continue proportionales C, D. Dico, totidem cadere conti-

nue

nue proportionales inter unitatem, & A, nec non inter unitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; sumantur in eadem proportionione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multumdo assumptorum æqualis

A, 3. C, 12. D, 18. B, 27.

Unitas.

E, 2. F, 3.

G, 4. H, 6. I, 9.

K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

2. *ostendi.*

1. *ostendi.*

7. *pron.*

5. *pron.*

7. *pron.*

5. *pron.*

fit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt, erunt A, C, D, B, minimi in proportionione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportionione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsi A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, ut K, ipsi A; & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia uero, ut constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, se ipsum multiplicans produxit G, multiplicans uero ipsum G, fecit K; metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: Metietur autem & unitas ipsum E, per E. Acque igitur metietur unitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. Per defin. ergo 20. proportionales sunt deinceps, unitas & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit, ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans uero ipsum I, faciat N; metietur F, ipsum I, per F; & I, ipsum N, per eundem F: Metietur autem & unitas ipsum F, per F. Acque igitur metietur unitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. Per definitionem igitur 20. proportionales sunt continue, unitas & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, una cum unitate æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij continue proportionales numeri inter unitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter unitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHO.

SCHOLIŌN.

PERSPICUUM autem est, numeros, qui commensurati proportionem cadunt inter numeros *A*, & *B*, ac unitatem, habere proportionem denominatam a minimis numeris proportionis *A*, ad *C*; hoc est, quos habent *E*, & *F*, numeri ad unitatem; id quod in Ethico propo. 2. hinc lib. asseruimus.

CONSTAT quoque ex demonstratione hac, si numerus se ipsum multiplicat aliquem feceris, & rursum multiplices productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab unitate. Oportensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab unitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipsorum, & unitatē deinceps medij continua proportionē cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportionē cadent.

CADANT inter utrumque numerorum A, B, & unitatem, quotcumque numeri medij continue proportionales, inter A, quidem & unitatem, numeri C, D, E. At vero inter B, & unitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico toti dem medios continue proportionales cadere inter

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
 E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
 D, 9. I, 18. G, 36.
 C, 3. F, 6.
 Unitas.

A, & B, quot inter utrumque A, B, & unitatem. Multiplicantes se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idē C, multiplicans K, L, & H, faciat

5. *prop.*

faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter utrumque A, B, & unitatem. Quoniam igitur est, ut unitas ad C, ita C ad D; D, ad E, & E, ad A, æque merietur unitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: Metitur autem unitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.

E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.

D, 9. I, 18. G, 36.

9. *prop.*

C, 3. F, 6.

Unitas.

E, & E, ipsum A, per C, metietur.

Quare C, seipsū multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E,

& multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsū multiplicans fecit G; & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, &

17. *septimi*

I; erit, ut C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G, erit ut C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L, habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt

18. *septimi*

L, & H, erit ut C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, N, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cum

18. *septimi*

C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, erit, ut C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, uel

B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, uel F, G, H.

Quocirca si inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c.

Quod erat demonstrandum.

SCHO.

de cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportionem A, ad E, qui sint K, L; quos nimirum cadunt inter utrumque C, G, & unitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad D, 81. M, 108. N, 144 O, 192. H, 256. E, proportionales. Quoniam igitur ex defn. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I: Est autem ut B, ad I, ita A, ad E; Habebis quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebis C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est ut C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebis quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de ceteris.

Hoc idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Unde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

Sunt ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine equalium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti uero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius.

Sint ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem eodem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam; & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab unitate, ut constat ex scholis propo. 9. huius lib. Eademq;

Etalemque ratione erunt B, N, O, P, ab unitate proportionaliter,
necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata
est, rationis B, ad A, ex theo-
remate 1. huius scholij: Est
autem, ex defin. eiusdem ra-
tionis B, ad A, duplicata quo-
que ratio C, ad A; Erit C,
ad A, ut N, ad K. Eodem
modo erit A, ad G, ut K, ad
Q. Nam ex eodem 1. theo-
remate, est ratio K, ad Q, du-
plicata rationis A, ad F; &

E, 161. I, 512.
D, 54. H, 118.
C, 18. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.

N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 3. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit
C, ad A, ut N, ad K; & A, ad G, ut K, ad Q; erit ex aequo
C, ad G, ut N, ad Q. Atque ratio N, ad Q, duplicata est ra-
tionis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij. Igitur & ratio
C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit
ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad
L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; & eiusdem
triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, ut O,
ad L. Eodemque modo est A, ad H, ut L, ad R, quod utraque
proportio triplicata sit proportionis A, ad F. Est ergo ex aequo
D, ad H, ut O, ad R; sed ratio O, ad R, triplicata est rationis
B, ad F, ex 1. theor. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiu-
dem rationis B, ad F. Nō

E, 81. P, 1.
D, 54. Unitas. H, 2.
C, 36. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.

factus demonstrabimus ra-
tionem E, ad I, esse qua-
druplasam rationis B,
ad F. Atque ita deinceps.
I D E M omnino de-
monstrabitur, si nume-
ri unius ordinis defināt
in unitatem, ut ex hac
subiecta figura est mani-
festū, in qua I, est unitas.

N, 75. K, 256. Q, 64.
O, 1324. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

C A T E R V M theorema hoc demonstrabimus etiam in
lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos.
28. licet non in quacunque lineis. Unde multo generalius
est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc

modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, conuque proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportionē cadunt numeri; totidem & inter ipsos medij continua proportionē cadent.

CADANT inter utranque numerorum *A, B*, & assumptum numerum *C*, quolibet numeri continue proportionales; inter *A*, quidem *A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.* & *C*, numeri *D, F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.* inter *B*, vero & *C*, totidem numeri *G, H, 18. N, 24. H, 32. D, 6. G, 8. C, 2.* Dico tot quoque medios continui proportionales esse

deinde inter *A*, & *B*, quos inter *A*, & *C*, & inter *B*, & *C*. Item tot inter *F*, & *I*, quos inter *F*, & *C*, & inter *I*, & *C*. Et tot inter *E*, & *H*, quos inter *E*, & *C*, & inter *H*, & *C*. Sumptis autem tribus *K, L, M*, minimis in ratione *D*, ad *G*; erit ex definit. ratio *K*, ad *M*, duplicata rationis *K*, ad *L*, hoc est *D*, ad *G*. Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque *E*, ad *H*, duplicata est eiusdem rationis *D*, ad *G*. Igitur est ut *K*, ad *M*, ita *E*, ad *H*. Atque adeo cum inter *K*, & *M*, cadat vnus medius proportionalis *L*, cadet quoque vnus medius, nempe *N*, inter *E*, & *H*; quomodo dum & inter *E*, & *C*, & inter *H*, & *C*, vnus medius cadit. Simili modo ostendemus, inter *F*, & *I*, duos medios cadere, sicut & inter *F*, & *C*, & inter *I*, & *C*, duo medij cadere, si sumantur quatuor minimi in ratione *D*, ad *G*. Et eadem ratione inter *A*, & *B*, tres medij cadent, si in eadem proportionē *D*, ad *G*, sumantur quinque numeri minimi.

8. offans.

Hoc etiam verum est, si loca alterius numeri, nempe *B*, unita assumatur, veluti perspicuum est in hac subiecta figura.

in qua nu-
mer^{us} B, vni-
tate est, ca-
duntque 14
inter A, et
C, quam in-
ter B, & C,
tres numeri

A, 1048. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 1096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

cōtinue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt & C.
Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales ca-
dunt inter A, & B, necnon inter F, & I, asque inter E, &
H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero af-
sumptio C, proinquiret.

THEOR. 9. PROPOS. II.

II.

DVORVM quadratorum numero-
rum unus medius proportionalis est nume-
rus: Et quadratus ad quadratum duplicatā
habet lateris ad latus rationem.

SINTE quadrati numeri A, & B, quorum latera C, &
D. Dico inter A, & B, unum medium proportionalem nu-
merum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad qua-
dratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad la-
tus. Multiplicantes se mutuo C &
D, faciant E. Quia igitur C, multi-

tiplicans seipsum fecit A, quadratū,
ex defin. quadrati; & ipsum D, mul-
tiplicans fecit E, ex constructione; erit ut C, ad D, ita A, ad

E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructio-
ne; & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, qua-
dratū; erit quoque, ut C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E,
B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D.
Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue pro-
portionalis cadit E. Quia uero, existentibus A, E, B, conti-
nue proportionalibus, numerus A, ad B, duplicatam rationē

Oo 4 habet

17. septimi

I I

habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

PERSPICUUM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportionem lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, ut demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & utrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, ut C, ad D; metitur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metitur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, ut C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A; Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se suis compositi. Similiter cum sit A, ad E, ut C, ad D; & metitur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metitur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quæ cum & latus D, metitur suum quadratum B, habebunt F, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

II.

THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et
cubus

cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem .

S I N T numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Di-
co inter A, & B, duos medios numeros continue proportio-
nales cadere : Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, tri-
plicatam esse proportionis

C, ad D ; lateris ad latus. A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
Multiplicans C, seipsum fa- E, 9. G, 12. F, 16.
ciat E, & D, seipsum multi- C, 3. D, 4.
plicans faciat F ; At C, & D,

se mutuo multiplicantes faciant G ; Multiplicantes uero G,
faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multi-
plicans fecit E, & G ; erit, ut C, ad D, ita E, ad G. Eadem ra-
tione ; cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F ;
erit quoque ut C, ad D, ita G, ad F ; proptereaq ; E, G, F, con-
tinue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia

ex defin. cubi C, ipsum E, multiplicans fecit A ; & ex constru-
ctione multiplicans ipsum G, fecit H ; erit ut E, ad G, hoc est,
ut C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multi-
plicans fecerit, ex constructione, numerum I ; multiplicans

uero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B ; erit quoque,
ut G, ad F, hoc est, ut C, ad D, ita J, ad B : Est autem & H,
ad I, ut C, ad D ; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fe-
cerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, conti-
nue sunt proportionales in ratione C, ad D. Atque, adeo in-
ter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue pro-
portionales. Quoniam uero, existentibus A, H, I, B, conti-
nue proportionalibus, numerus A, ad B, triplicatam habet

rationem eius, quam habet A, ad H ; triplicatam quoque ra-
tionem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam ha-
bet C, ad D, latus ad latus ; cum sit C, ad D, ut A, ad H. Quia
ob rem duorum cuborum numerorum duo medij propor-
tionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

Hic quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos
numeros

numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oñsum enim est, ita esse A , ad B ; & H , ad I , & I , ad B , ut C , ad D .

E O D E M: modo constat, duos numeros medios proportionales H , I , & similibes cuborum A , B , esse inter se compositos. Cum enim A , H , I , B constanter sint proportionales in ratione C , ad D ; hoc est, esse A ,

A , 27. H , 36. I , 48. B , 64.

E , 9. G , 12. F , 36.

C , 3. D , 4.

ad H , & I , ad B , ut C , ad D :

Metitur autem latus D ,

cubum suum B , consequens

consequentem, si de propor

tionibus I , ad B , & C , ad D , loquamur; metitur quoque C , ip-

sam I , antecedens antecedentem, quandoquidem est I , ad B , ut

C , ad D . Metitur autem & latus C , cubum suum A ; immo et

ipsum H , quod H , factus sit ex multiplicatione C , in G , ex con-

structione. Igitur A , H , I , communem habent mensuram C ;

atque adeo inter se compositi sunt. Similiter cum sit A , ad

H , ut C , ad D ; metitur autem latus C , cubum suum A , antec-

edens antecedentem; metitur quoque D , ipsum H , consequens

consequentem. Metitur autem & latus D , cubum suum B ; im-

mo & ipsum I , quod I , factus sit ex multiplicatione D , in G , ex

constructione. Igitur H , I , B , communem mensuram habent

D ; Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem

etiam hic est priorum trium numerorum A , H , I , communem

mensuram esse C , latus cubi prioris A ; posteriorum vero I &

H , I , B , mensuram communem esse D , latus posterioris cubi B .

12. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

Sunt continue proportionales A, B, C, qui seipso
multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipsos
D, E, F, faciant G, H, I; & rursus multiplicantes ipsos G,
H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F,
& G, H, I, & K, L, M, continue esse proportionales. Mul-
tiplicantes A, & B, se mutuo faciant N, & B, C, se mutuo
multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, fa-
ciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S. Simili

A, 2. B, 4. C, 8.

D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.

G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.

K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. B, 2048. M, 4096.

modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, mul-
tiplicans R, S, I, faciat Y, Z, &c. Quoniam igitur A, multipli-
cans seipsum, & B, fecit D, & N, erit ut A, ad B, ita D, ad
N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum, fecit
E, & O, erit etiam, ut A, ad B, ita E, ad O. Sunt igitur D,
N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus,
quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit F, &
O, erit ut B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C,
multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit, ut B, ad C,
ita O, ad F, proptereaque & E, O, F, continue propor-
tionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cum D,
N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua
E, O, F, erit ex æquo D, ad E, ut E, ad F; atque adeo D, E, F,
continue proportionales sunt.

17. septimi

17. septimi

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P,
& Q, erunt ex his, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P,
Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc est in ratione A,
ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E,
fecerunt Q, & H; erit quoque, ut A, ad B, ita Q, ad H.
Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B.
Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S;
erunt ex demonstratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, propor-
tionales in ratione E, O, F, hoc est B, ad C, seu A, ad B. Et
eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I;
erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita S, ad I, propterea-
& H,

17. septimi

18. septimi

& H, R, S, I, proportionales sunt in ratione A, ad B. Quo circa, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem con-

A, 2. B, 4. C, 8.

D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.

G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.

K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. B, 1048. M, 4096.

tinuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, ut H, ad I. Ac proinde G, H, I, continue sunt proportionales.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur si sint quolibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIUM.

SUNT autem, ut ex demonstratione liquet, numeri primo producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione earum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri secundo genisi G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio procreati, in quadruplicata, & sic deinceps semper uno amplius.

BREVIS propositioem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in se-

A, 2. B, 4. C, 8.

D, 4. E, 16. F, 64.

G, 8. H, 64. I, 512.

K, 16. L, 256. M, 4096.

fos, numeri D, E, F; & in hi-

ex eisdem numeri G, H, I; &

rursum ex eisdem in hos numeri

K, L, M. Dico D, F, F; & G,

H, I; & K, L, M, esse quoque

continue proportionales. Nam

ex scholio propos. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, F, H, L; & C, F, I, M, continue sunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theoremate scholii propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiusdem rationis F, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad

A, ad *B*, & *B*, ad *C*. Eadem modo ostendemus *G*, *H*, *I* esse proportionales continue in triplicata ratione rationis *A*, ad *B*, & *B*, ad *C*: At vero *K*, *L*, *M*, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

Ex qua rursus demonstratione apparet, numeros primum productos esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo vero procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius elicitur ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib.

Quæ autem in utraque demonstratione huius propos. 13. dati sunt tantum tres numeri continue proportionales *A*, *B*, *C*; eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quæ tres *A*, *B*, *C*, *D*, continue

proportionales, quæ se ipsos multiplicantes faciant *E*, *F*, *G*, *H*; postea vero multiplicantes ipsos *E*, *F*,

G, *H*, faciant *I*, *K*, *L*, *M*, & sic deinceps. Quoniam igitur *E*, *F*, *G*, ex demonstratis, proportionales sunt in ratione *A*, ad *B*: Item *F*, *G*, *H*, in ratione *B*, ad *C*, huc est, in eadem ratione *A*, ad *B*; cum illi producti sint ex *A*, *B*, *C*, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex *B*, *C*, *D*, proportionalibus quoque in se ipsos: Erunt *E*, *F*, *G*, *H*, continue proportionales. Non secus proportionales erunt *I*, *K*, *L*, *M*; & alij deinceps eodẽ modo producti.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Metiatur quadratus *A*, cuius latus *C*, quadratũ *B*, cuius latus *D*. Dico & latus *C*, latus *D*, metiri, Multiplicantes enim *C*, & *D*, faciant *E*. Quoniam igitur, ut

veliquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; metitur quoque A, primus secundum E. Quare cum sit ut A, ad E, ita C, ad D, & C, latus latus D, metietur.

7. *offensi.*

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

METIATUR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, ut C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

14.

THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

MEtiatur cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonstratione

propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, ut A, ad H, ita C, ad D, metietur & C, latus latus D.

7. *offensi.*

METIATUR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri

metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter metiente C, latera latus D, metietur & A, ipsum H, ac idcirco & extremum B, cubus cubum, ex his, quæ ad propos. 6. huius lib. demonstravimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16.

15.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neq; latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; metietur & quadratus A, quadratum B.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

14. offensi

Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metietur latus D.

Si d iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; metietur quoque C, latus illius D,

14. offensi

latus huius. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c.

Quod erat ostendendum.

THEOR.

15.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

15. *offici.*

S I N T cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

15. *offici.*

S I D I A M C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

S I quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et si unius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si uero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus

dratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A , quadrati B , & cubus A , cubi B , sit multiplex; metietur B , quadratus quadratum A , & cubus B , cubum A . Igitur & latus D , latus C , metietur; ad proinde latus C , lateris D , multiplex erit.

14. & 15.
octani.

Quod si latus C , lateris D , multiplex sit; metietur latus D , latus C . Igitur & B , ipsum A , quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; Ac propterea A , ipse B , quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.

14. & 15.
octani.

$A, 36. B, 9.$
 $C, 6. D, 3.$
 $A, 64. B, 8.$
 $C, 4. D, 2.$

At vero si A , ipse B , quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex; non metietur B , ipsum A , quadratus quadrati, aut cubus cubi. Igitur neque latus D , latus C , metietur. Quare C , latus lateris D , non erit multiplex.

$A, 49. B, 7.$
 $C, 7. D, 3.$

16. & 17.
octani.

$A, 125. B, 5.$
 $C, 5. D, 3.$

SIMILITER si C , latus lateris D , non sit multiplex; non metietur D , latus latus C . Igitur nec B , ipsum A , quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A , ipse B , quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

16 & 17.
octani.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

16.

DVORVM similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SIT plani numeri similes A, B , & latera illius sint C, D , huius vero illis proportionalia E, F , ita ut C, D , se mutuo multiplicantes faciant A ; & E, F , mutuo se multiplicantes faciant B ; sitque ut C , ad D , na E , ad F . Dico inter A , & B , cadere unum numerum medium proportionalem, &

P p propor-

17. septimi

proportionem A , ad B , esse duplicatam proportionis lateri homologorum C , F , uel D , F . Multiplicantes se mutuo D , E , faciant G . Quoniam igitur est C , ad D , ut E , ad F ; erit permutando C , ad E , ut D , ad F . Et quia D , multiplicans C , & E , fecit A , & G ; erit A , ad G , ut C , ad E , hoc est, ut D , ad F . Similiter quia E , multiplicans D , & F , fecit G , & B ; erit quoque G , ad B , ut D , ad F . Proportionales ergo sunt A , G , B , in ratione C , ad E , uel D , ad F ; Atque adeo inter A , & B , medius proportionalis cadit G .

Quia uero, existentibus A , G , B , continue proportionalibus, A , ad B , duplicatam habet rationem eius, quam habet A , ad G , hoc est, C , ad E , uel D , ad F ; perspicuum est proportionem numeri plani A , ad planum B , esse duplicatam eius, quam habet C , ad E , uel D , ad F , latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Quia ostensum est A , G , B , esse proportionales in ratione C , ad E , uel D , ad F ; manifestum est, inter duos similes planos A , & B , cadere medium proportionalem G , in ratione laterum homologorum C , E , uel D , F , assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G , & utrumlibet planorum A , B , esse inter se compositas. Cum enim ostensi sint A , G , B , proportionales in ratione C , ad E , uel D , ad F , id est, esse A , ad G , & G , ad B , ut C , ad E , uel D , ad F ; metiantur autem E , F , latera numerum B , cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G , ad B , & C , ad E , uel D , ad F , loquamur; metientur quoque C , D , ipsum G , antecedentes antecedentem, quod sit G , ad B , ut C , ad E , uel D , ad F . Atqui & C , D , latera metiuntur numerum A , cuius sunt latera. Igitur G , A , mensuram communem habent tam C , quam D ; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursum cum sit A , ad G , ut C , ad E , uel D , ad F ; metiantur autem C , D , latera suum planum A , antecedentes antecedentem; metiantur etiam E , F , ipsam G , consequentes consequentem. Quo-

re cum E, F , latera summi planum B , metiāsur, habebunt G, B , communem mensuram tam E , quam F , ideoque erunt inter se compositi.

Ex qua demonstratione etiā manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G , communes mensuras esse C, D , latera prioris plani A , posteriorum autem G, B , mensuras communes esse E, F , latera plani posterioris B .

THEOR. 17. PROPOS. 19.

18.

DVORVM similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT solidi numeri similes A, B , & latera illius sint C, D, E , huius vero illis proportionalia F, G, H , ita ut sit C , ad D , quemadmodum F , ad G ; & D , ad E , sicut G , ad H . Dico inter $A, & B$, cadere duos medios proportionales, & proportionem A , ad B , esse triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F , uel D, G , uel E, H . Multiplicantes se mutuo C, D , faciant I ; & F, G , & mutuo multiplicantes faciant K . Item D, F , se mutuo multiplicantes faciant L . Postremo E, H , ipsum L , multiplicantes faciant M, N . Quia igitur C, D, E , ipsis F, G, H , proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum ut C , ad F , ita D , ad G , & E , ad H . Quoniam uero $D, & G$, multiplicans $C, & F$, fecit L , & L ; erit ut C , ad F , ita L , ad L . Simili modo, quia $F, & G$, multiplicans $D, & G$, fecit L , & K ; erit quoque ut D , ad G , ita L , ad K . Sunt ergo L, L, K , continue proportionales in ratione C , ad F , uel D , ad G , uel E , ad H . Et quoniam A , solidus factus est ex mutua multiplicatione la-

7. septimi

terum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; sit ut E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; summe tus H, ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, mul-

tiplicans I, & L, fa-

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240

I, 6. L, 12. K, 24.

C, 2. D, 8. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

cer: & A, & M; erit

A, ad M, ut I, ad L,

hoc est, ut C, ad F,

uel D, ad G, uel E,

ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, faciet N, & B; erit N, ad B, ut L, ad K, hoc est, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad N. Est autem & M, ad N, ut E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, facerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

Q U O N I A M uero, existentibus A, M, N, B, proportionalibus continue, proportio A, ad B, triplicata est eius, quam habet A, ad M, Est autem A, ad M, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H, latus ad latus homologum Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

S C H O L I O N,

E T M O N S T R A T U M S I A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, uel D, G, uel E, H, assumptorum.

E X U I, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & utrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sine proportionalibus in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera facti solidi B; confu-

guentes

quæntes consequentem; si de proportionibus N , ad B , & C , ad F , vel D , ad G , vel E , ad H , loquamur; metiuntur quoque C, D, E , ipsum N , antecedentes antecedentem; quod sit N , ad E , ut C , ad F , vel D , ad G , vel E , ad H . Atqui & C, D, E , ipsum M , metiuntur; (cum enim M , factus sit, per constructionem, ex E , in L ; metiatur E , ipsum M . Deinde quia M, N, B , proportionales sunt ipsi I, L, K ; metiatur autem K , ipsum B , quod B , factus sit ex K , in H ; metiatur quoque I , ipsum M . Metiuntur autem & C, D , latera planum suum I . Igitur & C, D , ex æquonunciatio 11, metiuntur ipsum M . Atque adeo C, D, E , ipsum M , metiuntur.) Nec non & ipsum A , nempe latera suum solidum. Ergo A, M, N , habent communem mensuram tam C , quam D , quam E . Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A , ad M , ut C , ad F , vel D , ad G , vel F , ad H ; metiuntur autem C, D, E , latera solidum suum A , antecedentes antecedentem; metiuntur quoque F, G, H , ipsum M , consequentes consequentem. Metiuntur vero & F, G, H , ipsum N , (cum enim N , factus sit ex H , in L , per constructionem; metiatur H , ipsum N . Deinde quia A, M, N , ipsi I, L, K , proportionales sunt; metiatur autem I , ipsum A , quod A , factus sit ex I , in E ; metiatur etiam, ipsum N . Cum ergo & F, G , latera metiuntur planum suum K ; metiuntur quoque F, G , ipsum N ; atque adeo F, G, H , ipsum N , metiuntur.) Nec non & ipsum B , nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B , communem habent mensuram tam E , quam G , quam H . Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N , communes esse mensuras C, D, E , latera prioris solidi A ; At vero F, G, H , latera posterioris solidi B , communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, B .

THEOR. 18. PROPOS. 20.

17.

§ I inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A , & B , medius proportionalis C . Dico A , & B , esse planos similes. Sumantur D , & E , minimi in ratione

21. *septimi* ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C; metientur D, & F, ipsos A, & C, æque metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B; metiantur per G. Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: Item G, eisdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; erit, ut C, ad B, ita F, ad G: Ut autem C, ad B, ita erat D, ad E: Igitur erit ut D, ad E, ita F, ad G; & permutando ut D, ad F, ita E, ad G. Quoniam uero F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Similiter modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, nempe D, ad F, ut E, ad G; erunt ex defin. A, B plane similes. Quare si inter duos numeros unus, &c. Quod demonstrandum erat.

19. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

20. *octavi* CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; erunt E, & G, plane similes. sine ipsius E, latera H, I; ipsius uero G, latera K, L. Et quia E, F, G, minimi in ratione A, C, D, existentes, æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, quia E, F, G, æque metiantur C, D, B, eandem habentes
- A, 24. C, 72. D, 36. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
21. *septimi* A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

habentes rationem cum illis; meriantur per N ita ut M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Idcirco A, productur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, ut ostendimus; erit C, ad D, ut M, ad N: Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F, quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem quam H, K, uel I, L; Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huiuslib. in ratione laterum homologorum H, K, uel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, ut M, ad N; & permutando H, ad I, ut K, ad L; & I, ad M, ut L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

9. *prop.*

18. *septim.*

17. *septim.*

SCHOLIUM.

Duo exempla apposuiimus, in quorum priori liquido constat, unitatem E, esse planum numerum, & unitates H, I, eius latera, licet improprie, ut in definitione numeri plani monuimus. Si enim unitatem a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclides demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem contingeret in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionem generaliter proponat, demonstratque sine ulla exceptione.

THEOR. 21. PROPOS. 22.

20.

SI tres numeri deinceps sint proportio

nales,

Pp 4

nales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

Si tres numeri A, B, C, continui proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, et similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

20. octavi

21.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

Si quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continui, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C; erit A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

21. octavi

SCHOLION.

Hæc est apud omnes interpretes Euclidis, quæ ego videtur, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum; quam qui diligenter examinare velis, invenias sane maculam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quævis non quibuscunque lateribus unus exhiberi possint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus unus proportionalia sint quadam alterius; Iure optimè

quis inficiari poterit, si duorum planorum similium unus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum unus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concessis, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris plaris 36. & 64. similibus, satis est, ut duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeamur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiam si prior sit quadratus, habens duo latera equalia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quaque equalia, atque adeo esse quadratum; quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedamus, his lateribus prioris equalibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, nempe & inter se equalia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter utramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur modum.

SINT tres numeri A, B, C , continue proportionales, & primus A , quadratus. Dico & C , tertium esse quadratum. Sumpto enim D , latere quadrati A ; cum D , ex defn. in se faciat A ; erunt D , & A , ex scholio propos. 9. huius lib. ab unitate continue proportionales, erisque conuersendo A , ad D , vs D , ad unitatem; atque adeo cum inter numerum A eundem, & tam numerum C , quam unitatem, cadens medij proportionales multitudine equalis, nempe unus, cadens quoque eisdem, ex theor. 1. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C , numerum, nimirum unus, qui sit E . Quoniam igitur unitas & E, C numeri sunt continue proportionales; producesur C , ex E , in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. A c proinde C , quadratus erit, ex defn. cuius latus E .

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F , minimis in ratione A , ad B , & B , ad C ; metietur D , ipsum A , & F , ipsum

$A, 36. B, 48. C, 64.$
 $D, 6. E, 8.$
 Unitas.

sum C, a quo, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniam extremi D, F, minimorum trium numerorum, per coroll.

11. octavi. $A, 36. B, 48. C, 64. G, 18. H, 32. D, 9. E, 12. F, 16. L, 6. K, 8. I, 4.$ 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; cades inter A, et D, quadratus medius autem proportionalis, ut G. Quia vero est, ex aequo, ut A, ad C, ita D, ad

8. octavi. 7. octavi. F; & permittendo, ut A, ad D, ita C, ad F; cades quoque inter C, & F, unus proportionalis medius, nempe H. Cum ergo F, primus metiatur C, ultimum; metiatur idem & secundum H. Sumpso autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, ita ut H, ad F; & K, ad I, eandem habeat proportionem multiplicem. Sis quoque L, quadratus ipsius K. Itaque quia ratio L, ad F; quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad F, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex definit. duplicata, quod convertendo sunt proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, ut C, ad F; Ac proinde I, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus eris.

11. octavi. 20. octavi. A L I T E R. Quoniam A, & C, similes plani sunt; sunt eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsum A; ut F, G, ipsius C, ita ut sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latere quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, produ-

20. septima. $A, 36. B, 48. C, 64. I, 8. D, 3. E, 12. F, 4. G, 16.$ citur ex D, in E, & ex H, in se; erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, ut D, ad E, cadatque inter D, & F, medius proportionalis H; cades quoque inter F, & G, unus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fautem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus eris, ex definitione.

8. octavi. 20. septima. $A, 36. B, 48. C, 64. H, 6. I, 8. D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.$ S I N T rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus: Dico & D, quartum cubum esse. Sumpso enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seip-

sum numerus F , ac proutinde, ex defn. ex E , in F , cubus A . Quia ergo E , in se facit F , & in F , facit A ; erunt, ex scholio propos.

9. huius lib. F, F, A

continue proportiona-

les ab unitate; atque

idcirco conuertendo pro-

portionales quoque erunt

numeri A, F, E , & uni-

tas. Itaque cum inter numerum D , & unitatem, ac eundem nu-

merum A , cadant medij proportionales. multitudines aequales,

videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius

lib. totidem medij inter unitatem, & numerum D , qui sint G ,

H . Itaque quia unitas, & numeri G, H, D , continue sunt pro-

portionales; fiet H , ex G , in se, & D , ex G , in productum H , ut

ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratum. Quare D ,

cubus est, ex definitione, cuius latus G .

A L I T E R. Inuenitis quatuor numeros minimis E, F, G ,

H , in ratione A , ad B , & B , ad C , & C , ad D ; metietur E , ipsum

A , & H , ipsum D , eque, per ea, quae ad propos. 21. lib. 7. de-

monstrauimus. Est quia

E, H , extremi quatuor

minimorum, cubi sunt,

ex 1. coroll. propos.

2. huius lib. Est autem

& A , cubus, ex hypo-

thesi; cadent inter E ,

A , cubos duo medij proportionales, qui sint I, K . Quoniam au-

tem, ex aequo, est ut A , ad D , ita E , ad H ; & permutando, ut

A , ad E , ita D , ad H ; cadent quoque inter H, D , duo medij pro-

portionales, qui sint L, M . Cum ergo H , primus metietur D ,

extremum, metietur idem & L , secundum. Sumpto deinde

N , latere cubi H ; metietur N , totius numerum O , quosies H , ip-

sum L ; ita ut L , ad H , & O , ad N , eandem habeant proportio-

nem multiplicem: fit quoque P , cubus ipsius O . Itaque cum

ratio P , ad H , cubi ad cubum, triplicata sit rationis O , ad N ,

lateris ad latus, hoc est L , ad H : Sit autem & ratio D , ad H ,

eiusdem rationis L , ad H , ex defn. triplicata, quod conuertendo

proportionales etiam sint D, M, L, H ; erit P , ad H , ut D , ad

H ; Ac propterea P , & D , aequales erunt. Quare cum P ,

cubus

$A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.$

$F, 15. H, 100.$

$E, 4. G, 10.$

Unitas.

$A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.$

$K, 32. M, 500.$

$I, 16. L, 250.$

$E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.$

$P, 1000. O, 10. N, 5.$

12. 0. 0. 0. 0.

8. 0. 0. 0. 0.

7. 0. 0. 0. 0.

12. 0. 0. 0. 0.

cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

22.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

Si r A, ad B, ut C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit

11. *offani*

A, 36. F, 48. B, 64.

A, ad B, ut C, ad D; cadat autem

8. *offani*

C, 9. E, 12. D, 16.

inter C, & D, quadratos unus

medius proportionalis, nempe E;

cadet quoque inter A, & B, me-

22. *offani*

dius unus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusvis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, essentambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Unde numeri in dupla proportionem, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, esset & 8. quadratus; igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum.

24. *offani*

24. *offani*

23.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum,

merum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

SIT A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum: sitque A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D; cadant autem inter C, & D, cubos A, 8. G, 12. H, 18. B, 27. duo medij proportionales, nimirum E, F; cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus; erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusvis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, essent ambo priores, numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ; etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SIT N & Y plani similes A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. A, 10. C, 36. B, 45. Cum enim A, & B, sint plani similes cadet inter eos unus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, B, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extrinsecus

termini D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. 1.
Quare cum sit, ex æquo A, ad B, ut D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, ut est quadratus aliquis, nempe D, ad quadratum alium, ut ad F. Ergo similes plani numeri ratione inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

FACILE etiam demonstrabimus conversum huius, videlicet.

NUMERI, qui proportionem habent, quæ quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quæ quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. Quoniam inter quadratos C, D, cadit unus medius proportionalis: Es est, ut C, ad D, ita A, ad B; cadet quoque medius proportionalis inter A, & B. Quare A, & B, plani similes sunt.

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent, ut modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, ut A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia A, B, sunt solidi similes, cadent inter eos duo medi

proport-

11. offani

8. offani

20. offani

25.

19. offani

proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportionem A, C, D, B, erunt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. A, 140. C, 360. D, 540. B, 810 huiuslib. cubi. Quare, E, 8. F, 12. G, 18. H, 27. cum ex æquo sit A, ad B, ut E, ad H, constat ita esse A, ad B, ut est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, nempe ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus, scilicet.

NUMERI, qui proportionem habent, quæ cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NUMERI A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, ut C, ad D, cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales, cadent quoque inter A, B, duo medij. Sunt ergo A, & B, solidi similes.

Ex his omnibus perspicue inferunt, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel sesquialteram, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, caderet inter eos medij unus proportionalis, quod fieri non posse iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales; Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos eorundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola unitate, vel certe binario tantum inter se distent, ut in scholio prædicto traditum est; inter quos certum est non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

SIMILITER nec duæ quavis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus pri-

A, 16. B, 54.
C, 64. D, 216

12. ostendi
8. ostendi
27. ostendi

18. ostendi

3. ostendi

mus, latera habet solummodo unitatem, & se ipsum, quamvis
improprie. Vt hi numeri plani 19. & 29. latera habent 1.
19. & 1. 29. cum ex horum mutua multiplicatione producatur,
que constat non esse proportionalia. Quibus vero numeri
solidus, qui numerus etiam primus sit, latera sanctorum habet
duas unitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. la-
tera habent 2. & 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multipli-
catione producatur. Perspicuum autem est ea non posse esse
proportionalia.

Vnde facilius admodum est inuentio duorum planorum,
vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo nume-
ri habentes proportionem duplam, vel sesquialteram, vel su-
perbiparsientem, vel certe duo numeri primi; erunt illi ip-
si per ea, que tradita sunt, plani seu solidi non similes.

Rursus quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit,
alter vero non quadratus, plani sunt non similes; quales
sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, haberent pro-
portionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur
16. quadrato, esset & 20. quadratus. quod est absurdum. poni-
tur enim non quadratus.

Per rationem quilibet duo numeri, quorum alter cubus
sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, ut 27. 40. Si
enim essent solidi similes, haberent proportionem, quam cubus
ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, esset & 40. cubus. quod
est absurdum. ponitur enim non cubus.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.



EVCLIDIS

E V C L I D I S

ELEMENTVM IX.



THEOR. I. PROPOS. I.

SI duo similes plani numeri multipli-
cantes se mutuo faciant quendam; Produ-
ctus quadratus erit.



Vo numeri plani similes A, B, se mu-
tuo multiplicantes faciant C. Dico C,
quadratum esse. Multiplicans enim A,
se ipsum faciat D, quadratum. Quo-
niam igitur A, multiplicans A, & B, pro-
duxit D, & C; erit ut A, ad B, ita D,
ad C. At inter A, & B, cum sint pla-
ni similes, unus medius cadit propor-

tionalis. Igitur & inter D, & C, unus medius proportiona-
lis cadet. Cadat ergo E, ut
sint continue proportionales
D, E, C. Itaque cum tres D,
E, C, continue sint proportio-
nales, sitque primus D, quadratus, ex constructione, erit
quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani
numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demon-
strandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes
faciant quadratum; similes plani erunt.

Qq Dvo

1.

.1

17. septimi

12. octavi
8. octavi

.11

22. octavi

2.

.111

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratū. *17. septimi*
 A, 6. B, 54. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter D, & C, quadratos *11. octavi*
8. octavi unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter A, & B, unus medius proportionalis cadet; Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multi- *20. octavi*
 plicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

S C H O L I O N.

*E*x his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I. Si duo numeri quadrati se mutuo multipli-
 cantes faciant quempiam: Productus quadra-
 tus erit.

*D*uo quadrati A, B, se mutuo multi-
 plicantes faciant C. Dico C, esse quadra-
 tum. Cum enim A, & B, sint similes pla-
 ni, nempe quadrati; erit C, ex eis produ-
 ctus, quadratus. *8. noni.*

II. Si duo numeri se mutuo multiplicantes fa-
 ciant quadratum; alter autem sit quadratus;
 Et reliquus quadratus erit.

*D*uo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C,
 quadratum; sitque A, quadratus.
 A, 9. D, 12. B, 16. Dico & B, quadratum esse. Cum
 C, 144. enim A, & B, se mutuo multipli-
 cantes faciant C, quadratum; erit

A, & B, similes plani: atque adeo inter eos unus medius ca-
 des proportionalis, nempe D. Quare A, existente quadrato,
 erit & B, quadratus. *2. noni.*
18. octavi
22. octavi

III. Si duo numeri se mutuo multiplicantes fa-
 ciant

ciant non quadratum; alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

D v o numeri A, B , se mutuo multiplicantes faciant C , non quadratum; sique A , quadratus. Dico B , non quadratum esse. Si enim B , $A, 4. B, 20.$ dicatur esse quadratus, erit & C , produ- $C, 80.$ ctus quadratus A, B , quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B , numerus.

Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit. III.

D v o numeri A , quadratus, & B , non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C . Dico C , non esse quadratum. Nam si C , foret quadratus, cum produceretur ex A , in B , sique A , $A, 9. B, 20.$ quadratus; esset & B , ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C , quadratus erit. $C, 180.$

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A , se ipsum multiplicans numerum B . Dico B , esse cubum. Sit enim C , latus cubi A ; & ex C , in se fiat $A, 8.$ D , & idcirco ex C , in D , ipse cubus $B, 16. D, 4.$ A , signatur. Quia igitur C , $F, 32. C, 2.$ seipsum multiplicans fecit D , metietur C , ipsum D , per C : Metitur $B, 64. Vni. tas.$ autem & unitas ipsum C , per C . Igitur eadem pars est unitas ipsius C , quæ C , ipsius D , nempe denominata a C ; Ac $Qq \ 2$ proinde

7. prom.
5. prom.

20. *defin.* proinde ut unitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multi-
 7. *prop.* plicans D, fecit A; metietur D, ipsum A, per C: Metiebatur
 autem & C, ipsum D, per C. Ea-
 dem ergo pars est C, ipsius D, quæ
 20. *defin.* E, 16. D, 4. D, ipsius A; ideoque ut C, ad D,
 F, 32. C, 2. ita D, ad A: sed ut C, ad D, ita erat
 B, 64. Vni- tas. unitas ad C. Igitur ut unitas ad
 C, ita C, ad D, & D, ad A; Acq;
 adeo inter unitatem & numerum A, duo medij proportiona-
 7. *prop.* les cadunt numeri C, D. At quia A, ipsum B, metitur per A,
 quod A, se ipsum multiplicans fecerit B; metitur uero & uni-
 5. *prop.* tas ipsum A, per A: Eadem erit pars unitas ipsius A, quæ
 20. *defin.* A, ipsius B; Ac propterea erit ut unitas ad A, ita A, ad B.
 Quare cum inter unitatem & numerum A, cadant duo me-
 8. *offani* dij proportionales C, & D; cadent totidem inter A, & B,
 nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B,
 sint continue proportionales; & A, primus sit cubus; erit
 29. *offani* quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum
 multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum
 multiplicans faciat aliquem; Factus cu-
 bus erit.

- FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C,
 cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; eritq;
 9. *noni.* D, cubus. Quoniam uero A, multi-
 A, 8. B, 27. plicans A, & B, fecit D, & C; erit ut
 17. *septimi* D, 64. C, 216. A, ad B, ita D ad C. At inter A, & B,
 12. *offani* cubos duo medij proportionales ca-
 8. *offani* dunt. Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales
 23. *offani* cadent; Ac propterea D, existente cubo, & C, cu-
 bus erit. Quo circa si cubus numerus cu-
 bum numerum multiplicans, &c.
 Quod erat osten-
 dendum.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, & ipsum faciat D, qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C; At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. Totidem igitur & inter A, & B, cadent; Ac proinde existente A. cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

3. noni.

7. septimi.

12. octavi.

8. octavi.

23. octavi.

SCHOLIUM.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

I.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.

A, 8. B, 20.
C, 160.

5. noni.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

II.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus; & factus C, cubus erit. quod est contra hypothesis.

A, 8. B, 17.
C, 136.

4. noni.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus se ipsum multiplicans cubum faciat : Et ipse cubus erit.

MULTIPLICANS se ipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, signatur, atque adeo equalis equaliter equalis sit, ut per spicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C, erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

5. nomi.

SCHOLION.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstra-

runt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt : Ergo inter A, 8. B, 64. C, 512. B, & C, cubos duo medij propor-

12. octavi

17. septimi

8. octavi

13. octavi

tionales cadunt. Quoniam vero est ut B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit ; cadens quoque inter A, & B, duo medij proportionales ; Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, ut perspicuum est.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat : Factus solidus erit.

NUMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum eni in A, sit

A, sit

A, sit compositus, metietur eum, præter unitatem, numerus aliquis: metiatur D. ipsum A per E. Quo posito, multiplicante D, ipsum E, producet A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

A Cum ergo B, ipsum A, multiplicans fecerit C, procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

13 defin.

9. pron.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus uero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SIT ab unitate cōtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidē B, ab unitate esse quadratum, & unū intermittentes

Unitas. A, 3 B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049, L, 177147. M, 531441.

omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quantum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum uero E, cubū simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam est unitas ad A, ut A, ad B, æque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B; Metiatur autem unitas numerum A per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B,

5. pron.

9. pron.

Q 9 4 qua-

22. *offani*

quadratus est. Quia uero tres deinceps proportionales sunt B, C, D; & est B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit quadratus, & F, quadratus erit; Nec non & omnes unum intermittentes.

R. v. r. s. v. s. quia est unitas ad A, ut B, ad C; æque metietur unitas numerum A, & numerus B, numerum C: Me-

Unitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

5. *prop.*
9. *prop.*

titur autem unitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, se ipsum multiplicans faciat B, multiplicans uero B, faciat C, ut est ostensum; erit C, cubus. Quia uero quatuor deinceps proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus; erit & F, cubus. Eodem argumento assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, sit cubus; & I, cubus erit; atque omnes semper duos intermittentes.

23. *offani*

POSTREMO quia F, septimus ab unitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

S C H O L I O N.

Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.

Si sint quocunque numeri ab unitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, deci-

moquinto, decimo octauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimus sextus, decimus nonus, &c. sunt cubi. Omnes uero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimo octauo, uigesimo quarto, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimus nonus, uigelimus quintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

N A M primi ordinis numeri omnes semper unum intermittunt post seorsum ab unitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab unitate. Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab unitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

SI ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatem sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post unitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

S I N T ab unitate cõtinue proportionales numeri quocunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus unita-

Unitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ti quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sunt, iam demonstratũ est. Quod uero

8. noni.

8. noni. vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuū fiet. Cum tres continue proportionales sint A, B, C; sitque

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

22. offani A. quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales.

S I T iam A, proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

8. noni. intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sit ostendemus. Cum sit unitas ad A, ut A, ad B; æque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B: Metietur autem unitas numerum A, per ipsummet A. Igitur, & A, ipsum B, per se ipsum metietur; Atque adeo cubus A, se ipsum multiplicans numerum B, procreabit. Quare B, cubus est.

5. pron.

9. pron.

3. noni.

23. offani

Quoniam uero quatuor continue proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus; & D, cubus erit. Eademque ratione assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit, & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

NON demonstravit Geometra, si numerus, qui post unitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus unitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua uero parte est quadratus, ea ratione & reliqui

reliqui omnes quadrati erant, ut demonstratum est. Omnes
igitur erant cubi finit, & quadrati.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post unitatē, non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At si, qui post unitatē, non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

S I N T ab unitate quocunque numeri deinceps propor-
tionales A, B, C, D, E, F, G, H, I; & primum A, proximus
unitati non fit quadratus. Dico nec alium ullum esse qua-
dratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes
omnes, nempe præter B, D, F, H. Siquid præter hos alius

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

est quadratus, sit quadratus E. Cum ergo & D, sit quadratus, sitque ut D, ad E, uel E, ad F, ita A, ad B, & conueniendo ut E, ad D, uel F, ad E, ita B, ad A, habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, uel quadratus F, ad quadratum E: sed B, tertius ab unitate est quadratus. Igitur & A, primus ab unitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

Sed iam A, proximus unitati non sit cubus. Dico nec alium ullum esse cubum, præter quartū ab unitate, & duos intermittentes omnes, uidelicet præter C, F, I. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo ut D, ad F, ita A, ad C, (quod ries
D, E

8. **nomí.**

8. noni
24.08 anni

8. noni.

D, E,

8. noni.

D, E, F, eandem habeant rationem; quam tres A, B, C, & conuertendo ut F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: Sed C, est cubus, nempe

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

25. offani

quartus ab unitate. Igitur & A, primus ab unitate cubus erit. quod est contra hypothesin. Non igitur D, cubus est.

8. noni.

Quod si E, credatur esse cubus; cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, ut C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo ut cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo,

25. offani

erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque ullos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

NON est autem necesse, si numerus, qui post unitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab unitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab unitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab unitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post unitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus. Di-

Vnitas. A, 8. B, 64. co B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem,

5. noni.

quod primo existente cubo, omnes cubi sunt; quadratum vero,

8. noni.

quod tertius sit ab unitate.

SIT deinde A, post unitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Di-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. co quartum esse cubum simul & quadratum; Cu-

8. noni.

bum quidem, quod quartus sit ab unitate; quadratum vero,

9. noni.

quod primo existente quadrato, omnes sunt quadrati.

SIT postremo A, post unitatem neque cubus, neque quadratus.

dratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratū, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Unitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

enim primo non existente quadrato, nullus alius quadratus sit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, ut in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus, decimus tertius, decimus quintus, decimus septimus, decimus nonus, &c. Primo autem non existente cubo, nullus alius sit cubus præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, ut ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertius decimus, decimus sextus, decimus nonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertium decimum, decimum nonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de ceteris. Nam in hæc loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, ut liquido constas ei, qui recte propositionem hanc & octavam huius libri expenderit.

10. noni.

10. noni.

THEOR. II. PROPOS. II.

12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, ut

Unitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

C, quemlibet maiorem, ut G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo ut C, ad G, ita unitas ad D; (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem cum unitate & numeris A, B, C, D,) æque metietur unitas numerum D, atque numerus C, numerum

10. defi.

9. *prom.*

merum G : Sed unitas metitur numerum D, per ipsummet
D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metitur.
Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit ut E,
ad F, ita unitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G,
per F, cum sit ex æquo ut A, ad G, ita unitas ad F, &c. At
que ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab unitate quot-
cunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod
erat ostendendum.

SCHOLIUM.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest mi-
nor numerus a minore metiente, tantum distare ab unitate eum
numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod
eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ unitatis
ad eum, per quem metitur minor maiorem, ut ex demonstratio-

Unitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ne apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per
C, nempe per se ipsum, &c.

9. *prom.*

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui se ip-
sum multiplicet, producere numerum, qui in numeris pro-
portionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab unitate.
Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, produci-
ri numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab
ab unitate; propterea quod si numerus numerum metiens mul-
tiplicet eum, per quem metitur, producat ille, quem meti-
tur. Ergo C, se ipsum multiplicans gignet F, cum F, tantum
abstet a C, quantum C, ab unitate; ac propterea C, ipsum F, per
C, metietur, ut diximus. Sic quoque B, multiplicans D, fa-
ciat eundem F; quod D, ipsum F, metietur per B, &c. & sic
de reliquis.

II.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque pri-
morum

morum numerorum ultimum metiuntur, iidem & eum, qui unitati proximus est, metientur.

S I N T ab unitate deinceps proportionales quocunque numeri A, B, C, D. Dico quoscunque primorum numero rum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A. Si namque non metitur ipsum A; erit E, cum primus sit, ad A, primus.

Metiatur autem Unitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

Metiatur E, ipsum D, per F, atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia uero & A, ipsum D, metitur per C, ac proinde A, multiplicans C, facit D, ut in scholio præcedentis propos. ostendimus; produetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. Quare erit ut A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia uero & A, ex scholio eodem, metitur C, per B, atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. Erit igitur ut A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E; sint inter se primi; metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H, ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, ac idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, ut ex eodem scholio apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex A, medio in se, & ex E, primo in H, tertium. Quare erit ut E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium; atque adeo, cum E, & A, inter se primi sint, æque metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesein. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum

31. septimi

9. pron.

19. septimi

21. septimi

9. pron.

19. septimi

21. septimi

9. pron.

20. septimi

21. septimi

sum

sum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri. Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumēto ostendemus, quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes, metiri quoque ipsum A; Ead. n. que ratio si C, uel B, ultimus numerus statuatur. Si igitur ab unitate quoruncq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

31. septimi ALITER. Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico, & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, se ipsū multiplicans facit B, ut apparet ex scholio propos. præceden-

Unitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

27. septimi tis; erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt, fit autem C, ex A, in B, per idem scholion; erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt, & fit D, ex A, in C, per idem scholion; erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A.

SCHOLION.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmativa E, ipsum A, metiri: quod uidetur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium uideatur afferre. Cui tamen non absimile quid factum hic est in numero ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 1. de propor. propos. 201. gloriaturque se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse; Quod arbitrar eum non didicisse, si diligentius uim huius demonstrationis expendisset, vel certe, si expendis, eam in memoriam reuocasset; quædoquidem ipso longe prior Euclides usus est hoc etiam demonstrandi modo, ut ex hoc theoremate 12. est manifestum.

CETERVM ex demonstratis perspicuum est, quoscunque

cumque numerū primū, qui ultimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. Cum enim metiatur proximum unitati; hinc autem omnes subsequentes, quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum; qui in proportionalibus sunt numeris manifestum est, quod & ille omnes metiatur.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem, primus sit; Maximū nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

S I T ab unitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus unitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum ergo est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D, metietur quoque ipsum A, unitati proximum, qui primus ponitur. Unitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625. Quod est absurdum. Non igitur

E, primus est, sed compositus; atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; metietur quoque ille alius primus eundem D, atque adeo & ipsum A, primum existentem, nimirum unitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico E, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C, & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C, & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (scilicet is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D,

R r per

11. noni

11. noni

13.º

12. noni

33. septimi

11. pron.

12. noni

8. pron.

11. noni	per E. Cum ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesein. ponitur enim B, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diversus. Quoniam vero E, metitur D, per
8. pron.	Unitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625. F, metitur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit
12. noni	autem F, primus. Si enim sit primus, & metiatur D, ultimus metietur, & A, proximum unitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus, acque adeo cum aliquis numerus primus metietur quem rursus dico, nullum alium esse posse, praeter primum A. Si namque alius primus quam A, metiatur F, cum F, metiatur D, extremum; metietur quoque ille alius primus eandem D, atque adeo & ipsum A, primum unitati, qui primus est: quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniam E, metitur D, per F; sic D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, ut in schol. hoc propos. 1. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, sit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; & proinde erit ut A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Metitur autem A, ipsum E, ut ostensum est: Ergo & F, ipsum C, metietur: Metiatur per G. Quoniam igitur F, diversus ab A, B, metitur C, ultimum, (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter G, diversum esse ab A, B, & non primum, sed compositum; quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diversus ab A, B, C, metiebatur D, ultimum.
8. pron.	Si enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metieturque F, ipsum C, per G; metietur unusque F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B, & vicissim aliquis ipsorum A, B, nempe is, per quem F, ipsum C, metitur; metietur C, per F. Cuius ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. ostensum est enim B, non esse eundem, qui aliquis ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipso
11. noni	rum

rum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; metietur uicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metieturque ultimum C; metietur quoque numerum primum A, unitati proximū. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quā A, metiatur G; cum G, metiatur C, ultimum; metietur quoque ille alius primus eundem C; atque adeo & ipsum A, unitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metietur. Iam uero quia C, fit ex F, in G, quod F; metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. Quare erit ut A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metietur autem A, ipsum F, ut demonstratum est: Igitur & G, ipsum B, metietur: metiatur per H. Quia, ergo G, diuersus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G. Nam si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B, per H; metietur unique G, ipsum B, per A; Ex uicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, ut constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem qui A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus Iam uero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, ut in scholio dicto docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertium, & ex A, medio in se ipsum. Quare erit ut H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium. At A, metietur ipsum G, ut est demonstratum: Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare existente A, primo, maximum D, nullus alius numerus metietur, præter ipsos A, B, C: Ac proinde si ab unitate quocunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

1
8. pron.
12. noni
33. septimi
11. pron.
12. noni
9. pron.
9. septimi
8. pron.
9. pron.
10. septimi

14.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur : Nullus alius numerus primus illum metietur , præter eos, qui a principio metiebantur .

Si v. numerus A, minimus quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsam A. Metietur enim, si fieri potest, primus numerus E, si
 A..... uersus a B, C, D, ip-
 B... C... D... sum A, per nume-
 E... F... rum F. Quia igitur E metitur A, p-

9. *prop.*
 11. *sepius*

F, multiplicans E, ipsum F, faciet A. Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur ; non quidem ipsum E, primum existentem , & ab ipsis diversum : ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum . Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur . Significat minimum numerum primi numeri metiantur , &c. Quod demonstrandum erat .

SCHOLIUM.

AD DIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile . Videlicet .

15.

SI quocunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis : Numerus aliquem eorum metiens , compositus erit ad alterum duorum numerorum , qui in eadem ratione sumuntur minimi .

SINT quocunque numeri continue proportionales A, B, C, D,

2. ostendi

C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem prima H, primum eorum, nempe A. Dico H, compositum esse vel ad F, vel ad G. Sumantur enim in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & sic deinceps, donec habeantur tota minus, quot

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H — F, 2. G, 3.

sunt ipsi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, ut constet ex modo procreandi quolibet minimas tradito in 2. propos. lib. 8. A, fit ex F, in M; metiatur autem H, ipsum A; erit H, compositus, ex scholio propos. 9. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, ut constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio dicto, rursus H, compositus vel ad F, vel ad I. si ad F, habetur propositum; si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum, erit H, compositus ad F, ex dicto scholio.

DEINDE metiatur H, secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit ut prius H, compositus vel ad F, vel ad N. si ad F, habetur propositum; si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K, erit H, eodem modo compositus vel ad F, vel ad K. si ad F, habetur propositum; si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G.

URSUS metiatur H, tertium C, qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum; si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. si ad F, habetur propositum; si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se; compositus quoque erit H, ad G.

RAABEREA metiatur H, quartum D, qui cum fiat ex F, in P, erit H, compositus vel ad F, vel ad P. si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. si ad G, habetur propositum; si vero ad L, cum L, producat ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus.

EDAM modo si H, metiatur ultimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; atque ita in ceteris eadem semper erit demonstratio.

Itaque si H , metiar primum A ; erit H , compositus ad F . Si vero secundum B metiar; erit compositus, vel ad F , vel ad G . Si denique metiar tertium C , vel quartum D , vel quicumque alium insequentem; compositus erit H , ad G . Id quod per spicue ex demonstratione apparet.

DEMONSTRATIO IN NUMERIS
eorum, quæ in lineis secundo libro
Euclides demonstravit priori-
bus 10. theorematibus.

QUANTAM in theoremate sequente demonstrando the-
quodam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de li-
neis libro secundo, tanquam si eadem de numeris essent
ostensa; non alienum instituo nostro duximus, nonnulla ex
his, quæ Geometrica ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de li-
neis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Bar-
laam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur
autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro us-
nauisse conspiciamus.

I. SI fuerint duo numeri, feceruntque ipso-
rum alter in quotcunque partes: Numerus plu-
nus comprehensus sub illis duobus numeris
æqualis est numeris, qui sub numero indiviso,
& qualibet parte numeri divisi continentur.

SINT duo numeri AB , & C , quorum AB , dividamur
in AD , DE , EB ; Fiatque F , ex C , in AB . Item GH , ex C ,
in AD ; & HI , ex C , in DE ; & IK , ex C , in EB . Dico F ,
æqualem esse numeris GH ,
 A . . . D . . . E . . . B . . . G . . . H I , IK , hoc est, toti numeri
 F , ... GK , ex GH , HI , IK ,
 G H I K composito. Quoniam C ,
multiplicans AB , fecit F ;

7. prop. metietur AB , ipsum F , per C ; hoc est, AB , pars erit ipsius F ,
denominata a C . Eadem ratione AD , ipsius GH ; nec us-
DE

$D E$, ipsius $H I$; & $E B$, ipsius $I K$, pars est $a E$, denominata, nempe eadem que $A B$, ipsius F . Quia vero, per ea que ad propot. $\S$. lib. 7. demonstravimus, totus $A B$, totius $G K$, eadem pars est, que $A D$, ipsius $G H$; erit quoque $A B$, totus totius $G K$, pars eadem, que $A B$, ipsius F ; $A c$ proinde inter se equaliter erunt F , & $G K$: Quod est propositum.

4. prop.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehenssi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

II.

IIII.

NUMERVS $A B$, diuidatur in $A C$, $C B$. Dico numerum, qui sunt ex $A B$, toto in partes $A C$, $C B$, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto $A B$, efficitur. Sumpto enim numero D , qui equalis sit ipsi $A B$; erit per thew. 1. numerus factus ex D , hoc est, ex $A B$, in $A B$, numerus quadratus ipsius $A B$, æqualis numeris, qui sunt ex D , hoc est, ex $A B$, in $A C$, & in $C B$. quod est propositum.

IDEM demonstrabitur, si $A B$, in plures partes, quæ in duas secetur, ut ex apposta secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E , hoc est, ex $A B$, in $A B$, nempe quadratus ipsius $A B$, æqualis numeris, qui continentur ex E ; hoc est, ex $A B$, in singulas partes $A C$, $C D$, $D B$.

Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur.

V.

IIII.

SIT numerus $A B$, diuisus in $A C$, $C B$. Dico numerum, qui sit ex toto $A B$, in partem $A C$, æqualem esse & ei, qui sub partibus $A C$, $C B$, continetur, & quadrato diste partis $A C$.

Rr 4 Sumpto

Sumpta enim numero D , qui dicta pars $A C$, equalis sit; et
 ex 1. theorema. numerus fa-
 ctus ex D , hoc est, ex $A C$, in
 $A B$; vel (quod idem est) ex
 $A B$, in $A C$, equalis num-
 ris factus ex D , hoc est, ex $A C$, in $C B$, et ex D , hoc est, ex $A C$,
 in $A C$, quadrato scilicet ipsius $A C$. Quod est propositum.

IIII.

Si numerus in duas partes dividitur: Qua-
 dratus ex toto factus equalis est quadratis, qui
 a partibus efficiuntur, una cum numero plano,
 qui bis sub partibus continetur.

Si T numerus $A B$, divisus in $A C, C B$. Dico numerum
 quadratum ex $A B$, factum equalem esse quadratis partium
 $A C, C B$, una cum numero, qui sit bis ex parte $A C$, in partem
 $C B$. Nam ex 2. theorema. numerus
 quadratus ipsius $A B$, equalis est
 numeris, qui fiunt ex $A B$, in $A C$,
 et in $C B$. Est autem numerus, qui sit ex $A B$, in $A C$, per 3.
 theorema, equalis numero genito ex $A C$, in $C B$, una cum qua-
 drato ipsius $A C$: Item numerus, qui sit ex $A B$, in $C B$, eodem
 modo equalis numero producto ex $A C$, in $C B$, una cum qua-
 drato ipsius $C B$. Igitur numerus quadratus ex $A B$, factus
 equalis est quoque numeris quadratis partium $A C, C B$, vel
 cum numero bis, qui sit ex $A C$, in $C B$. Quod est propositum.

V.

III

Si numerus secetur in duas partes aequa-
 les, & meri aequales: Numerus planus sub par-
 tibus, iuxta quadratus contentus, una cum numero
 quadrato numeri inter duas sectiones, medij,
 equalis est quadrato, qui ex dimidio nume-
 ro gignitur.

De. v. et. B. K. V. Si $A B$, secetur in partes aequales $A C, C B$,
 et vias aequales $A D, D B$. Dico numerum sub partibus in aequa-
 libus $A D, D B$, contentum, una cum quadrato numeri inter
 medij

medij C D, esse aequalem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipseus C B, per 4. theorema, equalis sit quadratis partium C D, D B, una cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B, una cum quadrato ipsius D B, equalis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B, erit numerus quadratus ipseus C B, equalis etiam reliquo quadrato ipsius C D, una cum reliquo numero factus ex C D, in D B, & numero ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atque ex 1. theorema, numerus, qui sunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, equalis est numerus, qui sit ex A D, in D B. Igitur quadratus ipseus C B, equalis erit quadrato ipsius C D, una cum numero qui sit ex A D, in D B; hoc est, numerus factus ex A D, in D B, una cum quadrato ipsius C D, equalis est quadrato ipsius C B. Quod est propositum.

III

Si numerus in duas partes aequales dividatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur; Numerus qui sit ex toto cum adiecto in adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, equalis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

VI

NUMERUS A B, fecetur in partes aequales A C, C B, vique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam unum, in adiectum B D, una cum quadrato dimidij numeri C B, aequalem esse quadrato, qui sit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam uno. Cum enim quadratus ipseus C B, per 4. theorema, equalis sit quadratis partium C B, B D, una cum numero bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, una cum numeris sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis, numerus autem contentus sub C B, B D, & sub A C, B D, & sub B D, B D, hoc est, quadrato ipsius B D, equalis sit, ex 1. theorema, numerus factus ex A D, in B D, erit quadratus ipseus C D, equalis reliquo quadrato ipsius C B, una cum numero factus ex A D, in B D, hoc est, numerus factus

A . C . C . B . C . D

III

ex

Sumpta enim numero D , qui distat parvi $A C$, aequalis sit; et
ex 1. theorema. numerus ja-
Aus ex D , hoc est, ex $A C$, in
 $A B$; vel (quod idem est) ex
 $A B$, in $A C$, aequalis num-
ris factis ex D , hoc est, ex $A C$, in $C B$, et ex D , hoc est, ex $A C$,
in $A C$, quadrato scilicet ipsius $A C$. Quod est propositum.

III.

Si numerus in duas partes dividatur: Qua-
dratus ex toto factus aequalis est quadratis, qui
a partibus efficiuntur, una cum numero plano,
qui bis sub partibus continetur.

Si t numerus $A B$, divisus in $A C, C B$. Dico numerum
quadratum ex $A B$, factum aequalem esse quadratis partium
in $A C, C B$, una cum numero, qui fit bis ex parte $A C$, in partem
 $C B$. Nam ex 2. theorema. numerus
quadratus ipsius $A B$, aequalis est
numeris, qui fiunt ex $A B$, in $A C$,
et in $C B$. Est autem numerus, qui fit ex $A B$, in $A C$, per 3.
theorema, aequalis numero genito ex $A C$, in $C B$, una cum qua-
drato ipsius $A C$: Item numerus, qui fit ex $A B$, in $C B$, eodem
modo aequalis numero producto ex $A C$, in $C B$, una cum qua-
drato ipsius $C B$. Igitur numerus quadratus ex $A B$, factus
aqualis est quoque numeris quadratis partium $A C, C B$, vel
cum numero bis, qui fit ex $A C$, in $C B$. Quod est propositum.

V.

III

Si numerus secetur in duas partes aequa-
les, & non aequales: Numerus planus sub par-
tibus inaequalibus contentus, una cum numero
quadrato numeri inter duas sectiones. medij,
aqualis est quadrato, qui ex dimidia nume-
ro gignitur.

Ad V. m. s. IV. Si $A B$, secetur in partes aequales $A C, C B$,
et in partes aequales $A D, D B$. Dico numerum sub partibus inaequa-
libus $A D, D B$, contentum, una cum quadrato numeri inter-
medij

medij C D, esse aequalem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipseus C B, per 4. theorema, aequalis sit quadratis partium C D, D B, una cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B; numero vero comprehenso sub C D, D B, una cum quadrato ipseus D B, aequalis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; erit numerus quadratus ipseus C B, aequalis etiam reliquo quadrato ipseus C D, una cum reliquo numero factus ex C D, in D B, & numero, ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atque ex 1. theorema, numerus, qui fit ex C D, in D B, & ex A C, in D B, aequalis est numerus, qui fit ex A D, in D B. Igitur quadratus ipseus C B, aequalis erit quadrato ipseus C D, una cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc est, numerus factus ex A D, in D B, una cum quadrato ipseus C D, aequalis est quadrato ipseus C B. Quod est propositum.

Si numerus in duas partes aequales dividatur, & illi aliquis alius numerus adjiciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto ipse adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, aequalis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NUMERUS A B, secetur in partes aequales A C, C B, vique adiciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam uno, in adiectum B D, una cum quadrato dimidij numeri C B, aequalem esse quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam una, cum enim quadratus ipseus C B, per 4. theorema, aequalis sit quadratis partium C B, B D, una cum numero bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, una cum numeris sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis; numerus autem consensus sub C B, B D, & sub A C, B D, & sub B D, B D, hoc est, quadrato ipseus B D, aequalis sit, ex 1. theorema, numerus factus ex A D, in B D, erit quadratus ipseus C D, aequalis reliquo quadrato ipseus C B, una cum numero factus ex A D, in B D, hoc est, numerus factus

ex

ex A D, in B D, una cum quadrato ipsius CB; equalis est quadrato ipsius C D. Quod est propositum.

VII.

Si numerus in duas partes dividatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, equalis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATUR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, una cum quadrato partis CB, equalem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC.

Cum enim, ex 1. theorem. quadratus totius AB, equalis sit quadratis partium AC, CB, una cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB simul, equales quadratis numero rum AC, CB, CB, una cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atque ei, qui fit ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, equalis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, equalis est, qui fit bis ex AB in CB. Igitur quadrati numerorum AB, CB simul, equalis sunt numero, qui fit bis ex AB, in CB; una cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

Si numerus in duas partes dividatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, equalis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECUTUR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC, equalem esse quadrato numeri, qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui equalis sit di-

Et partem C B, cum quadratus totius A D, compositi ex A B, & B D, sine ista parte C B, sit equalis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, una cum numero qui sit bis ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum A B; C B, una cum eo, qui sit bis ex A B, in C B; Sine autem, ex 7. theorem. quadratis numerorum A B; C B, summi equals numero bis comprehenso sub A B, C B, una cum quadrato numeri A C; Erit quadratus factus ex A D, equalis numero, qui sit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati quilibet inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

IX.

DETERMINAT. sit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos esse quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio efficiuntur. Cum enim A . . . C . . . D . . . B quadratus numero A D, equalis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui sit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partium D B, erunt quadrati partium A D, D B, equals quadratis partium A C, C D, D B, una cum numero bis, qui sit ex A C, hoc est, ex C B, in C D. Atque quadrato ipsius D B, una cum numero bis, qui sit ex C B, in C D, æquales sunt, ex 7. theorema. quadratis, qui fiunt ex C B, hoc est, ex A C, & C D. Igitur quadrati partium A D, D B, æquales sunt quadratis partium A C, C D, bis; A C propterea quadrati partium A D, D B, dupli sunt quadratorum, qui ex partibus A C, C D, fiunt. Quod est propositum.

Si numerus in duas partes æquales dividatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul du-

X.

pli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficiunt,
& eius, qui fit a numero composito ex dimidio,
& adiecto.

SIT numerus AB, divisus in partes duas aequales AC,
CB, eique adiciatur numerus BD. Dico quadratum num-
eri AD, composui ex toto AB, & adiecto BD, & quadrati
adiecti numeri BD, utroque simul, duplos esse quadratorum,
qui sunt ex AC, dimidio, & ex
A....C....B...D CD, composito ex CB, dimidio, &
adiecto BD. Cum enim quadra-
tus ipsius AD, aequalis sit, ex 4. theorema. quadratis partium
AC, CD, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB,
in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt
quadrati numerorum AD, BD, aequales quadratis partium
AC, CD, BD, una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD.
Sed per 7. theorema, quadrato ipsius BD, una cum numero bis,
qui fit ex CB, in CD, aequales sunt quadrato numerorum CB,
CD; & quadrato ipsius CB, aequalis est quadrato ipsius
AC. Igitur quadrati numerorum AD, BD, aequales sunt
quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrat-
num AD, BD, dupli sunt quadratorum, qui ex AC,
CD, efficiuntur. Quod est propositum.

ITAM vero theorema 1. lib. 2. non posse numeris accommo-
dari, hoc est, nulla modo fieri posse, ut numerus aliquis in duas
partes dividatur, ita ut numerus planus, qui ex toto in una
partium sit, aequalis sit quadrato reliquae partis, ut ibi mon-
stramus, ita demonstrabimus.

DIVIDATUR, si fieri potest, numerus AB, in C,
ita ut numerus factus ex toto AB, in partem CB, aequi-
sit quadrato reliquae partis AC. Quia
ADEC B
+ + + + +
CB, aequalis est quadrato numeri medij AC

20. septimi erit ut AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior
quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ab AC ita
CD, qui ipsi CB, sit aequalis, erit quicque ut AB, ad AC, ita
AC, ad CD. Quoniam ergo totum AB, ad totum AC, est ut
AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractus;
11. septimi erit quoque ut totum AB, ad totum AC, vel ut detractus AC,
ad

ad detractum CD , ita $C B$, ex $A B$, residuus, hoc est, $C D$, illi
 equalis, ad $A D$, ex $A C$, residuum. Quia igitur est ut $A C$, ad
 $C D$, ita $C D$, ad $A D$; & est $A C$, maior quam $C D$; erit quo-
 que $C D$, maior quam $A B$. Abiit ergo $D E$, qui ipse $A D$,
 sit equalis; erit etiam ut $A C$, ad $B D$, ita $C D$, ad $D E$. Itaque
 quia est, ut totus $A C$, ad totum $C D$, ita $C D$, ex sup. $A C$, detrac-
 tum ad $D E$, ex toto $C D$, detractum; erit quoque ut totus $A C$,
 ad totum $C D$, vel us detractus CD , ad detractum $D E$, ita $A D$,
 ex $A C$, residuus, hoc est $D E$, illi equalis, ad $E C$, ex $C D$, resi-
 duum. Quare cum sit ut $C D$, ad $D E$, ita $D E$, ad $A C$; sit au-
 tem $C D$, maior, quam $D E$; erit etiam $D E$, maior, quam $E C$;
 Ac proinde ex $E D$, auferri poterit numerus ipse $E C$, equalis;
 & hoc deinceps, nec unquam finis erit huius detraktionis. Quod
 est absurdum; cum numerus non possit dimidi infinitis. Non
 ergo numerus $A B$, dividitur ita, ut planus numerus ex toto in
 unam partem factus, equalis sit quadrato reliqua partis.
 Quod est propositum.

I. septimi

ALITER. Quoniam numerus $A B$, in C , ita divisus
 est, ut is qui sit ex $A B$, in $C B$, equalis sit quadrato reliqua par-
 tis $A C$; erit numerus, qui quater sit ex $A B$, in $C B$, quadru-
 plus quadrato ipsius $A C$; Ac proinde numerus, qui sit quater ex $A B$,
 in $C B$, una cum quadrato ipsius $A C$, quinquies erit quadra-
 ti partis $A C$. Est autem numerus continens quater sub $A B$,
 $C B$, una cum quadrato ipsius $A C$, quadratus; quippe tunc
 equalis sit quadrato numero, qui sit ex numero composito ex
 $A B$, & $C B$, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nu-
 mirum is qui quater continetur sub $A B$, $C B$, una cum quadra-
 to ex $A C$; & quadratus ex $A C$) proportionem habent, qua
 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constet ex coroll.
 propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus $A B$, dividitur ita in C ,
 ut is qui produciatur ex $A B$, in $C B$, equalis sit quadrato ipsius
 $A C$. Quod est propositum.

A — C — B

THEOR. 15. PROPOS. 15.

16.

SI tres numeri deinceps proportiona-
 les, fuerint minimi omnium eandem cum

ipfis

ipsis rationem habentium ; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

Si ut tres numeri A, B, C, minimi omnium eadem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul

ad C ; & B, C, simul ad A ; & A, C,

simul ad B. Sumpris enim duobus D,

E, in eadem cum illis proportionem mi-

nimis, ex scholio propos. 31. lib. 7. ma-

nifestum est ex demonstratione pro-

pos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A ; mul-

tiplicantem vero ipsum E, facere B ; atque E, se ipsum mul-

tiplicantem facere C. Quia igitur D, E, minimi in sua pro-

24. septimi portione inter se primi sunt ; erit & uterque D, E, simul ad

30. septimi quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex

D, B, quam ipse D, ad E, primus sit ; erit quoque numerus

26. septimi factus ex D, E, tanquam uno in D, ad eundem E, primus.

Qui autem sit ex D, E, tanquam uno in D, equalis est per

3. theorema scholij precedentis, & numero A, facto ex D, in

se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, composi-

27. septimi ti, primi sunt ad E ; At proinde & ad C, qui factus est ex E,

in se, primi sunt A, B, simul compositi.

D S I N D E quia, ut prius, uterque D, E, simul pri-

30. septimi mus est ad quemlibet ipsorum D, E, efficitur (cum tam co-

positus ex D, E, quam ipse E, po-

26. septimi mus sit ad D,) numerum factum

ex D, E, tanquam uno in E, pri-

mus esse ad D : Qui autem sit

D, E, tanquam uno in E, equalis

est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto

ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, si-

mul compositi, ad D, primi sunt ; atque adeo ad ipsum A,

27. septimi qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

P O S T E R I O R quia ; ut prius, uterque D, & E, simul

30. septimi ad quemlibet ipsorum primus est ; atque adeo e contrario,

quolibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E,

26. septimi erit quoque qui sit ex D, in E, ad compositum ex D, E, pri-

27. septimi mus ; At proinde & item qui sit ex D, in E, ad eum qui sit

ex D, E,

ex D, E, tanquā uno, in se, primus erit. Qui autem sit ex D, E, tanquā uno, in se, aequalis est, per 4. theorema antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, unacum eo qui ex D, in E, bis: Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis.

Quoniam ergo duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui sit ex D, in E, atque is, qui sit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, ut ad eum, qui sit ex D, in E, ut ostensum est; Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui sit ex D, in E; atque is, qui sit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui sit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, ut ad eum, qui sit ex D, in E, primi sunt, ut ostensum est; erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui sit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quamobrem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

S C H O L I O N.

CAMPANVS hoc theorema abiter demonstrat de quocunque numeris constanter proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

Si quocunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandē cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorū reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SIT AUTEM constanter proportionales minimi quocunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorū reliquos omnes simul compositos esse primos; Kidelicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A.

ad A: Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erit A, B, C, simul, atque D, compositi inter se: atque adeo: est aliquis

numerus, communis mensu-

A, B, C, 12. C, 18. D, 27. va- metietur. Metietur eos

E — F; 2. G, 3. H, — numeri: E, si fieri possit

sumanturque F, & G, duo mini-

mi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C,

D, continue proportionales sunt, & minima: metietur autem E,

aliquam eorum nempe D: erit E, compositus ad alterum ipsu-

rum F, G, ex scholio propo. 14. huius lib. Atque idcirco ipsum

E, & alterum ipsum F, G, aliquis numerus metietur: Me-

tietur eos H. Itaque cum H, metietur E, & E, ponatur meti-

vi compositum ex A, B, C, & ipsum D: metietur quoque H, eun-

dem compositum ex A, B, C, & ipsum D: Quia vero H, metietur

quoque alterum ipsum F, G, & tam F, quam G, medius nume-

ros B, C, metietur ex coroll. 3. propo. 2. lib. 8. metietur quoque

H, medius B, C: ac praeterea, & compositum ex B, C, Itaque cum

H, metietur totum compositum ex A, B, C, & destructum com-

positum ex B, C, ut demonstravimus: metietur quoque idem H, re-

liquum A: Metietur autem & ipsum D. Sane ergo A, D,

extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi: Sed & pri-

mi inter se sunt. Quod fieri non potest: Non igitur compositi in-

ter se sunt, compositi ex A, B, C, & numerus D. ergo inter se primi:

R V R S V S, si A, F, D, simul compositi non sunt primi ad

C: metietur eos, ut prius, aliquis numerus. Metietur eos E,

qui rursus ex scholio propo. 14. huius lib. compositus erit ad

alterum ipsum F, G. Metietur ergo H, ipsum B, & alterum

ipsum F, G. Itaque cum H, metietur E, & E, com-

positum ex A, B, D: metietur etiam H, eundem compositum

A, B, D. Quia vero H, metietur alterum ipsum F, G, qui-

tiuntur, per coroll. 3. propo. 2. lib. 8. medius B, C: metietur

quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metietur totum compositum

ex A, B, D, & destructum B, C, metietur quoque H, compositum

ex A, D, reliquum. Es quia H, metietur alterum ipsum F, G,

quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metietur, ut constat ex de-

monstratione propo. 2. lib. 8. metietur etiam H, alterum ipso-

rum A, D. Igitur & reliquum. Sane ergo A, D, extremi in-

ter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non

potest. Non igitur A, B, D, simul compositi: & ad C, com-

positi

11. pron.

11. pron.

10. pron.

12. pron.

3. offani

11. pron.

11. pron.

12. pron.

11. pron.

12. pron.

3. offani

positi sunt. ergo primi. Quod est proposuimus.

NON aliter ostendamus & A, C, D, compositas, esse ad B, primas; nec non, & B, C, D, simul ad A.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

17.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

S I ut primi inter se A, & B. Dico non esse ut A, ad B, ita B, ad alium numerum. si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita B, ad alium, nempe ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, atque adeo in sua proportione minimi; ipsi æque metiuntur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum

A
B
C

23. septimi
21. septimi

A, ipsum B, & B, ipsum C. Metitur autem & A, se ipsum: igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se existentes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit ut primus ad secundum, ita ultimus ad alium quempiam.

S I N T continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E. sint. Dico non esse, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit

51 ut

23. *septimi*

21. *septimi*

11. *pron.*

11. *pron.*

ut A, ad B, ita D, ad alium, uidelicet ad E. Erunt igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint inter se primi, minimi in sua proportione. Igitur & E; nempe A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est ut A, ad B, ita B, ad C: Ergo cum A, metiatur ipsum B, & B, ipsum C, metietur atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est ut B, ad C, ita C, ad D, metietur autem B, ipsum C, metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, metietur quoque ipsum D. Metitur uero & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos existentes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quaecunque numeri duceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

19.

PROBL. I. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DAT I duo numeri sint A, & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum, ut A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, aut non: Si sunt inter se primi;

16. *noni*

perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si uero non sunt A, & B, inter se primi, multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metiatur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C,

A, 4. B, 6. D, 9. C, 36.

per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, immo ipsum D, esse tertium proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D; fiet C, ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, aequa-

9. *pron.*

lis est ei, qui ex medio B, describitur; Ac proinde erit ut A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B. Si uero non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D; ita ut sit A, ad B, quemadmodum A, 6. B, 4. D, 16. B, ad D. Quoniam igitur est, ut A, ad B, ita B, ad D; erit numerus contentus sub extremis A, D, aequalis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; metietur A, ipsum C, per D; sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem uia considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, ut B, ad A. Duobus ergo numeris datis consideramus, &c. Quod faciendum erat.

10. septimi

10. septimi
7. prop.

PROBL. 2. PROPOS. 19.

20.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, ut A, ad B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut A, 4. B, 8. C, 9. D, 72. Igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, imo ipsum B, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, aequalis est ei, qui sub B, C, secundo, & ter.

9. prop.

19. *septimum* no continetur; Ac propterea erit ut A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipfis A, B, C, quartus proportionalis. Si d iam non metiatur A, ipsum D. Dico, ipfis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionale. Si enim, si fieri posset, inuentus quartus proportionalis E, ut, ut sit quodammodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor A, 4. B, 6. C, 8. E — D, 12. ad E. Quia ergo quatuor A, 1. B, 4. C, 10. E — D, 40. numeri A, B, C, E, proportionales sunt; erit numerus contentus sub extremis A, E, aequalis ei, qui ex B, secundo sit in E, tertium, hoc est, ipse D. Quare cum D, fiat ex A, in E; metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur admetiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipfis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus admetitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipfis C, B, A, inueniri possit aliquis quatuor, ad quem ita se habeat A, ut C, ad B. Quod ex tribus numeris datis considerabimus, an possit, &c. Quod erat faciendum.
19. *septimum*
7. *proponit*

SCHOLIUM.

Ex his facile cognoscemus, prepositis quocumque numeris continuis proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus ultimis, si ipsi alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEOREMA, & qui illum sequuntur, quatuor membris hoc problema absolutum. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi. Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Hi mihi san non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretari, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando derelictis, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, cumque non lenem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non

non posse ipsi quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobatur nuncietur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicua in huiusmodi numeris non continue proportionalibus apparet. 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse ut 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum utrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, ut hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare consentiunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalem, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. B. --- sit ille D, ita ut sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad C, ita fiat D, ad B. Breviter igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: sed sunt A, C, inter se primi, & ob id minimi. Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & ipsum B. At vero & A, se ipsam metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se existentes. Quod fieri non potest. Ipsi igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

23. & 12.
septimo

HABC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse ut B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri posse nusquam demonstrant: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus hic inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C, cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concessum assumant, ut hic idam fieri non posse, ostendant, liquida constat, eos posere principium (ut cum dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quacumque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponantur esse A, B, C, D, nulla ratione fieri potest, ut desint alius, ad quem ita se habeat quartus,

§§ 3 sicut

secundus ad tertium : quod tamen ipsi tanquā concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione nulla exigunt, ut detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, ut B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi utuntur.

S I N T enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nō tamen deinceps, scilicet A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, ut sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sic enim, si potest fieri, ut B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex aequo, ut A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo ut ipsi ostenderent, metitur A, duos A, & C, primus inter se. Quod est absurdū. Non ergo fieri potest, ut D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissimo falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

P R I M U M vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inveniri. Postrematandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absolvimus.

17. noni.

21.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorū.

S I N T propositi primi numeri quocunque A, B, C. Di-
co ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. Sumpro enim
numero D E, minimo, quem A, B, C, metiantur; apponatur
unitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit
primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

S I D iam non sit primus D F. Metietur ergo cum ali-

38. septimi

A, 2. B, 3. C, 5.

30

D ----- B . F

numero D E, minimo, quem A, B, C, metiantur; apponatur unitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit primus. Sunt ergo primi

quis numerus primus, nempe G. Dico G, primum nulli
 ipforum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sic idem, qui
 unus ipforum A, B, C, metian-
 tur autem A, B, C, ipsum DE;
 & G, eundē D E, metietur. Qua
 re G, metiens totum D F, & de-
 tractum D E, metietur quoque
 E F, reliquum, numerus unitatē.
 Quod est absurdum. Ergo G,
 primus non est idem, qui unus ipforum A, B, C; Ac pro-
 inde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures propo-
 sita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq;
 uia plures inuentientur quam A, B, C, G, si sumatur mini-
 mus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plu-
 res sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 3. B, 5. C, 7.
 105
 D ----- E. F
 53
 G -----

SCHOLIUM

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc
 modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propo-
 sitis, inuenire alium primum numerum ab il-
 lis diuersum.

NAM si primi quotcunque proposti sint A, B, C, inuenio-
 mus eodem modo alium primum ab illis diuersum, nempe DE,
 si primus est, uel certe G. Atque eodem modo quatuor primis
 alium quintū, & quinque primis alium sextum inueniemus, &
 sic deinceps primos numeros, quotcunq; quis uolet, inueniemus.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

22.

SI pares numeri quotcunque componā-
 tur: totus par erit.

COMPONENTVR quotcunque pares numeri AB,
 BC, CD. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cū

Si 4 enim

enim AB, BC, CD, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius

A R; & F, ipsius BC;
A.....B....C.....D & G, ipsius CD. Quoniam igitur est ut A R, ad E, ita B C, ad F; &

C D, ad G; (quod semper fit proportio dupla.) erit quoque ut A B, ad E, ita A D, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus A D, compositus ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G. compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quocunque, &c. Quod erat demonstrandum.

12. septim.

23.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quocunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONENTUR quocunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cum enim AB, B C, C D,

D E, sint impares;
A...B.....C.....D.....E differet quilibet unitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo unarum detractarum par: Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quocunque, &c. Quod erat ostendendum.

21. noni.

21. noni.

24.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quocunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

Q U O T

Q VOTUM. Numeri imparēs, quorum multitudine impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totū A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar, numerus differat unitate a pari, ex definitione; A.....B...C.....E. D. ablata unitate B D, ab impari C D; erit reliquus C E, par: Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. Igitur & A B, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quocunque, &c. Quod ostendendum erat.

22. noni.
21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

25.

Si a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

Ex pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quā dimidia pars, uel minor. A.....C.....B. Sit primum, dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

Si d iam C B, par detractus maior sit, uel minor, dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Ita A.....C...D...E.....B. que cum sit ut A B, ad D B, A.....D...C...E...B. dimidium, ita C B, ad E B, dimidium, erit permutando ut A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo ut A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, ut A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bisariam diuidatur, (quod D E, sic eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detraha-

trahatur, &c. Quod erat ostendendum.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI a pari numero impar detrahatur : Et reliquus impar erit.

24. noni. Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim unitate C D, ex C B, reliquus sit numerus A.....C. D.... B D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit & reliquus A D, par. Detracta ergo unitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur : Reliquus par erit.

22. noni. Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, unitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par auferetur C D; erit & reliquus A C, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur : Reliquus impar erit.

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem esse. Detracta enim A D, unitate ex imparibus A B;

A B, erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par, reliquus D C, par quoque erit: Ac proinde A . D C B addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

24. noni.

THEOR. 26. PROPOS. 28.

29.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, patrem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B, componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt unitates. Quare cum B, sit par, A . . . B . . . componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A; Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

21. noni.

SCHOLIUM.

EAD E M demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A B
C

THEOR. 27. PROPOS. 29.

30.

SI impar numerus imparé numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX

Ex impari A, in imparē B, fiat C. Dico C, imparē esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex totis unitatibus ipsi B, æqualibus, quorū sunt in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nempe æqualis multitudini unitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerū multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

EX CAMPANO.

31. NUMERVS impar numerum parē metiens, per numerum parē eum metitur.

29. noni. METIATUR impar A, parē B, per C. Dico C, parē esse. Nam si impar sit; erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cū ponatur par. Est ergo C, par.

32. NUMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

28. noni. METIATUR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparē esse. Si enim sit par; erit B, factus ex A, impari in C, parē par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

33. THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parē numerū metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATUR impar A, parē B. Dico A, dimidiū quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erat ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrata.

monstrauimus, numerus C, par; Atque: adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A, metiatur B, per C; metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, ut ad 3, definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam uero est ut C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando ut C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B; Est autē C, pars ipsius B, denominata ab A, ut ostensum est; erit & dimidiū ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodē A, denominata; Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo, numerus parem, numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

8. *pron.*

40. *septimi*

THEOR. 29. PROPOS. 31.

34.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplex sit C. Dico A, ad C, quoque primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D; qui necessario impar erit. Nam si sit par, cum A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar est. Quia igitur D, impar parem C, metitur; (est enim C, par, cum dimidiū habeat B,) metietur quoque numerum B, eius dimidium. Metietur autem & A: Igitur D, ipsos A, B, primos inter se existentes, metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est: Ergo primus.

28. *noni.*

30. *noni.*

Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit,
&c. Quod erat ostendendum.

THEOR.

35.

THEOR. 30. PROPOS. 32.

NUMERORVM a binario duplorum unusquisque pariter par est tantum.

NUMERI a binario A, dupli quo: cunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita unitate,

Unitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. cum A, sit binarius, & B, C, D, E, a binario du-

pligerunt A, B, C, D, E, ab unitate deinceps proportionales, mirum in proportionem dupla. Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, utpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Quod etiam idem numeri sint pariter pares tantum, liquum constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab unitate continue proportionales, sequetur A, proximus unitati numerus primus, nempe binarius, nullus alius quolibet ipsorum metietur, praeter ipsos A, B, C, D, E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

HINC cum Arithmetice facile colligimus artem, qua omnes numeros inspicimus, qui sint pariter pares tantum. Sint

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128. H, 256. I, 512. J, 1024. K, 2048. L, 4096. M, 8192. N, 16384. O, 32768. P, 65536. Q, 131072. R, 262144. S, 524288. T, 1048576. U, 2097152. V, 4194304. W, 8388608. X, 16777216. Y, 33554432. Z, 67108864. AA, 134217728. AB, 268435456. AC, 536870912. AD, 1073741824. AE, 2147483648. AF, 4294967296. AG, 8589934592. AH, 17179869184. AI, 34359738368. AJ, 68719476736. AK, 137438953472. AL, 274877906944. AM, 549755813888. AN, 1099511627776. AO, 2199023255552. AP, 4398046511104. AQ, 8796093022208. AR, 17592186044416. AS, 35184372088832. AT, 70368744177664. AU, 140737488355328. AV, 281474976710656. AW, 562949953421312. AX, 1125899906842624. AY, 2251799813685248. AZ, 4503599627370496. BA, 9007199254740992. BB, 18014398509481984. BC, 36028797018963968. BD, 72057594037927936. BE, 144115188075855872. BF, 288230376151711744. BG, 576460752303423488. BH, 1152921504606846976. BI, 2305843009213693952. BJ, 4611686018427387904. BK, 9223372036854775808. BL, 18446744073709551616. BM, 36893488147419103232. BN, 73786976294838206464. BO, 147573952589676412928. BP, 295147905179352825856. BQ, 590295810358705651712. BR, 1180591620717411303424. BS, 2361183241434822606848. BT, 4722366482869645213696. BU, 9444732965739290427392. BV, 18889465931478580854784. BV, 37778931862957161709568. BW, 75557863725914323419136. BX, 151115727451828646838272. BY, 302231454903657293676544. BZ, 604462909807314587353088. CA, 1208925819614629174706176. CB, 2417851639229258349412352. CC, 4835703278458516698824704. CD, 9671406556917033397649408. CE, 19342813113834066795298816. CF, 38685626227668133590597632. CG, 77371252455336267181195264. CH, 154742504910672534362390528. CI, 309485009821345068724781056. CJ, 618970019642690137449562112. CK, 1237940039285380274899124224. CL, 2475880078570760549798248448. CM, 4951760157141521099596496896. CN, 9903520314283042199192993792. CO, 19807040628566084398385987584. CP, 39614081257132168796771975168. CQ, 79228162514264337593543950336. CR, 158456325028528675187087900672. CS, 316912650057057350374175801344. CT, 633825300114114700748351602688. CU, 1267650600228229401496703205376. CV, 2535301200456458802993406410752. CW, 5070602400912917605986812821504. CX, 10141204801825835211973625643008. CY, 20282409603651670423947251286016. CZ, 40564819207303340847894502572032. DA, 81129638414606681695789005144064. DB, 162259276829213363391578010288128. DC, 324518553658426726783156020576256. DD, 649037107316853453566312041152512. DE, 1298074214633706907132624082305024. DF, 2596148429267413814265248164610048. DG, 5192296858534827628530496329220096. DH, 10384593717069655257060992658440192. DI, 20769187434139310514121985316880384. DJ, 41538374868278621028243970633760768. DK, 83076749736557242056487941267521536. DL, 166153499473114484112975882535043072. DM, 332306998946228968225951765070086144. DN, 664613997892457936451903530140172288. DO, 1329227995784915872903807060280344576. DP, 2658455991569831745807614120560689152. DQ, 5316911983139663491615228241121378304. DR, 10633823966279326983230456482242756608. DS, 21267647932558653966460912964485513216. DT, 42535295865117307932921825928971026432. DU, 85070591730234615865843651857942052864. DV, 170141183460469231731687303715884105728. DW, 340282366920938463463374607431768211456. DX, 680564733841876926926749214863536422912. DY, 1361129467683753853853498429727072845824. DZ, 2722258935367507707706996859454145691648. EA, 5444517870735015415413993718908291383296. EB, 10889035741470030830827987437816582766592. EC, 21778071482940061661655974875633165533184. ED, 43556142965880123323311949751266331066368. EE, 87112285931760246646623899502532662132736. EF, 174224571863520493293247799005065324265472. EG, 348449143727040986586495598010130648530944. EH, 696898287454081973172991196020261297061888. EI, 1393796574908163946345982392040522594123776. EJ, 2787593149816327892691964784081045188247552. EK, 5575186299632655785383929568162090376495104. EL, 11150372599265311570767859136324180752990208. EM, 22300745198530623141535718272648361505980416. EN, 44601490397061246283071436545296723011960832. EO, 89202980794122492566142873090593446023921664. EP, 178405961588244985132285746181186892047843328. EQ, 356811923176489970264571492362373784095686656. ER, 713623846352979940529142984724747568191373312. ES, 1427247692705959881058285969449495136382746624. ET, 2854495385411919762116571938898990272765493248. EU, 5708990770823839524233143877797980545530986496. EV, 11417981541647679048466287755595961091061972992. EW, 22835963083295358096932575511191922182123945984. EX, 45671926166590716193865151022383844364247891968. EY, 91343852333181432387730302044767688728495783936. EZ, 182687704666362864775460604089535377456991567872. FA, 365375409332725729550921208179070754913983135744. FB, 730750818665451459101842416358141509827966271488. FC, 1461501637330902918203684832716283019655932542976. FD, 2923003274661805836407369665432566039311865085952. FE, 5846006549323611672814739330865132078623730171904. FF, 11692013098647223345629478661730264157247460343808. FG, 23384026197294446691258957323460528314494920687616. FH, 46768052394588893382517914646921056628989841375232. FI, 93536104789177786765035829293842113257979682750464. FJ, 187072209578355573530071658587684226515959365500928. FK, 374144419156711147060143317175368453031918731001856. FL, 748288838313422294120286634350736906063837462003712. FM, 1496577676626844588240573268701473812127674924007424. FN, 2993155353253689176481146537402947624255349848014848. FO, 5986310706507378352962293074805895248510699696029696. FP, 11972621413014756705924586149611790497021399392059392. FQ, 23945242826029513411849172299223580994042798784118784. FR, 47890485652059026823698344598447161988085597568237568. FS, 95780971304118053647396689196894323976171195136475136. FT, 191561942608236107294793378393788647952342390272950272. FU, 383123885216472214589586756787577295904684780545900544. FV, 766247770432944429179173513575154591809369561091801088. FW, 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176. FX, 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352. FY, 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704. FZ, 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408. GA, 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816. GB, 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632. GC, 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264. GD, 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528. GE, 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056. GF, 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112. GG, 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224. GH, 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448. GI, 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896. GJ, 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792. GK, 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584. GL, 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168. GM, 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336. GN, 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672. GO, 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344. GP, 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688. GQ, 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376. GR, 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752. GS, 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504. GT, 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008. GU, 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016. GV, 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032. GW, 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064. GX, 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128. GY, 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256. GZ, 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512. HA, 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024. HB, 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048. HC, 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096. HD, 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192. HE, 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384. HF, 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768. HG, 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310975536. HH, 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621951072. HI, 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243902144. HJ, 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487804288. HK, 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975608576. HL, 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951217152. HM, 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902434304. HN, 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551804868608. HO, 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103609737216. HP, 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207219474432. HQ, 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414439548864. HR, 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828879097728. HS, 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657758195456. HT, 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315516390912. HU, 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631032781824. HV, 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262065563648. HW, 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524131127296. HX, 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048262254592. HY, 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096524509184. HZ, 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193049018368. IA, 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600386098036736. IB, 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200772196073472. IC, 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401544392146944. ID, 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803088784293888. IE, 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606177568587776. IF, 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212355137175552. IG, 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424710274351104. IH, 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849420548702208. II, 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945698841097404416. IJ, 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891397682194808832. IK, 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782795364389617664. IL, 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565590728779235328. IM, 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131181457558470656. IN, 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262362915116941312. IO, 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524725830233882624. IP, 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049451660467765248. IQ, 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466098903320935530496. IR, 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932197806641871060992. IS, 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864395613283742121984. IT, 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728791226567484243968. IU, 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457582453134968487936. IV, 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915164906269936975872. IY, 463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830329812539873951744. IZ, 926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660659625079747903488. JA, 1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321319250159495806976. JB, 3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642638500318991613952. JC, 74106937111882365071085430405560261026092

nentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum
infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum in-
niri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, ex-
tra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter, par tan-
tum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par:
(Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur
binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem;
Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: pon-
itur namque pariter par tantum) cuius rursus dimidia pars
sit I. Erit igitur rursus I, par numerus: (Nam si est im-
par, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4.
ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ebid G, pariter
impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par
tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia partis di-
midia pars numerus par; donec ad unitatem veniamus. Sit
ergo iam ipsum I, dimidia pars unitas, u. a. sit I, binarius.
Igitur H, G, sunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit ali-
quis ex ordine ipsorum A, B; C, D, E, F. ponitur autem, non es-
se. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tan-
tum, præter eos, qui a binario sunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33.

36.

SI numerus dimidium habeat impa-
rem: Pariter impar est tantum.

HABET A T numerus A, dimidiam partem numerum
imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod
enim sit pariter impar, ita perspi-
cuum fiet. Quoniam A, dimi-
dium habet imparem; metietur
binarius, numerus par ipsum A, per illam dimidiam im-
parem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod
autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo de-
monstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, bina-
rius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit
quoque pariter par. Quare cum metietur aliquis par nu-
merus per partem numerum. Metietur cum D, par per par-
tem

9. *prop.* rem E. Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, etas dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius partem D. Igitur & E, ipsum B, metitur, pariter partem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter partem. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

19. *septimi*

A
B C
D E

SCHOLION

ITAQUE si omnium numerorum imparium dupli fiantur, inveniuntur omnes numeri, qui sunt pariter impari tantum. Quod

Impares . . . 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. enim quilibet

Pariter impari . . . 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30. illorum fit pariter impari

tantum, constat

ne; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec a binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius possit habere dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter partem tantum, vel certe pariter partem & pariter imparem.

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

Si par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

¶ P A R. numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat A parem, metietur eum binarius, per numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

¶ Q U O D autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendamus. Diviso A, bisariam, & eius dimidio rursus bisariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nā si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cū in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impari in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

29. noni.

SCHOLIUM.

FACILE ex dictis imponimus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidius habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

P O R R O ex proximis tribus theorematibus aperta intelliguntur ea, quae in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35.

38.

S I sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundis

T: do,

do, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, ultimo detrahatur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse ut B G, ad

A
B G C
D
E K I H F

A
B G C
D
E K I H F

A, ita E H,
ad A, B C,
& D, simul.
Detrahatur
F I, ipsi B C,
& F K, ipsi
D, æquales.
Quoniam igitur
F I, æqualis est ip
si B C, & ab

latus F H, ablato C G, erit & reliquus I H, reliquus B G, æqualis. Quia uero est ut A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque ut E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æquales: Erit quoque ut E F, ad A, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur ut E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul. (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) ut I H, ad H F, hoc est, ut B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsi I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

12. septimi

SCHOLIION.

Ex hoc theoremate veniens in notitiam summa quotcunque numerorum continue proportionalium, si modo primi, secundus, & ultimus fuerint noti. Cum enim sit excessus secundi ad primum, ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & ultimo dematur, fiatque ut reliquus

quis secundus ad primum, ita reliquus ultimus ad alium. Et
hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui
ultimum antecedunt.

Si igitur adiciatur ultimus, habebitur tota

summa. Invenitur autem quartus ille proportionalis, si pri-
mus multiplicetur in excessum ultimi, & productus divida-
tur in excessum secundi. Id quod ex regula proportionum
apud Arithmeticos manifestum est. Vnde exemplo apposto,
si primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. secundo,
& ex 2187. ultimo, erunt reliqui excessus 2.2186. Quoniam
igitur debet esse ut 2. ad 1 sit ut 2186 ad summam omnium, ex-
cepto ultimo; si 2. multiplicetur per 2186, fiet numerus 2186
qui si dividatur in 2. exiet numerus 1093. Videlicet summa
omnium, excluso ultimo 2187. qui si addatur summa numerus
1093. procreabitur summa omnium 3280.

THEOR. 34. PROPOS. 36.

39.

SI ab unitate quotcumque numeri dein-
ceps exponantur in dupla proportionem,
quoad totus compositus fiat primus; & to-
tus hic in ultimum multiplicatus faciat ali-
quem: Factus erit perfectus.

SI N T ab unitate quotcumque numeri A, B, C, D, du-
pli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, mul-
tiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerum perfe-

Unitas . A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.

E, 31. G, 62. H, 124. I, 248. F, 496.

K, 992. M, 1984. L, 3968. N, 7936.

O, 15872. P, 31744.

Sum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot suntantur
ab E, dupli, nempe E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, can-

T: 2 dem

19. septimi. detur rationem habent, quem E, G, H, I; erit ex quo, ut A, ad D, ita B, ad I; Ac propter numerum factum ex A, primo in I, quantum equalis est facto ex D, secundo in E. tertium: Factus est autem F, ex D, in E, alpitutinem F, fit ex A, in I; ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F,

K. 12. A, 1. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 32. G, 64. H, 128. I, 256. F, 512.
K, 32. M, 64. L, 128. N, 256.
O, 512. P, 1024.

ipsum F, duplaretur. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli-
cantur: Derivabantur ex G, secundo, & ex F, ultimo numeri
K, L, primum E, æquales, sinque reliqui cuncti M, N. Ita
igitur ut M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M,
æqualis ipsi E. (cuiusmodi G, duplum sit ipsius E, ablatumque
sit A, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Er-
go & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur
æqualibus, nempe numero L, (qui æqualis est ipsi E, abla-
tus) & numero composito ex unitate, & A, B, C, D nume-
ris; (qui compositus eodem F, est æqualis) erit compositus
ex L, N, nimirum ipse F, æqualis unitati, & numeris A, B,
C, D, E, G, H, I, simul. Quare cum unitas, & omnes nume-
ri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (cum enim
F, factus sit ex E, in D, metietur D, ipsum F; atque adeo
eundem F, metietur unitas, & numeri A, B, C, ipsum D, me-
tientes. Rursus cum E, ipsum F, metiatur, ut ostensum
est; metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, ipsum I,
propter proportionem, duplam, metientes,) & nullus alius
numerus ipsum F, metiatur, ut mox ostendemus; Erunt
igitur & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas
F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F;
erit F, ex definitis perfectus. A

9. primi. Quod n. autem nullus alius numerus, præter A, B, C,
D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Me-
tiatur si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F,
per P; atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus
est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D,
quartum, & ex P, secundo in O, tertium; ac propterea est

ut B, ad P, ita O, ad D. Quoniam uero, cum A, B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus unitati, primus, ultimum D, nullus alius, præter A B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C, non metitur O, ipsum D. Ut autem O, ad D, ita erat E, ad P; Neque igitur E, ipsum P, metitur. Existente ergo E, primo, erunt E, & P, inter se primi; ideoque in sua proportionem minimi: Ac proinde æque metietur B, ipsum O, & P, ipsum D. Nullus uero alius præter A, B, C, ipsum D, metitur: Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli B, G, H. Erat igitur ex æquo, ut B, ad D, ita E, ad H; Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quantum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H; atque adeo erit. ut P, ad E, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quæ ob rem, si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportionem, &c. Quod erat demonstrandum.

19. septimi

13. octauæ

21. septimi

23. & 21.

septimi

19. septimi

19. septimi

SCHOLIUM.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab unitate dupli in unam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab unitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab unitate dupli, una cum ipsa unitate, omnes partes aliquotas, quas perfectus numerus inueniens habere potest. Quæ omnia perspecta sunt ex demonstratione theorematum, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Ut quia numerus 3, compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3 in 2. ultimus

ultimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquota sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 18. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus & non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DE N I Q V I quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquota sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inveniemus.

FINIS ELEMENTI NONI.

