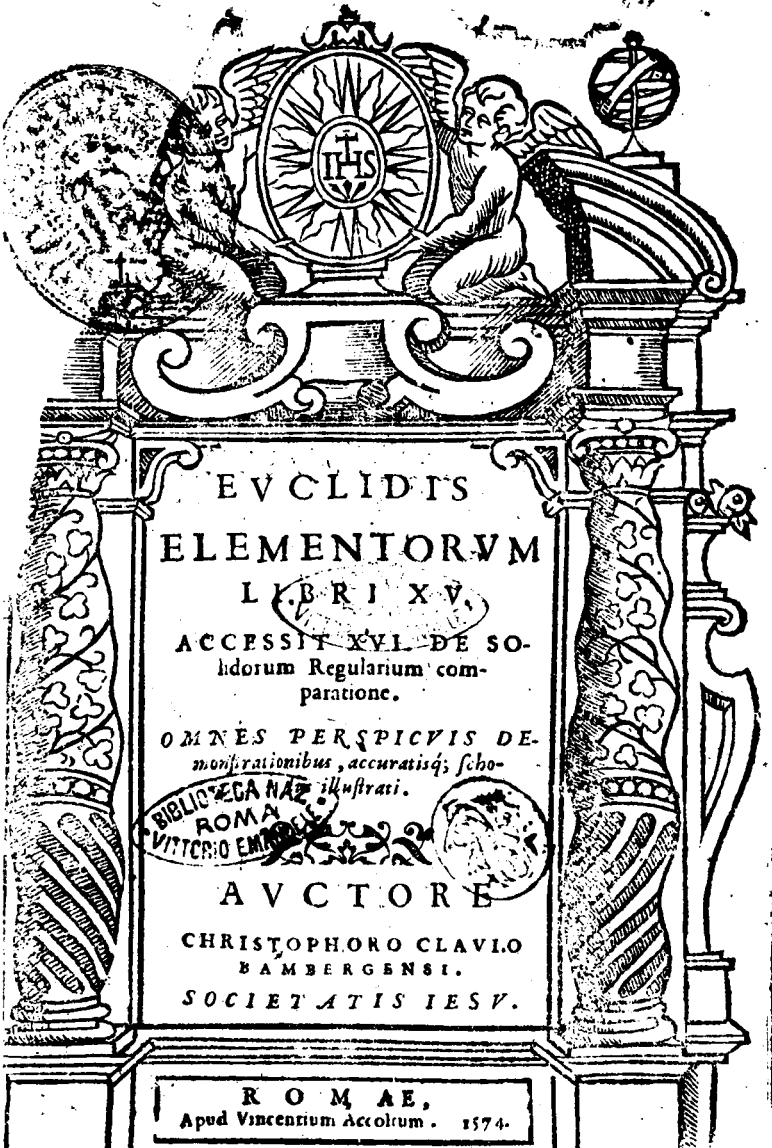
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEmonstrationibus, accuratisq; schoIIIustrati.

BIBLIOTECA NAZ
ROMA
VITTORIO EM

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI.

SOCIETATIS IESV.

ROMAE,
Apud Vincentium Accoltum. 1574.

BIBLIOTECA NAZ. VITTORIO EMANUELE ROMA

SERENISSIMO PRINCIPI, AC D. D. EMANVELI PHILIBERTO Sabaudiæ Duci.

CHRISTOPHORVS CLAVIVS SOCIETATIS IESV, S. P. D.

ROMA VITTORIO EMANUELE

EST profecto (quod te non fugit) Princeps Serenis. præclara quædã res, ac plane diuina, rerum cognitio, quæ merito in optimo quoq; incredibile sui desideriũ excitat, quo fa-

 ignorus hæc hominũ breuis, & calamitosa uita,

ignorantiæ quasi tenebris dissectis, & ad exitum ipsa suum perueniat, & omnia quæ accidere possunt, incommoda leuiora ducat. Ac si ea quæ sunt a summis philosophiæ principibus de liberalium artium dignitate vere ac sapienter scripta, falsa esse non credimus, nemini dubium esse potest, quin & rerum obscuritate, & incerta cognitione, mirum in modum minuatur illa siue uoluptas siue animi iucunditas appellanda est, quæ ex ipsa alioqui rerum contemplatione percipi solet. Equidem fateor (quod summo uir ingenio dixit Aristoteles) eximiam quandam esse in naturæ peruestigatione positam delectationem, rerumque naturalium scientiam, multis philosophiæ partibus nobilitate præcellere: Sed quis non uideat in tanta opinionum varietate, quarum (cum sit unica veritas) aut non plus una uera, aut omnes falsas esse necesse est, multum uel inconstantiæ, uel errori relictum esse loci, quo quidem nihil esse potest a scientia magis alienum? Quod si (ut est apud eundem peripateticæ disciplinæ principem) doctrinarum nobilitas tum ex rerum dignitate, tum ex elaborata probandi ratione pendet, quid de mathematicis disciplinis existiman-

ſtimandũ eſt, quæ ut de rerũ præſtantia nihil dicam, tantam habent ſuis in rationibus firmitatem, ut non tam perſuadere, quam uim quodammodo afferre uideantur. Quotus enim quiſque eſt, qui Archimedis, & Apollonij, cæterorumque Mathematicorum libros legens acutiſſimorum hominum non admiretur ingenia, & menti ſuæ firmiſſimas quaſdam quaſi machinas admoueri non ſentiat, ut ijs quæ illi tradunt, uel inuitus aſſentiri cogatur? Qua quidem ex re dici uix poteſt, quantam animus noſter capiat uoluptatem, dum ita in ſententia perſtat, remque omnem plane percipit, ac tenet, ut neutram in partem dubius inclinet, nuſquam fluctuet, nedum falſis opinionibus imbuatur. Cuius ſane tam certæ tamque accuratæ ſcientiæ, cum ſolum ac fundamentum Euclidis, quæ dicuntur, elementa communi omnium Mathematicorum conſenſu exiſtimentur; Tantam profecto ſummus ille vir apud poſteros laudem meretur, quanta optimo in primis diligentiſſimoque magiſtro, atque ipſi etiam primo artis inuentori iure debetur. Quo magis eorum probanda uidetur induſtria, qui in his ipſis elementis aut explicandis, aut illu-

BIBLIOTECA NAZ ROMA VITTORIO EMANUELE

ſtrandis ſtudium, atque operam collocant, ut quanto hæc mathematicarum diſciplinarum initia aut faciliora, aut firmiora fuerint, tanto quæ conſequuntur omnia planius cognoſcantur: Quæ cum ego multos annos partim publice docendo, partim priuatim commentando, & cum alijs viris doctis communicando diligentius pertractaſſem, collegiſſemque (ut fere fit) in meum priuatum uſum nonnulla, quæ ad eorum cognitionem facere uiderentur, faciendum mihi neceſſario exiſtimaui, præſertim auditorum, amicorumque meorum precibus fatigatus, præterea Laurentij Caſtellani ciuis Romani liberalitate inuitatus, qui oēs ad id neceſſarios ſumptꝰ benigne admodū ſuppeditauit, ad publicā ſtudioſorum utilitatē, in lucem manusque hominum exire permitterem. Tibi uero potiſſimū Princeps Sereniſſ. has meas lucubrationes dicaui, primum quod tibi Mathematicorum omnium eximio patrono hæc noſtra maxime ſtudia cordi eſſe intelligebam; deinde quod pro tua in noſtrū ordinem uniuerſum ſingulari beneuolentia, atque promeritis aliquod tibi grati animi indicium extare ſocietas noſtra uehementer optabat. Huc accedebat priuatum etiam

ſtudium

ſtudium in te meum, quod ab humanitate tua ſingulari, oratorisque tui Vincentij Parpaleæ viri ampliſſimi beneuolentia prouocatus, nihilo tibi minus ego ſum priuatim obſtrictus, quam publice Societas noſtra vniuerſa. Accipe igitur hoc tenuitatis noſtræ munuſculũ, ſi rem ſpectes, exiguum illud quidem, & meritis tuis longe impar; ſin animum intuearis, amoris & obſeruantiæ pleniſſimum. Quod ſi tibi gratum iucundumq; accidiſſe cognouero, cum ſatis amplam laboris mei mercedem ac præmium me tuliſſe exiſtimabo, tum vero ad alia eiuſdem generis commentanda, & elucubranda, ſi otium & occaſio ſe offeret, efficiar alacrior. Vale.

ROMAE, KALENDIS FEBR.

M. D. LXXIIII.

LECTORI S.

SIQVIS *forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis elementa Geometrica commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi cõmentationes conscripserimus, is facile sibi persuadebit, non temere id a nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa, diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse utilitatem, atque adeo necessitatẽ horum elementorum, ut frustra quisquam sperret ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolomæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; uehementer dolebamus, tam insignem, & illustrem auctorem a plerisque omnino negligi, a perpaucis uero pro dignitate tractari, ita ut uix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulá operá, ac studiũ in perdiscendis his elementis ponant, ob eam potissimum, ut arbitror causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullúq; habeant hac in re ducẽ, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile consequen-*

ſequendam horum elementorum doctrinam : Sed alter ſecutus in omnibus eſt traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum perueterunt, uerbaque propoſitionum eiuſdem locis non paucis immutarunt, ut uerus, germanuſque auctoris ſenſus perdifficile poſſit intelligi; id quod maxime in decimo libro perſpicitur: Alter (Theonem intelligo) pene innumeris mendis, uitijſque incuria librariorum ita eſt deprauatus, & propter notas græcas, quæ in eius demonſtrationibus adhibentur, obſcuras illas, ac male expreſſas adeo impeditus, ut magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemque gignat. Quo fit, ut Euclidem ſine maximo labore, ac ſtudio nemo percipiat. Iam ſi alij ad noſtram uſque memoriam maius aliquod ſtudium, operamque in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi uel ſex priores tantum libros expoſuerunt, uel ſi qui in uniuerſum Euclidem commentarios ediderunt, hi perſæpe, relictis antiquorum demonſtrationibus certiſſimis, (Federicum tamen Commandinum Vrbinatem Geometram peritiſſimum excipio, cuius opera, atque diligentia Euclides latine redditus, & in priſtinum nitorem, iuxta ueterum interpretum ſenſum, ac traditionem, reſtitutus, nuper demum prodijt in lucem,) proprias alias, ac nouas conſixerunt, quæ plerunque non tam firmæ ſunt, neque rem ipſam ſimpliciter, & abſolute conficiunt; præſertim quod modo e propoſitionibus uoces quaſdam perperam detrahit, modo alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, ut merito de uero, proprioque Euclidis ſenſu dubitare quis poſſit. Quæ cum ita ſint, reliquæ

reſque ac ſcientia tam præclara digna ſit, quæ ope, ſtudio, induſtria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre poſſunt poſt diuturni temporis in rebus mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, ut lucubrationes noſtras, ac vigilias ſtudioſis harum rerum nonnihil (niſi fallimur,) ſubſidij allaturas, in publicum ederemus. Acceſſit editionis cauſa altera: Nam cum Euclides, propter ſingularem utilitatem, inſtar enchiridij, manibus ſemper debeat circumgeſtari, neque unquam deponi ab his, qui fructum aliquem ſerium ex hoc ſuaui Matheſeos ſtudio capere uolunt, in eoque progredi; id uero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impreſſis, necdum factum uideamus; hoc noſtra editio certe, ſi nihil aliud, attulerit commodi, atque emolumenti. Sūt enim hi noſtri commentarij in uniuerſum Euclidē conſcripti commodiore nunc forma, quam uulgo cæteri, (id quod magnopere a nobis, qui nos audierunt, eflagitabant,) uolumineq; editi, ut facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, uia, ac ratione res tota a nobis pertractetur, quidque in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti quidam aſſeuerant, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, uel certe planiores, quando illud non potuimus, delucidioreſque reddere conati ſumus. Non enim illas nude, ac totidem uerbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, ut illud accidat, quod ab

elegan-

elegantissimo poeta dictum est. Breuis esse laboro, obscurus fio: Interdum etiam, cum breuius, atq; suc cinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quam satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare utrunque uitantes, eas, uelut παραφραστικῶς, atq; ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publice Euclidem interpretaremur, obseruauimus: hac etiam re auditorum desiderio, & uoluntati, quantum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius a studiosis, ijs præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primum auspicantur, ac maiore uoluptate, utilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis uaria problemata, ac theoremata, scitu non iniuncunda, neque a scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, alijsque auctoribus decerpsimus, partim proprio (ut aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligẽs opera, ut definitionẽs Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid uisæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam, incidentes, a recto cursu deflexerunt, & in errores uarios, atque absurdos, prorsumque ab instituto disciplinæ abhorrentes, dilapsi sunt.) dilucide, atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile indicabunt. Quæ res cum in amplioré magnitudiné extresceret, quam ut unius libri spatijs, hac præsertim forma, commode includi possent, in duas partes totam tractationem diuisimus. Altera nouem prioribus libris continetur: altera sex reliquos, una cum decimosexto ad comparationes

quinque

quinq; corporũ regulariũ pertinente, quem ex Francisco Flussate Candalla adijcere uoluimus, cõplectitur. Nunc, quia hæc Euclidis elementa ostium, atque aditum ad omnes alias scientias Mathematicas reserant ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, unde nam Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint; quæ sit earum diuisio; a quibus primum ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ; quanta sit illarum præstantia, atque utilitas, & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

MATHE-

MATHEMATICÆ DISCIPLINÆ CVR SIC DICTÆ SINT.

DISCIPLINÆ *Mathematicæ, quæ quidē circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt a dictione græca μαθημα, siue μαθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, aut doctrinæ inter reliquas omnes sola sine adepta, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam, ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen christianæ fidei falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, quā anima nostra (ut eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit puerum quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio respondent, ut puer, gradatim tamen ascendens eo deductus est, ut responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diuinissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi uendicare, quod solæ modum, rationemque scientiæ retinerent. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, ut & Aristoteles testatur; neque unquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere uolunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud uero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem aliæ artes, disciplinæue nō sem per obseruare uidemus, cum plerunq; in confirmationem eorum, quæ ostendere uolunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstrationesue, adducant.*

1. poster.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM DIVISIO.

PYTHAGORAE, quos deinde secuti sunt omnes prope modum Mathematici, atq; Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas uniuersas in quatuor partes distribuerunt, Aritmethicam, Musicam, Geometriam, & Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam uersantur, sit uel discreta, sub qua omnes numeri, uel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & utraque tum secundum se, quam comparatione alterius passit considerari, Visum fuit illis consentaneum, quatuor predictas facultates instituere, quæ utranque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accurate explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eadem quantitatem discretam, sine numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniã. Geometria de magnitudine siue quantitate continua, secundũ se quoq; ut immobili existit disputax. Astronomia de eadẽ magnitudine, ut est mobilis, considerat, qualia sunt cælestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad hæc autem quatuor scientias Mathematicas, quarũ Arithmetica, & Geometria pura, Musica uero, atq; Astronomia mixtæ dicunt, ceu alie quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & cæteræ huiusmodi, uel facile, ut ad capita, a quibus dependent, reduci possunt.

ALIA rursus a Gemino antiquo Geometra, & ab aliis, ut auctor est Proclus in cõmentarijs, quos in primũ Euclidis librũ edidit, Mathematicæ disciplinæ diuidunt. Quãquidẽ diuisionẽ, quoniã elegãter, copioseq; docet, ad quanã sese extendãt Mathematicæ disciplinæ, ferme ad uerbũ ex Proclo iuxta interpretationẽ Francisci Burocij Patricij Veneti excerpta hic subijcere statui. Volui itaq; predicti auctoris, scireiarũ Mathematicarũ quasdã in intellectilibus dumtaxat ab omni materia separatis, quasdam uero in sensilibus, ita ut attingant materiam sensibus obnoxiam, uersari. Priori generis statuunt duas longe primas, precipuasq; scientias, Arithmeticam, & Geometriam: In posteriori uero genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicã sive Musicam, Supputatricẽ, atq; Mecha-

Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ
le mundanis edisserit motibus, de corporum cælestium magnitu
inibus, figuris, & illuminationibus, a terraque distantijs, ac de
lijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur par-
s; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonij,
xercetur: Metheoroscopica, quæ elevationum differentias, sy-
erumq; reperit distantias, nec non multa alia, & varia Astro-
gica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum,
eterarumque stellarum distantias huiusmodi dioptricis di-
noseis instrumentis. Perspectivam aiunt a Geometria gigni,
que uti radijs visorijs, tanquam lineis, et angulis, qui ex hisce
onstituuntur oculorum radijs. Dividitur autem in eam, quæ
roprio nomine dicitur Perspectiva, quæ quidem reddit causas
rum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, se se nobis of-
rre soleant, ob eorum, quæ sub visum cadunt, alios situs, & di
lantias, vt parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tan
uam circularum, aspectionis: Et in vniversam speculatam,
uæ circa varias, multiplicesque versatur refractiones: Nec
on in eam, quæ Sciographice, hoc est, umbrarum designatrix
pellatur, qua ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in
aginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob dese-
ratorum distantias, altitudinesque videantur. Geodæsiam
pellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materia
um rerum acervos, tanquam conos, & puteos, tanquam cylin-
os. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis,
Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certiori-
s quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassio-
bus, vt sparsis, & perpendiculo. Dividitur hæc, ut Geome-
ia, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimeti
r. Canonicam, sive Musicam, vocant eam scientiam, qua
parentes concentuum considerat rationes, sensusque ubique
itur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, ut
nti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem
ud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hac enim
meros considerat, non vt in intellectilibus, sed vt sunt in sen
ibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sen
ium, materiaque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex
. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανο-
ικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis ido-
nea,

nea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra, marique obsidentibus resistentia; Quedam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ dicitur, quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur; alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status vero æquilibrium esse causam censendam est, vt Timæus etiam determinauit; alia vero nervis, spartisque animatas convolutiones, ac motus imitantibus: Quadam est æquilibrationem omnino, & earum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quedam denique sphæralium effectrix, quæ σφαιροποιϊκὴ appellatur, ad cælestium circumvolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atque ut vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasque pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij volunt, sed vsi eam volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, vt in dimidendis, dimetiendisque castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neque Historicam, neque medendi artem Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam Medici Mathematicis vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitusve colligendo: Medici vero, quamplurimas res in arte sua huiusce modi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, qua in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisque dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem velens eam, que numerosa est, pauciſſimam ostendere multitudinem, castra, suosque exercitus ad figuram circuli formet; interdum uero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur fere sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarū partitione reliquerunt.

INVEN-

INVENTORES MATHEMATICARUM DISCIPLINARUM.

OMNES *disciplinas Mathematicas a uarijs, & diuersis auctoribus ortum, originemque duxisse, perspicue historiæ testantur: Immo uero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atque commertia, ut auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq; successores, nec non Aegyptij, Græci denique ac Arabes amplificarunt, uarijsque problematis, atque theorematis illustrarunt. Musicam deinde a Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt; quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri, & Lino; Linus uero Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra usque tempora manauit. Geometria uero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumque habuit ab agrorum emensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, uastaretque, ut nemo agrum dignoscere posset suum, cæperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, ut hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata.* γεωμετρέομαι *enim, siue* γεωμετρέω *idem significat, quod, terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria capta est expoliri, & non contenta suis finibus, se se ad corpora etiam cælestia dimetienda conuertit, traditiq; principia uniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quam plurimis, quæ ex ipsa, ueluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi, ac Mathematici plurimi, acutissimisque demonstrationibus locupletarunt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex ueteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theo*

dorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumãs: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse uolunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) syderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientia faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, ut est præstantissima, ita quoque maxime illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Caterum, præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipsis, tanquam riuuli ex fonte, derivatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS, ATQVE PRAESTANtia Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque ulla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, ut recte a Proclo probatur. Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si uero nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda, haud dubie Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque

firmantque, ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant; Id quod aliis scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorũ sectæ, (vt alios interim philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami e trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnunquam a fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quid nam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe a Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiã esse digniorem, præstantioremque, quæ magis synceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEmaticarum disciplinarum.

NON solum vtiles, verumetiam necessaria admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfectè perdiscendas, tum ad rem etiam publicam rectè instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicã, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemq;

noſtri intellectus attollere abſque ullo medio tentemus, noſmetipſos excæcabimus, non ſecus, ac ei contingit, qui è carcere aliquo tenebricoſo, in quo diu latuit, in lucem Solis clariſſimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus phyſicis, quæ materiæ ſenſibus obnoxiæ ſunt coniunctæ, ad res metaphyſicas, quæ ſunt ab eadem maxime auulſæ, intellectus aſcendat, neceſſe eſt, ne harum claritate offundatur, prius eum aſſuefieri rebus minus abſtractis, quales a Mathematicis conſiderantur, vt facilius illas poſſit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas diſciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationẽ exacuere mentis aciem affirmat. Quantum vero emolumenti hæ diſciplinæ ad ſacras literas rectè percipiendas, interpretandasque conferant, multis uerbis pulcherrime nobis exponit B. Auguſt. lib. 2. de Doctrina Chriſt. demonſtrans, numerorum inſcitia multa non intelligi a multis, quæ translate, ac myſtice poſita ſunt in ſcripturis: Cuius rei exempla non pauca in medium adducit; eandemque ſententiam longe poſt pluribus uerbis repetit eodem lib. Hoc idem docet D. Hieron. tomo 1. Epiſt. 1. aſſerens, magnam ineſſe numeris uim ad multa myſteria in ſcripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis utilitatem, perhibet. Rurſum B. Auguſt. loco, quem paulo ante retuli, teſtatur, Muſicam perneceſſariam eſſe doctori Chriſtiano, ſubiungens paulo poſt, Theologos debere etiam Geographia diligenter eſſe inſtructos. Quod non ignorans D. Gregorius Nazianzenus, ſummis laudibus D. Baſilium præceptorem ſuum extollit, quod in Aſtrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque ſcientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter verſatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philoſophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, ut perſpicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philoſophorum, maxime Ariſtotelis, & Platonis, quos merito duces nobis ſequendos ad bene rectèque philoſophandum proponimus, eorumque fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, ut ea, quæ alioquin multis obſtructa difficultatibus uidebantur eſſe, per exemplа huiuſmodi clariora, magisque perſpicua fierent; quæ proculdubio nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathematica-

Cap. 16.

Cap. 37.

Cap. 16.

Cap. 19.

maticarum omnino est expers. Quid? quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (ut copiose scribit (non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, uerum etiam ad remp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeo, ut etiam si nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidē experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contra uero, eos qui ad hasce facultates idonei minime reperiūtur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Tymæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes utilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusq; animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque versari solebant: Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus per-

cipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab alijs studijs excæcatur, defoditurque, a Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum philosophorum, quibus harum disciplinarum utilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque præstantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS, ATQVE GEOMETRIÆ commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (ut aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq; Geometria uniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, ut testatur uulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit a se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq; (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de uitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad. lib. 2. ubi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, a quo idem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset unum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum a Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq; tempore Ptolemæi primi, qui AEgypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cæpit imperare, ut Ioannes Lucidus refert. Quod quidem uerius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici

Megarici diligentiſſime enumerans, nullam prorſus faciat mentionem huius celeberrimi uoluminis de Geometricis elementis conſcripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam ſibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum eſt, Diogenem in monimentis philoſophorum exercitatiſſimum, hoc tam inſigne opus uel ſcientem uoluiſſe præterire, uel ab Euclide ſuo eſſe compoſitum, ignoraſſe. Itaque Euclides noſter, Geometra acutiſſimus, ab illo Megareo philoſopho longe alius eſt, qui, cum in doctrina Academicorum eſſet ſummacũ laude uerſatus, animum totum ad Mathematicas diſciplinas tranſtulit, in quibus ita excelluit, ut concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos ſibi locum iure optimo uendicarit. Scripſit autem uolumina ad rem Mathematicam ſpectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admiranda doctrina facile elucet: qualia ſunt eius Optica, Catoptrica, Elementares inſtitutiones ad Muſicam capeſſendam pertinentes, Phænomena, atq; Datorum liber, opus de Diuiſionibus, quod nonnulli ſuſpicantur eſſe libellum illum acutiſſimum de ſuperficierum diuiſionibus, Machomero Bagdedino aſcriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinenſis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem eſt editus. Conſcripſit item conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuſcula. Maxime uero hoc uolumen elementorum Geometricorum nunquam omnium conſenſione ſatis laudatum tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, ut nullus unquam eorum, qui ſimilia conſcripſerunt elementa (conſcripſerunt autem, ut ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipſum ſuperarit. In quo quidem, ut ſummum ingenij acumen demonſtrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in uulgus edenda, ſed ea duntaxat, quæ uiſa ſunt eſſe neceſſaria, atque utilia, ad communem omnium utilitatem, argumentis, & rationibus firmiſſimis cenſuit eſſe comprobanda. Cæterum, quanta ſit horum Euclidis elementorum Geometricorum, ac proinde uniuerſæ Geometriæ, præſtantia, ac utilitas, partim ex ijs, quæ ante ſcripſimus, partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obſcure perſpici poteſt. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob cauſam, quod ſine ipſis nullum opus Mathematicum poſſimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere: Omnes ſiquidem Mathematicarum re-

rum scriptores, ut Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus usurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perfecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere unà, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis utitur in uocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas de sidera sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene, ac perfecte calleat prius, necesse est. Ex his etenim elementis, ueluti fonte uberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta syderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum uis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum uariarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere uarie illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machina totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, acquantitas. Ostenditur, atque demonstratur unius huius scientiæ ui cæli uniuersi, syderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, dici ac noctis, temporumque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, uarietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque uarij tam expedite cognoscuntur, ut & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis, ac Lunæ defectiones certissime, ante quem fiant, in omne posterum tempus a Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis munere, ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse uidentur, omniumq; fidē superant, perspicua facere, credibiliaq; esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historie. Cum enim Hieron Syracusarum rex nauem, quam Ptolemæo Aegyptiorum regi mittere statuerat, tanta esset molis fabricatus, ut eam omnes una Syracusii a loco dimouere minime ualerent, Archimedes Geometra peritissimus unius Geometriæ uiribus fretus regi promisit, se effecturum, ut ipsam solus rex absque ullo labore subduceret. Quod cum præstitisset, in conspectu omnium rex stupefactus exclamasse perhibetur;

hibetur; Ab hac die, quicquid dixerit Archimedes, illi tredendum est. Non dissimile huic uidetur mihi esse pulcherrimū illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro, argentoque confecta, quam rex summo studio fabricari insserat, non dissoluta, singula auri, & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime offendit. Neque silentio prætereri debet, eundem Archimedem robori, ac efficacia demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumero, iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, e loco se commouere posse. Pari ratione, datis uiribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere: Et alia id genus non solum ab Archimede, uerum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse memoriæ proditū est. Tantum denique nomen una hæc Geometria Archimedi peperit, ut Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam urbem defenderat Archimedes machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnatæ urbis direptione, ac cæde ciuium unius Archimedis saluti publico edicto caueris: quem ubi contra imperium suum, & uoluntatem a gregario quodam milite interfectum cognouit, uehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem uiuo habere non potuit. Cuius sepulchrū Cicero a se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam, utilitatemq; Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maxime illustres, nemo fine ipsis satis perspiciet, quæ sit uis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenue fatetur Galenus insignis philosophus, ac medicorum princeps, in libro, quem de libris propriis inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cum scholas Peripateticorum, ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore, studioque arripuisset, nihil fere ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimmo pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiā naturali rationi pugnantia reperisse: Ita ut ad Pyrrhoniorum

fere

fere (erant Pyrrhonij philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmetica, Geometria, Dialecticaq; (quibus artibus ab auis, & patre fuerat institutus) esset cognitione, scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & lineares demonstrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quod eius cognitio maxime sit utilis, ut alia artes facilius, & rectius percipiantur. Postremo est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quod non hæsit in exiguis, & inferioribus hisce machinis, a quibus originem traxit, sed euolauit in cœlum usque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cœlestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem, & gubernationem nostro intellectui subiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE, & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam propriè, ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria uniuersi sibi hunc scopum proponit, ut plana, aut solida nel constituas, uel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque uero mirum alicui uideri debet, quod cum tria sint genera magnitudinum, linea, superficies, & corpus, solum de duobus posterioribus extent propriæ contemplationes, ut diximus, non autē de lineis, uel etiam punctis: Non, inquam, debet uideri mirū, quoniam, ut ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras uersatur, quæ in planis duntaxat, uel etiam solidis constituunt omnes. Non enim puncta, uel linea figuram ullam constituūt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus uero, siue planis, & corporibus, solidisue maxime conueniebat, ut proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus

ribus uero quinque de solidis acutissime disputat, eorumque proprietates maxime illustres perueſtigat. Quoniam uero cum res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absque linearum commensurabilium, atque incommensurabilium notitia; Immo uero quam plurimæ magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absque earundē linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpe numero sint talia, ut ea communis, & nota mensura data metiri nequeat, ut liquido constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atque usum; idcirco ut hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiam, dimensionemque requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis disserit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorum passionibus, easque copiose, & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est perſecutus. Quamobrem totum hoc uolumen elementorum Geometricorum quindecim libris comprehensum, (quorum quidē priores tredecim sine ulla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus, posteriores uero duo a nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita ut prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes complectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis cōmensurabilibus, incommensurabilibusque disputet; Quarta denique reliquis quinque libris absolutā scientiam solidorum, siue corporum complectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, in ueſtigando eorum æqualitatem, & inæqualitatem: In quinto uero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportiones figurarum planarū discutiuntur. Quid uero Euclides in singulis alijs libris pertractet, prijs in locis exponemus.

QVID

QVID PROBLEMA, QVID THEOREma, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO *omnis Mathematicorũ diuidi tur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema uocant eam demonstrationem, qua iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum aquilaterum constitui, appellabitur huiusce modi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum aquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius utraque pars contradictionis (ut ipsi loquuntur,) est probabilis, qualis hæc est quæstio: An totum distinguatur realiter a suis partibus simul acceptis: Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat, se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum aquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, uel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non parum inter Dialecticorum, & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico utranis pars contradictionis suscepta confirmatur tantum probabiliter, ita ut intellectus cuiusque ambigat, utranam illius pars uera sit: In Mathematico uero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonstratione, ita ut nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineã perpendicularem educere, efficiet utique hoc ipsum ratione cõstanti, & euidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto uelit educere lineam non perpendicularem. Theorema autẽ appellãt eã demonstrationẽ, quæ solũ passionẽ aliquã, proprietatẽue unius, uel pluriũ simul quantitatũ perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales*

quales duobus rectis, nocabunt talē demōstrationē Theorema, quiæ nō iubet, aut docet triangulū, aut quippiā aliud construere, sed contemplatur tantūmodo triāguli cuius libet constituti passionē hanc, quod anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde a contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis utraque pars uera ut sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, ut inæquales quoq; sint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaque ut uno uerbo dicā, quæstiū illud Mathematicum cōstruere aliquid docēs, cuius etiā oppositiū potest effici, Problema: Illud uero, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuo falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo uelle angulum rectū constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, ut demonstrabitur in lib. 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendū erit. Cæterū tā problema, quā theorema dici consuenit apud Mathematicos Propositio, propterea quod utrumque aliquid nobis proponat, ut in exemplis adductis constat. Hac ideo dixerim, ut studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & ceteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (ut aliorum interim uolumina taceam,) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur, his fere uerbis: Quod faciendum erat: Theorematum uero hisce: Quod ostendendum uel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis utriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur & non una tantum, quamuis ultimus syllogismus demonstrationis solum concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, ut declarabimus in prima Euclidis propositione, nec non in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM uero ad demonstrationes problematum, atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, uel problemata minus principalia, & quæ facile ex

le ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inferuntur interdum a Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, ut breuius demonstrari possint. Vocant autẽ illa Lemmata, propterea quod solum assumantur ad alias demonstrationes, non autem de illis præcipua disputatio instituatur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac brevior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente cognitione gignatur, vt auctor est Aristoteles, atque ex assumptis, & concessis quibusdã principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autẽ scientia ex eiusdẽ Aristotelis, aliorumq; philosophorum sententia sua principia demonstret; habebunt utique & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata, ac theoremata confirment. Horum autẽ tria tantũmodo genera apud Mathematicos reperiũtur. In prima reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cũ Aristotele suppositiones, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominũ ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur petitiones, siue Postulata, quæ quidẽ adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertiũ genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ non solũ in scientia proposita, sed etiam in omnibus alijs ita manifestæ sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi videtur accõmodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles. Ad ianua quis aberrabit? Vt præclare a Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum elementorum præmisit ante demonstra-

monſtrationes ſuarum concluſionum omnia hæc principia, ut ex ipſis, quæ quidem facile a quouis intelliguntur, deducat admirandæ theoremata, quibus nemo unquam aſſenſum præberet niſi certa, ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine ſummis laudibus efferenda eſt Geometria, omnibusque ſeculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs, cuilibet quantumuis rudi & ignaro notiſſimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aſpectu ab omni ſenſu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia mira ordine, ac methodo facili, demonſtrationibusque certiſſimis ita confirmat, ut nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porro in huiuſce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide ſeruatur, ut in ipſo quidem introitu ſcientiæ proponat principia totiꝰ Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res poſtulat, ea exponat principia, quæ proprie, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum ſubiectam videntur ſpectare. Neque uero oĩa principia Geometrica ab Euclide ĩ his elementis sĩt explicata, ſed multa reliquit lectori diſquirenda, quæ tamen ex ijs, quæ tradidit ſine magno labore ac ſtudio percipi poſſunt & intelligi. Verum ne in hac quoque parte deſuiſſe uideamur rerum Mathematicarum ſtudioſis, adiunximus uarijs in locis ad principia ab Euclide poſita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime curſum demonſtrationum arbitrati ſumus retardari poſſe.

ERRATA PRIMI TOMI
SIC CORRIGITO.

Folium.	*Linea.*	*Errata.*	*Correcta.*
39. *a.*	11.	PROPOS.18.18.	PROPOS.18.19.
40. *a.*	30.	*AEC.*	*ABC.*
52. *a.*	33.	*duo arcus duo arcus.*	*duo arcus*
62. *b.*	9.	*ACDF*	*BCDF*
67. *a.*	37.	*AD*	*BC*
72. *a.*	37.	4.*primi*	14. *primi*
74. *a.*	9.	*pronitur*	*proponitur*
79. *a.*	23.	33.*primi*	30. *primi*
88. *a.*	24.	*FGE*	*EFG*
131. *b.*	8.	*AF*	*DF*
132 *a.*	15.	*eadem*	*eaſdem*
185. *a.*	22.	*figuras*	*figuras*
229. *b.*	5.	*eorum*	*earum*

INDEX PROBLEMATVM, AC THEOREMATVM, QVAE præterea, quæ continentur in Euclidis propositionibus, in his elementorum libris, demonstrantur.

IN PRIMO LIBRO.



CIRCVLVS bifariam secatur a diametro. fol. 8. b — 1
Omnes anguli recti sunt inter se æquales. 13. a — 2
Duæ rectæ lineæ spatiū non cōprehendunt. 14. a — 3
Duæ lineæ rectæ non habent unum & idem segmentum commune. 18. b — 4
Super data recta linea terminata triangulum Isosceles, & Scalenum constituere. 22. b — 5
Omne triangulum æquilaterum est æquiangulum. 27. a — 6
Omne triangulum æquiangulum est æquilaterum. 27. b — 7
Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt. 28. a — 8
Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, utrunque utrique, æqualia, habuerint uero & basim basi æqualem; æquiangula inter se erunt, & æqualia. 39. b — 9
Duæ lineæ rectæ se mutuo secantes efficiunt ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales. 36. b — 10
Quotlibet anguli circa unum & idem punctum constituti, quatuor rectis sunt æquales. 66. b — 11
Si ad aliquam rectam lineam, ad eiusque punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt. 37. a — 12

13	Si quatuor recta lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint; erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.	37.a
14	Ab vno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales.	38.a
15	Ab vno puncto ad eandem lineam rectam non possunt duci plures lineæ perpendiculares, quam una.	38.b
16	In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, uel obtusus, reliqui sunt acuti.	39.a
17	Omnes tres anguli scaleni sunt inæquales.	39.a
18	Si trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq; angulum recta linea ad basim ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento conuenit, minus vero, quod cum minori.	39.b
19	Si trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusque segmentum erit prope maius latus. folio	40.b
20	Si trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet; erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia. Quod si latera æqualia fuerint, basim quoque bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit. folio.	41.a
21	Si duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit. folio	49.b
22	Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eosdemque partes, angulos duobus rectis minores faciat; duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ inter se conuenient ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores.	49.b
23	Duæ rectæ lineæ, quæ eidem sunt parallelæ, inter se coeuntes, sunt in directum constitutæ.	51.b
24	Parallelogrammum constituere, cuius unus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.	52.a
25	Si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur faciens externum angulum æqualem duobus internis & oppositis; illa linea erit in directum ipsi lateri constituta.	53.b

Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quot ipſa eſt inter figuras rectilineas. 53.b	26
Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis æquales ſunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quos ipſa continet latera, ſeu angulos. 54.b	27
Si ſingula latera figuræ cuiuſuis rectilineæ producantur uerſus eandem partem, omnes anguli externi æquales ſunt quatuor rectis. 54.b	28
Si pentagoni ſingula latera producãtur in utranque partẽ, ita ut quælibet duo extra eoeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis. 55.a	29
Angulum rectum in tres angulos æquales diuidere. 55.b	30
Omne quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, eſt parallelogrammum. 57.a	31
Omne quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, eſt parallelogrammum. 57.a	32
Omne quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 57.b	33
In quadrato, & Rhombo anguli oppoſiti bifariam ſecantur a diametro. 58.a	34
In altera parte longiori, & Romboide anguli oppoſiti non bifariam ſecantur a diametro. 58.a	35
In quadrato, & altera parte longiori duæ diametri inter ſe ſunt æquales. 58.a	36
In Rhombo, & Rhomboide duæ diametri ſunt inter ſe æquales. 58.b	37
In omni parallelogrammo diametri ſe mutuo bifariam diuidunt. 58.b	38
Recta linea ſecans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque. Et recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, ſecat quoque diametrum bifariam. 59.a	39
A quouis dato puncto lineam rectam ducere, quæ parallelogrammum datum ſecet bifariam. 59.b	40
Inter duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem eſſe duobus rectis. 59.b	41

42 In omni figura rectilinea latera habẽtia numero paria, si quidem fuerit æquilaterum & æquiangula; erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese. 60. a

43 Parallelogramma æqualia super eandem basin, ad easdemq; partes constituta, erunt inter easdem parallelas. 61. a

44 Parallelogramma æqualia super bases æquales, & ad easdẽ partes constituta, inter easdẽ sunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non habuerint eandem basin, super æquales bases sunt constituta. 62. a

45 Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, utrumque utrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, si quidem ambo simul duobus sint rectis æquales, æqualia sunt: Si uero duobus sint rectis maiores, minus illud est, quod maiorem habet angulum: Si denique sint minores duobus rectis, maius illud est, quod maiorem angulum habet. 62. b

46 Si a quouis angulo trianguli linea recta ducatur dimidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secatur. 64. a

47 A puncto quouis dato in uno latere trianguli proposita lineã rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum. 64. b

48 Linea recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela. 65. a

49 Omne quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam dividitur, parallelogrammum est. 65. b

50 Triangula æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta. 66. a

51 Si triangulum duplam habuerit basim, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo; triangulum parallelogrammo æquale est. 66. b

52 Si parallelogrammum & triangulum æquales habuerint bases, in eisdemq; fuerint parallelis; duplum erit parallelogrammum trianguli. 66. b

53 Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basim, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem. 66. b

54 Si triangulum & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint

fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli, erit trapezium minus duplo trianguli: Si uero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.	67.a
Trapezium habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet communem cum trapezio coniungens duas parallelas, verticem uero in medio puncto lateris oppositi.	55 67.b
Dato parallelogrammo aequale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.	56 68.a
Si parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, itaus ex illis duo aduersa sint aequalia; consistens reliqua duo circa diametrum.	57 69.a
Ad datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere aequale triangulum, in dato angulo rectilineo.	58 70.a
Datis duobus rectilineis inaequalibus, excessum maioris supra minus inquirere.	59 71.a
Linearum aequalium aequalia sunt quadrata: Et quadratorum aequalium aequales sunt lineae.	60 71.b
Si in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplum erit praedicti quadrati.	61 73.a
Quadratum diametri figurae alterae partis longitudine aequalis est duobus quadratis laterum inaequalium.	62 73.b
Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint aequalia, unum duo quadrata reliquorum duorum laterum unius trianguli aequalia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.	63 73.b
Duobus quadratis inaequalibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quae & aequalia sint inter se, & simul sumpta aequalia duobus inaequalibus propositis simul sumptis.	64 74.a
Propositis duabus lineis inaequalibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor.	65 74.a
Propositis quotcunque quadratis, siue aequalibus, siue inaequalibus, inuenire quadratum omnibus illis aequale.	66 74.b
Proposito duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quae reliquo quadrato sit aequalis, ita ut tota figura composita sit etiam quadrata.	67 75.a
Cognitis duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.	68 75.a

69 In omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duabus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli dicti producantur. 75.b

IN SECVNDO LIBRO.

1 In omni parallelogrammo, circa vnum duntaxat angulum dextrum rectus sunt & reliqui circa recti necessario recti. 77.a

2 Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis. 79.b

3 Si sint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso. 80.a

4 Si linea recta secetur in quotcunque segmenta, quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. 81.a

5 Parallelogrãma circa diametrum quadrati sunt quadrata. 82.a

6 Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius dupluum est lateris huius. 83.b 208.a

7 Si tres lineæ habeant proportionalitatem Arithmeticam; rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale est quadrato lineæ mediæ. 85.b.

8 Si recta linea in partes inæquales secetur, eorum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, una cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem. 86.b

9 In omni triangulo obtusangulo, linea perpendicularis ducta ex

ex quouis acuorum angularum ad latus oppositum cadit in ipsum latus ad partes anguli obtusi protractum. 92.a	
Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, maius sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, obtusus est. 91.b	10
Linea perpendicularis ducta a quouis angulo triãguli acuãguli, vel ab angulo recto triãguli rectanguli, vel ab obtuso triãguli obtusanguli ad latus oppositũ, cadit intra triangulũ. 92.b	11
Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, minus sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, acutus est. 93.a	12
Aream cuiuslibet triãguli latera habentis data inuenire. 93.b	13
Dato excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdẽ, inuenire latus ipsius quadrati. 93.a	14
IN TERTIO LIBRO.	15
SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante est centrũ circuli. 100.a	1
Linea recta, quæ circulum tangit, in vnum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangit. 100.b	2
Si intra circulum puncta sumantur, ab eisque puncto in circulum rectæ lineæ cadentium una quidem maxima sit, vna vero minima, & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minimæ vero erit reliqua pars diametri, & aliarum maiores quidem erunt eorum, quæ propinquiores sunt æqualibus autem ab æqualibus distabunt. 103.a	3
Recta linea a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipsum circulum tangit. 109.b	4
Quotlibet anguli coniuncti æquales simul sumpti minores sunt quouis angulo acuto rectilineo. 114.b	5
Aliqua quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui, & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius. 115.b	6
Transitur a minori ad maius, vel contra, & per omnia media;	7

	mediis; & eamen non per æquales. Item reperiuntur maius hoc, & minus eodem; & eamen non æquale. 124.b. & 126.b
8	A dato puncto in circunferentia circuli rectam lineam ducere, quæ circulum tangat. 126.b
9	Lineæ rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat. 126.b
10	Propositis duobus circulis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumque tanget circulum. 126.b
11	In circulo spatii ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis spatii & anguli. 128.b
12	Si in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales, circulum, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quarum angulum; atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi poterit. 130.a
13	Segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, siue super eandem constituta, sunt similia. 132.a
14	In æqualibus circulis, inæquales anguli in æqualibus peripherijs insistunt, maior maiori, & minor minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant. 132.b
15	In æqualibus circulis anguli, qui in æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se inæquales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, siue ad centra, siue ad peripherias vtrosuis insistat. 133.a
16	Duæ rectæ lineæ, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiant, se mutuo non secantes, sunt parallelæ. 133.b
17	Lineæ rectæ, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit. 134.b
18	In æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiorem, & minor minorem; si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo; At vero si de segmentis circuli maioribus semicirculo habeatur, maior minorem, & minor maiorem. 134.a
19	In æqualibus circulis, inæquales peripherias inæquales rectas lineas subtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo; At vero si de segmentis semicirculo maioribus loquamur, minorem maior, & maiorem minor. 134.b
20	Anguli trianguli, cuius vnus duobus æqualis existit, rectus est. 136.b

Segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculum est. 126.b.	21 ð
Si angulo recto recta subtensa bifariam secetur, & ex puncto diuisionis in circulum describatur ad interuallum dimidiæ subtensæ, circulus transit per angulum rectum. 127.a.	22
Si linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum tangentis secet eum ipsa, angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulus Linea ducta circulum tanget. 127.b.	23
Si duæ rectæ inæ se secent, rectangulum sub unius segmentis comprehensum æquale sit ei, quod sub segmentis alterius cõprehenditur, rectangulo describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus. 129.b.	24 ę
Si a puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se sunt æqualia. 130.b.	25 c1
Duæ rectæ lineæ alicubi in puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter se sunt æquales. 131.a.	26
Ab eodem puncto extra circulum assumpto tantum, possunt duæ lineæ, quæ circulum tangant. 131.a.	27

IN QVARTO LIBRO.

In dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam. 133.b.	1 2
Si circulo circa triangulum descripto, centrum intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si vero in unum latus trianguli, rectangulum: si denique extra triangulum, obtusangulum. 135.b.	3
Centrum circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: circa rectangulum vero, in basis recto angulo opposium: circa obtusangulum denique, extra triangulum. 135.b.	3
Per data tria puncta non in una recta linea existentia circulum describere. 135.b.	4
Si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo quadratum inscribatur; erit quadratum circumscriptum	5

11 scriptum quadrati inscripti duplum. 137.a.

6 Super data recta linea terminata pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituere. 138.b.

7 Latus hexagoni æquale est semidiametro circuli, in quo describitur. 140.b.

8 Si in circulo ab eodē puncto inscribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum, continebit arcus inter dicta latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendo in eodem circulo, quæ unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur. 141.b.

9 Omnis figura æquilatera circulo inscripta, aut circunscripta, est quoque æquiangula. 142.a.

10 In circulo una eadem opera facilius, quam ab Euclide traditum est, pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 149.a.

11 Si bifariam sectiones laterum figuræ æquilateræ & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idē centrū habens. 143.a.

IN QVINTO LIBRO.

1 Angvlvs curvilineus rectilineo æqualis esse potest. 154.a.

2 Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & convertendo proportionales erunt. 156.a.

3 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æquemultiplices primæ & tertiæ ad secundam, & quartam magnitudines eandem habebunt rationem: Nec non æquemultiplices secūda & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ; Nec non prima & tertia ad æquemultiplices secundæ & quartæ. 166.b.

4 Æquales magnitudines ad æquales eandem habent rationem. 169.a.

5 Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam minorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam minorem

minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. 172.a.

Si prima ad secundam maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam maiorem habuerit, quam quinta ad sextam; Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. 172.a. 6 7 8

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor. 174.a. 9

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, & per conversionem rationis proportionales erunt. 175.b. 10

Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quadam habeant ad easdem eandem proportionem; & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt. 178.b. 11

Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quam duplæ reliquæ. 179.b 12

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionē, quam tertia ad quartam; habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 179.b. 13

Si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit conuertendo secunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 180.a. 14

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam. 180.a. 15

Si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque conuersim prima ad tertiam maiorem proportionem, quā secunda ad quartam. 180.a. 16

Si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque uicissim prima ad tertiam minorem proportionē, quā secunda ad quartam. 180.b. 17

Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam; habebit quoque composita prima cum secunda ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam. 180.b. 18

Si prima ad secundā habuerit minorem proportionem, quā tertia ad quartam; habebit quoq; composita prima cū secunda ad se-

ad secundam minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam . . . 181.a.

17 Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit quoque dividendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam . . . 181.a.

18 Si composita prima cum secunda ad secundam minorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit quoque dividendo prima ad secundam minorem proportionem, quam tertia ad quartam . . . 181.b.

19 Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam . . . 181.b.

20 Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam; habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam maiorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam . . . 181.b.

21 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam. Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam . . . 182.a.

22 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque minor proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam minor, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam . . . 182.b.

23 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam . . . 183.a.

24 Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitq;

sitque minor proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam minor, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam. 183.a.	7
Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum; Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum. 183.b.	25 8
Si fuerit minor proportio totius ad totum, quæ ablati ad ablatum, Erit & reliqui ad reliquum minor proportio, quam totius ad totum. 183.b.	26
Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam, & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam ultima priorum ad ultimam posteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum. 184.a.	27 01 11 21

IN SEXTO LIBRO.

PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus omnibus intermedijs, ut ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 188.a.	1 21
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut bases, eandem habent altitudinem, æquales sunt. 190.b.	2
Triangula & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, ut altitudines. 191.a.	31
Triangula & parallelogramma, quæ ita se habent inter se ut altitudines, æquales habent bases. 191.a	41
Linea recta, quæ parallela ducitur uni laterum in triangulo aufert triangulum toti triangulo simile. 193.b.	5
Si ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad eandem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandem, quam recta inter ipsas, & alterum extremum involuta: Recta	6 21

coniungens extremum unius earum cum extremo prioris linea transibit per extremum alterius lineæ . . . . . 193.b.

7 Si in triangulo quouismodi lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulũ oppositum recta educatur linea; diuidentur linea parallela, & latus dictum in eadem rationes . . . . . 194.a.

8 Recta perpendicularis, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basim demittitur, est media proportionalis inter duo basis segmenta. Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale est inter totam basim, & illud segmentum basis, quod dicto lateri adiacet . . . . . 197.a.

9 Datam rectam lineam in partes quotcunque æquales diuidere . . . . . 198.a.

10 Datam rectam lineam secare in duas partes, quæ haberent proportionem quamcunque datam . . . . . 199.a.

11 Si duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermedia sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus . . . . . 199.b.

12 Datis duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis proportione reperire . . . . . 200.b.

13 Tribus datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam . . . . . 201.a.

14 Recta linea, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circunferentiam usque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt . . . . . 201.a.

15 Data recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quã dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius . . . . . 201.b.

16 Recta linea media proportionalis est inter alias duas rectas lineas, quæ cõprehẽdũt rectangulũ quadrato illius æquale. 204.a

17 Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut est prima ad tertiam, ita est triangulum super primam descriptum ad triangulum super secundam similе, similiterque descriptum; Item triangulum super secundam ad triangulum super tertiam similе similiterque descriptum . . . . . 206.a.

18 Polygona similia, æquilatera & æquiangula diuiduntur in similia triangula, & numero æqualia, ductis e centris circulorũ ipsa circunscribentiũ ad omnes angulos rectis lineis. 207.b.

Si fue-

Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales; ut est prima ad tertiam, ita est polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum. 208.a.	19
Æqualia rectilinea similia, similiterque descripta, constituta sunt super æquales rectas lineas. 209.b.	20
Si fuerint tres rectæ lineæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia. Et si a tribus rectis lineis similia similiterq; descripta rectilinea proportionalia fuerint; ipsæ etiã rectæ proportionales erũt. 210.a.	21
Triangula, quæ unum angulũ uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam. 211.a.	22
Proportionem ex duabus proportionibus, uel pluribus componere. 211.b.	23
Proportionem minorem ex maiori auferre. 211.b.	24
Triangula; quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur. 212.a.	25
Parallelogramma inter se æquiangula eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa. 212.a.	26
Triangula & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum. 212.b.	27
Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus; ex quouis illorum alteri simile resecare. Item quodvis ipsorum augere, ut fias simile alteri. 214.b.	28
Dato parallelogrammo, describere aliud maius aut minus simile illi, similiterque descriptum. 215.a.	29
Si ad rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiẽs quadrato; ipsum applicatũ æquale est rectangulo, quod sub segmentis linea per applicationem factis continetur. 219.b.	30
Si figura, quæ ab uno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus, similiterque positis; Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est. 222.a.	31
Sector ad sectorem est, ut angulus ad angulum. 224.b.	32
Angulus ad centrum circuli ita est ad quatuor rectos,	33

ut arcus illi subtensus ad totam circunferentiam. Et contra, Ita se habent quatuor recti ad angulum in centro, ut tota circunferentia ad arcum illi angulo subtensum. 224.b.

85 Similia segmenta circulorum eandem proportionem habent ad integras circunferentias circulorum, ac propterea qualis

1 m pars est una circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque est alia circunferentia similis totius suæ circunferentiæ 225.a.

36 Anguli insistentes arcubus circulorum similibus, sive ad

2 2 centra, sive ad circunferentias insistant, æquales sunt inter se. Et arcus, quibus insistunt sive ad centra, sive ad circunferentias, anguli æquales, similes sunt. 225.b.

37 A dato rectilineo imperatam partem auferre, sua tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiusvis rectilineo dato, similiterque positum. 226.a.

38 Duobus datis rectilineis, tertium proportionale invenire. 227.a.

39 Tribus datis rectilineis, quartum proportionale invenire. 227.a.

40 Duobus datis rectilineis, medium proportionale invenire. 227.a.

41 Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ si-

2 milia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem quamcunque. 227.b.

42 Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiusvis rectilineo similia sint, similiterque descripta, laterague eorum homologa habeant inter se proportionem datam. 228.a.

43 Duobus datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiusvis rectilineo dato. 228.b

44 Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint; Erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca. 229.a.

45 Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ linea circulum secantes; Erunt totæ, & segmenta extra circulum recipreca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius. 229.a.

46 Si duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & a duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur, Erunt

duæ

duæ lineæ, quarum una inter terminum & sectionē, altera vero inter eundem terminum et sua perpendicularem interijcitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciproca. 229.b

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, dimidiant parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. 230.a 47

Omne quadrilaterum a duabus diametris se mutua secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia. 230.a 48

A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam. 230.a 49

Imperatam partem ex triangulo auferre per lineam rectam, quæ a quouis dato puncto lateris ducitur. 230.b 50

Dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere maius, vel minus, secundum proportionem datam. Atque adeo quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicare, triplicare, quadruplicare, &c. Et aliud constituere, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilinearum similitudine. 231.a 51

In dato triangulo quocunque quadratum describere. 232.a 52

IN SEPTIMVM LIBRVM.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alternaque detractione numquam reliquus metiatur præcedentē, quoad assumpta fuit vnitas. 246.a 1

Si propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, detractio ad vnitatem usque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 246.b 2

An duo numeri proposit sint inter se primi, necne, considerare. 246.b 3

Numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorū communem mensuram. 247.a 4

An quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne, considerare. 247.b 5

Numerus metiens tres numeros, vel etiam plures, metitur & maximam eorum communem mensuram. 248.b 6

Si vnitas numeri partem quamlibet, & altera vnitas, vel numerus 7

alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit quæ vnitas numeri. 249.b

8 Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius. Idemque sequitur, si loco unius numerorum priorum sumatur vnitas, vel loco pluriũ, vel etiam omnium, plures vnitates. 250.a

9 Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualiũ numero, singuli singulorum, aquemultiplicier; quam multiplex est vnius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omniũ. Idemq; sequit̃, si loco uni⁹ numeri⁹ posteriorũ assumat̃ vnitas, vel loco pluriũ, vel cõ omniũ, plures unitates. 250.b

10 Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes; Et omnes omnium simul eadem partes erunt, quæ unus unius. 251.a

11 Si numerus numeri æque fuerit multiplex, atq; ablatus ablati; Erit & reliquus reliqui multiplex eo numero totius. 252.a

12 Si primus secundum æqualiter contineat, atque tertius quartum, eandemque insuper partem, vel partes; Erit e contrario secundus primi eadem partes, quæ quartus tertij. Et si fuerit primus secundi eadem partes, quæ tertius quarti; & continebit e contrario secundus primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem, vel partes. 254.b

13 Quæ proportioni eidem proportionalia sunt, inter se quoque sunt eadem. 259.a

14 Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eandẽ rationem, quam numeri multiplicati, vel multiplicantes. 261.b

15 Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis æquales inter se erunt. 262.a

16 Quotlibet numeri minimi in continuatione suarum proportionum, sive eadẽ sint, sive diuersa proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eãdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, &c. 263.b

17 Si quatuor numeri proportionales sint; Et componendo proportionales

portionales erunt. 264.b

Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque diuisi proportionales erunt. 265.a 18

Si diuisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt. 265.a 19

Si compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 265.a 20

Si primus ad secundum eandem habueris rationem, quã tertius ad quartum; habueris autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quantum. 265.b 21

Si duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem; Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt. 266.a 22

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositũ secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. 266.a 23

Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam aliũ eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem proportionem, quam omnes hi simul ad eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem numerus ad hos omnes simul. 266.b 24

Quotcunque numeri inter se primi, minimi sunt in cõtinua ratione suarũ proportionũ. Et quotcunque numeri in cõtinuatione suarũ proportionũ minimi, sunt inter se primi. 268.a 25

Numerus, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque est primus. 270.b 26

Si duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus; Is ad unum eorum, qui in principio, compositus erit. 271.b 27

Maxima mẽsura quotlibet numerorũ metitur ipsos per numeros, qui minimi sunt eandẽ proportionẽ cũ ipsis habentiũ. 273.a 28

29 *Duos minimos numeros inuenire, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales.* 273.a

30 *Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, producitur numerus minimus, quem illi metiuntur.* 274.a

31 *Si tres numeri numerum quempiam metiantur; metietur & eundem minimus numerus, quem illi metiuntur.* 275.a

32 *Minimus numerus, quem quoslibet numeri metiuntur, minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas.* 276.b

33 *Numerum reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineas.* 277.b

IN OCTAVO LIBRO.

1 *Si tres numeri minimi sint continue proportionales, erunt extremi eorum quadrati. Si autem fuerint quatuor, cubi.* folio. 280.a

2 *Extremi numeri proportionalium quotcunque secundum definitionem proposit. 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter se primi sunt.* 280.a

3 *Duo numeri minimi in data ratione metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione.* 280.b

4 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex; neque alius quisquam vllius multiplex erit.* 285.a

5 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.* folio. 285.a

6 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit.* 285.b

7 *Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus aut em*

autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit. 286.b	
Inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, non potest cadere numerus medius proportionalis. 287.a	8
Si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit 5. & rursum multiplicet productum, & sic deinceps; erunt omnes producti continue proportionales ab vnitate. 289.a	9
Si quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, secundus ab vnitate in se multiplicatus producit tertiũ, & ex eodem in hunc sit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic deinceps. 290.a	10
Si sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius. 290.a	11
Si sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius. folio. 290.b	12
Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrunque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent. 291.b	13
Inter duos quadratos numeros cadit numerus medius proportionalis in continua proportione lateris ad latus. 292.b	14
Numerus medius proportionalis inter duos quadratos, & quilibet ipsorum quadratorum, compositi inter se sunt. 292.b	15
Inter duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in continua proportione lateris ad latus. 293.b	16
Duo numeri medij proportionales inter duos cubos, & quilibet ipsorum cuborum, inter se compositi sunt. 293.b	17
Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi sit	18

multiplex ; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex ; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex ; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex ; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex. 296.b

19 Inter duos similes planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, quorum officio medius proportionalis inquiritur. 297.b

20 Numerus medius proportionalis inter duos planos similes, & quilibet ipsorum planorum sunt inter se compositi. 297.b

21 Inter duos similes solidos cadunt duo medij proportionales in ratione laterũ homologorum, quorũ officio medij proportionales inuestigantur. 298.b

22 Duo numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & quilibet ipsorum solidorum, inter se sunt compositi. folio. 298 b

23 Proportio cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerũ non quadratum exhiberi nullo modo potest in duobus numeris quadratis. 302.b

24 Numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. 302. b

25 Proportio cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis. folio. 303. a

26 Numeri, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt. 303. b

27 Plani numeri non similes proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. 303.b

28 Numeri, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes. 304.a

29 Nulli numeri habentes duplam proportionem, vel sesquialteram, vel superbipartientem, sunt similes plani, vel solidi. folio. 304.a

30 Nulli numeri primi sunt plani similes, vel solidi. folio. 304.a

31 Duos numeros planos, uel solidos non similes inuenire. folio. 304.b

IN NONO LIBRO.

Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam; Productus quadratus erit. 305.b	1
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit. folio. 305 b	2
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit. 306. a	3
Si duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; productus non quadratus erit. folio. 306.a	4
Si cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus non cubus erit. 307.a	5
Si cubus numerus numerum quēdam multiplicans faciat nō cubum; & multiplicatus non cubus erit. 307.a	6
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; tantum distabit quilibet maior numerus acceptus ab assumpto quouis minore, quantum ab vnitate abest is numerus, per quem minor maiorem metitur. 311.b	7
Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quilibet illorum seipsum multiplicans producit numerum, qui tantum ab eo distat in numeris proportionalibus, quantum ipse ab vnitate. Minor uero quiuis maiorem quempiam multiplicans producit numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab vnitate. 311.b	8
Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque numerus primus vltimum metiens, metitur etiam omnes alios ante vltimum. 313.a	9
Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis; Numerus aliquem eorum metiens compositus erit ad alterum duorū numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi. 314.b	10
Si fuerint duo numeri, secenturque ipsorum alter in quascunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continetur. 315.b	11
Si numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani	12

	sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.	316.a
13	*Si numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & una parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub*	
	partibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur,	316.a
14	*Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.*	316.b
15	*Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cũ numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.*	316.b
16	*Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio, & adiecto componitur.*	317.a
17	*Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.* folio.	317.b
18	*Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.* folio.	317.b
19	*Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui a partibus inæqualibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.*	318.a
20	*Si numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus cõpositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio & adiecto.*	318.b
21	*Fieri non potest, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis sit quadrato reliquæ partis.*	318.b
22	*Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi*	

nimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi. folio. 320.a	
Propositis quotcunque numeris cõtinue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi, considerare. 322.b	23
Si sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps, quorũ primus & tertius, primi inter se sint, fieri non potest, vt detur alius, ad quẽ ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium. 323.b	24
Primis numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum. 324.a	25
Si par numerus parem multiplicans fecerit aliquem, factus par erit. 326.a	26
Numerus impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur. 326.b	27
Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 326.b	28
Omnes numeros pariter pares tantum inuenire. 327.b	29
Omnes numeros pariter impares tantum inuenire. 328.b	30
Omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares, inuenire. 329.a	31
Quotcunque numerorum continue proportionalium, quorum primus, secundus, & vltimus fuerint noti, summam inuenire. 329.b	32
Omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, inuenire. folio. 331.a	33

IN DECIMO LIBRO.

SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua precedentem metietur. folio. 8.b	1
Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, Metietur quadam reliqua præcedentem. 9.a	2
Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. 9.b	3
An quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec	4

	nec, considerare.	10.a.
5	Magnitudo metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.	11.a
6	Si sint quotcunq; magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua bina magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.	11.a.
7	Commensurabiles magnitudines proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur.	12.b
8	Lineam rectam inuenire, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, ut numerus ad numerum.	13.b.
9	Lineam rectam inuenire, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, ut numerus ad numerum.	13.b.
10	Si sint quotuis quantitates continue proportionales, & aliæ totidem continue quoque proportionales; sitque ut prima illarum ad ultimam, ita prima harum ad vltimam: Erit & ut prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.	14.b.
11	Rectæ lineæ, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: Quæ uero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ uero potentia incommensurabiles, omnia & longitudine incommensurabiles sunt.	16.b.
12	Duos numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.	20.a.
13	Quotlibet numeros inuenire, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.	20.a.
14	Recta media proportionalis inter duas rectas potentia tantũ commensurabiles, utrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia.	21.b.
15	Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera uero sit uni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.	22.b.
16	Quæ incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se in-	

se incommensurabiles erunt. 23.b.	
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id, quo maior plus possit, quam minor. 24.a.	17
Duabus datis rectis lineis sive æqualibus, sive inæqualibus, invenire rectam, quæ illas possit. 24.b	18
Si tota magnitudo ex duabus compositæ, commensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliqua commensurabilis est. 25.b.	19
Si tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ incommensurabilis est. 26.a.	20
Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur. 26.b	21
Duabus datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita ut deficiat figura quadrata. 27.a.	22
Datam rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum. 27.b.	23
Si sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. 28.a.	24
Quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles invenire. 32.a.	25
Rationales lineæ non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles. 32.a.	26
Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et ut secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima. 32.b.	27
Spatium Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est. 32.b.	28
Recta linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est. 33.a	29

30 *Quotcunque lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire.* 34.b.

31 *Propositis quotcunque Rationalibus lineis potentia solum commensurabilibus, inuenire adhuc aliam, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum.* 35.a.

32 *Linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles, Media est.* 36.a.

33 *Omne spatium Medium æquale est cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, si ipsum sub talibus iam non contineatur.* 37.b.

34 *Spatium Medio spatio commensurabile, Medium est.* 38.b.

35 *Duas rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.* 39.a.

36 *Rectangulum sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus contentum, neque Rationale est, neque Medium, sed æquale alteri cuipiam rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* 40.b.

37 *Rationale superat Rationale Rationali.* 42.a.

38 *Duos numeros planos similes inuenire.* 43.a

39 *Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis quadratus etiam sit.* 43.a.

40 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus sit etiã numerus quadratus.* 43.b.

41 *Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit numerus quadratus.* 44.a.

42 *Duos numeros quadratos inuenire, ita ut compositus ex ipsis non sit quadratus.* 44.a.

43 *Duos numeros inuenire, ita ut ex illis compositus ad neutrũ ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* 46.a.

44 *Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit ut maior ad minorẽ, ita rectangulum sub ipsis contentum ad quadratum minoris. Et ut minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis ad quadratũ maioris.* 47.b

45 *Si sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectãgulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.* 48.b

46 *Si recta linea secetur in duas partes inæquales, erit ut maior pars*

ior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum. 50.a.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea & dimidia parte minoris continetur. Et si maior bifariam secetur; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub minori linea, & dimidia parte maioris continetur. 50.b. 47

Fieri potest, ut duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale. 51.b. 48

Duo spatia Rationalia Rationale spatium componunt. 52.a. 49

Inuenire duas Medias longitudine & potentia incommensurabiles. 53.a. 50

Quod sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est. 54.b. 51

Si recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis cõprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat: Ac propterea quadrata partium inæqualium simpliciter sunt maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur. 56.a. 52

Si recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul. 57.b. 53

Si recta linea secta fit utcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & una parte, medium proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratum dictæ partis. 67.a. 54

Ei, quæ est ex binis nominibus, potentia tantum commensurabile, & ipsa ex binis nominibus est, sed non semper ordine eadem. 77.a. 55

Ei, quæ est ex binis Medijs, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem. 78.b. 56

Recta linea, quæ ex binis nominibus, & reliquæ Irrationales ipsam subsequentes, neque ipsi Mediæ, neque inter se eadem sunt. 81.b. 57

Recta linea media proportionalis secundum Analogiam Arithme-

Arithmeticam, inter duo nomina eiusdem lineæ Irrationalis, quæ per compositionem fit, est quoque Irrationalis eadem illi, inter cuius nomina media existit. 82.b.

59 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.* 83.b.

60 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.* 84.a.

61 *Si a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.* 85.a.

62 *Si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.* 85.b.

63 *Si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.* 86.b

64 *Si a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.* 87.a.

65 *Si idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.* 87.b.

66 *Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque vicissim Arithmeticam Analogiam.* 87.b.

67 *Recta linea Apotome potentia tantum commensurabilis, & ipsa Apotome est, sed non semper ordine eadem.* 105.a

68 *Apotome, & cæteræ ipsam consequens. Irrationales lineæ, neque ipsi Mediæ, neque inter se sunt eædem.* 110.a

69 *Fieri potest, ut spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus.* 114.a.

70 *Non solum lineas, sed magnitudines etiam planas, atque solidas incommensurabiles esse.* 116.a.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 A PVNCTO *in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur.* 136.a.

Si fuerint

Si fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad unum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit. 136.b.	2
Dato plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere. 137.b.	3
Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela. 138.a.	4
Duo plana alteri plano parallela, quæ inter se conueniunt, unum planum efficiunt. 138.b.	5
Si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo, erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 146.b	6
Si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis parallelo; sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 148.a.	7
Solida parallelepipeda æqualia super eandem basim, siue insistentes linæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine. 151.b	8
Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim. 153.b.	9
Si solida parallelepipeda inter se sint, ut bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. 154.b	10
Si fuerint quatuor linea rectæ continuè proportionales, ut est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam. 155.a.	11
Prismata, quorum bases sunt triangula super eandē basim, uel æquales, & in eadē altitudine, sunt inter se æqualia. 157.a	12
Prismata, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine, inter se sunt, ut bases. 157.a.	13
Similia prismata, quorum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. 157.a.	14
Æqualium prismatum, quorū bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismatum triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia. 157.a	15
Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum uerticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis	16

lineis primo positis, angulos contineant æquales, utrumque utri que; erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. 158.b

17. Si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto; erunt tres rectæ lineæ continuæ proportionales. folio. 159.a

18. Si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia. Et si tria solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 160.b

19. Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata triangulares bases habentia, quæ & similia similiterque describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. 160.b

20. Si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia. Et si tria prismata triangulares bases habentia, quæ & similia & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 160.b

21. In omni parallelepipedo diametri se mutuo bifariam secant in vno puncto. 162.a

22. Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam; per centrum transibit ipsum planum. 162.a

IN DVODECIMO LIBRO.

1. CIRCVLVS ad circulum est, ut polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descripto. 166.b

2. Si pyramides triangulares inter se sint ut bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. 170.a

3. Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases

baſes triangulares conſtituta, ſunt inter ſe æquales. 170.b	
Pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eandemque habentes altitudinem, baſes habent æquales, ſi non eandem. 170.b	4
Pyramides quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes, eandem habent altitudinem. 172.a	5
Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandem conſtitutæ, ſunt inter ſe æquales. 172.a	6
Pyramides multangulæ æquales, & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructæ, eandem habent altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habent baſes, ſi non habuerint eandem. 172.a	7
Pyramis quæcunque tertia pars eſt priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Sime priſma quodcunque triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim, & altitudinem. 172.b	8
Sub eadem altitudine exiſtentia priſmata, quæſcunque, habeant baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 173.b	9
Si priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. 174.a	10
Priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quæſcunque, inter ſe ſunt æqualia. 174.a	11
Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. 174.a	12
Similes pyramides, quarum baſes plura latera, quam tria, continent, habent proportionem homologorum laterum triplicatam. 175.a	13
Priſmata ſimilia habent triplicatam proportionem homologorum laterum. 174.b	14
Pyramides multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. folio. 176.a	15
Priſmata multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. 176.a	16
Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes, atque altitudines. Et quarum pyramidum	17

dum triangulares bases non habentium reciprocantur bases, & altitudines, illæ sunt æquales. 177.a

18 Æqualium prismatum quorumlibet reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum prismatum bases, atque altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia. 177.b

19 Omnis conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri, siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni, & cylindri. 180.a

20 Sub eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se proportionem habent, quam bases. 181.a

21 Si coni & cylindri inter se sint, vt bases, ipsi sub eadem altitudine erunt. 181.b

22 Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandē, vel æquales bases constituti, siue ambo sint recti, uel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, sunt inter se æquales. 181.b

23 Coni et cylindri æquales super eandē, uel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni & cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, si non habuerint eandem. 181.b

24 Similes coni & cylindri scaleni, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. 183.a

25 Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri scaleni, vel etiam si vnus conorum, uel cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, inter se sunt, vt altitudines. 185.a

26 Super æqualibus basibus existentia prismata, parallelepipeda, & pyramides, inter se sunt, vt altitudines. 185.b

27 Coni & cylindri tam recti, quam scaleni, Item prismata, parallelepipeda, & pyramides proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habent æquales. 186.b

28 Æqualium conorum, & cylindrorum, siue ambo tam coni, quam cylindri scaleni sint, siue vnus rectus, & alter scalenus, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, siue ambo tam coni, quam cylindri sint scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, bases & altitudines reciprocantur, illi sunt æquales. 187.b

29 Si duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate vnius lateris

lateris polygoni inscripti, quod cum diametro communis, ad diametrum perpendicularis ducatur; hæc nullo modo circulum minorem tangit, sed extra ipsum cadit. 188.b 2

Duo polyedra similia in duabus sphæris descripta proportionem habent triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. 191.a 30 9

Sphæra ad sphæram est, ut polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. 193.b 31

IN TERTIODECIMO LIBRO.

SI recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati; Recta illa linea secta erit extrema & media ratione. 197.a 1

Si recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur. 198.a 2

Si recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; eris maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmentum erit illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat. folio. 199.a 3 4

Si linea recta secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidium maioris segmenti; Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ. 199.b 5

Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum lineæ Rationalis; eris minus segmentum Apotome. 200.a 5

Si latus hexagoni in quopiam circulo descripti secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum est latus decagoni in eodem circulo descripti. 202.b 6

Si lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; eris minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius 7

segmentum lateris hexagoni circulo similem circuli. 202.b

8 Linea recta, quæ ex centro circuli ducta diuidit arcum quemcunque bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. 204.b

9 Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni in eo descripti ducta diuidit & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum, bifariam, & ad angulos rectos. 204.b

10 In dato circulo pentagonum, & decagonum una eademque opera describere. 204.b

11 Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur a latere opposito. 207.a

12 Sed ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illum lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 208.b

13 Diameter sphæræ potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basim pyramidis descripti. 209.a

14 Linea perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. 209.a

15 In octaedro tres diametri se mutuo ad angulos rectos secant in centro sphæræ; nec non & tria quadrata ex lateribus octaedri composita se mutuo ad angulos rectos secant. 210.b

16 Octaedrum diuiditur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum ex octaedri lateribus compositum. 210.b

17 Si tetraedrum, & octaedrum in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. Julio. 210.b

18 Bases octaedri oppositæ sunt parallelæ. 211.a

19 Omnes diametri cubi inter se sunt æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphæræ secant; nec non & rectæ lineæ, quæ cuiuis basium cubi oppositarum coniungunt, bifariam diuiduntur in eodem centro. 212.a

20 Potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentijs laterum

terum terræedri, & cubi simul sumptis. 232.b

Sphæræ diameter potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri pentagonum constituentis ambientis. 215.b 21

Sphæræ diameter composita est ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli, qui circa quinque Icosaedri latera describitur. 215.b 22

Latera Icosaedri oppositæ sunt parallela. 215.b 23

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. 219.a 24

Latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. 219.a 25

Si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum est latus dodecaedri, maius segmentum est latus cubi eiusdem sphæræ. 219.a 26

In Dodecaedra sunt sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus se se in centro dodecaedri bifariã quoque, & ad angulos rectos secantibus. 219.a 27

Si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadē sphæra comprehensi. 219.a 28

Præter quinque corpora regularia, quæ Euclides hoc libro construxit, nullum aliud dari potest. 222.b 29

IN QVARTODECIMVM LIBRO.

LINEA perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineã rectam in eodem circulo aptatam, secat eam, quem dicta hæc linea subtendit, bifariam. 226.a 1

Perpendicularis linea ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis est vtrique lineæ simul, & ei, quæ ex cẽtro ad latus triãguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. 226.b 2

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione; maius segmentum æquale est perpendiculari ex eo- 3

dè centro ad latus trianguli æquilateri ducta, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscripti. 227.a

4 Si in sphæra eadem cubus, et dodecaedrum inscribantur; quæ dratum lateris cubi, & quadratum lateris dodecaedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum dodecaedri circumscribentis. 228.a

5 Si latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli. 228.a

6 Superficies cuiuslibet dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, et perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. 231.a

7 Si ex centro circuli triangulum tetraedri circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum sexies sumptum, superficiei tetraedri æquale. 231.a

8 Si ex centro circuli triangulum octaedri circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies sumptum, superficiei Octaedri æquale. folio. 231.a

9 Si ex centro circuli quadratum cubi circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum latus quadrati; erit quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum duodecies suptum, superficiei cubi æquale. 231.a

10 Rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad unum eius latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in quæ Icosaedrum, inscripti, æquale pentagono dodecaedri in eadem sphæra constituti. 232.b

11 Quam proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdē sphærę, eandem habent latera cubi, & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum. 234.b

12 Superficies dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habet eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri

deri in eadem sphæra cum ipsis, ut mult. propos. 9. huius lib. sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra. 235.a	
Si sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit. 235.a	13
Si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planũ secans ducta. 235.b	14
Circuli in sphæra æquales, æqualiter distant a centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphæræ, æquales sunt. 236.a	15
Eadem proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri; & superficiei dodecaedri ad superficiem Icosaedri; & lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, et eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus segmentum illius; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdẽ sphæræ. 237.b	16
Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est lineæ perpendicularis ab uno angulo ad latus oppositum deductæ. 237.b	17
Linea perpendicularis ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissa secat & angulum, & latus bifariam. 238.a	18
Si sphæræ diameter fuerit Rationalis; erit tam superficies tetraedri, quam octaedri in ea sphæra, Media. 238.a	19
Omne triangulum æquilaterum, cuius latus sit Rationale, est superficies Media. 239.a	20
Si tetraedrum, atque octaedrum eidem sphæræ inscribantur; erit basis tetraedri sesquitertia basis octaedri: Superficies autem octaedri sesquialtera superficiei tetraedri. 239.a	21
Recta linea ex angulo quouis tetraedri in sphæra descripti per centrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estq; perpendicularis ad dictam basim. 239.b	22
Octaedrum in sphæra descriptũ diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero utriusque est quadratum subduplũ quadrati diametri sphæræ. 239.b	23
Tetraedrũ sphæræ impositũ ad octaedrũ in eadẽ sphæra descri	24

tum se habet, ut rectangulum sub linea potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

Vel ut Campanus ait.

Tetraedrum sphæræ impositum ad octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, ut rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquiotava trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub linea super quintu partiente vigesimasseptimas partes eadem trium quartarum partium lateris tetraedri contenti, ad quadratum diametri sphæræ. 241.d

21 Linea perpendicularis ex qualibet angulo trianguli æquilateri ad basin oppositam demissa, tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur. 242.d

26 Linea perpendicularis ex qualibet angulo triãguli æquilateri ad basim oppositã ducta, sesquialtera est eius, quæ inter centrũ triãguli, & dictũ angulũ interijcitur: Hæc autẽ inter cẽtrũ triãguli, et dictũ angulũ interiecta, dupla est eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad basin eiusdẽ ducitur. 242.b

27 Si octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basim quamcunque octaedri deducitur. 243.b

28 Duplum quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ describi, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati: perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquam basim cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi. 244.a

29 Solidũ, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictũ cubũ cõprehendẽtis, æquale est cubo. Vel solidũ, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale est cubo. 244.b

30 Solidum, quod fit ex perpendiculari a centro cuiuscunq; corporis regularis ad aliquã eius basim ducta, in tertiã partẽ superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. 244.b

31 Idem circulus comprehendit & cubi quadratum, et octaedri triangulum eiusdem sphæræ. 245.a

Linea perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui basis oppositas tam cubi, quam octaedri in eadem sphæra circumscribunt, æquales sunt. 245.b

32 Si octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribatur

tum, erit octaedrum ad triplum tetraedri, ut latus octaedri ad latus tetraedri. 246.a.

Altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri eiusdem sphæræ est, ut latus octaedri ad latus tetraedri. 246.b. 34

Diameter sphæræ ad latus tetraedri est, ut latus octaedri ad latus cubi eiusdem sphæræ. 246.b. 35

Si recta linea proposita potueris totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Eris maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineæ, latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit. 247.a. 36

Si latus octaedri potueris maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ; poteris latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti. 248.a. 37

Si recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Eris recta linea, quæ potentia sit subduplæ ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit dodecaedri. 248.b. 38

Si linea quæuis recta secetur extrema ac media ratione, & alia linea potentia huius sesquialtera sit latus octaedri, maius segmentum est latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua octaedrum describitur. 249.a. 39

Si latus tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extremæ ac mediæ rationis sectæ; latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti, sesquialterum est minoris segmenti. 249.a. 40

Cubus ad octaedrum in eadem cum ipsa sphæra descriptum, est ut superficies cubi ad octaedri superficiem. Item ut latus cubi ad semidiametrum sphæræ. 249.b. 41

Si sint quatuor lineæ rectæ continuæ proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita ut sit eadem antecedens omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata. 251.b. 42

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius 43

ipsius lateris. 252.b.

44 Si in triangulo æquilatero perpendiculares ducantur ex uno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo. 253.a.

45 Si cubus & tetraedrum in eadem sphæra describantur; erit quadratum cubi ad triangulum tetraedri, ut latus tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli tetraedri ad latus oppositum deducitur. 253.a.

46 Latus tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis uero, siue altitudo tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti. 253.b.

47 Diameter sphæræ potentia est dupla sesquiquinta axis tetraedri; atque adeo diameter longitudine est sesquialtera axis tetraedri. 254.a.

48 Axis, seu altitudo tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti est, ut latus tetraedri ad perpendicularem ex uno angulo basis ad latus oppositum ductam. 254.a.

49 Cubus triplus est tetraedri eidem sphæræ inscripti. 254.a.

50 Prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. 254.b.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 Si in Tetraedro octaedrum inscribatur, diuidetur Tetraedrum bifariam tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant. 256.a.

2 Rectæ lineæ centra basium cubi oppositarum connectentes se mutuo & bifariam, & ad angulos rectos secant. 256.b.

3 Idem est centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri. 258.b.

4 In dato octaedro pyramidem describere. 258.b.

5 Si tetraedrum octaedro inscribatur, erunt quatuor bases tetraedri octo basibus octaedri parallelæ, singulæ uidelicet binis oppositis. 259.b.

6 Si in octaedro tetraedrum inscribatur; recta, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialtera est axis tetraedri,

traedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basim oppositam deducta.	259.b.	
In dato Dodecaedro Icosaedrum describere.	259.b.	7
In dato Dodecaedro cubum describere.	260.b	8
Recta, quæ subtendit unum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallela est opposito lateri.	261.a.	9
In dato Dodecaedro octaedrum describere.	261.a	10
In dato Dodecaedro Pyramidem describere.	261.b.	11
In dato Icosaedro cubum describere.	262.a.	12
In dato Icosaedro pyramidem describere.	262.a.	13
In dato cubo Dodecaedrum describere.	262.b.	14
Diameter Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo dodecaedrum describitur.	265.b.	15
Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius uero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.	265.b	16
Latus cubi æquale est duobus lateris, dodecaedri nidelicet in ipso descripti, & dodecaedri circa eundem cubum descripti.	266.a.	17
Recta duos angulos pentagonorum dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui dodecaedrum inscribitur.	266.a.	18
In dato cubo Icosaedrum describere.	266.a.	19
Diameter Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedram ambientis.	267.a	20
Bifaria sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniungantur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.	267.a.	21
Si latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.	267.b.	22
Icosaedri tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.	267.b.	23
In dato Icosaedro octaedrum describere.	267.b.	24
Idem est centrũ Icosaedri, & octaedri in eo descripti.	268.a.	25
In dato octaedro Icosaedrum describere.	268.a.	26
Si duo latera triãguli æquilateri seceniur extrema a media ratione, ita ut unius maius segmentum, alterius uero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; Recta connectens dictas sectiones duplum potest minoris segmenti.	270.a.	27

28 Si in octoedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri, idemque erit centrum basis octaedri, & Icosaedri. 270.a.

29 Idem centrum est octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. 270.a.

30 In dato octaedro dodecaedrum describere. 270.b

31 In data pyramide cubum describere. 270.b.

32 Idem est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. 272.a.

33 Recta, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transit per centrum pyramidis, triplaque est lateris cubi in pyramide descripti. 272.a.

34 Idem est centrum pyramidis, & octaedri in ea descripti. 272.b.

35 In data pyramide Icosaedrum describere. 273.a

36 In data pyramide Dodecaedrum describere. 273.b.

37 In dato solido regulari sphæram describere. 273.b.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 Si in dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud dodecaedrum, erit proportio Dodecaedri exterioris ad dodecaedrum interius proportionis, quam habet mains segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata. 275.a

2 Linea perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione. 276.a.

3 Si ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita ut prope quemuis angulum sit maius segmentum unius lateris, & minus alterius; Hæ sectionibus suis in medio producent basim Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur tab angulis basis Icosaedri. 276.a.

4 Latus Icosaedri octaedro inscripti, mains est segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab uno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. 277.a

Minus

Minus segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti; duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti. 277.b.	5
Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 278.a.	6
Latus cubi potentia dimidiũ est lateris pyramidis in eo descriptæ: Latus uero pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplumest potentia lateris sibi inscripti octaedri. 278.a.	7
Latus dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris pyramidis sibi inscriptæ. 278.b.	8
Si in cubo describatur & Icosaedrum, & dodecaedrum; Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & dodecaedri. 278.b	9
Latus pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. 279.a.	10
Latus pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est dodecaedri in pyramide descripti. 279.a.	11
Si in octaedro Icosaedrum describatur; erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac mediæ ratione diuisi. 279.b	12
Latus octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti. 279.b.	13
Octaedri latus est potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est dodecaedri octaedro inscripti. 280.a.	14
Latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, qua potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. 280.a.	15
Latus cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus uero dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentũ ad maius eiusdẽ rectæ lineæ. 280.b.	16
Latus octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ pyramidis. 281.a.	17
Si ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquiseptimum quadrati lateris Icosaedri. 281.b.	18

19 *Diameter Icosaedri binas rectas potest, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis.* 282.a.

20 *Latus dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti.* 282.b.

21 *Diameter Icosaedri potest & suipsius lateris sesquitertiũ, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.* 282.b.

22 *Latus dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, ut minus segmentum lineæ perpendicularis ab uno angulo pentagoni ad latus oppositum ducta, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.* 283.a.

23 *Si dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; A reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta: Relinquet latus dodecaedri in Icosaedro descripti.* 283.b.

24 *Cubus sibi inscriptæ pyramidis triplus est.* 285.a

25 *Pyramis sibi inscripti octaedri dupla est.* 285.b.

26 *Cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est.* 285.b.

27 *Octaedrum sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.* 286.a.

28 *Idem centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti.* 287.a.

29 *Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadrata habent.* 287.a.

30 *Octaedrum sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est.* 287.a.

31 *Pyramis sibi inscripti cubi nonupla est.* 287.b.

32 *Octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.* 288.a

33 *Icosaedrum ad sibi inscriptum dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.* 289.b.

34 *Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficis rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At uero altitudo ab altitudine, siue latere cubi,*

cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 290.a	
Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficit duabus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit; Alterius uero & longitudo & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. 292.a.	35
Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter dodecaedri ad rectam centra basium dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cubo descripti. 292.b.	36
Dodecaedrum Pyramidis, in qua inscribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum unius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo uero tertiæ partí minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo uero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita ut amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales. 293.b.	37
Octaedrum excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione secta. 294.a	38
Pyramis excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo uero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. 295.a.	39
Angulum inclinationis duarum basium pyramidis, unius ad alteram, inuenire. 295.a.	40
Omnes inclinationes basium pyramidis æquales inter se sunt. 296.a.	41

Angulum

42 *Angulum inclinationis duarum octaedri basium, unius ad alteram, reperire.* 296.a.

43 *Oēs inclinationes basiū octaedri æquales inter se sunt.* 296.b.

44 *Angulum inclinationis duarum cubi basium, unius ad alteram, inuenire.* 296.b.

45 *Omnes inclinationes basiū cubi æquales inter se sunt.* 297.a.

46 *Angulum inclinationis duarum basium Icosaedri, unius ad alteram, inuenire.* 298.a.

47 *Omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales sunt.* 29?.a.

48 *Angulum inclinationis duarum basium dodecaedri, unius ad alteram, reperire.* 298.a.

49 *Omnes inclinationes basium dodecaedri æquales sunt inter se.* 299.b.

FINIS.

EVCLIDIS
ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.



Est hic primus liber in eo positus, vt nobis tradat ortus, proprietates q; triangulorum tum iuxta angulos, tum iuxta latera quæ quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera secut. Tum æqualitatem, atq; inæqualitatem, rimatur. Idemq; variis rationibus inquirit in duobus quibusdoq; triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq; contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam vt cum triangulis inter eosdem parallelas constitutis conferantur. Vt autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaq; vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Proclisententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atq; parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditur a principijs, initio facto a definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac

A facilius

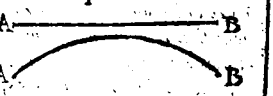
facilius percipiemur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem, altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adiũcias partes etiam latitudinis; quædam deniq; præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas .n. oĩs cõtinua aut longa solũ est, aut longa simul & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neq; aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, hactenus nondũ est excusus. Itaq; quod in quãtitate cõtinua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neq; profundum esse cogitetur, id appellatur ab Euclide, & a Geometris punctum. Huius exẽplũ in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum vero indiuiduum prorsus debet existimari. Deniq; in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

II.

LINEA vero, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neq; profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absq; latitudine, non absurde concipere, intelligereq; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati.

obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsius met luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine, cum sit limes vtriusq;. Mathematici quoq;, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligamus ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem, secari, atq; diuidi.



III.

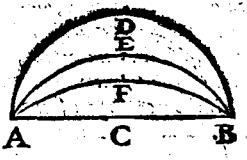
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinq; punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea quælibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq; in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IIII.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curvam dicunt, & mixta, sive composita ex utraq; Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dixisse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atq; illuc declinando subsultat, in qua denique nihil flexus sum reperitur. Hanc nobis ad vivum exprimit filum aliquod tenue summa vi extensum. In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque ulla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionē exponens ait, tunc demū lineā aliquā ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spacium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tatum occupat præcisè spacio, quanta est distantia puncti A, a punct. o B: Linea vero A D B,



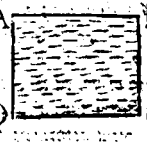
A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spacia, quam sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in aliis lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre sic definit. Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quodpiam aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Nam sui oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremū B, ob interiectum punctum C. quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem, qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius lineæ, quæ minor di

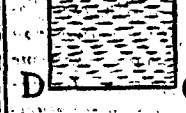
nor diceretur, quam A C B. Campanus describens rectam lineam, vocat eam brevissimam ex vno puncto in alium extensionem. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non desinit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta. milian prorsus omittens, quod eo in loco est mentis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum curvarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus egit copiosissime Apollonius in conicis elementis, linea Conchoides, de qua Nicomedes, linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & aliæ huiusmodi. In solido, seu superficie curvæ sunt alterius generis lineæ helicæ, quam ea de Archimedes descripta qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquam convolvitur, nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque sunt, mixtas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles in libris de cælo iuxta triplicem illam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum, & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum, lib. 1. tex. 5.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq; tantum habet.

POST lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq; habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additis prima dimensioni secundum longitudinem lineam, altera secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B,





B C, C D, D A, comprehensa, considerataq; secundum longitudinem A B, vel D C, & secundũ latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusq; corporis, sa ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbrae corporum. Hae enim, cum interiorem terrae partem penetrare non possint, longae tantum erunt, & latae. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu eris quidem longum, propter longitudinem ipsius, latum quoq; propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem intervallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

VI.

SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

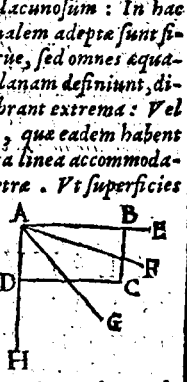
NON dissimilis est haec definitio superiori, qua terminus lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineæ A B, B C, C D, D A. Eodemq; modo in quacunq; altera superficie, quæ extrema habet, linear cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

PLA-

VII.

PLANA ſuperficies eſt, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

HABC, quoq; definitio ſimilitudinem quã dam deſcriptionis linea recte gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas ſuas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis ſurſum, deorſumue ſubſiſtendo, non recedant, appellabitur plana: qualis eſt ſuperficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum ſunt collocatæ, ita vt nihil habeat inciſum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunoſum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ ſunt ſitum, nec vlla eſt alia ſublimior, humiliorue, ſed omnes æquabiliter protenduntur. Alij ſuperficiem planam definiunt, dicentes eam eſſe, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel eſſe minimam, ſiue breuiſſimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari poteſt, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt ſuperficies A B C D, tunc demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circunducta, ita vt nunc eadem ſit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadẽ, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in ſuperficie offendis depreſſum, aut ſublatum, ſed omnia puncta ſuperficiei a linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod ſi minima ſuperficiei particula alijs humilior a linea recta non tangeretur, vel ipſa linea recta libere non poſſet circunduci, propter aliquem tumorem, ſeu eminentiam in ſuperficie occurrentem, iam non poſſet nuncupari plana. Itaq; vt ſit plana, requiritur vt omnibus modis poſſit recta linea commenſurari, hoc eſt, vt ei applicari poſſit recta linea ſecundum A B, & A F, & deniq; ſecundum omnes partes. Hac autem ſuperficies ſola erit ea, quam imaginari, & intelligere poſſumus deſcribi ex motu lineæ rectæ in tranſuerſum, qui ſuper duas alias lineas rectas conficitur. Vt ſi linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur ſuper-



ficies perfecte plana, iuxta omnes dispositiones; Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda sit semper superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, quales est superficies interior cuiuspiam fornicis, vel exterior alicuius globi columnæue rotundæ, vel etiam coni &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundam latitudinem minime potest: Idemq; dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.



VIII.

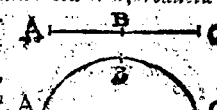
PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quid nam sit angulus planus, dicens; Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicuntur autem duæ lineæ



non

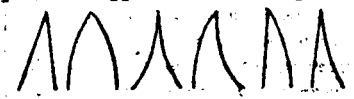
non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo se iungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: quæ de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed ambæ vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta connit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam, non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia altera ex secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Tres vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum producta se mutuo secent: Curuæ autem lineæ, vel quarum altera curua, altera vero recta ad id angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod se se contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Consistit autem anguli cuiuscuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longius excurrens non auget suam inclinationem; igitur neq; anguli maximitudinem. Sunt & alia huius generis angulorum, quorum prius scilicet comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, solidis in corporibus existunt; Posteriores vero sphæricos, qui in superficie sphæræ constituuntur ex circulorum maximorum circumferentijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis doctrinis Menelai. Horum autem omnium explicationi alium locum aptiorem reijcimus, cum hic de solis planis angulis sermonem



IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum connexum, & concauũ, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisue linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.



X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterq; æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpẽdicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, pro-

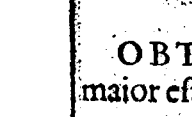
ti, propterea docet hoc loco Euclides, quis nam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quæ nam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadē linea C D protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quam in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D, insistet; vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11, & 12. huius primi libri. Itaq; vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem; quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quid nam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quem nam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore, hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.



OBTV-

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.



QVANDO recta AB, rectæ CD, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus: qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BC.

XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis AB, BD, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus alterò maior, minorue detur, cum lineæ perpendicularis cum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinari, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inter flexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis rectæ lineæ possit recedere, vt perspicuum est. Quoniã vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum ABC, acutum vero, per angulum ABD; quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

TERMI-

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum una dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

XIIII.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figuræ dici potest, ne locum sibi Figura appellare cogamur: Sed ea solum magnitudo, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ: & quæ profunditatem adeptæ quoque sunt, vt solida quoque, Figuræ nomine appellabuntur. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nullatenus potest. Figuræ vnico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solidæ autem circumscriptæ, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum in superficiebus quam plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinq; propterea multa hoc loco figura depingenda esse videtur.

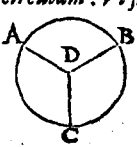
XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub

una

vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINIT *hic circulum, figuram inter planas perfectißimam, docens figuram illam planam, quæ vnica linea circunscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spacium concludatur vnica linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote a D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertij lib. Adiungit quoq; Euclides, lineam extremam circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circunferentiam. Potest circulus etiã hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur a linea recta finita circa alterum punctum extremũ quiescens circunducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cæperat. Qua quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. xi. Vt si intelligatur recta A D, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, a quo dimoueri cæpit, describet ipsa recta totum spacium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoq; punctum quiescens D, illud, a quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta A D, circunducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circunscripta, tamen quia in ea non datur punctum, a quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.*



HOC

XVI.

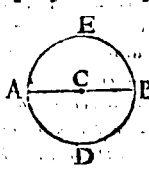
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, a quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, a quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessario requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides propositione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.

XVII.

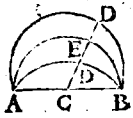
DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraq; parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur oīs in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodo, quæ per centrum vsq; ad peripheriam vtrinq; extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum



bifariam

bifariam secari a diametro, perspicuum ex eo esse potest, quod diameter per medium circulum, utpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinq; æquales circunferentiæ abscindantur. Quod tamen Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis sit vtriq; portioni: Si igitur circunferentia A D B conuruat penitus circunferentiæ A E B, manifestum est, duas illas portiones a diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circunferentia A D B, non omni ex parte cadere dicatur super circunferentiam A E B, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta a centro C, secans circunferentiam A D B, in D, & circunferentiam A E B in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circunferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoq; æquales erunt, quod demonstrandum proponebatur.



XVIII.

SEMICIRCVLVS vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in superiori circulo figura A D B, contenta sub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur semicirculus, quia, vt in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

HABENT nonnulla exemplaria hoc in loco definitionem egmenti circuli: Verum, quia ea repetitur in 3. lib. vbi prius

prius est locus. & Proclus illã non inuenit in antiquis exemplaribus, mihi uisum hic illam subijcere, eiusq; explicationem in 3. librum, cui quem nulla sit mentio segmentorum circuli, differre.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat prius, quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis claudüntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas uero, quæ partim curuis, partim rectis circunscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circunscribuntur, aperte nobis innuit, quo nam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciē, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atq; ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; consentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, forte eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur; & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes a quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atq; reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterū est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula dimidi possunt vel habita ratione laterum,

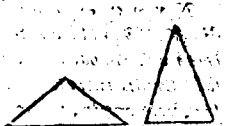
rum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis se se possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Æquilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, seu ad quintã propositionem huius libri demonstrabimus.



XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

Ex hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet.



XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

Hic deniq; ex inæqualitate omnium laterũ trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius. 1. lib. Porro ex his conflat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorũ ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore,

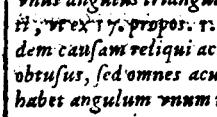


vel minore existentes; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantum angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Æquilatero, secundum vero Isosceli, tertium denique Scaleno respondet triangulo. Cæterum quanam arte construendæ sint triangula huius partitionis super quauis data rectæ lineæ finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

AD hæc etiam, triláterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponis triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quæ vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus;) fit vt tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam dat vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib: constabit; aut obtusus, & ob eundem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusque obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs



Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant. Æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per 6a, quæ propos. 5. docemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus contedatur rectus; omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod

obtusum

obtusum angulum habet.



TRIANGVLVM *amblygonium, sive obtusangulum esse quoq; potest vel Isosceles, vel Scalenum, vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemur, æquales, ideoq; cum vnus ponatur obtusus, amnes erunt obtusi, quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.*

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE *triangulum Oxygonium, sive acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunq; æquilaterum esse necessario Oxygonium: At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel rectangulum, vel amblygonium, vel Oxygonium; Vt vnica sit speciestrianguli æquilateri tres vero tam Isosceli, quam Scaleni: atq; in vniuersum septem triangulorum genera, æquilaterum, quod perfectum Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles amblygonium, Isosceles oxygonium, Scalenum rectangulum, Scalenum amblygonium, & Scalenum oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, sive affinitatem habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. In omni porro triangulo, cuius duo quæcunq; latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium a Mathematicis appellari Basis, sive illud in situ infimum occupet locum, sive supremum &c. Hoc te breuiter*

monere volui, ne putares aliqd latere mysterij in base triāguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

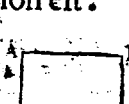
QVADRILATERARVM autē figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensēdo quinq; tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaq; quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

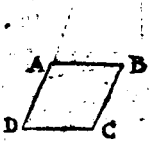


SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se aqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C inter se, & A D, B C, inter se quoq; æqualia sunt, cū A B C D, propter angulorū rectitudinē, parallelogrammū sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

RHOM

XXXI.

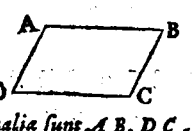
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HAEC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas a conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoq; inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterũ, parallelogrammũ sit, ceu ad eandem propos. 34. huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neq; rectangula.



EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neq; eius latera omnia æqualia sunt, neq; vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ vero omnes, quæcunq; sunt, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

RELIQVAS Omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neq; latera bina opposita, neq; angulos binos oppositos habeant inter se æquales, generali vocabulo Trapezia nominamus: quæ cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera. Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

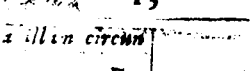


XXXIIII.

PARALLELÆ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraq; parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicentur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunq; partem etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoq; est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, alteri quoq; accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana recta A B, applicetur,

cetur, omnia eius tangens puncta, ut vt circa illam circumducta tangat quoq; omnia



puncta alterius rectæ CD; dicentur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie planæ existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D. appellabuntur parallelæ, sine æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusq; intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eodem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtriusq; conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtramuis partem nusquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandē ex vna parte longius protractas in vnū punctū cōuenturas, quamuis ex altera semp magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunq; ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat; illas in vna, eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari: qui ex eo duntaxat conātur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.

Hic finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem in libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus aliunde explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

P 3

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.



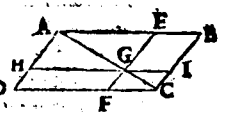
Vt figura quadrilatera A B C D, siquidem latus A B, æquidistet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma, Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Cæterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaq; possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in neq; rectangulum, neq; æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius, vel habet duo illa latera, quæ nō sunt parallela, inter se æqualia, diciturq; Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq; lineæ lateribus

parallelæ

arallelæ ſecantes diametrum in vno eoemq; puncto, ita vt parallelogrammum b hiſce parallelis in quatuor diſtribuatur arallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non tranſit, complemena; duo vero reliqua, per quæ diameter inedit, circa diametrum conſiſtere dicuntur.



Sit parallelogrammũ A B D, in quo diameter A C; & lineæ E F, ſecans diametrum in G, & parallelæ exiſtens lateribus A D, B C; Item linea H I, ſecans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, exiſtens. Quæ cum ita ſint, perſpicuum eſt, parallelogrammum rectum diuiſum eſſe in quatuor parallelogramma, quorum quidẽ duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non tranſit, vocantur a Geometris complementa, ſiue ſupplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum conſiſtere, quippe cum per ea diameter tranſeat, vt videre eſt in præſenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

Primvm hoc poſtulatum planum admodum eſt, ſi recte conſideretur ea, quæ paulo ante de linea ſcripſimus. Nam cum linea ſit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt ſi

punctum

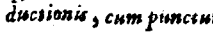
punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit a puncto ad punctum recta linea: Id quod primo hac petitione expostulat Euclides; quemadmodum hic videsis punctum A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodem aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeræ aliæ ab eodem puncto educi possunt ad alia atq; alia puncta.



II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam dilatantiam. Sic lineæ rectæ A B producta esi primo in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.



III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM vero, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatis mente concepserimus applicatam esse secundum alterum extremũ ad quodvis punctum, ipsamq; circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, a quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq; quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinq; lineis A B, A C, A D, A E, A F, quæ singulæ circa centrum A, circum-

vel circumvoluta singulos circulos describserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER *hæc tria postulata quibus Euclides cõtentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.*

IIII.

ITEM quacunq; magnitudine data, ſemper poſſe aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquã abitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc item in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis auceri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem ndiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES, ſiue Axiomata, quæ & Pronunciata dici ſolent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.

FIERI *nulla ratione potest vt duæ quantitates inæquales æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis existeris, excedet eandem necessario maior illarum; Et si maior æqualis fuerit propositæ quantita-*

ti, ſu-

ti, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoq; esse.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

Si enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, procul dubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoq; æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

Nam si reliquæ quantitates forent inæquales, a minore plus fuisset detractum, quam a maiore.

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia.

Quin & si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adiiciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, relicta erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmodum residuum maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest. Possunt enim compositæ quantitates, vel residua, esse & inæquales, & æquales. Si enim 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1, ex 7. & 5. remanebunt 4, & 4. æqualia quoq; existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nonne æqualium quantitatum, intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adiungatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adiungatur, vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

SIMILITER, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia &c. inter se sunt æqualia. Si enim æqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex &c. cuius quantitatis, deficeret vtiq; minus a duplici, vel triplici, &c. Quod si contra, minus esset duplex, vel triplex &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum, triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari

bari poteſt, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtriq; tertiæ illæ addantur erunt compoſitæ duplices illius tertiæ; ſed & inter ſe æquales, ob idem additamentum. Quod ſi rurſum compoſitis eadem tertia adjiciatur erunt conflatæ triplices eiuſdem tertiæ; Cum igitur & æquales inter ſe, propter idem additamentum, exiſtant; eademq; ſit ratio in cæteris multiplicibus perſpicuum erit. Axioma propoſitum.

2. pron.

2. pron.

VII.

ET quæ eiuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt.

PARI ratione quæ eiuſdem ſunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter ſe æqualia ſunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia ſunt, vel triplicia &c. inter ſe æqualia quoque ſunt: Item, quæ æqualium ſunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter ſe æqualia neceſſario exiſtunt.

VIII.

ET quæ ſibi mutuo congruunt, ea inter ſe ſunt æqualia.

HOC eſt, duæ quantitates, quarum vna ſuperpoſita alteri, neutra alteram excedit, ſed ambæ inter ſe congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur eſſe æquales, quando vna alteri ſuperpoſita, ea quæ ſuperponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri ſuperpoſito, is qui ſuperponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, ſed lineæ vllius cum lineis huius prorſus coincidunt: Ita enim eorum inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter ſe inæquales exiſtant.

ECON-

ECONTRARIO, *Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum &c.*

IX.

ET totum sua parte maius est.

CVM pars a toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua parte maius.

X.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuiue nequeat, sed prorsus sit immutabilis: Efficitur enim rectus angulus a linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet; Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdū. Conatur tamē Proclus ex 10. definitione id demōstrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F. quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitq; A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectā D E, rectæ A B, cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis est B G, propterea quod angulus D E F, minor ponatur angulo A B C. Producatur C B, in rectum & continuum vsque ad H;



2. petit.

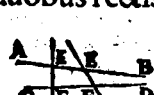
ad H_3 Cũ igitur angulus A B C sit rectus, erit angulus A B H, illi deinceps æqualis, & rectus quoq; quare maior etiam angulo A B G. Producta autem G B, in rectum & continuũ vsq; ad I, cum angulus A B G, ponatur rectus, fiet angulus A B I, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus A B H, maior quoq; erit angulo A B I, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademq; est ratio in cæteris.

10. def. 1. petit. 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud nõ posse conuerti (non enim omnis angulus recto angulo æqualis, rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. docemus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus). Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XI.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

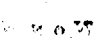


VT si in duas lineas rectas A B, C D, incidens alia recta E F, faciat duos angulos internos, & ex eadẽ parte B E F, D F E, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandẽ coeunturas esse ad aliquod punctũ vnũ, versus eam partem, in qua duo anguli minores existũt duobus rectis, vt appositum exemplum commenstrat. Ratio huius perspicua est, quoniã quãdo duo anguli interni, & ex eadẽ parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partẽ coire possunt, sed æquali semper spatio protenduntur, vt propos. 28. huius lib. demõstrabitur: Quare si duo anguli interni, & ex eadẽ parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte di-

te dictarum linearum ſpatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoq; eas conuenturas tandem eſſe aliquando in vnũ punctum. Verum quia hoc axioma a numero principiorũ omnino reijcitur ſecundũ Geminũ Geometrã, Proclum, & alios, dicitq; debet potius Theorema, quam principiũ, cũ nõ facile quiuis ei aſſenſum præbeat, propterea quod reperiantur & aliæ lineæ, quarũ ſpatiũ licet ſemper magis, ac magis coangustetur, nunquam tamen in vnum punctum coeunt, etiamſi infinite producantur, vt conſtat ex elementis conicis Apollonij: Idcirco illud poſt 28. propoſ. & ante 29. huius libri, vbi primum eius vſus incipit apparere, Geometrice demonſtrabimus ex ſententia Proclj, vt ſine vlla ambitione ad theorema tum, atq; problematum demonſtrationes poſſis aſſumi.

XII.

DVAE rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.



NOTANDVM prorſus habet difficultatem hoc principium. *Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulũ, neceſſario ex altera parte ſemper magis ac magis diſiungẽtur ſi producãtur, vt in exemplo propoſito perſpicuũ eſt. Quare vt ſuperficies, ſpatiumue quodpiam rectilineũ ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda eſt, Ita enim conficietur ſpatium triangulare, ſeu figurarũ rectilinearũ prima. Proclus tamen demonſtrat hoc principiũ, hoc modo. Si fieri põt vt duæ lineæ rectæ claudãt ſuperficiẽ, cõprehendãt duæ rectæ, A B C, A D C, ſuperficiem A B C D, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis A, & C. Facto deinde centro C, deſcribatur circulus interuallo C A, & producantur rectæ A B C, A D C, in rectũ, & cõtinuũ vſq; ad circunferẽtiã, nempe adpũcta E, & F. Itaq; quia rectæ A C E, A C F, trãſeunt per centrũ C, erũt ſemicirculi A E, A E F, inter ſe æquales, & idcirco circunferentia quoq; A E, circunferẽtiæ A E F, æqua-*



3. per.
2. pet.
17. def.

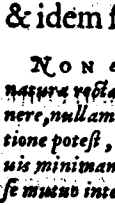
lis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spacium comprehendunt. Quod est propositum.

Hvic duodenario numero Axiomatum ab Euclide positorum adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cum Euclidis, tum ceterorum Mathematicorum, quam ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XIII.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

Non est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & interuallo D A, describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C.



3. per.

17. def.

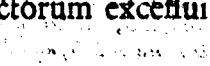
Erunt igitur duæ circunferentiæ A B, A B C, inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualium, cum A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

Possvnt tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in subsequenti figura, rectæ A G, E B, commune habent segmentum B G; quia ambæ vnam rectam constituunt lineam A E. At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere A B, A C, in superiori exemplo, nõ possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte à Proclo fuit demonstratum.

XIIII.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.

HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. AEqualibus itaq; quantitatibus A B, C D. addantur inæquales B E, D F, sitq; B E, maior quam D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt sit G E, excessus, quo quantitas addita B E, superat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita sunt æqualia B G, D F, erunt tota A G, C F, æqualia. Quare constat, totam quantitatem A E, superare totam C F, eodem excessu G E, quo magnitudo D F, adiuncta a magnitudine adiuncta B E, superatur. Quod est propositum.



2. pron.

XV.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F. vt G E, sit excessus, quo quantitas B E, quantitatem D F, superat. Quoniam igitur æqualibus B G, D F, addita sunt æqualia A B, C D, erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A E, superabit totam C F, eodem excessu G E, quo maior quantitas proposita B E, minorem D F, superat. Quod est propositum.

2. pron.

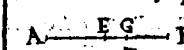
XVI.

SI ab æqualibus inæqualia demantur,

erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

A B æqualibus A B, C D, auferantur inæqualia B E, D F. Sitq; E G, excessus, quo quantitas B E, superat quantitatem D F. ita vt B G, aqualis sit ipsi D F. Quia igitur ab æqualibus A B, C D, ablata sunt æqualia B G, D F, remanebunt A G, C F, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum A E, superari a residuo C F, eodem excessu E G, quo magnitudo ablata B E, ablatæ magnitudinē D F, superat. Quod est propositiū.

3. pron.

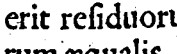


XVII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis.

A B inæqualibus A B, C D, auferantur æqualia A E, C F. Sitq; B G, excessus, quo tota quantitas A B, superat totam quantitatem C D, ita vt A G, æqualis sit ipsi C D. Quoniam igitur ab æqualibus A G, C D, ablata sunt æqualia A E, C F, remanebunt E G, F D, æqualia. Quare residuum E B, superabit residuum F D, eodem excessu B G, quo tota quantitas A B, superat totam quantitatem C D. Quod est propositum.

3. pron.



In his quoq; quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ a principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorū excessus, excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus, excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. sunt 11. & 9. quorum

excessus

xceſſus eſt 2. idem qui ipſorum 5. & 3. Rurſus, ſi ad 5. & 3. ddas 6. fiunt 11. & 9. quorũ exceſſus 2, idem eſt, qui ipſorũ 5. & 3. Item ſi ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum exceſſus 3. idem eſt qui ipſorum 5. & 2. Deniq; ſi ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum exceſſus 3. idem eſt, qui ipſorum 10. & 7.

XVIII.

OMNE totum æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

QVONIAM omnes partes ſimul ſumptæ conſtituũt totũ, cuius ſunt partes, manifeſta eſt veritas huius axiomatis.

XIX.

SI totum totius eſt duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus eſt totius numeri 10 & ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiã eſt reliqui huius 7. In vniverſum aũt hoc demõſtratur propoſ. 5. lib. 5. nimirũ. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atq; ablata ablatæ vt decupla, vel cẽtupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atq; tota totius.

COLLIGI poteſt ex dictis cũ Proclo, & Gemino hoc diſcrimẽ inter poſtulata, & Axiomata, quod cũ vtraq; ſint per ſe nota, & indemonſtrabilia, illa naturã ſapiũt Problematũ, propterea quod aliquid fieri expoſcant; hæc vero, Theoremata mittãtur, cũ nihil fieri petãt, ſed ſolũ ſententiã aliquã notiſſimã proponãt. Differt aũt Poſtulatũ a problemate, qđ cõſtructio poſtulati non indigeat vlla demõſtratione, problematis aũt conſtructionẽ cõcedat nemo ſine demonſtratione, eo qđ difficile aliquid nobis exhibeat cõſtruendũ. Idẽ diſcrimẽ inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud.n. demonſtrari nõ debet, hoc vero concedendũ nulla eſt ratione, niſi demõſtretur. Nam nemo huius propoſitionis demonſtrationẽ, vel etiã probationẽ requiret.

Quæ eidem æqualia, inter se quoq; æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atq; Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;.

CONSTAT *quoq;, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum, duodecimum, & tertiumdecimũ, soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ a magnitudinibus æqualibus, relinquũt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; Ita quoq; numeri æquales detracti e numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.*

HAEC *dicta a nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorum vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.*

ANTEQVAM *porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus græcis. Id vero eo consilio a nobis est factum: quoniam eum a quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq; interdum duo hi interpretes inter se discrepent, quoad ordinem propositionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. libris perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusq;*

veriusq; interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si aliquando numerus propositionum a Geometrà quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citanimus principia, & propositiones Euclidis in margine, quae quidem citationes intelligendae sunt modo infrascripto.

1. *def.*	*Prima definitio. & sic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. *pet.*	*Prima petitio.*
1. *pron.*	*Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. *primi.*	*Prima propositio primi libri.*
23. *Vndec.*	*Vigesimatertia propositio vn decimi libri.*
6. *tertiid.*	*Sexta tertiidecimi libri.*
9. *sextid.*	*Nona sextidecimi libri. &c.*
13. *duod.*	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. *quind.*	*Septima libri quindecimi.*
5. *quartid.*	*Quinta libri quartidecimi.*

Ex his alia citationes a quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

BIBLIOTECA ... ROMA

PROBLEMA I.

PROPOSITIO. I.

1.

SVPER data recta linea terminata triangulum AEquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt considerandа, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse instituta. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum, super data recta linea terminata quacunq;, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematis perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, ac efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant demonstrationem.

SIT igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, describatur circulus C B D: Itē centro B, & interuallo eiusdē rectæ B A, alius circulus describatur C A D; secans priorem in punctis C, & D: Ex quorum vtrouis, nempe ex C, ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta A, & B; Erectq; super rectam A B, constitutū triangulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse



3. post.

1. pet.
20. def.

rio esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqualis. Tam igitur A C, quàm B C, æqualis est rectæ A B. Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atq; idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat. 15. def. 1. prin.

SCHOLION.

VT antè videas, plures demõstrationes in vna propositione contineri, placuit primâ. hanc propositionẽ resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demõstrationis. Si quis igitur probare velit, triangulũ A B C, constructũ methodo pradicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismõ demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, est æquilaterum. 23. def.

Triangulum A B C, tria habet æqualia latera,

Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.

Cinorem confirmabit hoc alio syllogismo,

Quæ eidem æqualia sunt, inter se quoq; sunt æqualia. 1. prin.

Duo latera A C, B C, æqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia existunt.

Cinorem verò huius syllogismi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ a centro ductæ ad circunferentiam circuli, inter se sunt æquales. 15. def.

Lineæ A B, A C, sunt ductæ a centro A, ad circunferentiam C B D.

Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.

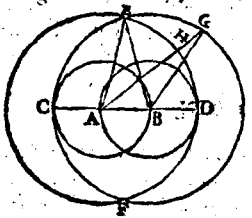
Eademq; ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cùm ducuntur a centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor precedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propõsitiõnes nõn solùm Euclidis, verum etiam ceterorum Mathematicorum.

Negligunt

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse potest ex superiori demonstratione.

SIQVIS autem super data recta desideret constituere triangulum quoq; Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. Deinde producatur A B, in vtramq; partem ad circunferentias vsq; ad puncta C, & D. Atq; centro A, interuallo vero A D, describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit sic per recta A B, triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur e centro A, ad circunferentiam E D F, erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, ducantur e centro B, ad circunferentiam E C F, erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C æquales inter se, (vtraq; enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circunferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circunferentiam quoq; egrediantur; Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur cõi recta A B, erit tota A D, toti B C, æqualis.) Igitur A E, B E æquales quoq; inter se erũt. Quod vero vtraq; A E, B E, maior sit quã A B perspicuũ est, cũ A D, æqualis ostẽsa ipsi A F, maior sit, quã A B; Itẽ B C, æqualis demõstrata ipsi B F, maior quoq; sit, quã A B. Constituũ igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E, B E, æqualia inter se, & maiora latere A B qđ faciendum erat. Atq; hæc est demonstratio Procli, aliorumq; interpretum Euclidis.



BREVIVS tamẽ videtur mihi posse demonstrari, triangulũ A B E, esse Isosceles, hac ratione. Quoniã A E, æqualis est recta

2. *pet.*
3. *pet.*
1. *pet.*
20. *def.*
15. *def.*
15. *def.*
1. *pron.*
2. *pron.*
1. *pron.*
9. *pron.*
9. *pron.*
15. *def.*

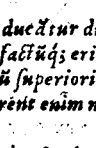
rectæ A D, & rectæ A D, est dupla rectæ A B propterea quod B A, B D æquales inter se sunt; erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus quia B E, æqualis est rectæ B C, & BC, dupla est ipsius A B, propterea quod A B, A C, æquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsi A B. Cum igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdē A B, erunt A E, B E, inter se æquales, maioresq; propterea recta A B. Isosceles ergo est triangulum A B E. 15. def. 15. def. 6. pron.

IAM vero, si ex puncto A, ducatur linea recta A G, ad circunferentiā E G F, quæ nō sit eadē quæ A E, vel A D, secans circunferentiā E H D, in puncto H, & ex G, ad E ducatur alia recta G B; constituū erit triangulū A B G, super rectā A B, quod dico esse scalenū. Quoniam A G, maior est quam A H: Sunt autem A H, A E, ex centro A, ducta, inter se æquales; erit & A G, maior quam A E, hoc est, quam B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quam B G, cū B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior quam A B, propterea quod tota B C, æqualis ipsi B G, maior sit quā A B, pars. Omnia ergo tria latera triāguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum. 1. pet. 1. pet. 20. def. 9. pron. 15. def. 15. def. 9. pron.

PRAXIS.

CONABIMVR in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quādā facilē, & brevē; quæ effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis cōsendit construere; Idq; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorē vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

ITAQVE triangulū æquilaterū ita facile construetur sup data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero data rectæ A B, describantur duo arcus circulorū se inter secantes in puncto C, siue hoc infra lineā cōsingat, siue supra. Post hæc ducātur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; faciūq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadē est demonstratio cū superiori, si modo circuli eßent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario per puncta A, & B.

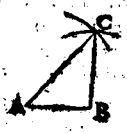


ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus;



mus, describatur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C: constituumq; erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale internallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta A B.

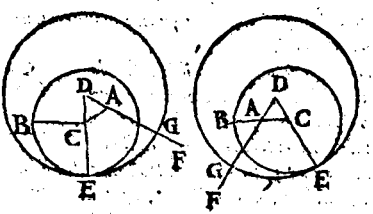
SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta A B. Ex centro B. interuallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur recta A C, B C: constituumq; erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.



CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunq;, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctũ datum A, & data recta linea B C; cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secũda figura indicat.) Super recta vero A C, cõstruatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum

3. post. 1. post.

1. primi.

deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, extendantur; D C, quidem oppositā puncto dato A, vsque ad circunferentiā in E; D A, vero oppositā centro C, quantumlibet in F. Deinde e centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrū trāscuntis, alter circulus describatur E G, secās rectā D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctū datū A, æqualē esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circunferentiā E G, ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidē C E, æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadāt e centro C, ad circunferentiā B E.) Igitur rectæ A G, & B C, quādoquidē vtraq; æqualis est ostēsæ rectæ C E, inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctū, &c. quod erat faciendū. 2. pet. 3. pet. 15. def. 3. pron. 15. def. 1. pron.

QVOD, si punctū datū fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B, describatur circulus, ad cuius circunferentiā recta ducatur vtcumq; C E, erit hæc posita ad punctū datū C, æqualis datæ rectæ B C, cum vtraq; & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circunferentiam B E. 3. pet. 1. pet. 15. def.

SCHOLION.

Hvivs problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut.n. datū punctū in ipsa data recta est positū, aut extra ipsā: Si in ipsa, erit vel alterū extremorū eius, vel inter vtrūq; iacebit extremū. Si vero extra ipsam, erit vel e directo data linea, ita vt ducta in rectū & cōtinuū p ipsum punctū trāseat; vel nō e directo, ita vt ab ipso ad data linea extremorū quodlibet recta linea ducta cū data recta angulū efficiat; Quo modo vel supra datā lineā erit cōstitutū, vel infra, vt manifestū est. In omnibus aūt istis casibus semper eadē est cōstructio, & demōstratio. Quod si in constructione fiat triāgulū ACD, sup̄ rectā AC, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam AG, rectæ BC, æqualem esse.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

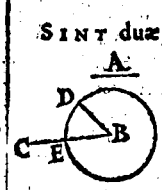
DVABVS datis rectis lineis inæqua-

3.

libus,

libus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineã æqualem minori A. Ad alterutrum extremorũ lineæ maioris B C, nempe ad punctũ B, ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus describatur secans BC, in E. Dico B E, detractam esse æqualẽ ipsi A. Quoniã B E, æqualis est rectæ B D, & eidẽ B D, æqualis est recta A, per constructionem; erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.



2. primi.
3. pet.
15. def. 1. prom.

QVOD si duæ rectæ datæ cõiungãtur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, cõiunctæ in extremo vtriusq; B; describẽdus erit circul⁹ ex B, ad interuallũ minoris B D. Hic. n. auferet B E, æqualẽ ipsi B D, vt cõstat ex definitione circuli.

SCHOLION.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alterã cõtingat; vel nõ, sed vel coniungãtur ad vnũ extremũ, vel se mutuo secent, vel certe altera alterã suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

4. THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia habeãt, vtrũq; vtriq;; habeãt vero & angulũ angulo æqualẽ sub æqualib⁹ rectis lineis cõtentũ: Et basim basi æqualẽ habebũt; eritq; triangulũ triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis, æquales erunt, vterq; vtriq;, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT



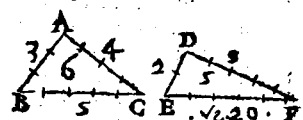
SINT duo triangula ABC, DEF, & unius utrumque latus AB, AC, æquale sit alterius utrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & utrunque angulum B, & C, utrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam angulus A, æqualis ponitur angulo D, fit, ut si alter alteri intelligatur superponi, neuter alterum excedat, sed linea AB, congruat lineæ DE, & linea AC, lineæ DF. Cum igitur AB, & DE, ponantur esse æquales, neutra etiam alteram excedet, sed punctum B, cadet in punctum E; Eademque ratione punctum C, in punctum F, propter æqualitatem linearum AC, & DF, ex hypothesi. Itaque cum punctum B, congruat puncto E, & punctum C, puncto F, necessario & basis BC, congruet basi EF, (ut mox demonstrabitur) ac propterea illa huic æqualis erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum ABC, triangulo DEF, & angulus B, angulo E, & angulus C, angulo F, æqualis ob eandem causam existet. 8. *prop.* 8. *prop.* 8. *prop.*

QVOD autē basis BC, cōgruat basi EF, si punctū B, puncto E, & punctū C, pūcto F, cōgruit; facile demōstrabitur. Si nō cōgruere dicat basis BC, basi EF, cadet uel supra, ut efficiat rectam EGF, uel infra, ut cōstituat rectā EHF. Vtrūuis horum concedatur, claudent duæ lineæ rectæ EF, EGF, uel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quam EHF, rectam esse, cum utraque ponatur eadem esse, quæ recta BC) Quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiē claudere non possunt. Non ergo basis BC, cadit supra, uel infra basem EF, sed illi congruet. Quare ipsæ inter se æquales sunt, &c. Quocirca si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. quod demonstrandum erat. 12. *prop.*

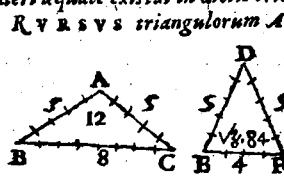
D SCHO-

SCHOLION.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, ut duo latera unius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius triãguli, utrumq; utrique; Secunda, ut angulus etiam unius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia; Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt unquam esse æquales, triãgula uero adhuc dum uaro æqualia existent, ut probe hoc loco a Proclo demonstratur. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem utrunque utrique. sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque A B, 3. A C, 4. ut ambo simul efficiant 7. At uero D E, sit 2. & D F, 5. ut ambo quoque simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis B C, 5; & basis E F, radix quadrata huius numeri 29, quæ maior quidem est quam 5, minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area uero trianguli D E F, 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non utrumque latus utriusque lateri æquale existat in dictis triangulis A B C, D E F.



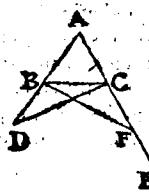
RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumq; utrique, sitq; unumquodq; 5; anguli uero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, sitque A, maior, quã D. Quibus concessis, erit basis B C. maior basi E F ut propos. 24. huius libri ostẽdetur. Quod si basim B C, ponamus esse 8. basim autẽ E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area uero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem est quam 9. minor uero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur



igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triã gula ipſa æqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, ut utrumque latus uni us æquale ſit utriq; lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales exiſtant, ut optime dixit Euclides.

THEOR. 2. PROPOS. 5. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.



SIT triangulum Iſoſceles A B C, in quo duo latera A B, A C, inter ſe ſint æqua lia: Dico angulos A B C, A C B, ſuper ba ſim B C, æquales inter ſe eſſe: Item ſi la tera æqualia A B, A C, producantur quã tum libuerit, uſque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra ba ſim eandem B C, eſſe æquales. Ex linea enim A E, producta infinite abſcindatur A F, æqualis ipſi A D, & ducantur rectæ B F, C D. Conſiderentur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B A F, trianguli A B F, æqualia ſunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, utrumque utrique, nempe A B ipſi A C, ex hypotheſi, & A F, ipſi A D, ex conſtructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F, æqualis eſt angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A, communis eſt utrique triangulo: Erit baſis B F æqualis baſi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & poſteriores, opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis ut patet. Rurſus cõ ſiderentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam uero re ctæ A D, A F, æquales ſunt per conſtructionem, fit ut, ſi auferantur ex ipſis æquales A B A C, & reliquæ B D, & C F, ſint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia ſunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, utrumque utrique, uidelicet B D, ipſi C F, & D C, ipſi F B, ut probatum eſt: Sunt autem & anguli D, & F, cõ

3. *primi.*

1. *pet.*

4. *primi.*

3. *poſt.*

tenti dictis lateribus æqualibus æquales, ut oſtenſum etiam
4. primi fuit. Igitur erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D angulo C B F. Tam enim priores duo quã poſteriores, æqualibus opponuntur lateribus, exiſtuntq; ſupra communem baſim B C, utriuſque trianguli B D C, C F B. Quod ſi ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales eſſe iam demõſtrauimus in prioribus triangulis) detrahãtur anguli æquales C B F, B C D (quos itidem in poſterioribus triangulis modo probauimus eſſe æquales) remanebũt anguli A B C, A C B,



3. pron. ſupra baſim B C, æquales: Oſtenſum eſt autem in poſterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem ſunt infra eandem baſim B C, eſſe æquales. Igitur & anguli ſupra baſim inter ſe & infra eandem inter ſe quoque ſunt æquales, Ac propterea Iſoſcelium triangulorum, qui ad baſim ſunt anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

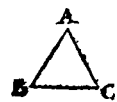
SCHOLION.

HAEC propoſitio uera etiam eſt in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter ſe æqualia, licet eam Euclides ſolis Iſoſcelibus triangulis uideatur accommodaſſe. Exiſtentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus, ſiue reliquum latus B C, ipſis quoque ſit æquale, ut contingit in triangulo æquilatero, ſiue inæquale, ut in Iſoſcele accidit, neceſſario conſequitur, & angulos ſupra baſim inter ſe, & angulos infra eandem inter ſe quoque eſſe æquales, ut conſtat ex demonſtratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus ſubdifficile, & obſcuriuſculum uideri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum ſunt aſſueti. Veruntamen, ſi diligenter theorematis præcedentis uis ac demonſtratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, a quolibet percipietur, ſi modo memor ſit, illos angulos triangulorum probari æquales eſſe, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponũtur. Quod quidem quoniam Campanus non appoſuit, cauſa fuit, ut confuſa eſſe uideatur, & ſubobſcura eius demonſtratio.

CORO-

COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres anguli cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.



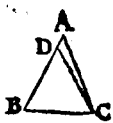
5. prim.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur esse quam A B,) ducaturq; recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, triãguli D B C, utrumq; utrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit unum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: Erunt triãgula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri nõ potest. Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. quod demonstrandum erat.



5. primi

4. primi

SCHOLION.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonſtratum eſt, ſi duo latera trianguli inter ſe æqualia fuerint, angulos, qui ad baſim ſunt, eſſe quoque æquales: Hic uero, ſi anguli ad baſim ſint æquales, latera quoque angulis illis oppoſita eſſe æqualia. Non autem mirum alicui debet uideri, ſi Mathematici aliquando conuertunt propoſitiones, ita ut nunc ex antecedente quopiam conceſſo colligant per demonſtrationem conſequens aliquod, nunc uero rurſus ex conſequente hoc conceſſo inferant per aliam demonſtrationem antecedens illud, ut ab Euclide in hiſce duabus proximis propoſitionibus factum eſſe conſpicimus: Non debet, inquam, uideri mirum, quoniam non ſemper in rebus Mathematicis recipro cantur antecedens & conſequens; Cuius ego rei unum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonſtrat Euclides propoſ. 16. huius lib. Si trianguli cuiuſuis unum latus producatur, angulum externum maiorem eſſe duobus internis ſibi oppoſitis; In qua quidem propoſitione nullo modo antecedens, & conſequens reciprocantur. Non enim ſequitur, ſi figuræ cuiuſuis rectilineæ uno latere producto, angulus externus maior ſit ſingulis internis oppoſitis, figuram illam eſſe triangulum, cũ poſſit etiam eſſe quadrilatera figura, ut ad propoſ. 16. huius lib. oſtendemus. Eodemque modo multæ aliæ propoſitiones conuerti nequeunt. Quam ob rem neceſſe eſt, ut prius demonſtret Geometra, propoſitionem aliquam conuerti, hoc eſt, antecedens & conſequens illius reciprocari, antequam ex cõſequẽte conceſſo colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propoſitiones, quæ conuerti poſſunt, ſed eas duntaxat, quarum conuerſione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, ut fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam uidebuntur afferre utilitatem.

COROLLARIVM.



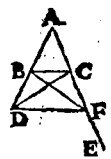
SEQVITVR ex hac propoſitione, omne triangulum æquiangulum, id eſt, cuius omnes anguli ſunt æquales, eſſe æquilaterum. Quod quidem conuerſum eſt corollarij quintæ propoſitionis, ut liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipſum eſſe æquilaterum. cum enim duo anguli B, & C, ſint æquales, erunt latera A B,

A B, AC, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat. 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere (secundam partem quintæ propositionis, hoc modo:

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.



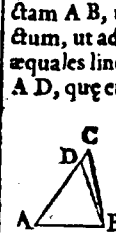
Triãguli enim A B C, productis lateribus AB, AC, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C B, quantumlibet producta abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, DC. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, utrumque utrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit unum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: erunt & bases C D, B F, æquales, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, CF, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus, remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia sunt lateribus F C, C D, utrumque utrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B F, ipsi C D, ut modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus, D B F, F C D, æquales, ut etiam fuit nuper demonstratum: Erit angulus B D F, super basim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, super eandem basim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, sint æquales, ut nunc ostendimus, erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus si rectæ B D, C F, æquales, per cõstructionem, demantur, remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat ostendendum. 3. primi. 4. primi. 3. prom. 4. primi 6. primi 3 prom.

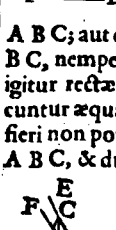
THEOR. 4. PROPOS. 7. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, utraque utrique, non constituentur, ad

aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq; terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, uersus partem eandem C, nõ posse ad aliud punctum, ut ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, utraque utrique, nempe A C, ipsi A D, quę eundem habent finem A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiã terminum possidẽt B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiã æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita ut recta A D, in ipsam rectam A C, uel B D in ipsam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctũ D, in altera rectarũ A C, B C, nempe in A C, ut A D, sit pars ipsius A C. Quoniã igitur rectæ A C, A D, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales; Erit pars A D, toti A C, æqualis. Quod fieri non potest. Sit secundo punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, usque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia, erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodẽ angulo D C E: Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multo minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia, erunt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F, multo sit minor angulo D C E. Idẽ ergo angulus C D F, & minor est angulo D C E, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, ut una linea super alteram cadat, ut in priori figura, dum modo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus





5. primi
9. pron.
5. primi

sus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum: Aut in tali erit loco, ut posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C; Quo posito, in idem absurdū incidemus, nempe angulū D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, ut perspicuum est: Aut denique punctum D, ita erit extra triangulū A B C, ut altera linearū posteriorum, nempe A D, secet alteram priorum, ut ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cū in triāgulo A C D, latera A C, A D, ponantur æqualia, erunt anguli A C D, A D C, supra basim C D, æquales: Ac proinde cum angulus A D C, minor sit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multo minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rursus, cum in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, erunt anguli B C D, B D C, super basim C D, æquales: Est autem iam ostensum, angulum B C D, multo esse minorem angulo B D C: Idem igitur angulus B C D, & minor est angulo B D C, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se A C, A D, & inter se quoque B C, B D. Quare super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis &c. Quod erat demonstrandum.







5. primi
9. prop.

5. primi

SCHOLION.

FIERI *potest, ut duæ lineæ A D, B D, æquales sint duabus A C, B C, utraque utrique, ut A D, ipsi B C, & B D, ipsi A C, ut ultima figura indicat; Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, ut constat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem possident A; Itē B C, B D, eundem B; optimeq; demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, ut A C, A D, inter se sint æquales, ita ut B C, B D, quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione appositum sunt hæc uerba: eosdemq; terminos cum duabus*

duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus posſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, B C, ſimul ſumptis ut in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc non oſtendit Euclides fieri non poſſe. Dixit enim non poſſe utramque utrique eſſe æqualem, &c.

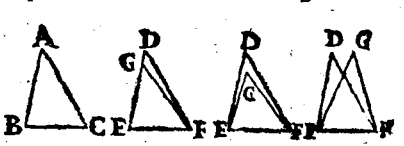
Eadem ratione poſſunt ex A, & B, infra A B, baſim trianguli A B C, hoc eſt ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita ut A D, exiens e puncto A, æqualis ſit ipſi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipſi B C, vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Deniq; eſſe poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter ſe, eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura appareat, & ab Euclide eſt demonſtratũ. Appoſite igitur dictũ eſt in propoſitione: duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane ſcopus Euclidi in hac propoſitione, propoſitus intelligatur, diligenter ſingula verba propoſitionis ſunt ponderanda.

8. THEOR. 5. PROPOS. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & baſim baſi æqualem; Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebũt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, utrumque vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; ſit autem & baſis B C, baſi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus cõtinetur.

tinetur. Nam si mente intelligatur basis B C, superponi basi E F, neutra excedet alteram, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum A B C, cogitetur cadere super triangulum D E F, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut alio. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cũ ponantur æqualia; Ac propterea angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterũ excedat. Quod si punctũ A, alio dicatur cadere, ut ad G, quomodocunq; id cõtingat, hoc est, siue in latus E D, siue intra triangulum E D F, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo E G, (quæ eadem est, quæ B A) æqualis ipsi E D; & F G, (quæ eadem est, quæ C A) æqualis ipsi F D, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus alterius: Hoc autem fieri non posse, iamdudum demonstratum est, cum tam rectæ E G, E D, terminũ eundem E, quam rectæ F G, F D, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet alio quam in punctũ D: ac propterea angulus A angulo D, æqualis erit. Quare si duo triãgula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.



8. *prom.*

8. *prom.*

7. *primi.*

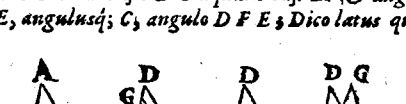
SCHOLION.

VT vides, hæc propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, colligebatur fuisse bases æquales; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos

angulos super bases constitutos æquales, utrunque utrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrunque utrique, quæ uidelicet æqualibus lateribus subtenduntur, angulosq; reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

Sit enim basis B C *æqualis basi* E F, *& angulus* B, *angulo* E, *angulusq; C, angulo* D F E; *Dico latus quoque* A B, *lateri* D E, *& latus* A C *lateri* D F, *æquale esse, angulumq; A, angulo D. Nam*



3. prin. *si basis basi superponatur, congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea q; omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere uidetur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26, ut eo loco monebimus.*

COROLLARIVM.

Porro ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, uerum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, utrumq; utrique, ut angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immo totti triangulum toti triangulo, ut constat ex eadem superpositione unius trianguli super alterum; Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, ut perspicuū est. Quod etiā ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æquabus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cū latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, ut in propos. 4. demonstratum est.

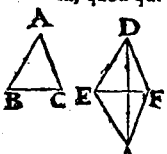
EX PROCLO.

Proclus familiares conātur hoc idē theorema ostēdere de mōstratione affirmatiua: hac ratione. Posito. n. eodē antecedēte, supponi intelligatur basis BC, basi EF ita ut triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulū AEF. Aut igitur duo latera, nēpe D F, F A, constituunt unā lineā rectam

rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti exiterint; aut non. Si cõstituant unam ipsi neam rectam, ueluti D A, ita propositum cõclude tur. Quoniam in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia (est enim nunc A E, recta eadem quę A B, quæ per hypothesin rectæ D E, æqualis est) erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostendendum. Si uero neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A, quæ uel cadet intra triangula, uel extra. Cadat primo intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, erunt duo anguli E A D, E D A, æquales ad basim D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addãtur, fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat secundo recta D A, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia, erunt anguli E A D, E D A, æquales super basin D A. Eadem ratione, cum duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo a prioribus ablatis, remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.

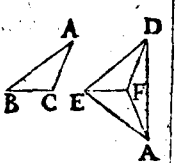


5. primi.



5. primi

2. pron.



5. primi

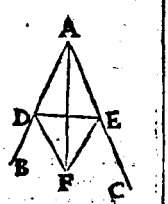
3. pron.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

9.

SIT diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta A B, sumatur quodcunq; punctũ D, & rectæ A D, secetur ex A C, recta A E, æqualis, ducaturque recta D E. Deinde super D E, constituatur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos



3. primi

1. primi

angulos inter se esse æquales. Cum enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia sint lateribus E A, A F, trianguli E A F, utrumque utrique, quod D A, ipsi E A, per constructionem, sit æquale, & A F, commune; Sit autē & basis D F, basi E F, æqualis, propterea quod triangulum D F E, constructum sit æquilaterum. Erit angulus D A F, angulo E A F, æqualis, ideoque angulus B A C, diuisus bifariam; quod erat faciendum.

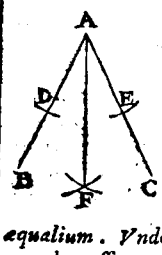
8. primi

SCHOLION.

Quod si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilo minus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

Dicto citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, *bifariā secabitur, hoc modo. Ex centro* A, *circino aliquo abscindantur rectæ æquales* A D, A E, *cuiuscunque magnitudinis. Et circino non uariato (posses tamen ipsum uariare, si uelles) ex centris* D, *&* E, *describantur duo arcus secantes sese in* F. *Recta igitur recta* A F, *secabit angulum* B A C, *bifariam. Si enim ducerentur rectæ* D E, E F, *essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum* D A F, *æqualem esse angulo* F A E. *Non descripsimus autem dictas lineas, ut nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoque praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatq; confusionem.*



SCHOLION.

Hinc aperte colligitur, angulū rectilineū quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum uterque iterum bifariam secetur, habebi-

habebimus 4. angulos æquales; Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides usquam, neque ab ullo hactenus fuit demonstratum, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales posſit diuidi. Si quis tamen id desideret, uti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sepius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli BC, ad quodcunque interuallum, secans rectas AB, AC, in B, & C. Deinde hic arcus officio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam; quoniam huius rei demonstratio adhuc desideratur) diuidatur in tot partes æquales in quot angulus propositus est diuidendus, vt iuxta exemplum propositum in quinque, in punctis scilicet D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cũ enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli 15. def.
BAD, æqualia duobus lateribus E A, A D trianguli E A D, utrumque utrique, cũ omnia ex centro egrediantur ad circumferentiã usque; Basis autẽ B D basi quoque D E, vt dictũ fuit, æqualis est: Angulus igitur B A D, angulo E A D æqualis erit; Eademq; ratione demonstrabitur, angulum E A D angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circunferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sint omnes æquales inter se se. Nemo uero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus dependent. Hoc enim eo consilio facimus, vt singulæ propriis in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales; Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, ubi eandẽ diuidit Euclides bifariã, & ita de singulis. Neq; enim id praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstra-



8. primi

tiones

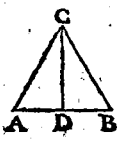
tiones, ſed ſolum, ut probetur recte eſſe per ipſas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonſtrationē requirit, poteris regredi ad praxin quamlibet, poſtquam demonſtrationes ad eam neceſſarias diligenter perceperit. Nam ſemper propoſitiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonſtrationibus noſtrarum praxium; quemadmodum et in proxima praxi citauimus propoſitionem 27. tertij libri.

10. PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam ſecare.

1. primi
9. primi

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, ideſt, in duas partes æquales. Deſcribatur ſuper A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, diuidatur bifariam in D. Dico rectam A B, bifariam eſſe diuiſam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia ſunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, utrumque utrique, nempe A C, ipſi B C, cum ſint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, eſt commune;

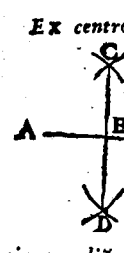


4. primi

Eſt autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per conſtructionem: Erit baſis A D, baſi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam ſecuimus in D, quod facere oportebat.

PRAXIS.

EX centro A, ad quoduis interuallū, quod tamen dimidio lineæ A B, excedat, deſcribatur duo arcus, unus ſuperne, alter inferne; Et ex cētro B, ad idē interuallū omnino alij duo arcus delineentur, q priores ſecēt in C. & D. Recta igitur ducta C D, ſecabit rectā A B in E, bifariā. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducanē quatuor rectæ, erūt hæ oēs inter ſe æquales, cū ex cētris ad circūferentias æqualiū circulorū cadāt; Nā arcus circulorū deſcripti sūt eodē interuallo. Quoniā igit latera A C, C D, æqualia ſunt lateribus



rectibus B C, C D, vtrumq; vtriq;, & basis A D, basi B D, erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus B C, C E, vtrumq; vtriq;, & angulus A C E, angulo B C E, vt ostensum fuit; erit basis A E, basi B E, æqualis. 8. primi. 4. primi.

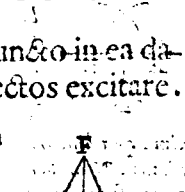
SCHOLION.

PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam A B, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quauis recta linea proposita dividenda sit in quotcunque partes æquales, uberrime trademus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, et nō iucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse propria huic rei locus: cum hui⟨us⟩modi praxes ipse omnes linearum proportiones exposcant. Neq; vero indigebimus vlla alia diuisione lineæ in quotlibet partes æquales, ad eum locum vsq;.

PROBL. 6. PROPOS. 11. 11.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectā lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit A B, & in ea punctū C, a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, cui æqualis auferatur C E. Deinde super D E, constituatur triangulum æquilaterum D E F, atq; ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, triangulī D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumq; vtriq;, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, communę; Est vero & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. Quare dicetur vterq; rectus, atq; adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data



3. primi. 1. primi. 8. primi. 10. def.

E ngitur

igitur recta linea a pũcto in ea dato &c. quod faciendũ fuerat.

PRAXIS.



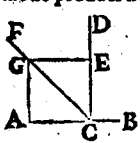
Ex puncto C, abscindantur vtrinq; lineæ æquales C D, C E. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes se se in F. Recta namq; ducta F C, erit perpendicularis : Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim data linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit A C, & punctũ datũ C, extremũ; protrahenda erit A C, in B, & sumenda æquales C D, C E, &c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcumq;, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis



A, & B, quibuscunq; lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus se se intersecantes in C, & D. Nam recta ducta C D, erit perpendicularis ad A B. hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases A E, B E, constituunt, opponunturq; æqualibus lateribus A C, B C.

EX PROCLO.

Si punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis C D, vt docuit Euclides; & abscindatur C E, æqualis ipsi A C: Deinde diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta C F; Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis

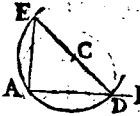


3. primi.
9. primi.

dicularis ad C D, secans rectã C F, in G. Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniam cum latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia sint lateribus B C, C G, triãguli B C G, verumque vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem: Erunt anguli A, & B, oppositi communi lateri C G, æquales; Sed B, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, ideoq; A G, ad A B, perpendicularis. 4. primi. 10. def.

SCHOLION.

BREVIVS lineam perpendicularem erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea A B, punctumq; in ea A. Ex centro C, extra lineã assumpto, vbi libuerit, (dummodo recta A B, producta cum ipso non cõueniat) interuallo vero accepto vsq; ad A, describatur arcus circuli secãs A B, in D.

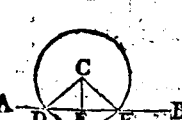


Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta igitur ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo D A E, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

PROBL. 7. PROPOS. 12. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

SIT recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, a quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam A B. Centro C, interuallo verò quolibet circulus describatur secans A B, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam AB; alias eam non secaret.) Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularẽ esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F,



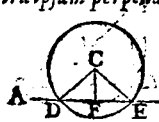
10. primi.

F C, trianguli, E F C, vtrumq; vtriq;, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, æqualis, cum hæ sint ex centro C, ad circunferentiam: Quare erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & propterea vterq; rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

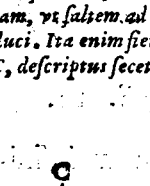
8. primi.

SCHOLION.

PROBE apposuit Euclides hãc particulam: infinitam. Si enim linea esset finita, non posset semper a puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans B E, in duobus punctis, quare neq; ex C, perpendicularis duci ad B E. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam producitam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si B E, producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam B A, productam in D, & E, &c.

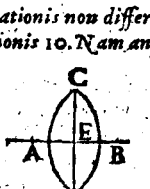


PRAXIS.



CENTRO C, & interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodẽq; interuallo, vel alio si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta C D, secans A B, in E, erit perpendicularis ad A B. Demonstratio huius operationis non differt a demonstratione tradita in praxi propositionis 10. Nam anguli ad E, erũt recti, nempe inter se æquales.

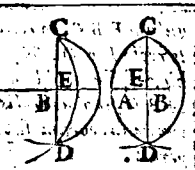
4. primi.



IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo vsq; ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interualloq; vsq; ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritq; ducta recta C D, secans A B, in E, perpendicularis ad A B.

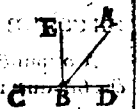
Demon-

Demonstratio eadem est quæ prior. Non est autem necesse, ut intervallum B C, æquale sit intervallo A C, ut in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & brevior operatio si idem semper intervallum accipiatur.



THEOR. 6. PROPOS. 13. 13.

CVM recta linea super rectam consistens lineã angulos facit; Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA A B, cõsistens super rectam C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, erũt dicti anguli duo recti. Si vero A B, nõn fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniã vero duo anguli D B A, A B E, æquales sunt angulo recto E B D; appositio communi angulo recto E B C, erunt tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales duo recti E B D, E B C: Rursus quia duo anguli A B E, E B C, æquales sunt angulo A B C; appositio communi angulo A B D, erunt tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales duo anguli A B C, A B D: sed illis tribus ostensum fuit esse etiam æquales duos rectos E B D, E B C; quæ autem eidem æqualia, inter se sunt æqualia: Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cum ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

10. *def.*

11. *primi.*

18. *pron.*

2. *pron.*

18. *pron.*

2. *pron.*

1. *pron.*

SCHOLION.

VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, superat rectum an-

gulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur, siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

14

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

A D punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A C, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse constitutas in directum, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim nõ est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si cadit supra, cũ A C, consistat super rectam D C F, fient duo anguli
13. primi. A C D, A C F, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli A C D, A C E, æquales duobus rectis; & omnes recti sunt inter se æquales: Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E, erunt æquales. Ablato igitur communi angulo A C D,
3. pron. remanebunt anguli A C F, A C E, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdũ. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neq; infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, æquales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quæ C E; propterea q;, si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, &c.

Quod demonstrandum erat.

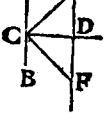
SCHO.

SCHOLION.

Est hæc propositio præcedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si D C E. sit recta, angulos A C D, A C E, duobus esse rectis æquales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis equales, rectas D C, E C, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hæc: & non ad easdem partes. Quoniam vt ait Porphyrius; fieri potest, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad eadem partes duæ lineę ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Ducatur C D, perpendicularis ad A B, diuidaturq; rectus angulus A C D, bifariam per rectam C E. 10 *primi.* Deinde ex D, quolibet puncto rectæ C D, ducatur D E, perpendicularis ad C D, secans rectam C E, in E. Producta autem E D, ad partes D, sumatur D F, æqualis rectæ D E, & ducatur recta F C. 3 *primi.* Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli E D C, æqualia sunt lateribus F D, D C, trianguli F D C, vtrumq; vtriq;, & anguli D, ipsis contenti æquales, nempe recti; erit basis E C, basi C F, æqualis, & angulus E C D, angulo F C D. Sed angulus E C D, dimidium est recti: (Est enim rectus A C D, diuisus bifariam.) Igitur & F C D, dimidium erit recti. Quare C F, cum A C, facit angulum A C F, constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem C E, cum eadem A C, angulum A C E, dimidium etiam recti: Duo igitur anguli A C F, A C E, quos ad eadem partes faciunt rectæ C F, C E, cum A B; æquales sunt duobus rectis: Et tamen C F, C E, non sunt vna linea recta, propterea quod non sunt ductæ ad diuersas partes, sed ad eadem.



THEOR. 8. PROPOS. 15. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticē æquales inter se efficiēt.

SECENT se duæ rectæ A B, C D, in puncto E, vtcūq;. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C,

& angulum A E C, angulo B E D. Quoniam recta D E, consistit super rectam A B, erunt duo anguli A E D, D E B, æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erunt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis æquales. Cum igitur omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales. Dempto igitur cõmuni angulo D E B, remanebit angulus A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, (qui duobus sunt rectis æquales per præcedentem) æquales erunt duobus angulis D E B, B E C, (qui per eandem præcedentem duobus rectis sunt æquales.) Ablato igitur angulo communi B E C, remanebunt anguli A E C, B E D, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

13. primi

10. pron.

3. pron.

3. pron.

COROLLARIVM. I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuò secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B quam duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM. II.

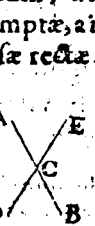
EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor ad E, constituti in plurimas partes, quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circunstans, æquialere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt, quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.

15. pron.

EX PRO-

EX PROCLO.

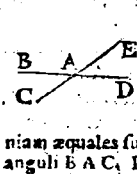
SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusq; signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erũt.



EX puncto C, rectę A B, in diuersas partes egrediantur duę rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter se æquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas C D, C E, efficere vnã lineam rectam. Quoniam cum angulus A C E, æqualis sit angulo B C D, addito communi angulo B C E, erunt duo anguli A C E, E C B, duobus angulis D C B, B C E, æquales: Sed anguli A C E, E C B, sunt æquales duobus rectis; Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem C D, C E, erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum eſt propoſitionis decimæ quintæ. 2. *pron.* 13. *primi.* 14. *primi.*

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctę.



EX puncto A, quatuor lineę eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, inter se æquales: Item duos B A C, D A E, inter se æquales. Dico tum B A, A D, facere vnã lineam rectam, quam C A, A B. Quoniam æquales sunt anguli B A E, C A D, si æquales illis adiũantur anguli B A C, D A E, erunt duo anguli B A E, B A C, æquales duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis per 2. coroll. præcedentis propoſ. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales sunt duobus rectis; atque adeo C A, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli B A E, B A D, æquales duo- 2. *pron.* 4. *primi.*

les duobus angulis D A C, C A B; Quare vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

16. THEOR. 9. PROPOS. 16.

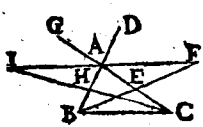
CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D; Dico angulum externum D A C, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemq; maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta B E F, ita vt E F, abscissa sit æqualis rectæ E B; ducaturq; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumq; vtriq;, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit basis C B, æqualis basi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Est autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno, & opposito angulo A C B. Quod si latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturq; recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum G A B, maiorem esse interno angulo, & opposito A B C: Est autem angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cũ lineæ B D, C G, se mutuo secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoq; ostensus angulo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c.

Quod demonstrandum erat.

10. primi.

3. primi.



15. primi.

4. primi.

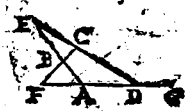
15. primi.

SCHO-

SCHOLION.

NON dixit Euclides angulum externum D A C, maiorẽ esse angulo B A C, interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtramlibet A C E, A B C, internorum, sibiq; oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoq; erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit: Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. Nam anguli externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID vero, quod in folio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externum angulum quo libet interno, & oppositio posse esse maior; hac rõne absoluem⁹.



SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtusus, & A B C, rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ A B, D C, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ D A, C B, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse tribus internis B A D, A B C, B C D, sibi oppositis. Cũ enim A D E, triangulum sit, erit angulus externus E D G, maior interno oppositio D A E. Rursus cum D A B, obtusus maior sit recto A B C, maior quoq; multo erit E D G, ipso A B C. Postremo, quia & in triangulo C D F, angulus externus C D G, maior est interno, & oppositio F C D; manifestum est, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorem esse internis, & oppositis B A D, A B C, B C D. Quã ob rem propositio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est. 16. primi. 16. primi.

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemq; lineã rectã non posse duci plures lineas rectas, quã duas inter

inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam B C, tres lineæ rectæ æquales A B. A C, A D. Quoniam igitur latera A B, A C, sunt æqualia, erunt anguli A C B, & A B C, æquales super basim B C. Rursus quia latera A B, A D, sunt æqualia, erunt anguli A D B, & A B C, super basim B D, æquales. Quare cum vterq; angulus A C D, & A D B, æqualis sit angulo A B C, erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno opposito; quod est absurdum, cùm per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad B C, possunt duci. Quod est propositum.



5. primi.
5. primi.
1. pron.

17. THEOR. 10. PROPOS. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

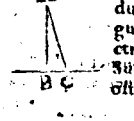


SIT triangulum A B C; Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D, & E. Quoniam igitur angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B, si addatur communis angulus A B C, erunt duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angulis A B C, A C B; sed A B D, A B C, æquales sunt duobus rectis; Igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis: Item duo B A C, & B C A. Cuiuscunq; igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

16. primi.
4. pron.
13. primi.

EX PROCLO.

HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quã vnã. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdũ. Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunq; vltimi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendicu-



7. primi.

pendiculares, quam vna, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.

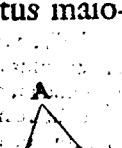
COROLLARIVM.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 16. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunq; reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur. 17

THEOR. 11. PROPOS. 18. 18.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

IN triangulo A B C, sit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, subtensum a maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui a minori latere A B, subtenditur. Nã ex A C, auferatur A D, æqualis ipsi A B, & ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionẽ, erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autem angulus A D B, maior angulo A C B; Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrem cum angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; Erit angulus A B C, multo maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendes angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.



3. primi.

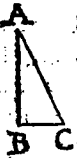
5. primi.

15. primi

9. pron.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidẽ latus A C, minimũ autem B C; & medium locum habens A B. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit an-

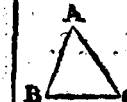


erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus uero A; & C, mediũ locũ inter vtrunq; tenẽs.

18.

THEOR. 12. PROPOS. 19.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior ſit angulo C. Dico latus A C, ſubtendens maiorem angulũ B, maius eſſe latere A B, quod angulum minorem C, ſubtendit. Si enim latus A C, maius non eſt latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale eſſe ipſi A B, erit angulus B, æqualis angulo C; Eſt autem & maior per hypotheſin, quod eſt abſurdum. Si vero A C, minus eſſe dicatur latere A B, erit angulus B, ſubtenſus a minori latere A C, minor angulo C, ſubtenſo a maiore latere A B; Ponitur autem maior, quod magis eſt abſurdũ. Cũ igitur A C, latus neq; æquale ſit lateri A B, neq; minus eo, erit maius. Eadẽ ratione probabitur, latus A C, maius eſſe latere B C, ſi angulus B, maior eſſe concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur; Quod demonſtrandum proponebatur.

5. primi.

18. primi.

EX PROCLO.

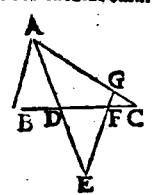
POSSVMVS hoc idẽ theorema oſtẽdere affirmatiua demonſtratione, ſine adminiculo præcedentis, ſi tamen prius demonſtretur hoc ſubſequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam ſectus fuerit, ſecansq; angulum recta linea ad baſin ducta in partes inæquales ipſam diuidet; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori baſis ſegmento coincidit, minus vero, quod cũ minori.

TRIANGVLI A B C, angulus BAC, diuidatur bifariã per-tectã A D, quę ſecet baſin B C, in partes inoquales, maiuſq; ſegmen-

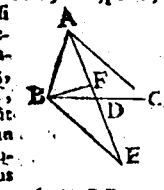
tum

rũ fit D C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Producatur enim A D, ad E, vt sit D E, æqualis ipsi A D: Deinde ex maiori segmẽto D C, auferatur recta D F, æqualis minori segmẽto D B, & p F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, triãguli A D B, æqualia sũt lateribus E D, D F, triãguli E D F, vtrũq; vtriq;, per cõstructionẽ; sunt aũt & anguli A D B, E D F, dictis lateribus cõtenti æquales; Erunt bases A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, æqualis: Est vero & angulus C A D, angulo B A D, æqualis, p hypothesin; Igitur anguli G A D, G E A, trianguli A G E, æquales erũt, ideoq; latera A G, E G, æqualia erũt. Est aũt recta A C, maior quã A G; quare & A C, maior erit, quã E G; Et qa E G, maior est, quam E F, erit & A C, multo maior, quam E F. Cum igitur demonstratum sit rectam E F, æqualem esse rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.



3. primi
15. primi.
4. primi.
1. pron.
6. primi.

Hoc ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E, vt sit D E, æqualis ipsi A D; ducaturq; recta B E. Quoniam igitur latera A D, D C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrũq; vtriq;, per constructionem; sunt autẽ & anguli A D C, E D B, dicti comprehensi lateribus æquales: Erũt bases A C, & B E, æquales, angulusq; A C D, angulo E B D, æqualis: Et quia angulus A C D, putatur esse minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoq; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam B F, cadet B F, supra B D, eo quod angulus A B D, maior sit angulo E B D. Quia vero E F, maior est, quam E D, & E D, posita est æqualis ipsi A D, erit E F, maior, quã A D; Sed adhuc A D, maior est, quã A F; Multo igitur maior erit E F, quam A F. Itaq; quia recta B F, diuidens angulum A B E, bifariã, secat basin A E, inæqualiter in F, estq; maius segmentum E F, minus aũt A F, erit per theorema a Proclo proxime demõstratũ, latus B E, maius latere A B. Ostẽsum est aũt B E, æquale esse lateri A C; Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Qđ erat demonstrandũ.



3. primi.
15. primi.
4. primi.

SCHOLION.

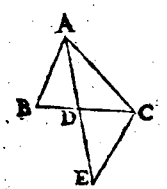
Hæc propositio 19 cõuersa est propositionis 18, vt perspicuũ est. Campanus autem duarũ istarũ propositionũ ordinẽ prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendis ducendo ad id,

quod

quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

POSTERIMVS *quoque Theorema a Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.*

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmentum erit prope maius latus.



DVO latera AB, AC, trãguli ABC, sint inæqualia; AC, maius, & AB minus. Recta autem AD, diuidens angulũ BAC, bifariã, secet basin BC, in D. Dico segmentum DC maius esse segmẽto DB. Si enim nõ est maius, erit vel æquale vel minus. Si dicas esse æquale; producatur AD, ad E, vt DE, æqualis sit ipsi DA, ducaturq; recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia sunt lateribus ED, DC, vtrumq; vtrique; AD, videlicet ipsi ED per constructionem, & DB ipsi DC, per hypothesin aduersarij; Sum autem & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; Erit basis AB, 3. primi. 15. primi. 4. primi. *basi EC, æqualis, & angulo BAD, angulus CED. Positus autẽ est & angulo BAD, angulus CAD, æqualis; Igitur & anguli CED, CAD, æquales erunt; Ideoq; latus AC, lateri EC, æquale. Cũ igitur ostensum sit, lateri EC, æquale esse quoq; latus AB, erunt latera AC, AB, æqualia; quod est absurdũ, quia AC, maius ponebatur, quã AB. Non igitur erit segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si DC, dicatur esse minus, & DB, maius erit, per theorema Procli, latus AB, maius latere AC; Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit DC, quam DB. Quare erit necessario maius.* 6. primi. 1. pron.

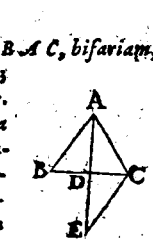
EODEM *modo demonstrari poterit hoc theorema.*

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoq; secet, erunt duo

latera

latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMO recta A D, secans angulum B A C, bifariam, diuidat quoque basin B C, in D, bifariam; Dico latera A B, A C, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabis eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus A C, æquale esse lateri A B, si D C, segmentum segmento D B æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera A D, D B, æqualia sint lateribus E D, D C; & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; erunt bases A B, E C, æquales, & angulus C E D, angulo B A D, hoc est, angulo C A D, æqualis: Quare A C, æquale erit ipsi E C, hoc est, ipsi A B.



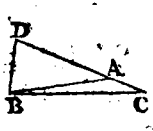
15. primi. 4. primi 6. primi

SECVNDO sint latera A B, A C, æqualia, & recta A D, secans basin B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam; Dico segmentum D C, æquale esse segmento D B. Cum enim latera A D, A B, æqualia sint lateribus A D, A C, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin, erit bases B D, D C, æquales. 4. primi

THEOR. 13. PROPOS. 20. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

SIT triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnum ex illis, vt C A, vsque ad D, sitque recta A D, æqualis alteri lateri A B, & ducatur recta D B. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æquala inter se sunt, per hypo-



3. primi

5. primi
9. pron.

theſin, erunt anguli A B D, A D B, æquales inter ſe: Eſt autem angulo A B D, maior angulus C B D; Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In

19. primi



triangulo ergo C B D, latus C D, oppoſitum maiori angulo C B D, maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cum igitur duo latera A B, A C, ſimul æqualia ſint ipſi C D, (ſi enim

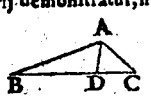
2. pron.

æqualibus A B, A D, commune addatur A C, fient tota æqualia; nimirum linea compoſita ex A B, A C, & linea cõpoſita ex A D, A C,) erunt quoque latera A B, A C, ſimul maiora latere B C. Eodem modo demonſtrabitur, quælibet alia duo latera maiora eſſe reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora &c. Quod demonſtrandum erat.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema, a familiaribus Heronis, & Porphyrij demonſtratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora eſſe latere B C. Diuidatur angulus B A C, illis lateribus contentus bifariam per rectam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum eſt ad B, erit angulus externus

9. primi



16. primi
19. primi
16. primi

B D A, maior interno & oppoſito C A D; igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B, oppoſitum maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione oſtendetur, latus A C, maius eſſe, quam C D, quia angulus C D A, maior eſt angulo B A D, hoc eſt, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademque eſt ratio quorumcunque duorum laterum, ſi angulus ipſis comprehenſus bifariam fecetur.

21.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

SI ſuper trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint; hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt,

maio-

maiorem uero angulum continebunt.

IN triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulū cōstitutātur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes: Dico B D, C D, simul minores esse duobus lateribus B A, C A, simul; At uero angulū B D C, maiorem angulo B A C. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera B A, A E, maiora sunt latere B E. si addatur commune E C, erunt B A, A C, maiora, quam B E, E C. Rursus quia in triangulo C E D, duo latera C E, E D, maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, erunt C E, E B, maiora, quam C D, D B. Ostensum uero iam fuit B A, C A, maiora esse, quam B E, E C; Multo igitur maiora erunt B A, C A, quā B D, C D. quod primo proponebatur. Præterea, quoniam angulus B D C, maior est angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est eandem ob causam; Erit angulus B D C, multo maior angulo B A C; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli uno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.



20. primi.

4. pron.

20. primi.

4. pron.

16. primi.

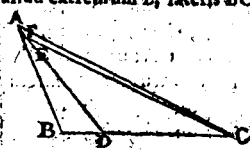
SCHOLION.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum cōstitutas, duci debere ab extremitatibus unius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis uidelicet rectangulis, uel etiam amblygoniis, intra triangulum constitui posse duas lineas super unum latus circa angulum rectum, uel obtusum, quarum quidem una ab extremitate dicti lateris, altera uero a quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, ita ut hæ constitutæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus.

Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SI TRIANGULUM habens exempli gratia angulum A B C, obtusum: Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniã in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B, minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nempe obtusus; erit A D B;

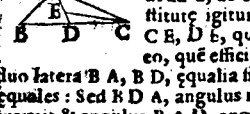


17. primi. 19. primi

minor recto, ideoque minor angulo A B D. Quare latus A D, maius erit latere A E. Et D A, abscindatur recta D F, æqualis rectæ A B; Et reliqua linea A E, bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur C F, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam in triangulo A F C, duo latera A F, F C, maiora sunt latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, æqualis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur æqualia addantur E D, & A B, fient rectæ C F, F D, maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, ut Euclides demonstrauit.

3. primi 20. primi 4. prop.

RVRSVS sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximũ BC, minimum A B. Ex B C, auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctum quodlibet, ut ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constituto igitur erunt intra triangulum duæ lineæ C E, D E, quæ minorem angulum comprehendũt eo, quẽ efficiunt duo latera A B, A C. Cum enim



5. primi 3. primi

duo latera B A, B D, æqualia sint, erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, angulus maior est angulo C B D; Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C B D. Quare multo maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constituras educi debere ab extremis punctis unius lateris; ut maiores quidẽ sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem uero complectantur angulum. Alias enim propositio uera non esset, ut iam est demonstratum.

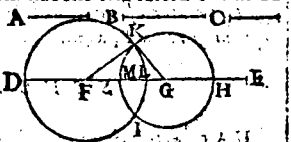
16. primi

22. PROBL. 8. PROPOS. 22.

EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere

ſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam uniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliquæ ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, ut conſtat ex propos. 22. in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oportetque conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis abſcindatur recta D F, æqualis rectæ A, Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo uero F D, circulus deſcribatur D K: Item centro G, interuallo autem G H, alius circulus deſcribatur H I K, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K, (cum enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; ſi ex F E, ſumatur recta F L, æqualis ipſi F D; & ex G D, recta G M, æqualis ipſi G H, cadet punctum M, inter L, & D. Si namq; M, caderet in L, punctum, eſſent G I, F L, hoc eſt, G H, & F D, æquales rectæ F G: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ minores recta F G; quorum utrumq; eſt contra hypotheſin,) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducãtur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C. Cum enim recta F K, æqualis ſit rectæ F D, & recta A, per conſtructionem eidem F D, æqualis; erit latus F K, rectæ A, æquale: Rurſus quia G K, æqualis eſt ipſi G H, & recta C, eidem G H; erit quoq; latus G K, rectæ C, æquale: Poſitum autem fuit per conſtructionem, reliquum latus F G, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia ſunt. Cõſtituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.



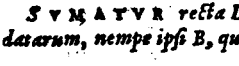
3. primi.

15. def.

1. pron.

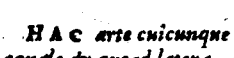
PRAXIS.

SVMATVR recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin: Deinde ex D ad internallū rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad internallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter internallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum internallum C; D E, vero latus, ac ceptum est rectæ B, æquale, ab initio.



SCHOLION.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq;, & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas A B, B C, C A, quarum quælibet duæ maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam D E, æqualem uni lateri, nempe B C; & ex D, interuallo lateris A B, arcum describo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris C A, qui priorē secet in F, &c.



20. primi

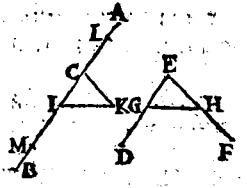
23. PROBL. 9. PROPOS. 23.

AD datam rectam lineam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulum constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta utcunque G, H, quæ recta

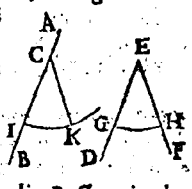
22. primi. G H, connectantur: Deinde constituatur triangulum C I K, habens

habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita ut C I. æquale sit ipsi E G; & C K, ipsi E H; & I K, ipsi G H. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G; & C L, ipsi E H; & I M, ipsi G H; Deinde ex centris C, & I, interuallis uero C L, & I M, circuli describantur secantes se se in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam duo latera C I, C K, æqualia sunt duobus lateribus E G, E H, utrumq; utrique, & basis I K, basi G H, per constructionem; erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat. 8. primi.



PRAXIS.

Non differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quod triangulũ constituere oporteat æquale alteri triangulo, ut angulus dato angulo æqualis exhibeatur, ut perspicuũ est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumq; in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq;



officio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quod circinus non variato utramque distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera I C, C K, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; erunt anguli I C K, G E H, æquales. 8. primi.

THEOR. 15. PROPOS. 24. 24.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, utrumq; utriq;,

angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

Duo latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, utrumque utrique, nempe A B, ipsi D E; & A C, ipsi D F; Angulus uero A, maior sit angulo E D F. Dico basin B C, maiorem esse basi E F. Ad lineam enim D E, ad eiusque punctum D, constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum D E F, cum angulus E D F, minor ponatur angulo A) ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primo supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G, utrumque utrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionem; Erit basis B C, basi E G, æqualis. Rursus quia duo latera D F, D G, inter se sunt æqualia, erunt anguli D F G, D G F, æquales. Est autem angulus D G F, maior angulo E G F: Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostentum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, quam E F. Quod est propositum.

3. primi



3. primi

4. primi

5. primi

9. pron.

19. primi

Cadat secundo E G, in ipsam E F. Et quia rursus, ut prius, basis E G, æqualis est basi B C; Et E G, maior quam E F: erit & B C, maior, quam E F, quod est propositum.



4. primi.

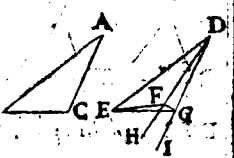
9. pron.

Cadat tertio E G, infra E F; producanturque rectæ D F, D G, usque ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rursus, ut prius, basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia sunt inter se, per constructionem

4. primi.

tionem, erũt anguli G F H, F G I, infra basin F G, æquales. Est autem angulus F G I, maior angulo F G E; igitur & angulus G F H, eodem angulo F G E, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus E F G, eodem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, basi, basi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

5. primi
9. pron.



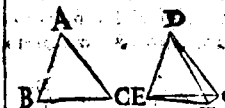
19. primi.

SCHOLION.

Si quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum & reliquorum angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrunque vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide verissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius trianguli, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; Non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37 huius primi libri, Triangulis maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in universum inferri, ex eo, quod angulus cuius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit, modo minus & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis, angulus A B C, minor

nor est semper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui æqualis est, per 4. propos. angulo ABC,) minor sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidem angulus ABC, angulo

9. prop.



DEF, æqualis, per 4. propos. At vero angulus ACB, minor est angulo DFE, cum angulus DFE maior sit angulo DGF, externus interno, & opposito; & angulus DGF, æqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, maior quidem est angulo

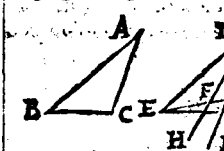
6. primi.



DEF propterea quod angulus DEG, (æqualis existens per 4. propos. angulo ABC,) maior sit eodem angulo DEF, totum parte: Sed angulus ACB, minor est angulo DFE. Nam si recta EF, producatur secans rectam DG, in K, fiet angulus DFE, maior angulo DKE, externus interno; Est autem & angulus DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. propos. æqualis est angulo ACB. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo unus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.

9. prop.

16. primi



25. THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, basin verò basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

Duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus

luobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, utrumque utrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Basis autem B C, maior sit basi E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus lateribus circa D, utrumque utrique, per hypothesin; erit & basis B C, æqualis basi E F; quod est absurdum; Ponitur enim basis B C, basi E F, maior: Si uero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatem laterum circa istos angulos, basis E F, maior basi B C; quod magis est absurdum, cum E F ponatur esse minor quam B C. Quare cum angulus A neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.



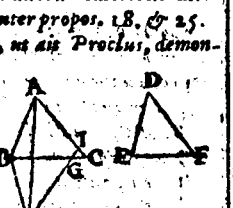
4. primi.

24. primi

SCHOLION.

THEOREMA *hoc conuersum est precedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est basin illi respondentem, esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensum fuit angulum illi respondentem, maiorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, qua explicata sunt in propos. 18, & 19. Nam in 19 demonstratum est, in uno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo Latera unius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.*

MENELAVS *Alexandrinus, ut ait Proclus, demonstrat hoc idē theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex base maiore B C, abscindatur recta B G, æqualis basi minori E F. Fiat quoque angulus G B H æqualis angulo D E F, & sit B H, æqualis ipsi B A, atque adeo ipsi D E,*



3. primi.
23. primi.
3. primi.

duca-

ducatur q; recta per G, ex H; secans A C, in I. Quoniá igitur duo latera B A, B H, æqualia sunt, erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rursus, quia latera B G, B H, æqualia sunt lateribus E F, E D, utrumque utrique; & angulus G B H, æqualis angulo D E F, per constructionem; erit basis H G, basi D F, æque adeo ipsi A C, æqualis, angulusque G H B, angulo E D F. Et quoniam recta H I, maior est quam H G, quæ est æqualis ipsi A C, erit quoque maior H I, quam A C. Sed A C, maior est adhuc, quam A I; multo ergo maior erit H I, quam A I. Quare angulus I A H, maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui ostensi sunt æquales, fiet totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior. Sed angulus B H G, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod est propositum.

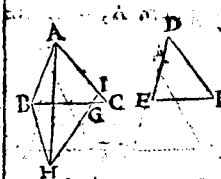
5. primi

4. primi

9. pron.

18. primi

4. pron.



HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor E F, ad G, ut sit E G, æqualis basi maiori B C. Deinde centro D, intervallo autem D F, describatur circulus, producaturque E D, ad H, in circumferentiam. Quoniam igitur D H, est æqualis ipsi D F, erit quoque D H, æqualis ipsi A C. Additis igitur æqualibus D E, A B, fient A C, A B, simul æquales toti H E. Sed A C, A B, simul maiores sunt quam B C, atque adeo quam E G; Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus describendus ex centro E, & intervallo E G, intersecabit rectam E H, atque adeo circumferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia sunt duobus lateribus D E, D K, utrumque utrique, (est enim D K, æquale ipsi D F, per definitionem circuli; D F, autem positum est æquale lateri A C,) & basis B C, basi E K, æqualis; (cum E K, æqualis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, vero recta per constructionem facta sit

3. primi

15. def.

2. pron.

20. prim



æqualis

ualis basi BC.) Erit angulus BAC, angulo EDK, æqua- 8. primi
: Sed angulus EDK, maior est angulo EDF. Quare & an- 9. primi
lus A, angulo EDF, maior erit. Quod est propositum.

THEOR. 17. PROPOS. 26. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus ngulis æquales habuerint, vtrumque vtri- ue, vnumq; latus vni lateri æquale, siue uod æqualibus adiacet angulis, seu quod ni æqualium angulorum subtenditur: & eliqua latera reliquis lateribus æqualia, trumque utrique, & reliquum angulum eliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales obus angulis E, & EFD, trianguli DEF, uterque vtri- e, hoc est B, ipsi E; & C, ipsi EFD; Sitque primo latus C, quod angulis B & C, adiacet, lateri EF quod angu- E, & EFD, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque era AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, rumque vtrique, hoc est AB, ipsi DE & AC, ipsi DF, manifestum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reli- umque angulum A, reliquo an- lo D. Si enim latus AB non est



qualis lateri DE, fit DE, maius: a- o abscindatur recta linea EG, B qualis rectæ lineæ AB, ducа- rque recta GF. Quoniam igitur latera AB, BC, æqua- 3. primi sunt lateribus GE, EF utrumque utrique, & anguli B, E, æquales per hypothesin; Erit angulus C, æqualis an- 4. primi lo EFG. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo FD; Quare & angulus EFG, eidem angulo EFD, ualis erit, pars toti. Quod est absurdum. Non est igitur us AB, inæqualis lateri DE, sed æquale. Quamobrem,

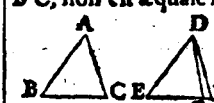
cum

cũ latera A B, B C. æqualia sint lateribus D E, E F, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

4. primi

SINT secundo latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

3. primi



4. primi

16. primi

SCHOLION.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex aqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit aequalitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex aequalitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus alterius, aequalia esse, reliquumque angulum reliquo angulo &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.



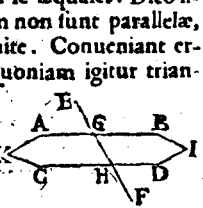
THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

27.

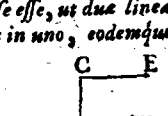
SI in duas rectas lineas recta incidens nea alternatim angulos æquales inter se fe erit : parallelæ erũt inter se illæ rectæ lineæ.

IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat anlos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico liæas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, ibunt tandem, si producantur infinite. Conueniant ero ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur trianulum est G I H, (cum A B, recta ontinuata sit, item recta C D, sque ad punctum I,) & angulus . G H, positus est æqualis angulo) H G ; erit externus angulus A G H, qualis interno, & opposito D H G; uod est absurdum ; quoniam externus interno maior est 16. primi Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in pun to K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, qualis interno ; & opposito A G H. quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D ; Quare parallelæ erũt. odem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, quales, demonstrabitur ; lineas A B, C D, esse parallelas. i igitur in duas rectas lineas recta incidens &c. Quod erat stendendum.



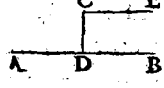
SCHOLION.

NECESSE est, *ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existãt plano, ut ex definitione constat : Quare non satis est duos angulos alternos æquales inter se esse, ut duæ lineæ robentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in uno, eodemque xistere plano. Fieri enim potest, ut lineæ ecta incidẽs in duas rectas nõ in eodẽ plao existentes, faciat alternos angulos æquas. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, ectam, quæ in subiecto plano existit ; &*



ex

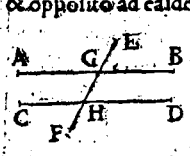
ex C, in alio plano, ad CD, ducatur alia perpendicularis CE, itaut punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito perspicuum est, rectam CD, incidentem in rectas CE, AB facere duos angulos ECD, ADC alternos aequales, cum sint recti; & tamen CE, AB, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem, in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In undecimo vero libro & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, &c.



28. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erũt inter se ipsæ rectæ lineæ.

IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniã angulo EGA, æqualis ponitur angulus GHC, & eidẽ angulo EGA, æqualis est angulus HGB; erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales: Quare lineæ AB, CD, parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.



15. primi
1. pron.
27. primi

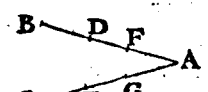
SECVN-

SECVNDO faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus, rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, duobus rectis æquales; 13. primi. Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdem partes, æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

IAMDVDVM pronunciatum vndecimum a principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propositio 29. illi innitatur, ita vt absq; eo demonstrari non possit, necesse est, vt illud ex hactenus demonstratis theorematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, cum Proclo confirmemus, vt antea pollicitis sumus. Hoc autem facile præstabimus, si prius duo explicemus, quorum primum hoc sit.

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.

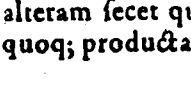


EXEANT a puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quã D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectas lineas A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & linea ipsæ

ultra produci, quod est absurdum cum ponantur infinite iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ A B, A C producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam.

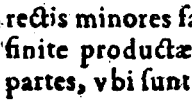
tex. 35. *Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cælo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum. Secundum, quod debes explicari, ita se habet.*

SI duarum parallelarum rectarum linearũ alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productam secabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, secet ipsã A B, in G. Dico rectam E F. si producatur, secturam esse quoq; ipsam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G angulum faciunt si producantur infinite, excedunt omnem finitam distantiam; igitur & distantiam qua parallela A B a parallela C D, distat, cum hæc distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia G B, a G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam G F, productam secuisse rectam C D. Nam quandiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, vndecimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico re-

co rectas A B, C D, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli D H G, D H F, majores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo communi angulo D H G remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K supra G B, secabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & opposito K G H; Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G; Producta igitur secabit quoque ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum. 13. primi. 5. pron. 23. primi. 28. primi.

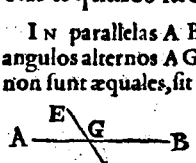
QVAMVIS autem optime a Proclo demonstratum sit vndecimum hoc pronunciatum, vt iure inter theoremata possit referri; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato, præsertim cum facile ei assensus præberi queat, intellecta prius recte propositione 28. Si enim lineæ rectæ propositæ parallelæ sunt, ita vt nũquam coeant, sed semper æquali inter se distantia progrediantur, etiamsi infinite producantur, quando recta in eas incidens facit duos angulos internos, ad easdem partes duobus rectis æquales, vt demonstratum fuit; quis non videt, si eadem recta incidens in duas rectas faciat angulos internos, ad easdem partes duobus rectis minores, alteram alteri appropinquare, ad eas partes, ad quas sunt interni anguli duobus rectis minores; quandoquidem æquali distantia procederent, si ijdem anguli paulo maiores essent, duobus videlicet rectis æquales, vt hæc propositio 28. demonstrauit? 28. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 29. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidẽs linea; Et alternatim angulos inter se æqua-

les efficit; & externum interno, & oppositio, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

In parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primū, angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur communis angulus B G H, erunt duo A G H, B G H, maiores duobus D H G, B G H: At duo A G H, B G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes B, & D, coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes. quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neq; minor; Eadem enim ratione ostenderetur rectas coire ad partes A, & C: Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Badēq; est ratio de angulis alternis B G H, C H G.



4. pron. 13. primi.

11. pron.

Dico secundo, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes oppositō C H G. Quoniam angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum est; & eidem B G H, æqualis est angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G, inter se quoq; æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G.

15. primi. 1. pron.

Dico tertio, angulos internos ad easdem partes, A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniā ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo C H G, interno; si addatur communis A G H, erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: sed duo A G E, A G H, æquales sunt duobus rectis; Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alter-

2. pron. 13. primi.

& alternatim angulos &c. Quod erat demonſtrandum.

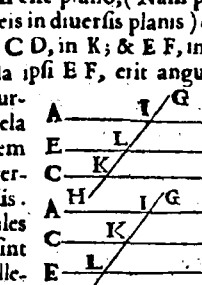
SCHOLION.

CONVERTIT autem hoc præſens theorema duo præcedentia theoremata, vt perſpicuum eſt.

THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ.

SINT rectę A B, C D, eidem rectæ E F, parallelę; Dico & ipſas A B, C D, eſſe inter ſe parallelas. Quoniam omnes hæ lineę in eodem ponuntur eſſe plano, (Nam propoſ. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuerſis planis) ducatur recta G H, ſecans A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipſi E F, erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. Rurſus quia C D, ponitur etiam parallela ipſi E F, erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli A I L, D K I, æquales inter ſe quoq; erunt. Cum igitur ſint alterni, erunt rectæ A B, C D, parallelę inter ſe. Quæ igitur eidem rectę lineæ parallelæ, & inter ſe ſunt parallelæ. Quod demonſtrandum erat.

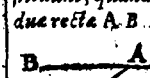


29. primi.
29. prim.
1. pron.
27. primi.

SCHOLION.

QVOD ſi quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas eſſe rectæ C D, & tamen ipſas non eſſe parallelas; Occurrendū eſt, duas A I, B I, non eſſe duas lineas, ſed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim eſt animo, quaslibet parallelas infinite eſſe productas; Cōſtat aūt A I, productā coincidere cum B I. Quamobrem, quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, &

inter se sunt parallelæ, vel certe vnam, & eandem lineam constituunt, quando inter se coeunt. Quod ita demonstrabitur. Sint duæ rectæ A B, A C, coeuntes in A, parallelæ ipsi D E. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta A F, secans D E, in F, vtcunq;. Quoniam igitur A B, D E, sunt parallelæ, erunt anguli alterni B A F, A F E, æquales; Addito ergo communi angulo C A F, erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis C A F, A F E. Sed hi duo æquales sunt duobus rectis cũ sint interni inter duas parallelas; Igitur & duo anguli ad A, duobus erũt rectis æquales; ac propterea in rectũ erũt cõstitutæ ipsa A B, A C. Qd est propositũ.



29. primi.

2. pron.

29. primi.

14. primi.

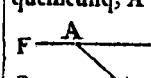
31.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq; faciens angulum quemcunq; A D B; Cui ad A, æqualis constituatur E A D.

23. primi.



Dico igitur rectã E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cum enim anguli alterni A D B, D A E, æquales sint, per constructionẽ; Erunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato, igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

27. primi.

SCHOLION.

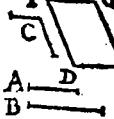
DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem apertè colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quã vna, duci nequeunt. Si.n. duæ ducerentur, cõuenirẽt

ipsæ

ipſæ in puncto eodem. quod eſt abſurdum, cum ſint parallelæ.

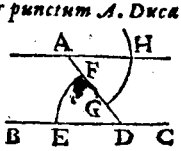
EX hoc porro problemate, & illo, quod propoſ. 23. continetur, facili negotio conſtituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraq; angulũ illũ cõprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim datæ rectæ A, B, oporteatq; conſtituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ recta A ſit æqualis, fiat angulus E D F, angulo C, & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde per E, agatur rectæ E G, ipſi D F, parallela, & per F, recta F G, ipſi D E, parallela ſecans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela ſunt, ex conſtructione; parallelogrammũ erit D E G F. Quod cũ ex cõſtructione, habeat angulũ D, angulo dato C, æqualẽ, & latera D E, D F, circa dictũ angulũ D, datis rectis A, B, æqualia; factũ erit, qd proponitur.

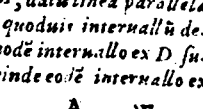


PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipſi B C, per punctum A. Ducatur recta A D, vtcunq; ad B C, & ex D, & A ad idẽ, internallũ quodlibet deſcribãtur duo arcus ad diuerſas partes; vnus ad partes B, alter ad partes C: Deinde of ficio circini arcui E F, abſcindatur ex arcu altero arcus G H, æqualis. Si igiẽ ex A, per H, recta ducatur, erit hæc parallela ipſi B C. Nã anguli E D F, H A G ſunt æquales, vt conſtat ex praxi propoſ. 23. &c. 27. primi.



ALIO modo ducẽ per idẽ punctũ A, datũ lineæ parallela lineæ datæ B C hac arte. Ex cẽtro A, ad quoduis internallũ deſcribatur arcus ſecãs B C in pũcto D; & eodẽ internallo ex D ſumatur punctũ F, in eadẽ recta B C: Deinde eodẽ internallo ex A, & E, deſcribantur duo arcus duo arcus ſecãtes ſe ſe in F. Nã ducta recta A F, erit parallela rectæ B C. Quoniã propter idẽ internallum aſſumptũ recta A F æqualis eſt rectæ D E; & recta A D, rectæ E F, ſi ducerentur hæ lineæ; erit A F, oppoſitæ D E, parallela,



ducatur q; recta per G, ex H, secans A C, in I. Quoniã igitur duo latera B A, B H, æqualia sunt, erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rursus quia latera B G, B H, æqualia sunt lateribus E F, E D, utrumque utrique, & angulus G B H, æqualis angulo D E F, per constructionem; erit basis H G, basi D F, æque adeo ipsi A C, æqualis, angulusque G H B, angulo E D F. Et quoniam recta H I, maior est quam H G, quæ est æqualis ipsi A C, erit quoque maior H I, quam A C. Sed A C, maior est adhuc, quam A I; Multo ergo maior erit H I, quam A I. Quare angulus I A H, maior erit angulo I H A. Additis igitur duobus angulis B A H, B H A, qui ostensi sunt æquales, fiet totus angulus B A C, toto angulo B H G, maior. Sed angulus B H G, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo D, quod est propositum.

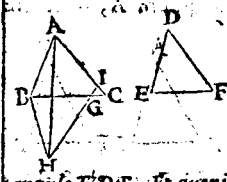
5. primi

4. primi

9. pron.

8. primi

4. pron.

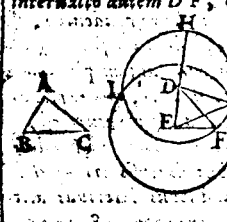


HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis; producatur basis minor E F, ad G, ut sit E G, æqualis basi maiori B C. Deinde centro D, intervallo autem D F, describatur circulus; producaturque E D, ad H, in circumferentiam. Quoniam igitur D H, est æqualis ipsi D F, erit quoque D H, æqualis ipsi A C. Additis igitur æqualibus D E, A B, sient A C, A B, simul æquales toti H E. Sed A C, A B, simul maiores sunt quam B C, atque adeo quam E G; Igitur & H E, maior erit, quam E G. Quare circulus descriptus ex centro E, & intervallo E G, intersecabit rectam E H atque adeo circumferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia sunt duobus lateribus D E, D K, utrumque utrique, (est enim D K, æqualis ipsi D F, per definitionem circuli; D F, autem positum est æquale lateri A C,) & basis B C, basi E G, æqualis; (cum E K, æqualis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, vero recta per constructionem facta sit

15. def.

2. pron.

20. prim



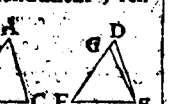
æqualis

æqualis basi B C.) Erit angulus B A C, angulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior est angulo E D F. Quare & angulus A, angulo E D F, maior existet. Quod est propositum. 8. primi 9. primi

THEOR. 17. PROPOS. 26. 26.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumq; latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F, uterque vtrique, hoc est B, ipsi E; & C, ipsi E F D; sitque primo latus B C, quod angulis B & C, adiacet, lateri E F quod angulis E, & E F D, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reliquis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque vtrique, hoc est A B, ipsi D E & A C, ipsi D F, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus A B, non est æquale lateri D E, sit D E, maius: à quo abscindatur recta linea E G, æqualis rectæ lineæ A B; ducaturque recta G F. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, utrumque utrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin; Erit angulus, C, æqualis angulo E F G. Ponitur autem angulus C, æqualis angulo E F D; Quare & angulus E F G, eidem angulo E F D, æqualis erit, pars toti. Quod est absurdum. Non est igitur latus A B, inæquale lateri D E, sed æquale. Quamobrem,



3. primi

4. primi

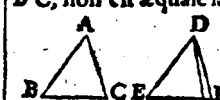
cum

cũ latera A B, B C, æqualia sint lateribus D E, E F, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales; erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

4. primi

SINT secundo latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, utrumque utrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus B C, non est æquale lateri E F, sit E F, maius; ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, utrumq; utrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, ut prius, colligetur instituta ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

3. primi

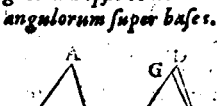


4. primi

16. primi

SCHOLION.

PRIOR *huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex aequalitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuis aequalitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex aequalitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus alterius, aequalia esse, reliquumque angulum reliquo angulo &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quemadmodum eo loco monuimus.*

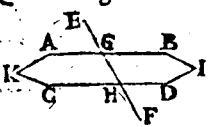


THEOR. 18. PROPOS. 27.

27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erũt inter se illæ rectæ lineæ.

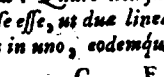
IN duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta C D, usque ad punctum I,) & angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & oppositio D H G; quod est absurdum; quoniam externus interno maior est 16. primi



Quod si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno; & oppositio A G H. quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D; Quare parallelæ erũt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur, lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens &c. Quod erat ostendendum.

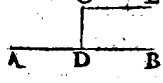
SCHOLION.

NECESSE est, ut lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano, ut ex definitione constat: Quare non satis est duos angulos alternos æquales inter se esse, ut duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in uno, eodemque existere plano. Fieri enim potest, ut linea recta incidẽs in duas rectas nõ in eodẽ plano existentes, faciat alternos angulos aquales. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quæ in subiecto plano existit; &



ex

re C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpendicularis C E, ita ut punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito perspicuum est, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B facere duos angulos E C D, A D C alternos æquales, cum sint recti: & tamen C E, A B, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem, in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In undecimo vero libro & aliis, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diversis planis; quia in illis libris disseritur de solidis, in quibus diversa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.

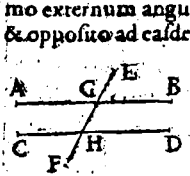


28. THEOR. 19. PROPOS. 28.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erũt inter se ipsæ rectæ lineæ.

In duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primo externum angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniã angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C, & eidẽ angulo E G A, æqualis est angulus H G B; erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales: Quare lineæ A B, C D, parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatus interno G H D.

15. primi
1. pron.
27. primi



SECVN-

SECVNDO faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus, rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt autem & anguli A G E, A G H, duobus rectis æquales; 13. primi. Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdem partes, æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

IAMDVDVM *pronunciatum vndecimum a principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propositio 29. illi innitatur, ita vt absq; eo demonstrari non possit, necesse est, vt illud ex hactenus demonstratis theorematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, cum Proclo confirmemus, vt antea pollicitisumus. Hoc autem facile præstabimus, si prius duo explicemus, quorum primum hoc sit.*

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.

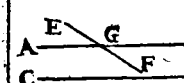


EXEANT *a puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G; Item puncta B, & C, plus quã D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ*

ultra produci, quod est absurdum cum ponantur infinite iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ A B, A C producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam.

tex. 35. *Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum. Secundum, quod debet explicari, ita se habet.*

SI duarum parallelarum rectarum linearũ alteram secet quædam recta linea, reliquam quoq; productam secabit.



SINT duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, secet ipsã A B, in G. Dico rectam E F, si producatur, secturam esse quoq; ipsam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G angulum faciunt si producantur infinite, excedunt omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela A B a parallela C D, distat, cum hæc distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia G B, a G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam G F, productam secuisse rectam C D. Nam quandiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia a G B, remouebitur, quam C D, ab eadem G B, vt conflat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, vndecimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



IN rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico re-

co. rectas A B, C D, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, duobus rectis æquales; Erunt duo anguli D H G, D H F, majores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo communi angulo D H G remanebit angulus D H F, maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K supra G B, secabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externum D H F, æqualem interno, & opposito K G H; Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G; Producta igitur secabit quoque ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum. 13. primi. 5. pron. 23. primi. 28. primi.

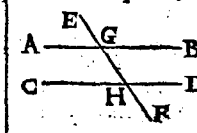
QVAMVIS autem optime a Proclo demonstratum sit vndecimum hoc pronunciatum, vt iure inter theoremata possit referri; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato, præsertim cum facile ei assensus præberi queat, intellecta prius recte propositione 28. Si enim lineæ rectæ propositæ parallelæ sunt, ita vt nũquam coeant, sed semper æquali inter se distantia progrediantur, etiamsi infinite producantur, quando recta in eas incidens facit duos angulos internos, ad easdem partes duobus rectis æquales, vt demonstratum fuit; quis non videt, si eadem recta incidens in duas rectas faciat angulos internos, ad easdem partes duobus rectis minores, alteram alteri appropinquare, ad eas partes, ad quas sunt interni anguli duobus rectis minores; quandoquidem æquali distantia procederent, si ijdem anguli paulo maiores essent, duobus videlicet rectis æquales, vt hæc propositio 28. demonstranis? 28. primi.

THEOR. 20. PROPOS. 29. 29.

IN parallelas rectas lineas recta incidẽs linea; Et alternatim angulos inter se æqua-

les efficit; & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem; & internos, & ad eaſdem partes, duobus rectis æquales facit.

In parallelas A B, C D, recta incidat E F. Dico primũ, angulos alternos A G H, D H G, inter ſe eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior eſt angulo D H G, ſi addatur communis angulus B G H, erunt duo A G H, B G H, maiores duobus D H G, B G H: At duo A G H, B G H, æquales ſunt duobus rectis; Igitur duo D H G, B G H, minores ſunt duobus rectis. Quare cum ſint interni, & ad eaſdem partes B, & D, coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes. quod eſt abſurdum, cum ponantur eſſe parallelæ. Non eſt igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neq; minor; Eadem enim ratione oſtenderetur rectas coire ad partes A, & C: Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eadēq; eſt ratio de angulis alternis B G H, C H G.



4. pron. 13. primi. 11. pron.

Dico ſecundo, angulum externum A G E, æqualem eſſe interno, & ad eaſdem partes oppoſito C H G. Quoniam angulo B G H, æqualis eſt alternus C H G, vt oſtenſum eſt; & eidem B G H, æqualis eſt angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G, inter ſe quoq; æquales. Eodem modo demonſtrabitur, angulum B G E, æqualem eſſe angulo D H G.

15. primi. 1. pron.

Dico tertio, angulos internos ad eaſdem partes, A G H, C H G, æquales eſſe duobus rectis. Quoniã oſtenſum fuit, angulum externum A G E, æqualem eſſe angulo C H G, interno; ſi addatur communis A G H, erunt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: ſed duo A G E, A G H, æquales ſunt duobus rectis; Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alter-

2. pron. 13. primi.

& alternatim angulos &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

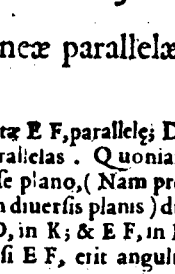
CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR. 21. PROPOS. 30.

30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectę A B, C D, eidem rectæ E F, parallelę; Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam omnes hæ lineę in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducatur recta G H, secans A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F, erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. Rursus quia C D, ponitur etiam parallela ipsi E F, erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli A I L, D K I, æquales inter se quoq; erunt. Cum igitur sint alterni, erunt rectæ A B, C D, parallelę inter se. Quæ igitur eidem rectę lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



29. primi.

29. prim.

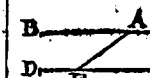
1. pron.

27. primi.

SCHOLION.

QVOD si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendū est, duas A I, B I, non esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinite esse productas; Cōstat aūt A I, productā coincidere cum B I. Quamobrem, quæ eidem rectæ lineæ parallelæ, &

inter se sunt parallelæ, vel certe vnam, & eandem lineam constituunt, quando inter se coeunt. Quod ita demonstrabitur. Sint duæ rectæ A B A C, coeuntes in A, parallelæ ipsi D E. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta A F, secans D E, in F, vtcunq; Quoniam igitur A B, D E, sunt parallelæ, erit anguli alterni B A F, A F E, æquales; Addito ergo communi angulo C A F, erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis C A F, A F E. Sed hi duo æquales sunt duobus rectis cũ sint interni inter duas parallelas; Igitur & duo anguli ad A, duobus erũt rectis æquales; ac propterea in rectũ erũt cõstitutæ ipsæ A B, A C. Qđ est propositũ.



29. primi.

2. pron.

29. primi.

14. primi.

31.

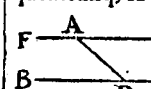
PROBL. 10. PROPOS. 31.

A DATO puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq; faciens angulum

23. primi.

quemcunq; A D B; Cui ad A, æqualis constituatur E A D. Dico igitur rectã E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi B C. Cum enim anguli alterni A D B, D A E, æquales sint, per constructionẽ; Erunt



27. primi.

rectæ B C, E F, parallelæ. A dato, igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

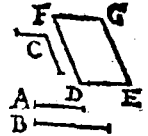
DEBET autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem apertè colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciens angulum aliquem cum lineâ data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quã vna, duci nequeunt. Si.n. duæ ducerentur, cõuenirẽt

ipsæ

ipsæ in puncto eodem. quod est absurdum, cum sint parallelæ.

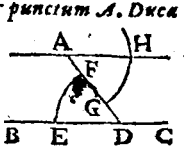
EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, latera; angulũ illũ cõprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim datæ rectæ A, B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, latera; circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta D E, quæ recta A sit æqualis, fiat angulus E D F, angulo C, & recta D F, recta B, æqualis. Deinde per E, agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergo & latera D F, E G, & D E, F G, parallela sunt, ex constructione; parallelogrammũ erit D E G F. Quod cũ ex cõstructione, habeat angulũ D, angulo dato C, æqualẽ, & latera D E, D F, circa dictũ angulũ D, datis rectis A, B, æqualia; factũ erit, qd proponitur.

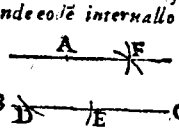


PRAXIS.

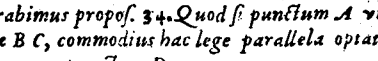
SIT ducenda parallela ipsi B C, per punctum A. Ducatur recta A D, veniatq; ad B C & ex D. & A ad idẽ, internallũ quodlibet describãtur duo arcus ad diuersas partes; vnus ad partes B alter ad partes C: Deinde officio circini arcui E F, abscindatur ex arcu altero arcus G H æqualis. Si igit ex A, p H, recta ducaã, erit hæc parallela ipsi B C. Nã anguli 27. primi. E D F, H A G sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c.



ALIO modo duceꝛ per idẽ punctũ A, datũ linea parallela lineæ datæ B C hac arte. Ex cẽtro A, ad quoduis internallũ describãt arcus secãs B C in pũcto D; & eodẽ internallo ex D sumatur punctũ F, in eadẽ recta B C: Deinde eodẽ internallo ex A, & E, describanꝰ duo arcus duo arcus secãtes se se in F. Nã ducta recta A F, erit parallela rectæ B C. Quoniã propter idẽ internallum assumptũ recta A F æqualis eſt rectæ D E; & recta A D, rectæ E F, si ducerentur hæ lineæ; erit A F, oppositæ D E, parallela,



vt posiea demonstrabimus propos. 34. Quod si punctum A vicinum fuerit rectæ B C, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ B C, nempe E, quod tamen aliquantulum distet a puncto D. (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo rectius parallela ducetur) Eodem interuallo arcus describatur ad partes A : Deinde ex A, interuallo D E alter arcus descriptus seces priorem arcum in F. Recta igitur ducta A F, erit parallela rectæ B C, vt prius; quia recta A F, æqualis est rectæ D E, ob idem interuallum; & recta A D, rectæ E F, si hæ rectæ ductæ essent, &c.



32. THEOR. 22. PROPOS. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto : Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C ad D. Dico primo, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectę A B.

31. primi.

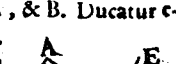
Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, erunt anguli alterni A, & A C E, æquales. Rursus, quia recta B D, in easdem parallelas incidit,

29. primi.

29. primi.

erit angulus externus D C E, æqualis interno B; Additis igitur æqualibus A C E, & A, fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B æqualis. Quod est propositum.

2. pron.



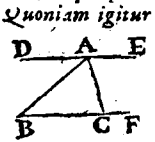
DICO secundo, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cũ enim exter-

externus angulus A C D, ut ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis A C B, erunt duo anguli A C D, A C B, æquales tribus A, B, & A C B: 2. pron.
Sed duo A C D, A C B, æquales sunt duobus rectis; Igitur 13. primi.
& tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales.
Quare cuiuscunque trianguli uno latere producto, &c.
Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

CVM *demonstratum sit propos.* 16. *angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse utrolibet interno, & opposito; Hic autem, eundem externum eisdem internis esse æqualem; perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo. Vt in triangulo proposito angulus A, superatur ab angulo A C D, angulo B; Et angulus B, superatur ab eodem angulo A C D, angulo A, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos.* 17. *duos angulos cuiuslibet trianguli, quomodocunq; sumptos, duobus esse rectis minores; Hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos a duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, a duobus rectis deficiunt, angulo A C B, &c.*

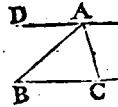
OMNE *porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A, ducatur recta E A F, parallela D F. Quoniam igitur* 31. *primi.*
anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt; si addantur æquales E A C, & A C B, 29. *primi*
(sunt enim & hi alterni) erunt duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B æquales. Addito ergo communi angulo B A C, 2. *pron.*



erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. *Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales. quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protra-*

ctum

ctis, æquale esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniam anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus re-
13. primi. ctis, vt ostensum fuit; Sunt autem, & anguli ACF, ACB,



duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC ACB angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB
3. pron. remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CF, recta sitq; angulus ACF, æqualis duobus angulis ABC, BAC: Dico, rectas BC, CF, in directum iacere. Cum enim angulus ACF, æqualis sit angulis ABC, BAC; si addatur communis angulus ACB, erunt anguli
2. pron. ACF ACB, æquales angulis ABC BAC, ACB: Sed ABC,
32. primi. BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACF, ACB; duobus erunt rectis æquales. Quare BC, CF,
14. primi. vnam lineam rectam constituunt.

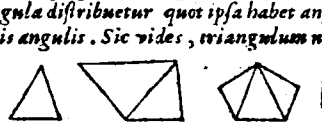
QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuscunq; figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propos. 32. colligemus, quot nam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

HOC est, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis; Anguli vero secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autē tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tri-

bis tribus rectis, sex videlicet rectis. Et sic de reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, unde nec figuram constituunt, sed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ constitutionem requirantur. Atq; ita triangulum, quia habet tria latera, totidemq; angulos, erit prima inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus relinquitur vnus; Sic erit figura habens 20. latera seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius subtractus a 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaq; figura contenta 20. lateribus, cum sit decimaoctaua, habebit 20. angulos æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoq; omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quos ipsa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam a quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, & solum ad duos propinquos angulos non possunt duci: Quare in tot triangula distribuetur quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrãgulum vero in duo secari; quinquangulum in tria; sexangulum in quatuor, &c. Cum igitur anguli horũ triangulorũ constituãt oẽs angulos rectilineæ figuræ proteſitæ, & oẽs anguli cuiuslibet triãguli æquales sint duobus rectis; perſpicuũ eſt omnes angulos figuræ cuiuſuis rectilineæ æquales eſſe bis tot rectis, in quot triãgula diuiditur, hoc eſt, quota ipſa eſt inter rectilineas figuras; Quod quidem manifeſte perſpicitur in propoſitis figuris. 32. primi.

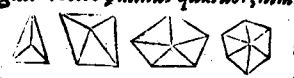


Secundus modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis, æquales ſunt bis tot rectis angulis, dempt-

ptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

Hoc est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis: Ita etiã anguli figuræ continentis 20. latera æquialebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c.

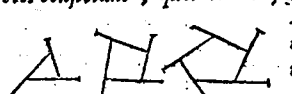


Demonstratio autẽ huius rei talis est. Si ab aliquo puncto intra figurã assumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosue, figura ipsa continet: Cum igitur anguli cuiuscunq; trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt: At anguli circa punctum intra figuram assumptum non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum, quot latera vel angulos continet figura: Sunt autem illi anguli circa dictũ punctũ æquales 4. rectis, vt collegimus ex propos. 15. Quamobrem anguli cuiuscunq; figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor quot ipsa figura continet angulos, seu latera. quod est propositum.

32. primi.

Ex hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiuslibet rectilineæ producantur versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur cũ duob⁹ rectis, atq; adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosue figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus: Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni, & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt.

13. primi.



Exemplum In triangulo quouis, anguli interni & externi simul æquales sunt sex rectis; Cum igitur interni duobus sint

bus sint recti æquales, erunt soli externi æquales quatuor rectis. In quadrilatero, anguli externi, & interni simul æquales sunt octo rectis: Cum igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, erunt & soli externi quatuor rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni, & externi sunt æquales 10. rectis; quoniam vero interni adæquantur sex rectis, remanebunt externi æquales quatuor rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur; Eademq; est ratio in alijs omnibus figuris.

EX CAMPANO.

Si pentagoni singula latera producantur in partem vtramq;, ita vt quælibet duo extra coeant; efficientur quinq; anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus rectis.



IN pentagono A B C D E, latera in vtrāq; partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinq; angulos F, G, H, I, K æquales esse duobus rectis. In triangulo enim B H K, cum latus H B, sit protractum ad F, erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis: Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinq; angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinq; anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum. 32. *primi.* 2. *pron.* 32. *primi.*

COROLLARIVM. I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusq; alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq; erunt ipsa triangula. 3. *pron.*

COR-

COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum; Nam reliqui duo simul conficient vnum rectum. Quod si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem; Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto. Si denique; dictus angulus extiterit acutus, vtrumq; reliquorum maiorem esse semirecto; Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto.

COROLLARIVM. III.

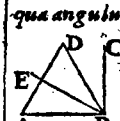
PERSPICVVM quoq; est, iquemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti; Vel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.

COROLLARIVM. IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum, prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum demiq; tertiam partem vnius recti.

SCHOLION.

PORRO extertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, constituatur triangulum æquilaterum A B D: Et quia per corollarium 3. angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo A B D, bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.



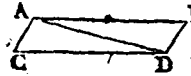
1. primi.

9. primi.

THEO-

THEOR. 23. PROPOS. 33. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungũt; Et ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.



SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipſas autem coniungant ad eaſdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque eſſe, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales; Quare cum duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia ſint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq;, & angulus quoq; dictis lateribus incluſi æquales; erunt baſes B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli ſint alterni inter rectas A C, B D, erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, eaſdem eſſe æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonſtrandum. 29 primi. 4 primi. 27 primi.

SCHOLION.

DIXIT *Euclides, lineas æquales, & parallelas ad eaſdem partes debere coniungi, vt coniungentes ſint & æquales & parallelæ. Nam ſi ad partes diuerſas coniungerentur, vt ad A, & D; Item ad B, & C, neque coniungentes eſſent parallelæ vnquam, ſed perpetuo ſe mutuo ſecarent, neq; eſſent æquales, niſi raro admodum, vt ex ſequenti propoſitione conſtabit.*

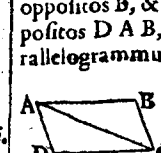
THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quæ ex

aduerſo

aduerſo & latera, & anguli; atq; illa bifariã ſecat diamteer.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera oppoſita A B, D C, inter ſe eſſe æqualia, nec non latera oppoſita A D, B C: Item angulos oppoſitos B, & D, æquales inter ſe eſſe, nec non angulos oppoſitos D A B, & D C B: Deniq; ducta diametro A C, parallelogrammum ipſum bifariam ſecari. Cum enim A B, D C, ſint parallelę, erunt anguli alterni



29. primi. B A C, D C A, æquales. Rurſus quia A D, B C, 29. primi. ſunt parallelę, erũt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaq; cum duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales ſint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterq; vtriq;; & latus A C, dictis angulis adiacens commune vtriq; triangulo; erit 26. primi. recta A B, æqualis oppoſitæ rectę D C, & recta B C, oppoſitæ rectę A D. quod eſt primum. Erit rurſus eadem de cauſa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia ſi æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli B C A, 2. pron. D A C, toti quoq; anguli B A D, B C D, fiunt æquales; conſtat ſecundum, angulos nimirum oppoſitos eſſe æquales. Quoniam vero duo latera A B, B C, trianguli A B C æqualia ſunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumq; vtriq;; & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam 4. primi. oſtendimus; erunt triangula A B C, C D A, æqualia, ideoq; parallelogrammũ A B C D, diuiſum bifariam a diametro A C, quod tertio proponebatur. Parallelogrammorum igitur ſpatiorum æqualia ſunt inter ſe, quę ex aduerſo &c. Quod oſtendendum erat.

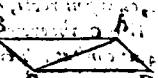
SCHOLION.

APPOSITE *dixit Euclides, ſolummodo parallelogrammum a diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat, anguli etiam bifariam diuiduntur a diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perficua erũt, ſi prius oſtenderimus, quatuor haſce figuras, Quadratum, Altera*

altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hæc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, latera opposita A B, D C, æqualia; Item opposita latera A D, B C. Dico A B C D esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemq; lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, utrumque utrique, & basis A C, communis; igitur erit angulus B, angulo D, æqualis. Quoniam latera A B, B C, æqualia sunt lateribus C D, D A, utrumque utrique, & anguli B, D, ostensi æquales; erit angulus B A C, angulo D C A, alterno æqualis, & angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare erunt A B, & D C, parallelæ; Item A D, & B C, quod est propositum. 8. primi 4. primi 27. primi

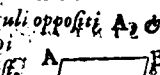


HINC constat, Rhombum, & Rhomboidē esse parallelogrammas, quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, ut manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Convertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. ut patet. ix.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

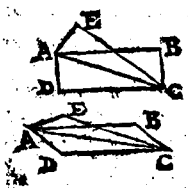
SINT in quadrilatero A B C D, anguli oppositi A, & C, æquales; Item oppositi anguli B, & D. Dico A B C D, esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C esse parallelas; Itemq; lineas A D, B C. Nam si æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D; erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, ut ad propos. 32. demon- 2. pron.



28. primi

stravimus, erunt duo A, & E, duobus rectis æquales. Quare A D, B C, parallelæ sunt. Eadē ratione erunt A B, D C, parallelæ. Erunt. n. duo quoq; anguli A, & D, duobus angulis B, et C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiā manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrāmum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.

HOC theorema convertit secundam partem propositionis 34. ut constat. Tertia autem pars non potest converti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, uel Rhomboides A B C D, quod parallelogrammum esse ostensum est; in quo ducta diametro A C, constituatur super A C, triangulo A B C, æquale triangulū A E C, inuerso ordine, ita ut latus C E, sit æquale lateri A B, & A E, ipsi C B, fiatq; trapezium A E C D. Quoniā uero triāgulū A E C, triāgulo A D C, æquale est,



34. primi

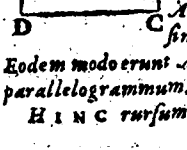
quod diameter A C, bifariā secet parallelogrāmū D B: Erit et triangulū A E C, triangulo A D C, æquale: Ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuiditur a diametro A C.

QVOD si quadrilaterum aliquod diuiditur bifariam ab utraque diametro, illud parallelogrammum erit, ut ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti; Dico ipsum esse parallelogrammum; hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas; Itemque A D, B C. Quoniam duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti; erunt A D, B C parallelæ:



28. primi

Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeo A B C D, parallelogrammum: quod est propositum.

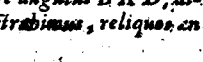
HINC rursum constat, Quadratū, & Altera parte longius

gius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, ut liquet ex eorum definitionibus.

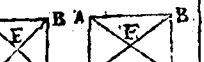
His in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro; Angulos uero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, ut paulo ante monuimus. Sit enim Quadratum, uel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniã igitur duo latera B A, A C, trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, utrumque utrique, & basis B C, basi D C; (sunt enim hæ figuræ æquilaterę) erũt anguli B A C, D A C, æquales; Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro. 8. primi



Sit rursus, Altera parte longius, uel Rhomboides A B C D, in quo diameter A C, sitq; maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B, maius est latere B C, erit angulus B C A, maior angulo B A C: Est autem angulus B C A, æqualis angulo D A C, alternosquod B C, A D parallelæ sint. (Est enim A B C D, ostensum esse parallelogrammũ.): Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atque propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur a diametro A C. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos. 18. primi 29. primi



Eodem fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte lõgiore æquales esse; At uero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorẽ quidem eam quæ angulos acutos, minorem uero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit. n. quadratũ, uel altera parte lõgius A B C D, in quo diametri A C, B D, quas dico esse æquales. Cũ. n. duo latera A B, B C, triãguli A B C, æqualia sint duobus lateribꝰ A B, A D, triãguli



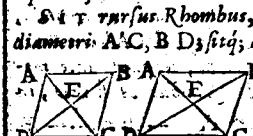
D A D, utrumque utrique, & angulus A B C, angulo B A D, quia uterque rectus; Erit basis A C, basi B D, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.

4. primi

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri A C, B D, sitq; angulus B A D, maior; A B C, minor. Non enim æquales sunt, quia alias uterque esset rectus, cum ambo æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem esse diametro A C. Quoniam duo latera A B, A D, trianguli B A D, æqualia sunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, utrumque utrique, & angulus B A D, angulo A B C, maior existit; erit basis B D, maior basi A C, quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, ut ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ A C, B D, inæquales sunt, licet coniungant parallelas A B, D C, quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, ut perspicuum est.

29. primi

24. primi



IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli E A D, E D A, trianguli A E D, æquales sint alternis angulis E C B, E B C, trianguli B E C, uterque utrique; & latus A D, æquale lateri B C, opposito; Erit, & A E recta rectæ C E, & recta D E, rectæ B E, æqualis. Quare utraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.

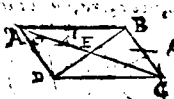
29. primi
34. primi
26. primi

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariã diuidunt, parallelogrammũ est.

IN quadrilatero enim A B C D, diametri A C, B D, se mutuo bifariam diuidant in E. Dico A B C D, parallelogrammum esse. Cum enim latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sint lateribus C E, E D, trianguli C E D, & anguli contenti

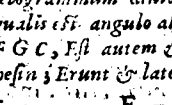
tenti ad uerticem E, æquales, quæque. 15 *primi*
Erunt & bases A B, C D, æquales, & 4. *primi*
angulus A B E, angulo alterno C D E,
æqualis. Quare recta A B, C D, pa- 27. *primi*
rallelæ sunt. Eadem ratione parallele ostendentur A D, C B. Parallelogrãmum ergo est A B C D.



H V C quoque referri potest hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariã quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

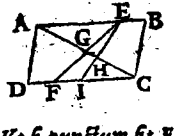
I N parallelogrammo A B C D, diametrum A C, bifariã secet recta E F, in puncto G; Dico parallelogrammum diuidi bifarium. Quoniam angulus E A G, æqualis est angulo al 29. *primi*
terno F C G, & angulus E G A, angulo F G C, Est autem & 15. *primi*
latus A G, lateri C G, æquale per hypothesin; Erunt & late-
ra E G, F G, æqualia. Quare cum late- 26. *primi*
ra A G G E, æqualia sint lateribus C G,
G F, & anguli quoque contenti æquales;
erunt triangula A G E, C G F, æqualia. 4. *primi*
Addita igitur communi quantitate B C
G E, erit triangulum A B C, trapezio B C F E, æquale; Sed 2. *pron.*
triangulum A B C, dimidium est parallelogrammi A B C D, 34. *primi*
Igitur & trapezium B C F E, dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoque recta E F, parallelogramum bifariã secat.



S E C E T iam E F, parallelogrammum bifariam; Dico, & diametrum A C, bifariam secari in G. Si enim non bifariam diuiditur in G, dividatur bifariam in alio puncto, vt in 10. *primi*
H, per quod ducatur recta E H I; Eritque, vt iam demonstrauimus, E I C B, trapezium dimidium parallelogrammi A B C D, atque adeo æquale trapezio E F C B quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur A C, bifariam in G, & non in alio puncto. quod erat propositum.

H I N C facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrãmi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrã-

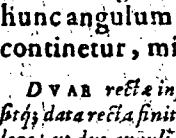
mũ, vel extra, quod tamẽ non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrũ bifariã; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, q̃ parallelogrãmũ bifariã secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere A B, ducenda est recta E F, per G punctum, in quo diameter A C, bifariam diuiditur; & sic de alijs punctis.



DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problemæ non inlucundam. videlicet.

INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarũ faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum cum illo, qui lineis datis continetur, minorem esse duobus rectis.

DVAE rectæ infinitæ A B, A C, contineant angulũ B A C, sitq; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, ut duo anguli E, & B A C, minores sint duobus rectis: Oportet igitur inter rectas A B, A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, ch alterutra uero illarum, nimirũ cum A C, facientem angulum æqualem angulo dato E. Fiat angulus C A F, æqualis angulo E, & producta F A, ad G, sit A G, æqualis rectæ D; & per G, ducatur G B, parallela ipsi A C, secans A B, in B: Deinde per B, ducatur B C, parallela ipsi A G, secans A C, in C. Dico rectam B C, collocatam inter rectas A B, A C, æqualem esse rectæ D, angulumq; B C A, angulo E. Cum enim parallelogrammum sit, per constructionem, A C B G, erit rectæ BC, rectæ G A, æqualis; At G A, æqualis est, per constructionẽ, rectæ D; Igitur & B C, rectæ D, æqualis erit. Rursus quia anguli B C A, angulo alterno C A F, æqualis est; & eidem angulo C A F, æqualis est, per constructionem, anguli E; erunt anguli E, & B C A, æquales. Quod est propositum.



23. primi. 3. primi 31. primi 34. primi 32. primi 29. primi.

Cæterum

Caterum ex conſtructione manifeſtum eſſe cuilibet poteſt, cur duo anguli dati minores eſſe debeant duobus rectis. Nam alias nan fieret triangulũ A B C, ſi anguli B A C, *&* B C A, *æquales eſſent duobus rectis, vel maiores, ut conſtat ex propoſ.* 17. *uel* 32.

EX PROCLO.

In omni figura rectilinea latera habente numero paria, ſi quidem fuerit æquilatera, & æquiangula; erunt duo quælibet latera oppoſita, parallela inter ſeſe.

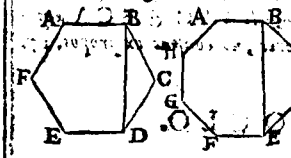
Latera oppoſita dicuntur illa duo, quę ex utraque parte latera habent æqualia numero; ut in hexagono A B C D E F, latera oppoſita erunt A B, E D; quoniam tam ad partes A, & E, duo ſunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono uero A B C D E F G H, latera oppoſita erũt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria ſunt latera, quam ad partes B, & E. Et ſic in aliis figuris æquilateris parium laterum, ex utraque parte oppoſitorum laterum, erunt tot latera, quot ſunt in dimidio numero laterum, minus uno. Vt in quadrangulo erit unum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur duo quælibet latera oppoſita eſſe parallela; A B, nimirum ipſi E D; in hexagono; & A B, ipſi F E, in octogono, & ſic de cęteris. Connectantur enim duo extrema oppoſitorum laterum ad eaſdem partes linea recta, qualis eſt in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, ut in 9. propoſ. demonſtrauimus, ſex anguli hexagoni æquales ſunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiuſdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales: Sunt autem anguli B C D, C B D, C D B, trianguli B C D, duobus rectis æquales; Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis æquales erunt; Quare parallelæ erunt A B, & E D. Rurſus quia octo anguli octogoni æquales ſunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, ſex rectis æquales. Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, æquales quatuor rectis; Igitur duo reliqui anguli A B B, F E B, duobus erũt rectis æquales, atq; adeo A B, F E, parallelæ erũt. Eodẽ modo demõſtrabitur, in cęteris aliis

32. *primi*

28. *primi*

28. *primi*

figuris huiusmodi angulos duos ad lineã rectã extrema oppositorũ laterum coniungentem existentes, duobus rectis æquales. Nam in decagono auferet ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis; At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis: Ablatis igitur ex relinquũtur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum, eadem linea abscindet hexagonũ, cuius anguli sunt octo rectis æquales; At sex anguli eius figuræ æquales sunt decẽ rectis; demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.



QVAMVIS autem omnis figura æquiangula pariem laterum habeat data opposita parallela, vt ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & aliis Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea que in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

35. THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

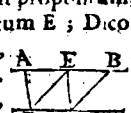
INTER duas parallelas A B, C D, super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F; (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, ut in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E æqualis est rectæ C D oppositæ; & eidem C D æqualis est F B, in parallelogrammo C D B F; Erunt A E, F B, inter se æquales: Dempta igitur communi F E, remanebit A F, ipsi E B, æqualis: Est autem & A C, ipsi E D, æqualis in parallelogrammo C D E A, & angulus B E D, angulo F A C, externus interno. Quare triangulũ F A C, triangulo B E D, æquale erit: Addito igitur communi trapezio



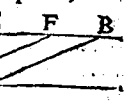
34. primi
1. pron.
3. pron.
34. primi
29. primi
4. primi

pezio C D E F, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F æquale. Quod est propositum. 2. pron.

CADAT secundo punctum F, in punctum E; Dico rursus, parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia esse. Erunt enim ut prius, rectæ A E, E B, æquales, atque adeo triangula E A C, B E D, æqualia. Addito igitur communi triangulo C D E, fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia. 4. primi 2. pron.



CADAT tertio punctum F ultra E, ita ut recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, ut prius, rectæ A E, F B, sunt æquales; si communis addatur E F, erit tota A F, toti E B, æqualis, atque adeo triangulum F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo communi triangulo E G F, remanebit trapezium A E G C, trapezio F G D B, æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum. 2. pron. 4. primi 3. pron. 2. pron.

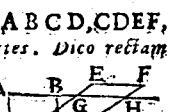


SCHOLION.

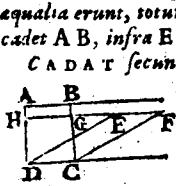
CONVERTEMVS *facile hanc propositionem, hoc modo*.

PARALLELOGRAMMA æqualia super eandem basin, ad easdemque partes cõstituta, erunt inter easdem parallelas.

SINT *duo parallelogramma æqualia* A B C D, C D E F, *super eandem basin* C D, *& ad easdem partes. Dico rectam* A B *productam, in directũ iacere ipsi* E F, *& propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim* A B, *producta uel cadet infra* E F, *uel supra; Cadat primo infra, qualis est* A H. *Erit igitur parallelogrammum* C D G H, *æquale parallelogrammo* A B C D: *Ponitur autem* 35. primi



autem eidem parallelogrammo A B C D, æquale parallelogrā-
1. pron. mum C D E F; Quare parallelogrāma C D E F, C D G H, æqualia erunt, totum, & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet A B, infra E F.



CADAT secundo A B, producta supra E F. Cadet igitur F E, protracta infra A B: Quare, ut prius, erunt parallelogramma A B C D, C D H G æqualia, totum & pars, quod est absurdum. Idem absurdū consequeretur, si C F, D E, producerentur usq; ad A B, protractam. Eademq; demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt. hoc est, siue punctum E, sit ultra B, siue non, ut perspicuum est. Non ergo cadet A B, supra E F; sed nec infra, ut demonstratum est: ergo producta, in directum iacet ipsi E F ac proinde parallelogramma A B C D, C D E F, in eisdem sunt parallelis.

36. THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma A C E F, G H D B, super æquales bases C E, H D, inter easdem parallelas A B, C D, Dico ea esse æqualia. Connectantur enim extrema rectarū



C E, G B, ad easdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D, & eidem H D, æqualis est G B. Erunt
34. primi 1 pron. C E, G B, æquales inter se; sunt autem & parallelæ, per hy-
33. primi. pothesin: Quare & C G, E B, ipsas coniungentes parallelæ erunt, & æquales, ideoq; C E B G, parallelogrammum erit. Itaq; cum parallelogramma A C E F, G C E B, sint inter easdē parallelas, & super eandem basin C E, erit parallelogrammū
35. primi. A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rursus quia parallelogramma G C E B, G H D B, sunt inter easdē parallelas, & super eandem basin G B, erit quoq; parallelogrāmum G H D B,

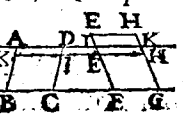
GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, inter se æqualia erũt. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, &c. Quod ostendendum erat. 35. primi. 1. pron.

SCHOLION.

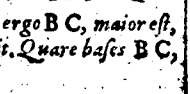
CONVERSVM *huius theorematis duplex est, ad hũc modum.*

PARALLELOGRAMMA æqualia sup bas ses æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basin, super æquales bases sunt constituta.

SINT *primo duo parallelogramma æqualia* A B C D, E F G H, *super bases æquales* B C, F G, *& ad easdem partes constituta; Dico ea esse inter easdem parallelas, hoc est,* A D, *protractam coire in directum cum* E H. *Nam alias cadet aut infra* E H, *aut supra. Quo posito sequitur, totum et partem esse æqualia, quẽadmodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligendæ sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta* B G.



SINT *secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas* A H, B G. *Dico bases* B C, F G, *esse æquales. Si enim altera, nempe* B C, *dicatur maior, abscindatur* B I, *æqualis rectæ* F G, *& ducatur* I K, *parallela ipsi* C D: *Erit; parallelogrãmum* A B I K, *æquale parallelogrammo* E F G H; *& ideo parallelogrammo* A B C D, *pars toti, quod est absurdum. Non ergo* B C, *maior est, quam* F G. *Eadem ratione neque minor erit. Quare bases* B C, F G, *æquales sunt.*



3. primi. 31. primi. 36. primi.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

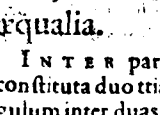
37.

TRIANGVLA super eadẽ basi cõsti-

tuta,

tuta; & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D (Dicitur autē triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars unius, & angulus oppositus alteram tangit.) Dico ea esse æqualia. Per D, enim ducatur D E, parallela rectæ



A C, & D F, parallela rectæ B C. Erunt igitur parallelogrāma A C D E, A C D F, æqualia; Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas: Sed horum dimidia sunt triangula A C D B C D; quod A D, B D, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.

1. primi.

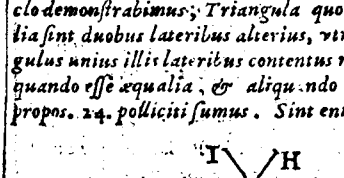
5. primi

4. primi

7. pron.

SCHOLION.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus; Triangula quorū duo latera uni lateri æqualia sint duobus lateribus alterius, utrumque utrique, & angulus unius illis lateribus contentus maior angulo alterius, ali quando esse æqualia, & aliquando inæqualia; Id, quod in propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F, & latera A B, A C æqualia lateribus D E, D F, & angulus A, maior angulo E D F, sintque primo hi duo anguli duobus rectis æquales: Dico triangula esse



æqualia. Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I. fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A, & recta D G, rectæ D F, seu A C; ducanturque rectæ E G, G F. Quoniam igitur duo anguli A, & E D F, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus E D G, æqualis est angulo A; erunt & anguli E D G, E D F, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli

23. primi

guli E D G G D H, duobus rectis æquales; Igitur anguli E D G, E D F, angulis E D G, G D H, æquales erunt: Quare ablato communi angulo E D G, remanebit angulo E D F, æqualis angulus G D H: Est autem eidem angulo E D F, æqualis angulus H D I; Igitur & anguli G D H, H D I, æquales erunt, atque adeo angulus G D H, dimidium erit totius anguli G D I. Rursus quia latera D F, D G, sunt æqualia in triangulo D F G, erunt anguli D F G, D G F, æquales; qui cum æquales sint externo angulo G D I, erit interiori eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Ostensum est autem, angulum G D H, dimidium quoque esse eiusdem anguli G D I: Quare anguli G D H, D G F, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter E H, F G, erunt E H, F G, parallelæ. Quamobrem triangula D E G, D E F, æqualia erunt, cum habeant eandem basin D E, sintque inter easdem parallelas D E, F G. Quoniam uero triangulum D E G, æquale est triangulo A B C, propterea quod latera D E, D G, æqualia sunt lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G; erit & triangulum A B C, triangulo D E F, æquale, quod est propositum.

13. primi
3. pron.
15. primi
5. primi
32. primi
27. primi
37. primi
4 primi

SINT secundo anguli A, & E D F, duobus rectis maiores; Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulu, minor esse triangulo D E F.

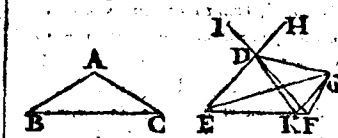


Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I, fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A; & recta D G, rectæ D F, seu A C, æqualis, ducantuxque rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, & E D F, ponuntur maiores duobus rectis, erit & angulus E D G, E D F, duobus rectis maiores; Sunt autem anguli E D G, G D H, æquales duobus rectis; Igitur anguli E D G, E D F, maiores sunt anguli E D G, G D H; Quare ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, maior angulo G D H. Quoniam uero angulus E D F, angulo H D I, æqualis est, erit quoque H D I, maior quam G D H; atque adeo G D H, minor quam dimidium anguli G D I. Rursus quia latera D G, D F, æqualia sunt, erunt anguli D F G, D G F, æquales; qui cum sint æquales externo G D I, aris æquales eorum,

23 primi
3. primi
13. primi
15. primi
5. primi
32. primi

eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Oſtenſum eſt autem, angulum G D H, minorem eſſe dimidio eiuſdē G D I; Quare D G F, maior erit, quam G D H. Abſcindatur ex angulo D G F, angulus D G K, æqualis angulo alterno G D H: Erit ergo G K, parallela ipſi D E, ſecabitq; G K, rectã E F. Ducatur ex D, ad K, ubi G K, ſecat rectam E F, recta D K. Erit igitur triangulum D E G, æquale triangulo D E K. Quoniam autem triangulum D E G, æquale eſt triangulo A B C, propterea quod latera D E, D G, æqualia ſunt lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G; erit & triangulum A B C, triangulo D E K, æquale. Cum igitur D E K, minus ſit triangulo D E F, erit quoque A B C, triangulum triangulo D E F, minus: Quod eſt propoſitum.

23. primi



23. primi

27. primi

27. primi

29. primi

4. primi

9. pron.

SINT tertio anguli A, & E D F, duobus rectis minores: Dico triangulum A B C, quod maiorem habet angulum, maius eſſe triangulo D E F. Producatur E D, ad H, & F D, ad I, fiatq; angulus E D G, æqualis angulo A, & recta D G, rectæ D F, ſeu A C; ducanturq; rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, & E D F, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli E D G, B D F, duobus rectis minores. Sunt autem anguli E D G, G D H, duobus rectis æquales; Igitur E D G, E D F, minores ſunt, quam E D G, G D H; demptoq; communi E D G, remanebit E D F, minor, quam G D H; Eſt uero E D F, æqualis ipſi H D I. Quare & H D I; minor erit, quam G D H, atque adeo G D H, maior eſt dimidio anguli G D I. Quoniam autem D G F, dimidium eſt eiuſdē anguli G D I, ut iam ſupra oſtenſum fuit; erit G D H, maior, quam D G F: Fiat igitur angulus D G K, æqualis angulo G D H, ducta recta G K, q̃ ſecabit rectam E F, protractã in K, & ducatur recta D K. Eritque, ut prius, G K, parallela ipſi D E, triangulumq; D E G, triangulo D E K, æquale: Eſt autem iterum D E G, æquale ipſi A B C. Igitur & A B C, æquale eſt ipſi D E K; Quocirca cum D E K, mai-

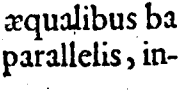
ius sit quam D E F; *erit &* A B C, *maius, quam* D E F; *Quod demonstrandum erat.*

Ex *his perspicuum est, cur Euclides in propos.* 24. *solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, ut ibidem admonuimus.*

THEOR. 28. PROPOS. 38. 38.

TRIANGVLA *super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.*

Inter parallelas A B, C D, & super æquales bases C E, F D, sint constituta triangula A C E, B F D. Dico ipsa esse æqualia. Ducatur n. E G, parallela ipsi A C, & D H, ipsi B F; Erunt q; parallelogramma A C E G, B F D H, æqualia. Cum igitur horum dimidia sint triangula A C E, B F D; erunt hæc inter intr se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

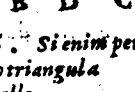


31. *primi*
36. *primi*
34. *primi*
7. *prom.*

SCHOLION.

Conversa *huius ostenderetur ab Euclide propos.* 40.

Colligitur *autem ex hac propositione, si a quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo* A B C, *ex angulo* A, *recta* A D, *diuidens bifariam latus* B C, *in* D; *Dico triangulum* A B C, *bifariam quoque secari. Si enim per* A, *ducatur parallela ipsi* B C, *erunt duo triangula* A B D, A D C, *inter easdem parallelas, et super æquales bases;* *Quare æqualia erunt.*



38. *primi.*

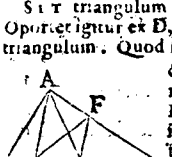
EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in uno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quę bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum A B C, & punctum datum D, in latere B C. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus B C, bifariam, recta D A, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, ut est ostensum: Si uero D, non diuidat B C, bifariam, secetur B C, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta D A, & per per E, parallela E F, ipsi

10. primi

31. primi

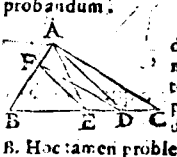


D A, secans A C, in F. Si igitur ducatur recta

37. primi

D F, erit triangulum diuisum bifariam a linea D F. Nam ducta recta E A, erunt triangula E F A, E F D, æqualia, cum sint super eandem basin E F, & inter easdem parallelas E F, A D. Audito igitur communi C F E, erunt tota triangula A E C, C D F, æqualia. Est autem A E C, dimidium totius A B C, ut iam fuit ostensum; Igitur & C D F, dimidium est eiusdem trianguli A B C, quod erat probandum.

2. pron.

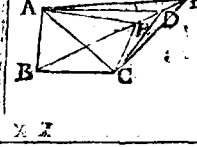


QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate E C, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium uero ad partes C, ut figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur littera E, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos uniuersalius proponemus ad finem textus libri.

39. THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B C, super eandem basin B C, & ad easdē partes; Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi B C. Si enim non



31. primi

est, ducatur ex A, parallela ipsi B C, quæ

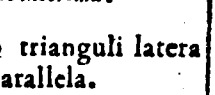
quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primo supra, qualis est A E, cocatq; cum B D, protracta, in E, & ducatur recta E C. Quoniam igitur parallelæ sunt A E, B C, erit triangulo A B C, triangulum E B C, æquale: Est autem per hypothesin triãgulum quoq; D B C, æquale eidem triangulo A B C; Igitur erunt triangula D B C, E B C, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta F C, erũt eadem ratiocinatione triangula B F C, B D C, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat. 37. primi. 1. pron.

SCHOLION.

Ex his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea D E, latera A B, A C, trianguli A B C. bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cũ enim triangula A D E, B D E, sint super æquales bases A D, D E, & inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi A B.) erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidem triangulo A D E, æquale; Igitur triangula D B E, C E D, æqualia erunt: Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta: Quare inter easdem erunt parallelas, & idcirco D E, B C, parallela erunt; Quod est propositum.



38. primi. 1. pron. 39. primi.

ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum quod ab vtraq; diametro bifariã diuiditur, parallelogrammũ est.

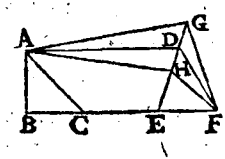
NAM *quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraq; diametro A C, B D. Dico ipſum eſſe parallelogrammũ. Cum enim triangula A D C, B D C, dimidia ſint eiuſdem quadrilateri A B C D, ipſa inter ſe æqualia erunt. Quare cum eandem habeant baſin D C, ad eaſdemq; partes ſint, ipſa in eiſdem parallelis erunt: Atq; idcirco A B, D C, parallela ſunt. Non aliter oſtendemus, parallelas eſſe A D, B C. Parallelogrammum igitur eſt A B C D. Quod eſt propoſitum.*



39. *primi.*

40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia ſup æqualibus baſibus, & ad eaſdem partes conſtituta; & in eiſdem ſunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, ſuper baſes æquales B C, E F, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe in eiſdem parallelis, hoc eſt, rectam ex A, ad D, ductam parallelam eſſe rectæ B F. Si enim non eſt, cadet parallela ipſi B F, per A, ducta vel ſupra A D, vel infra. Cadat primo ſupra, coeanq; cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniã igitur parallelæ ſunt A G, B F, erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale; Ponitur autem, & triangulum D E F, eidem triangulo A B C, æquale: Igitur triangula D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum; Quod eſt abſurdum. Quod ſi parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis eſt A H; ducta recta H F, erũt eadẽ argumẽtatione triãgula H E F, D E F, æqualia, pars & totũ; qđ eſt abſurdũ. Eſt igit̃ A D, parallela ipſi B F. Quare triãgula æqualia ſup æqual.b⁹ baſibus, &c. Q đ erat demonſtrandũ.

38. *primi.*

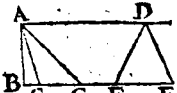
1. *poſt.*

SCHOLION.

EODEM *modo demonſtrari poterit hoc theorema.*

TRI-

TRIANGVLA æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſim, ſuper æquales baſes erunt conſtituta.

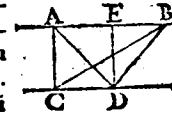


SINT triangula æqualia, A B C, D E F, inter parallelas A D, BF, & ſuper baſes BC, EF, quas dico eſſe æquales. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, maior. Abſciſſa ergo recta C G, æquali ipſi EF, & ducta recta G A, erit triangulum A G C, triangulo DEF, æquale. Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo DEF, æquale: Igitur triangula A G C, ABC, æqualia erũt, pars & totum; quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes BC, EF, ſed æquales. Quod eſt propoſitum. 38. primi. 1. pron.

THEOR. 31. PROPOS. 41. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli.

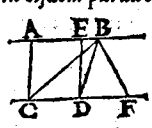
INTER parallelas AB, CD, & ſuper baſin C D, conſtituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum eſſe duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt triangula A C D, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplum eſt trianguli ACD; Igitur & trianguli BCD, duplum erit idẽ parallelogrammũ ACDE. Quamobrem, ſi parallelogrammum cũ triangulo, &c. Quod erat demonſtrãdũ. 37. primi. 34. primi.



SCHOLION.

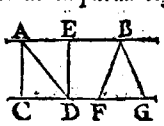
HINC ſequitur, ſi triangulũ duplã habuerit baſin, fueritq; in eiſ-

in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis C D producatur ad F, vt sit D F, æqualis ipsi C D, ducaturq; recta F B, erit triangulum B C F, duplum trianguli B C D, quod triangula B C D, B D F æqualia sint: Est autem & parallelogrammum A C D E, duplum eiusdem trianguli B C D: Igitur æqualia erunt triangulum B C F, & parallelogrammum A C D E.



38. primi. 41. primi. 6. pron.

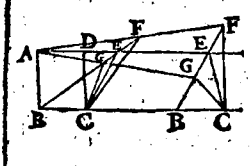
Idem hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintq; in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo A C D E, & triangulo B F G, quorum bases C D, F G, æquales sunt. Ducta enim diametro A D, in parallelogrammo, erunt triangula A C D, B F G, æqualia; Cum igitur parallelogrammum A C D E, duplum sit trianguli A C D: erit quoque idem trianguli B F G, duplum. Eadem ratione si basis F G, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulum hoc esset duplum etiam trianguli B F G, &c.



38. primi. 34. primi. 38. primi.

Conversvm huius theorematis duplex est, hoc modo.

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq; habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemq; parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem.



Sit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli E B C sive eandem habeant basin, sive æquales; Dico rectam ductam A E, parallelam esse rectæ B C. Nam aliæ ductæ parallelæ ex A, cadet aut

supra

ſupra A E, aut infra. Vnde vt in 39. vel 40. propoſ. oſtenderetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. Quod eſt abſurdum.



SIT deinde parallelogrammum A B C D, duplum trianguli E F G, in eiſdemq; parallelis: Dico baſes B C, F G, eſſe æquales. Namſi altera, nempe B C, ſit maior, abſciſſa æquali C H, & ducta H I, parallela ipſi A B, demonſtrabimus parallelogramma A B C D, I H C D, eſſe æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum eſt trianguli E F G; illud quidem per hypotheſin, hoc vero per 41. propoſ.) Quod eſt abſurdum. Idem oſtendemus, ſi baſis F G, maior dicatur. Si enim abſcindatur ipſi B C, æqualis F H ducaturq; recta H E, erunt triangula E F H, E F G, æqualia, pars & totum; (nam vtriusq; dimidium eſt parallelogrammi A B C D; Illud quidē per propoſ. 41. hoc vero per hypotheſin.) Quod eſt abſurdum.

EX PROCLO.

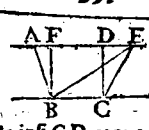
SI triangulum, & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.

INTER lineas parallelas A B, B C, ſint conſtituta trapezium A B C D, & triangulum E B C, ſuper baſim B C, eandem, quæ ſit tamen maior quam altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus eſſe duplo trianguli E B C. Cum enim A D, minor ponatur quam B C, ſumatur A F, æqualis ipſi B C, & ducatur recta C F, quæ erit parallela ipſi A B; Atq; adeo parallelogrammum erit A B C F, quod duplum eſt trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cum ſit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiuſdem trianguli E B C, quod eſt propoſitum.



33. *primi*
41. *primi*

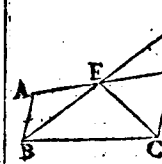
SINT rurſus trapezium, & triangulum, vt prius, ſed baſis



B C, sit minor quã reliqua linea parallela A D, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quam B C, abscindatur D F, æqualis ipsi BC, & ducatur recta B F, quæ erit paralle-
33. primi. la ipsi C D, atq; adeo parallelogrammum erit BCDF, quod dupli-
41. primi. est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij contingens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.

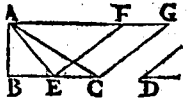


SIT trapezium ABCD, cuius duo latera opposita A B, D C, sint parallela, & super basin B C, constituatur triangulum E B C, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD: Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe B E, donec coeat cum C D, pro-
29. primi. tracto in F. Et quia parallelæ sunt A B, C F, erunt anguli alterni,
15. primi. B A E, F D E, æquales: Sunt autem & anguli A E B, D E F, æqua-
les, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli A B E, la-
26. primi. teri D E, trianguli D F E, æquale, per hypotesin: Igitur & reliqua latera A B, B E, reliquis lateribus, D F, F E, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales. atq;
4. primi. idcirco triangula A B E, D F E, æqualia erunt. Quare addito com-
2. pron. muni triangulo C D E, erunt triangulo C E F, æqualia triangula
38. primi. A B E, C D E: Est autem & triangulum B C E, eidem triangulo C E F, æquale, quod bases B E, E F, oppositæ sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si p C, duceretur parallela ipsi B F. Igitur triangulum C B E, æquale erit triangulis A B E, C D E; & propterea C B E, triangulum dimidium erit trapezii A B C D, quod est propositum.

42. **PROBL. 11. PROPOS. 42.**

DATO triangulo æquale parallelo gram-

grammum constituere in dato angulo rectilineo.



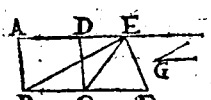
DATVM triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur construere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habēs angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, bifariam in E, & fiat angulus C E F, æqualis angulo D: Ducatur itē per A, recta A F, parallela ipsi B C; quæ secet E F, in F. Rursus per C, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritq; constitutum parallelogrammū C E F G, quod dico esse æquale triangulo A B C. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum C E F G, duplum est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli A E C, quod triangula A E C, A B E, super æquales bases B E, E C, & in eisdem parallelis, sint æqualia: Erunt parallelogrammum C E F G, & triangulum A B C, æqualia inter se. Cum igitur angulus C E F, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo, æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo; Quod erat faciendum.

10. *primi.*
23. *primi.*
31. *primi.*
41. *primi.*
38 *primi.*
6. *pron.*

SCHOLION.

SVBIVNGIT *hoc loco Pelctarius subsequens problema.*

DATO parallelogrammo æquale triangulū constituere, in dato angulo rectilineo.



SIT *datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus C B E, angulo G æqualis, secetq; recta B E, rectā A D, productā in E: Extendatur quoq; B C, ad F, sitq; C F, æqualis rectæ B C. Dico triangulū B E F, habēs angulū E B F,*

23. *primi.*

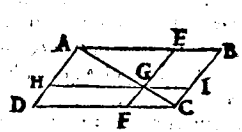
angulo dato G æqualem, æquale esse parallelogrammo ABCD. Ducta enim recta CE, erit parallelogrammum ABCD, duplum trianguli BCE; Item triangulum BFF, eiusdem trianguli BCE, duplum; quod æqualia sint triangula EBC, EBF. Quare æqualia inter se erunt parallelogrammum ABCD, & triangulum BEF.

41. primi. 38. primi. 6. pron.

43.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

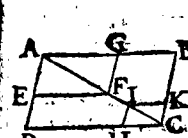
IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



IN parallelogrāmo ABCD, sint circa diametrum AC, parallelogrāma AEGH, CFGI, & complementa DFGH, EBIG, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum enim triangula ABC, CDA, æqualia sint; Itemq; triangula AEG, GHA; si hæc ab illis demantur, remanebunt trapezia CBEG, GDHC, æqualia: Sunt autem & triangula CGI, CGF, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, remanebunt æqualia complementa DFGH, EBIG. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.

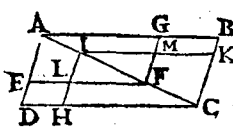
34. primi. 3. pron. 34. primi. 3. pron.

SCHOLION.



EODEM modo hoc theorema demonstratur a Proclo, etiam si duo parallelogramma circa diametrū nō coniungantur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit seiunctum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim primū vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo AECD, circa diametrum AC, consistās

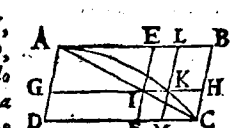
consistant parallelogramma AEFG, CHIK: Dico complementa DEFIH, BKIFG, esse aequalia. Cum enim triangula ABC, CDA, aequalia inter se sint; Item triangula AEF, CHI, aequalia triangulis AGF, CKI; erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, aequalia. Quod est propositum. 34. primi. 3. pron.



Secent se iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum, ita vt communem partem habeant ILFM; Dico adhuc cõplementa DELH, BGMK, esse aequalia. Cum enim aequalia sint triangula ABC, CDA; Item triangula AFG, AFE; erunt reliqua quadrilatera BCFG, & CFE, aequalia; Sunt autem rursus aequalia triangula IFM, IFL; Igitur si haec addãtur dictis quadrilateris, erũt figurae BCIMG, DCILE, aequales: Cum igitur & aequalia sint triangula CIK, CIH, erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam aequalia. Quod est propositum. 34 primi 3. pron. 34. primi. 2. pron. 34 primi. 3. pron.

Conversum quoq; huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

Si parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogrãma, ita vt ex illis duo aduersa sint equalia; consistent reliqua duo circa diametrum.



Ducti duabus rectis EF, GH, quae sint parallelae rectis BC, CD, seqs secent in I, diuidatur parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorũ aduersa duo BEIH, DFIG sint aequalia: Dico reliqua duo AEIG, CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctum I. Si enim non transit, secet diametet CKA, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K, ducatur LM, parallela ipsi BC. Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, aequa- 31. primi. 43. primi.

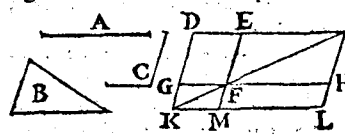
9 *pron.* *æqualia: Est autem* DGK *M, maius quã* DGIF; *Quare & ma ius erit* BHK *I, quã* DGIF. *Cum ergo* DGIF, *æqualè ponatur ipsi* BEIH, *erit etiam* BHK *I, maius, quam* BEIH, *pars quàm totũ; Quod est absurdum. Non ergo diameter* AC, *rectam* GH, *in* K, *secat, sed per punctum I, trãsit. Quod est propositum.*

44. PROBL. 12. PROPOS. 44.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Cõstituatur trian

42. *primi.*



gulo B, æquale parallelogrãmũ DEFG, habens angulũ EFG, angulo C, æqualem, producaturq; GF, ad H, vt

31. *primi.* FH, sit æqualis rectæ A; & per H, ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F. diameter IF, occurrens rectę DG, productæ in K; & per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturq; EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur; Habet enim latus FH, æqua le datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualẽ,

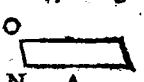
15. *primi.* cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui factus est

43. *primi.* æqualis angulo C: Deniq; parallelogrammum LMFH, æquale est triangulo B, cũ æquale sit cõplemento DEFG, qđ factũ est æquale triangulo B. Ad datã igitur rectã lineam da to triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

QVOD *si quis optet, lineam ipsam A, esse vnum latus pa rallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammũ* FMLH,

F M I. H, ad rectam A, ex ijs quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditũ fuit, effectum erit, quod quæritur.



ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.

SIT data recta AB; datũ parallelogrãmũ CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, vt DG, æqualis sit ipsi CD, & iungatur GE, recta: Eritq; triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, vt demonstrauimus scholio propos. 41. Fiat iã super data recta AB, parallelogrammum ABHI, æquale triãgulo CEG, hoc est, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur AI, ad K, vt sit IK, æqualis ipsi AI, iungaturq; recta BK. Dico triangulum ABK, constitutum super datam rectam AB, habentq; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrammo CDEF. Cum enim triangulum ABK, æquale sit parallelogrammo ABHI, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo CDEF, constat propositum.



44. primi.

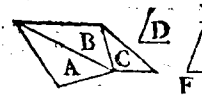
PROBL. 13. PROPOS. 45.

DATO rectilineo æquale parallelogrãmum cõstituere, in dato angulo rectilineo.

DATVM rectilineum sit ABC, & datus angulus D; oportet igitur cõstituere parallelogrammũ æquale rectilineo ABC, qd habeat angulũ æqualẽ angulo D. Resoluatur rectilineũ in triãgula A, B, & C. Deinde triãgulo A, æquale paralle-

42. primi.

logram-



logrammum cõstituatur E F G H, habens angulum F, angulo D, æqualem.

44. *primi.* Item super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo, factumq; erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnũ parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K, inter se sunt æquales, cum vterq; æqualis sit angulo D. Addito igitur cõmuni angulo F G H, erunt duo

29. *primi.* anguli E F G, F G H, qui duobus rectis æquiualent, æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus

14. *primi.* etiam rectis æquales erunt. Quare F G, G K, vnam rectã lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnã rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sint, (cum sint æquales oppositis an-

34. *primi.* gulis æqualibus E F G, H G K.) & duo anguli H I K, I H G,

29. *primi.* duobus sint rectis æquales, &c. Cum igitur E I, F K, sint

30. *primi.* parallelæ; Itemq; E F, I K, quod vtraq; parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, constituere totum vnum parallelogrammum E F L M. Dato ergo rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendũ.

SCHOLION.

Quamvis in hoc problemate Euclides absolute, & simpliciter docuerit, quanam arte parallelogrammum constituatur æquale rectilineæ figuræ datæ, non astringendo nos ad certam aliquam lineam rectam datam, vt in propos. 44. fecerat: Tamen eodem modo, quod iubetur, efficiemus, si recta aliqua linea nobis fuerit assignata. Nam si detur recta linea

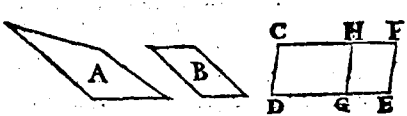
E F,

E F, super ipsam constituemus parallelogrammum E F G H, aequale triangulo A. Et eodem modo super G H, constituemus aliud G H I K, aequale triangulo B, &c. Quibus peractis, constitutum erit super datam rectam E F, parallelogrammum E F L M, aequale rectilineo dato, in dato angulo F, qui aequalis est angulo D, proposito. 44. primi.

PARI ratione, propositis quotcunq; rectilineis, constituemus illis parallelogrammum aequale, si omnia resoluantur in triangula, quibus aequalia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propos. 42. & 44. ceu factum est ab Euclide in hoc problemate. Nam cũ omnia haec parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, veluti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum aequale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atq; A B, resoluatur in triangula A, & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma E G, G I, I L, iuxta artem huius problematis, aequalia constituantur, ex propos. 42. & 44. erit constructũ parallelogrammũ totum E F L M, aequale duobus rectilineis A B & C. Et sic de pluribus.

HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quẽ nos tamẽ alio modo, et breuiori demõstrabimus, in hunc modũ.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



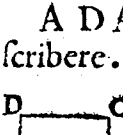
SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. Fiat parallelogrammum C D E F, in quocũq; angulo D, aequale maiori rectilineo A. Et super rectam C D parallelogrammum C D G H, in eodem angulo D, aequale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, superat parallelogrammum C D G H, parallelogrammo E F H G; superabit quoq; figura A, figurã B, eodẽ parallelogrammo E F H G. Quod est propositum. 45. primi.

PRO-

45.

PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA, recta linea quadratum describere.



11. primi. Sit data recta AB, sup quã oporteat quadratũ describere. Ex A, & B, educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintq; ipsi AB, æquales, & cõnectatur recta CD. Dico AB-CD, esse quadratũ. Cum n. anguli A, & B,

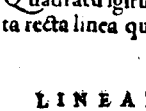
28. primi. sint recti, erunt AD, BC, parallelæ: Sunt aũt

33. primi. & æquales, quod vtraq; æqualis sit ipsi AB; Igitur & AB, DC parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammũ est ABCD; in quo, cũ AD, DC, CB, æquales sint ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existũt; Sunt aũt & oẽs quatuor

34. primi. anguli recti, cũ C, & D, æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratũ igitur est ABCD, ex definitione; Ac, pinde a data recta linea quadratũ descripsimus; Quod faciendũ erat.

EX PROCLO.

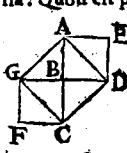
LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorũ æqualiũ æquales sũt lineæ.



Sint primo rectæ AB, CD, æquales; Dico earũ quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoq; esse. Ductis enim diametris BF, DH, erũt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus lateribꝰ DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumq; vtriq;, cũ ex definitione quadrati rectæ AF,

4. primi. CH, æquales sint rectis AB, CD: Sunt autem, & anguli A, & C, æ-

4. primi. quales, nempe recti: Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.



Sint secundo quadrata ABDE, BCFG, æqualia; Dico lineas quoq; ipsorũ AB, BC, æquales esse. Cõiungantur. n. quadrata ad angulum B, vt rectæ AB, BC, in directũ cõstituantur. Sit quoniã anguli

14. primi. ABG, ABD, sunt recti, erũt & rectæ GB, BD, in directũ cõstitutæ. Ducãtur diametri AD, CG, iungãturq; rectæ AG, CD. Quoniã igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia sunt, erũt & triãgula ABD, BCG, eorũ dimidia, æqualia. Addito ergo cõi triãgulo BCD, fiet totũ triangulũ ACD, toti triãgulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cũ eandem

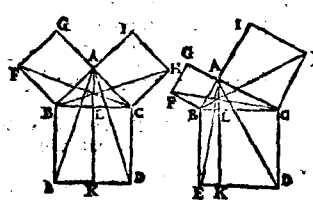
dem habeāt basin CD, ad eāsdēq; sint partes, in eisdē sunt parallelis, ideoq; parallelæ sunt AG, CD. Et qm̄, vt in scholio propos. 34. ostēsum est, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariā, erūt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoq; æquales. Quāobrē & parallelæ sunt AD, CG, igitur parallelogrāmū est ADCG, ac propterea rectæ AD, CG, æquales: Quoniā ergo in triāgulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia sūt, & anguli, qb⁹ ea latera adiacēt, inter se ēt æquales, cū sint semirecti, vt in scholio propos. 34. ostēsum fuit; erūt reliqua latera æqualia, nēpe AB, ipsi BC, &c. Qđ ē propositū. 39 *primi.* 27. *primi.* 8. *primi.* 26. *primi.*

SCHOLION.

POSSENT *hæc omnia multo breuius probari per superpositionē quadrati vnius super aliud. Nā si lineæ sunt æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsa inter se; Cū ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conueniēt quoq; ipsi inter se, ideoq; totū quadratū toti quadrato congruet. Quod si quadrata sunt æqualia, cōgruent ipsa inter se, propter æqualitatē angulorū; Igitur & lineæ; aliàs vnū quadratū alio maius esset.*

THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

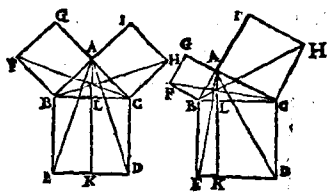
IN rectāgulis triāgulis, quadratū, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus.



IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, describāturq; super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI BCDE: Dico quadratū BCDE, descriptū super latus BC, quod angulo recto opponit, æquale esse duob⁹ quadratis ABFG, ACHI, quę sup alia duo latera sunt descripta, siue hęc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duanguli BAC, & BAG, sunt recti, erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodēq; modo IA, AB, vna recta linea erunt. 46. *primi.* 11. *primi.* 4. *primi.*

erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cũ sint recti, si addatur communis angulus A B C, fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterq; totus angul⁹ B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur latera A B, B E, trianguli A B E, æqualia sunt lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumq; vtriq;, vt constat ex definitione quadrati; Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æ-

2. pron.



4. primi.

quales, vt ostendimus; Erunt triãgula A B E, F B C, æqualia. Est autẽ quadratum, seu parallelogrãmũ A B F G, duplũ trianguli F B C, cum sint inter parallelas B F, C G, & super eandem basin B F; Et parallelogrammum B E K L, duplum trianguli A B E, quod sint inter parallelas B E, A K, & super eandẽ basin B E. Quare æqualia erunt quadratũ A B F G, & parallelogrammum B E K L; Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum A C H I, & parallelogrammum C D K L. Erunt enim rursus triangula A C D, H C B, æqualia, ideoq; eorum dupla, parallelogrammũ videlicet C D K L, & quadratum A C H I. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrammis B E K L, C D K L, æquale est duobus quadratis A B F G, A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum &c. Quod demonstrandum erat.

41 primi.

6. pron.

SCHOLION.

INVENTIO huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quod se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues; si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisseq; quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorum, compo-

cap. 2.

posuis

posuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5 partes æquales, minimum in 3. cuius magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitq; eum esse rectum; Idque in quamplurimis alijs numeris, vt in 6, 8, 10. & in 9. 12. 15. & c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant unum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi uoluptate adinuenit, firmaq; ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figurâ quâlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulũ, siue quadrangulum, siue quinquangulum, & c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq; descriptæ, ut ibidem ostendemus.

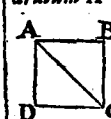
CAETERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen a Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium Prima ascribitur Pythagoræ & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, ut 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, ut hic ex 25. reijce vnitatem; Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula

tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6; Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros. 8. & 10. primus .n. est 6. nimirũ numerus par accepto. Hac regula si accipiaꝫ par 10. reperienꝫ alij duo 24. et 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quã problemata, e quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allaturæ creduntur, initium hinc sumentes.

I. SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro descriptum duplũ erit prædicti quadrati.

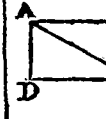
IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C; Dico quadratum A C, duplum esse quadrati A B C D. Cum enim in



47. primi

triangulo A B C, angulus B rectus sit, erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cum igitur quadrata linearũ A B, B C, æqualia sint, quod lineæ A B, B C, sint æquales; erit quadratum lineæ A C, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B, hoc est, quadrati A B C D. Quod est propositum.

II. QVADRATVM diametri figuræ alterapartelongioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.



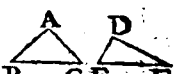
47. primi

IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia in triangulo A B C, angulus B, est rectus, erit quadratũ lateris A C, æquale duob⁹ quadratis laterũ inæqualiũ A B B C. Quod est propositũ.

III. SI fuerint duo triangula rectangula, quorũ latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterũ vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorũ duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli, A, & D, sint

sint recti, lateraq; opposita B C, E F, *æqualia: Dico duo quadrata laterum* A B, A C, *simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum* D E, D F, *simul sumptis. Nam quadrata linearũ* B C, E F, *æqualia inter se sunt, cum & ipsæ inter se ponantur æquales; Quadrato autẽ lineæ* BC, *æqualia sunt quadrata linearum* A B, A C; *Et quadrato lineæ* EF, *æqualia sunt quadrata linearum* D E, D F: *Perspicuum ergo est, quod proponitur.*

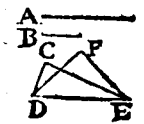


47. primi

47. primi.

DVOBVS quadratis inęqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis. IIII.

SINT A, *&* B, *latera duorum quadratorũ inæqualiũ; Sit autem angulus rectus* D C E, *sitq;* D C, *recta æqualis rectæ* B, *& rectæ* C E, *rectæ* A. *Ducta deinde recta* D E, *coniungente puncta* D, E, *super ipsam constituantur duo anguli semirecti* D E F, E D F, *coeantq; recta* DF, EF, *in* F. *Quoniã igitur in triangulo* F D E *anguli* FDE, F E D, *æquales sunt, erunt & latera* D F, E F, *æqualia, ideoq; et quadrata eorundẽ laterum æqualia. Dico jam, eadem quadrata linearũ* D F, EF, *æqualia esse quadratis linearũ* A, *&* B, *hoc est linearũ* CE, *&* CD. *Nam cum in triãgulo* DEF, *anguli* FDE, FED *faciant vnũ rectũ, erit reliquus angulus* F, *rectus. Quamobrẽ erunt quadrata linearum* DF, EF, *æqualia quadrato lineæ* DE; *sed eidẽ quadrato lineæ* DE, *æqualia sunt quoque quadrata* C D, C E; *igitur quadrata linearum* DF, EF, *æqualia sunt quadratis linearum* D C, E C. *Quod est propositum.*



11. pron.

6. primi

32. primi

47. primi

1. pron.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. V.

POTENTIA *lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantũ enim quauis recta linea posse dicitur, quantũ est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales* A, *&* B, *oporteatq; cognoscere, quãto maius sit quadratũ maioris lineæ* A, *quã minoris* B. *Ex quauis linea recta* CD, *sumatur* GE, *æqualis rectæ* A, *&* EF,

et EF, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & intervallo EC, semicirculus describatur C G D; & ex F, ducatur F G ppendicularis ad C D. Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ C E, sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ B, hoc est, rectæ E F, sibi æqualis, quadrato rectæ F G. Ducta enim recta E G, erit eius quadratum æquale quadratis rectarum E F, F G. Quocirca quadratum rectæ E G, hoc est, quadratum rectæ E C, illi æquale, superabit quadratum rectæ E F, quadrato rectæ F G. Quod est propositum.

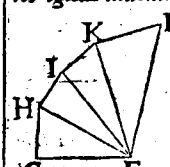


47. primi.

.IIII

VI. PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. oportet igitur inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus F G H, sitq; recta F G, æqualis rectæ A, & rectæ G H, rectæ B; Ducta deinde recta H F, fiat angulus rectus F H I, sitq; H I, æqualis rectæ C: Ducta rursus recta I F, fiat angulus rectus F I K, sitque I K, æqualis rectæ D: Ducta denique recta K F, fiat angulus rectus F K L, sitque K L, æqualis rectæ E. Si igitur ducatur recta F L; Dico quadratum rectæ F L, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ F H, æquale est quadratis rectarum F G, G H, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ F I, æquale est quadratis rectarum F H, H I, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ F K, æquale est quadratis rectarũ F I, I K, ideoque quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ F L, æquale est quadratis rectarum F K, K L, ac propterea quadratis rectarũ A, B, C, D, & E, Quod est propositum.



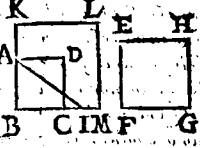
47. primi.

VII. PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram,

quæ

quæ reliquo quadrato sit æqualis; ita ut tota figura composita sit etiam quadrata.

SINT duo quadrata A B C D, E F G H, *propositumque sit quadrato* A B C D, *apponere figuram, quæ sit æqualis, quadrato* E F G H, *&c. Sumatur recta* B I, *æqualis rectæ* F G, *lateri quadrati* E F G H. *Ducta autem recta* A I, *& producta recta* B A, *ad partes* A, *accipiatur* B K, *æqualis rectæ* A I, *perficiaturque quadratum* B K L M. *Dico figuram* A D C M L K, *quadrato* A B C D, *adiunctam, æqualē esse quadrato* E F G H. *Quoniam quadratum rectæ* A I; *hoc est, quadratum* B K L M, *æquale est quadratis rectarum* A B, B I; *hoc est, quadratis* A B C D, E F G H; *si auferatur commune quadratum* A B, C D, *remanebit figura* A D C M L K, *æqualis quadrato* E F G H. *Quod est propositum.*

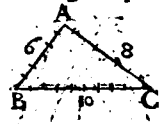


47. primi

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

SIT angulus A, *rectus in triangulo* A B C. *sintque primo cognita latera* A B, A C, *circa angulum rectum, quorum* A B, *ponatur 6 palmorum, &* A C, 8. *Quoniam igitur quadrata rectarum* A B, A C, *nempe palmi 36. & 54. æqualia sunt quadrato rectæ* B C; *si illa coniungantur simul, efficietur hoc palmorum 100. Latus ergo* B C, *continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint secundo cognita latera* A B, B C, *sitque* A B, *6. palmorum, &* B C, *10. Quoniam igitur quadrata rectarū* A B, A C, *æqualia sunt quadrato rectæ* B C; *si quadratum rectæ* A B, *quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ* B C, *quod est palmorum 100, remanebit quadratum rectæ* A C, 64. *palmorum. Latus ergo* A C, *continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus 64. palmorum. Quod*



47. primi

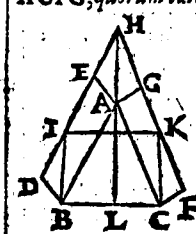
47. primi.

est propositum. Cæterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnes numeri habent latus, radicemve quadratam, vt notum est apud Arithmeticos; Vnde latus inuentum sæpe numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias.

THEOREMATE *vero hoc Pythagoreo multo vniuersalius est illud, quod a Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunq; parallelogrammis super latera trianguli constructis, tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius.*

IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrāmo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelū rectæ ductæ ab angulo, quē duo illa latera cōprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorū lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli dicti producantur.

SIT triangulum quodcunque ABC, *constituanturq; super latera* AB, AC, *parallelogramma quæcunque* ABDE, ACFG, *quorum latera* DE, FG, *quæ lateribus* AB, AC, *assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli* A, *dictis lateribus* AB, AC, *cōprehens', conueniant in* H, *duanturq; recta* AH. *Dico parallelogrāma* AD, AF, *æqualia esse parallelogrāmo sup latus* BC, *descripto, cuius alterū latus æquale sit, & parallelū rectæ* AH. *Producta enim* HA, *secet* BC, *in* L; *& per* B, C, *agantur* BI, CK, *parallelæ ipsi* AH; *iungaturq; recta* IK. *Quoniā igitur parallelogramma sunt* BIHA, CKHA, *erit vtraq; BI, CK, ipsi* AH, *æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt* BI, CK, *quæ cū sint etiā parallelæ, quod eidem* AH, *parallelæ sint; erunt quoque* BC, IK, *parallelæ, & æquales. Quare parallelogrāmum est* BCKI *sup-*

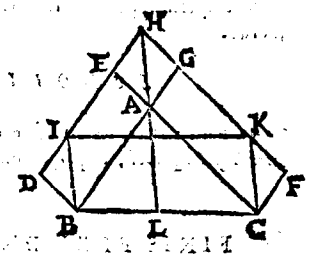


34. primi
30. primi
33 primi

latus

latus BC, *habēs alterū latus* BI, *rectæ* AH, *æquale, & parallelū: Cui quidē æqualia ostendēda sunt parallelogrāma* AD, AF. *Quia æqualia sunt parallelogrāma* AD, ABIH *quod eādē habeant basin* AB, *in eisdemq; sint parallelis* AB, HD; *Est autē* ABIH, *parallelogrāmo* IL, *æquale, quod illud cum hoc etiā eandē habeat basin* BI, *in eisdemq; sit parallelis* BI, LH: *Erit quoque* AD, *eidem* IL, *æquale. Non aliter ostendemus,* AF, *ipsi* KL, *esse æquale. Quare parallelogramma* AD, AF, *parallelogramo* BK, *æqualia sunt. Quod est propositum.* 35. primi 35. primi

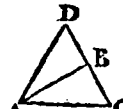
PAPPVS cōstruit figurā aliter. *Nam sumit rectas* AC, AE; *et* AB, AG, *in directū positas, ita vt parallelogrāma* AD, AF, *sint æquiangula, habētia angulos* AED, AGF, *angulo* BAC, *iternos externo, æquales ceu hæc eius figura indicat. Sed nos vniuersaliùs rē proposuimus, vt manifestū est.*



THEOR. 34. PROPOS. 48. 47.

SI quadratū, quod ab uno laterū trianguli describitur, æquale sit eis, quæ a reliqs trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum ABC, sitq; quadratū lateris AC, æquale quadratis reliquorū laterū BA, BC: Dico angulū ABC, esse rectū. Ducat namq; BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturq; recta AD. Quoniā igitur in triāgulo ABD, angulus ABD, rectus est, erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarū BA, BD: Est autē quadratū rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearū æqualitatem: 47. primi



tatē: Quare quadratū rectę AD quadratis rectarū BA, BC, æquale erit. Cū ergo quadratū rectę AC, eisdē quadratis rectarū BA, BC, æquale ponat, erūt quadrata rectarū AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectę ipsę AD, AC, æquales. Quoniā igitur latera BA, BD, triāguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC, & basis AD, ostensa est æqualis basi AC; erunt anguli ABD, ABC, æquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus: Quare & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

8. primi

SCHOLION.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, ut perspicuum est.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM II.

DEFINITIONES.

I.

OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

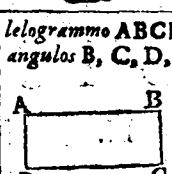


GIT Euclides in secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partiũ cuiuscunq; lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectãgula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod ut commode exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis cõtineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum; Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod ut intelligatur, explicandum primum est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti; Cuius quidem duo tantum sunt genera, Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo

lelogrammo ABCD, angulus A, rectus: Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint

29. primi



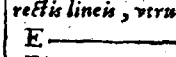
A D, BC, erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur et B, rectus erit. Quoniam vero quilibet suo opposito

34. primi

est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ unit eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D; vel sub A D, DC; vel sub DC, CB, vel denique sub AB, BC; quoniam quælibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem; altera vero, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundum rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundum rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogramum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum,



erit idem, quod parallelogrammum A B C D; quoniam latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.

PERSPICVVM est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum; Cum enim quælibet illarum linearum æqualium æqualis

sit

sit lineæ oppositæ, erũt oĩa quatuor parallelogrãmi rectãguli latera æqualia: Quare ex definitione quadrati quadratum erit. 34. primi

ITEM *manifestũ est, si duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, utraque utrique, rectangulũ parallelogrãmum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera unius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiã ratione demonstrari potest. Sint rectæ* A B B C, *æquales rectis* D E, E F, *utraq; utriq;; Dico parallelogrammum rectangulum* A B C G, *contentũ sub* A B, B C *æquale esse parallelogrammo rectãgulo* D E F H, *contento sub* D E, E F. *Ductis etenim diametris* A C, D F, *cũ latera* A B, B C, *trianguli* A B C, *æqualia sint lateribus* D E, E F, *triãguli* D E F; *& anguli* B, *&* E, *æquales, nempe recti, erunt triangula* A B C, D E F, *æqualia; Eadem ratione æqualia erunt triangula* A G C, D H F: *Quare tota parallelogramma* A B C G, D E F H, *æqualia erunt.*



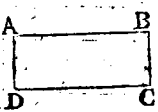
4. primi

HABET *autem cõprehensio hæc parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectũ continentibus, magnam affinitatẽ cum multiplicatione unius numeri in alterũ. Sicut enim ex multiplicatione* 3. *in* 4. *producitur numerus* 12. *qui in formã parallelogrãmi cõstituitur, unde et contineri dicitur sub* 3. *&* 4: *Ita quoq; parallelogrãmũ rectangulũ* A B C D, *cõprehẽsum sub duabus rectis* A E, B C *quarũ illa sit* 3. *palmorũ, hæc autẽ* 4. *cõstat* 12. *palmis quadratis, q quidẽ ex ductu lineæ* A B, 3. *palmorũ in lineã* B C, 4. *palmorũ ꝓducuntur, ut figura indicat, notumq; est Arithmeticis, atq; Geometris. Demõstratur autẽ a Ioan. Regiomont. lib. 1. de triãgulis propos. 16. Hinc fit, ut nõnulli dicãt, parallelogrãmũ rectãgulũ gigni ex ductu duarũ linearum circa angulum rectum unius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ* A B, *in lineã* B C, *vel (quod idem est) ex ductu lineæ* B Ç, *in lineam* A B. *Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur*



producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4, quam ex 4. in 3 producitur hic numerus 12.

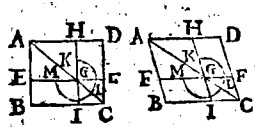
OBITER quoque monendus mihi lector uidetur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita ut nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eædem literæ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur; Vt superius parallelogrammum appellans A C, vel B D.



II.

IN omni parallelogrammo spatio, unũquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon uocetur.

IN Parallelogrammo A B C D, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ E F, H I, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo E H, I F, dicuntur esse circa diametrum, alia vero duo B G, G D, complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex I F, vna cum duobus complementis B G, G D, quibus est figura E B C D H G E, quam complectitur circunferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, composita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus

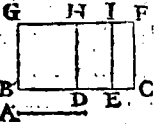


huæ complementis B G, G D, *Gnomon appellabitur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secetur̃que ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C. quarum B C, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C: Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A; & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & B C, comprehenso.



Rectangulum enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A; Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duæ perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturq; recta F G. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, uel C F. Itaque D H, E I, cum parallelæ sint ipsi B G, inter se quoque parallelæ erũt: Rursus eædem, cum ex cõstructione parallelogramma sint B H, B I, æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, & segmento B D; Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E; Item rectangulum E F sub A, & segmento E C. Quare cum rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuum est rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, et segmentis B D, D E, E C, compre-

33. primi

34 primi

comprehẽduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secenturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

QVONIAM *lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, ut lineæ; non ubi res fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus uerbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri unius in alterum respondeat ductui unius lineæ in alteram, ut supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunq;, ut 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur, id quod perspicuum est.*

DEMONSTRAT *hoc loco Federicus Cõmandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.*

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum cõprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis unius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum* A, *continentes, quæ secentur in partes* AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. *Dico rectangulum sub rectis* AB, AC, *cõprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub* AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB GH; FB, HC, *continentur. Cõpleatur rectangulũ* AI, *ducanturq;* DK, EL, FM, *parallelæ ipsi* AC, *vel* BI: *Item* HN, GO, *parallelæ ipsi* AB, *vel* CI; *quæ secent priores in* P, Q, R, S, T, V. *Quoniã igitur rectangulum* AS, *cõtinetur sub* AD, AG; *& GP sub* AD, GH; *& HK, sub* AD, HC; (*quod rectæ* GS, HP, *ipsi* AD, *sint æquales;*)



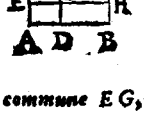
34. primi

Item

Item rectangula DT, SQ, PL, continentur ſub DE, AG; DE, GH; DE, HC; (*quod DS, SP, PK, ipſis* AG, GH, HC, *æquales ſint, & ST, PQ, ipſi* DE) *Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur ſub* EF, AG; EF, GH, EF, HC; *Nec non rectangula FO, VN, RI, ſub* FB, AG; FB, GH; FB, HC; *perſpicuum eſt, rectangulum ſub* AB, AC, *æquale eſſe rectangulis ſub ſingulis partibus* AD, DE, EF, FB, *& quolibet ſegmentorum* AG, GH, HC, *comprehenſis. Quod eſt propoſitum.* 34. primi

SI ſint duę rectę lineę, ſecenturque ambæ utcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo ſub una parte unius, & una parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo.

SINT duæ rectæ AB, AC, *angulum continentes rectum* A, *quæ ſecentur vtcunque in* D, *&* E; *Dico rectangulum comprehenſum ſub* AB, AC, *vna cum rectangulo comprehenſo ſub partibus* AD, EC, *æquale eſſe rectangulis contentis ſub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo ſub DB, AE, comprehenſo. Compleatur rectangulum AF, agaturque per D, recta DG, ipſi AC, vel BF, parallela; nec non & per E, recta EH, ſecans DG, in I, parallela ipſi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale eſt rectangulis EF, DH, AI; ſi addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe ſub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehenſa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, ſub AE, EC; AC, AD; DB, AE, comprehenſis æqualia. Quod eſt propoſitum.*



IN numeris etiam hæc eadem perſpicua ſunt. Propoſitis enim duobus hiſce numeris 10. *&* 8. *quorum prior in tres partes*

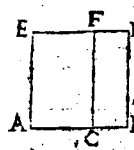
partes. 2. 3. 5. posterior vero in duas 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. aqualem esse sex numeris 6. 12. 9. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul addiii 80. vt volebat theorema 1 Federici.

RVRSVS, si idem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoq; est 80. numerum productu ex 10 in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. aqualem esse tribus numeris 60. 24. 14 qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficianiur 98. ut theorema 2. Federici opiabat.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea secta sit utcunque, Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

RECTA linea A B, diuidatur vtcunque in C, duas in partes; Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D, quadratum lineæ A B; & ex C, ducatur C F parallela rectæ A E, vel B D, quæ æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B. Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectæ A B, ex definitione quadrati, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C; similiter erit rectangulum C D, comprehensum sub A B, & segmento C B. Quare cum rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, æqualia esse quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea secta sit utcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

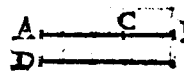


34. primi

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B,

Quoniam

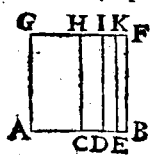
Quoniam igitur A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta A B, nempe quadratum rectæ A B, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub A B, &, singulis segmentis A C, C B, quod est propositum.



1. secundi.

SCHOLION.

Quanquam *Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunq;, idem tamen eisdem mediis demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunq; partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui proueniunt ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.*

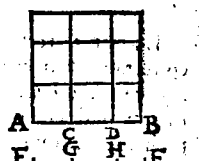


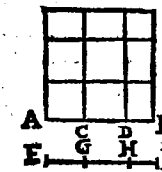


Simili *modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.*

Si linea recta secetur in quotcumq; segmẽta: quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

Sit recta A B, diuisa in partes quotcunq; A C, C D, D B. Dico quadratũ ex A B, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus A C, C D, D B, & quolibet segmentorũ A C, C D, D B, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D, D B:





D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B, comprehensis. Sumpta enim recta E F, quæ æqualis sit ipsi A B, diuisaq; in partes E G, G H, H F, partibus A C, C D, D B, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub A B, E F, hoc est, quadratum ipsius A B. æquale rectangulis sub A C, E G; A C, G H; A C, H F: C D, E G; C D, G H; C D, H F: D B, E G; D B, G H; D B, H F. Cum igitur partes A C, C D, D B, partibus E G, G H, H F, sint æquales; Erit quoque quadratum ex A B, æquale rectangulis sub A C, A C; A C C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D; C D, D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B. Quod est propositum.

IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

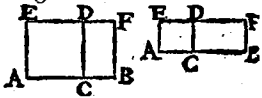
3. ## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI recta linea secta sit vtcunq; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.

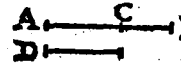
LINEA recta A B, diuisa sit vtcunq; in puncto C: Dico rectangulum comprehensum sub tota A B, & vtrouis segmento, vt A C, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis A C, C B, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti A C. Constituatur enim quadratū dicti segmenti A C, quod sit A D,

& ex

& ex B, educatur B F, parallela ipsi A E, donec coeat cum E D, prorracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectę A C, æqualis est ex quadrati definitione, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C. Rursus, quia recta C D, eadem ratione æqualis est rectæ A C, erit rectangulum C F, comprehensum sub segmētis A C, & C B. Cum igitur rectangulum A F, æquale sit quadrato A D, & rectangulo C F; liquido constat, rectangulum sub A B, tota, & segmento A C, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis A C, C B, & quadrato prædicti segmenti A C. Itaq; si recta linea secta sit vtcunq;, &c. Quod erat ostendendum.



ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehēsum sub D, & A B, hoc est, sub A B, & A C, æquale rectangulo sub D, & C B, hoc est, sub A C, C B, & rectangulo sub D, & A C, hoc est, quadrato segmenti A C; quod est propositum. 1. secundi.



SCHOLION.

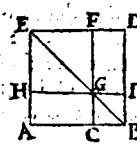
VT hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vna cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea secta sit vtcunq;; Quadratum, quod a tota describitur, æquale est

& illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

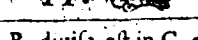
RECTA A B, diuisa sit vtcumq; in C. Dico quadratum totius rectæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis A C, C B. Describatur super A B, quadratum A D, ducaturq; diameter B E. Deinde ex C, agatur C F, parallela rectæ B D, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur H I, parallela rectæ A B; Eritq; quadratum A D, diuisum in quatuor parallelogramma.



Quoniam igitur trianguli A B E, duo latera A B, A E, æqualia sunt; erunt duo anguli A B E, A E B, æquales: Atqui tres anguli A B E, A E B, B A E, trianguli A B E, duobus rectis sunt æquales; & B A E, rectus est: reliqui ergo anguli A B E, A E B, semirecti erunt. Eadē ratione ostendes, angulos D B E, D E B, semirectos esse. Quod etiam constat ex iis, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter B E, diuidit angulos rectos A B D, A E D, bifariam. Quia ergo anguli tres trianguli E F G, æquales sunt duobus rectis; & angulus B F G, rectus est, cum sit æqualis recto D, externus interno; nec nō F E G, semirectus; erit & reliquus E G F, semirectus, ideoq; æqualis angulo F G C. Quare æqualia erunt latera E F, & F G; quæ cum sint æqualia oppositis lateribus G H, H E, erit parallelogrammū F H, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum A C, C B, quod H G, recta æqualis sit rectæ A C; & rectāgula A G, D G, comprehensa erunt sub segmētis A C, C B, propterea quod C G, G I, æquales sint rectæ C B; & F G, æqualis rectæ G H, hoc est rectæ A C. Quocirca cum quadratum A D, æquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratū A D, totius lineæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C, C B, & rectāgulo cōprehēso sub eisdē segmētis A C, C B, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunq;, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

5. primi.
32. primi.
32. primi.
29. primi.
6. primi
34. primi
34. primi.

ALITER. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quę sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehẽduntur: Rectangulum autem sub A B, & AC, comprehensum, æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC; Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmẽti CB. Igitur quadratum rectę A B, æquale est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. quod est propositum.



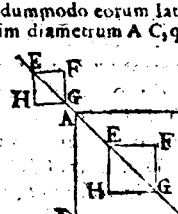
2. secundi.

3. secundi.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demõstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrũ B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium illud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H; Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A B D. Idem nihilo minus verum est de quibuscunq; parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractas, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum A C, quadrati B D, consistat parallelogrammum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamẽ habeat latera lateribus quadrati B D, parallela; Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint A B, E F, erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus & externus; atq; eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erũt: Sunt autem anguli B A C, B C A, semirecti, vt ostensum iam fuit; Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt, propterea q; latera E F, F G, illis opposita, æqualia, & angulus F, rectus. Quare cũ EF; F G, latera æqualia sint oppositis lateribus GH, H E; erit F H, quadratum. Quod est propositum.



29. primi.

32. primi

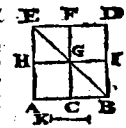
6. primi

34. primi

SCHOLION.

In numeris ista theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. divisus utcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. una cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE *autem ex hoc theoremate demonstrabimus; Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum esse quadrati ex hac descripti. Sit enim linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam divisa A B, bifariam in C, si fiat constructio, ut in theoremate 3 erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, ut facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. omnesq; anguli recti. Quare cum quadratum A D, æquale sit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi A C. Est. n. utraq; dimidia lineæ A B.*



BREVIUS. *Ex hac propositione, quadratum rectæ A B, æquale est quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo sub rectis lineis A C, C B, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus A C, C B, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ A C; Constat quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ A C, cum æquale sit quatuor quadratis æqualibus quadrato rectæ A C.*

ECONTRARIO *ostendemus; Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum esse lateris huius. Sit enim quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum esse lateris K. Nam divisa rectæ A B, bifariam in C, ut A B, dupla sit ipsius A C; erit, ut iam demonstratum est, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C; Erat autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarum K, & A C, & ipsæ rectæ K, & A C, æquales. Est autem A B, ex constructione, ipsius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipsius K. Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.*

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectãgulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cũ quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia recta sit C D, qua dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; est rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale; Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint: Igitur D F, A K, æqualia inter se erunt; quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F, erit & rectangulum



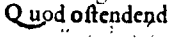
34. primi.

43. primi.

36. primi.

A H, vna cum quadrato A G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.



ALITER *hoc theorema ex Francisco Maurolyco demonstrabimus, hoc modo. Quia quadratum ex* C B, *æquale est quadratis ex* C D, D B, *vna cum rectangulo bis sub* C D, D B: *Et rectangulo sub* C D, D B *vna cum quadrato ex* D B, *æquale est rectangulum sub* C B, B D; *Erit quadratum ex* C B, *æquale reliquo quadrato ex* C D, *vna cum reliquo rectangulo sub* C D, D B, *& rectangulo sub* C B, B D, *vel sub* A C, B D. *Atqui rectangulis sub* A C, B D, *& sub* C D. D B, *æquale est rectangulum sub tota* A D, D B. *Igitur quadratum ex* C B, *æquale erit quadrato ex* C D, *vna cum rectangulo sub* A D, D B; *hoc est, rectangulum sub* A D, D B, *vna cum quadrato ex* C D *æquale erit quadrato ex* C B. *Quod erat demonstrandū.*

4. *secundi.*

3. *secundi.*

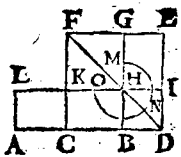
1. *secundi.*

IDEM *in numeris est manifestum. Dividatur enim numerus* 10. *æqualiter in* 5. *& 5. Item inæqualiter in* 7. *& 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit* 2. *quo videlicet dimidius numerus* 5. *superat minorem partem* 3 *&c. Vides igitur, numerum* 21. *ex* 7. *in* 3. *productum, vna cum* 4. *quadrato intermedij numeri* 2. *æqualem esse* 25. *quadrato dimidij numeri* 5.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tū ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectũ addatur B D: Dico rectangulum comprehensum sub tota cõposita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namq; C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D; Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 4. propos. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, æqualis; Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaq; est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, æquale est parallelogrãmo C H, quod bases A C, C B, æquales sint; Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaq; si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædã linea in rectũ adijciatur, &c. Quod erat demonstrandũ.



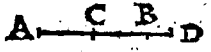
34. primi.

36. primi.

43. primi.

SCHOLION.

ALITER idem ostendemus ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex C D, æquale est quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulo bis sub C B, B D; hoc est, vna cum rectangulis sub C B, B D, & sub A C, B D. Est autem rectangulis sub A C, D B; C B, D B; & sub D B, D B, hoc est, quadrato ex D B, æquale rectangulum sub A D, D B. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B, vna cũ rect-



4. secundi.

1. secundi.

rectangulo sub A D, D B: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero compositio 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet B D, eadem magnitudine C B: habebunt lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.



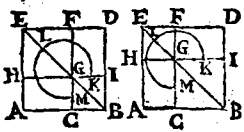
THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur vtcunq; Quod a tota, quodq; ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

RECTA

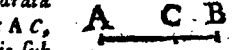
RECTA AB, secetur vtcunq; in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cũ quadrato reliqui segmẽti CB. Describatur. n. super AB, quadratũ AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secãs diametrũ in puncto G, per qđ agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollariũ 4. propos. huius lib. CI, HF, quadrata, & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulũ AF, cõprehensum sub tota AB, & segmẽto AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdẽ rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale est quadratũ AD; si apponatur cõmune quadratũ HF, erũt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quę comprehenduntur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod erat demonstrandum.



34. primi.

SCHOLION.

ALITER ex Francisco Maurolyco idem demonstrabimus. Quia quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadratis ex AC, CB, AC, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, æquale est rectangulum sub AB, AC; Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.



4. secundi.

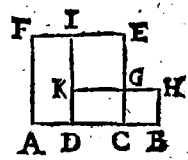
3. secundi.

IN numeris autem, diuidatur numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cũ 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, sitq; maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea A D; vt D C, sit excessus, quo pars A C, superat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub A C, C B, vna cum quadrato lineæ D C. Constituantur quadrata A E, C H; & agatur D I, ipsi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Itaq; quoniam A D, ipsi C B, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est C E, toti D B, æqualis; sit autẽ & C G, ipsi C B, æqualis, quod quadratum sit C H: Igitur & reliqua G E, reliquæ D C, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E, ipsi D C, sit æqualis; erunt G E, I E, æquales: ideoq; I G, quadratum erit ab excessu D C, descriptum. Quoniam vero rectangula A I, D H, continentur sub partibus A C, C B, (sit. n. A C, vtriq; lineæ A F, D B, & C B, vtriq; A D, B H, æqualis:) manifestum est, quadrata A E, C H, partium A C, C B, æqualia esse rectangulis A I, D H, quæ continentur sub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, excessus D C. Quod est propositum.



34. primi.

SCHOLION.

IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6.

ita

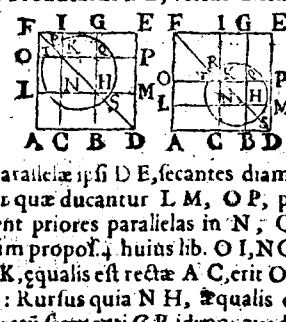
ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 4. qui fit ex 4. in 6. bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI recta linea secetur vtcunq; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorũ, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuisa vtcunq;. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur A B, versus dictum segmentum C B, ad D, sitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E; Ducta autem diametro



D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propos. 4. huius lib. O I, N Q, 3 M, quadrata. Et quia O K, æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmenti A C: Rursus quia N H, æqualis est rectæ C B, erit N Q, quadratũ segmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cũ rectæ C B, B D, æquales sint. Quare rectæ 3 H, H Q, æquales sunt segmento C B; Atq; adeo duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, cum L H; sit æqualis rectæ A B. Eadẽ rõne erũt duo rectan-

34. *primi.*

34. *primi.*

34. *primi*

rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cū NH, HM, rectæ æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc est, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erūt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinq; rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quāobrem, si recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod demonstrādum erat.

24. primi.

SCHOLION.

ALITER idem ex Francisco Maurolyco demonstrabimus. Quia quadratū ex AD *æquale est quadratis ex* AB, BD, *vna cū rectangulo sub* AB, BD, *bis; hoc est, quadratis ex* AB, BC, *vna cum rectangulo bis sub* AB, BC: *Et quadrata ex* AB, BC, *æqualia sunt rectangulo bis sub* AB, BC, *vna cum quadrato ex* AC; *Erit quadratū ex* AD, *æquale rectangulo quater sub* AB, BC, *vna cum quadrato ex* AC. *Quod demonstrandum erat.*



4. secundi.

7. secundi.

SECETVR iam numerus 10. *vtcunq; in* 6. *&* 4. *Numerus igitur* 240. *qui quater fit ex toto* 10. *in partem* 6. *vna cum* 16. *quadrato numero alterius partis* 4. *hoc est, numerus* 256. *æqualis est numero quadrato huius numeri* 16. *qui componitur ex dato numero* 10. *& dicta parte* 6. *vt conflat. Eodem modo, numerus* 160. *qui fit quater ex* 10. *toto, in partem* 4. *vna cum* 36. *quadrato numero alterius partis* 6. *hoc est, numerus* 196. *æqualis est quadrato numero huius numeri* 14. *qui componitur ex* 10. *&* 4. *vt perspicuum est.*

9.

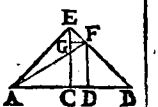
THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & nō

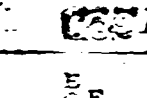
æqua-

equalia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, dupla esse quadratorum, quę fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B; Ducanturq; rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoq; ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturq; A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; erunt anguli C A E, C E A, æquales. Est autem angulus A C E, rectus; reliqui igitur anguli alium rectum conficient, ideoq; A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, semirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rursus, quia trianguli F G E, angulus E G F, æqualis est recto E C B, externus interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum; igitur & E F G, semirectus erit, propterea cum anguli F E G, F G E, æquales sint, erunt & latera E G, G F, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, esse æqualia; nam angulus F D B, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo A C E, angulus C, rectus sit, erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E; Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia; quod & lineæ A C, C E, æquales sint; Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F; At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum E G, G F; Igitur



5. primi.
32. primi.
29. primi.
32. primi.
6. primi.
47. primi.
47. primi.



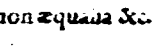
4. primi. Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris FG, hoc eſt quadrati lineæ C D: Eſt enim C D, recta rectæ FG, æqualis, cum C F ſit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, E F, dupla ſunt duorum quadratorum ambarum rectarum A C, C D.

7. primi. Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, æqualia

7 primi quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla ſunt duorum quadratorum rectarum A C, C D. Atqui quadratum rectæ D F, æquale eſt quadrato rectæ D B; oſtenſum enim eſt, rectas D F, D B, eſſe æquales. Quare duo quoq; quadrata rectarum A D, D B, ſegmentorum inæqualium, dupla ſunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ ſectionum. Si ergo recta linea ſecetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC ipſi CB, æqualis eſt, & ſuperat CB, ipſam CD, rectæ DB; ſuperat his quoq; AC, ipſam CD, eadem recta DB. Quare, vt ad 7. primi huius iam demonſtrauimus, quadrata rectarum AC, CD, quales ſunt rectangulo ſub AC, CD, bis, vna cum quadrato rectæ DB; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum ſub AC, CD, bis vna cum quadrato rectæ DB, dupla ſunt quadratorum ex AC, CD: Sed quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo



1. ſecundi. *ſub AC, CD, bis, eſt æquale quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, DB, dupla ſunt quadratorum ex AC, CD.*

ALITER ex Franciſco Maurolyco. Quia quadratum ex

4. ſecundi. *lineæ rectæ AD, deſcriptum æquale eſt quadratis deſcriptis ex AC, CD, vna cum parallelogrammo rectangulo bis ſub rectis AC, CD, comprehenſis ſi commune ponatur quadratum ex DB, erunt quadrata ex AD, DB, æqualia quadratis ex AC, CD, DB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CD.*

vel

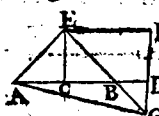
vel sub B C, C D, æqui quadrato ex D B, vna cum rectangulo, bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod ostendendum erat. 7. secundi.

IAM vero rursus numerus, 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectũ quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius; quod a dimidia, & eius, quod a compositã ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna, descriptum sit, quadrati.

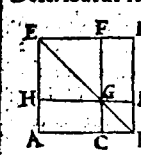
SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D: Dico duo quadrata rectarum A D, B D, dupla esse quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, uel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectę C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostenditur iã, angulum A E B, esse rectum, ut in præcedenti propos. & C E B, semirectum; ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque: Est autem angulus F, rectus, cum in paral-



29. primi
34. primi

& illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

RECTA A B, diuisa sit vtcumq; in C. Dico quadratum totius rectæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur super A B, quadratum A D, ducaturq; diameter B E. Deinde ex C, agatur C F, parallela rectæ B D, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur H I, parallela rectę A B; Eritq; quadratum A D, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli A B E, duo latera A B, A E, æqualia sunt; erunt duo anguli A B E, A E B, 5. primi. æquales: Atqui tres anguli A B E, A E B, B A E, trianguli A B E, 32. primi. duobus rectis sunt æquales; & B A E, rectus est: reliqui ergo anguli A B E, A E B, semirecti erunt. Eadē ratione ostendes, angulos D B E, D E B, semirectos esse. Quod etiam constat ex iis, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter B E, diuidit angulos rectos A B D, 32. primi. A E D, bifariam. Quia ergo anguli tres trianguli E F G, æquales sunt duobus rectis; & angulus E F G, rectus est, cum sit 29. primi. æqualis recto D, externus interno; nec nō F E G, semirectus; erit & reliquus E G F, semirectus, ideoq; æqualis angulo F G. 6. primi Quare æqualia erunt latera E F, & F G; quæ cum sint æqua- 34. primi lia oppositis lateribus G H, H E, erit parallelogrammū F H, quadratum, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti. Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum A C, C B, quod H G, recta æqualis sit rectę A C; & rectāgula A G, D G, comprehensa erunt sub segmētis A C, C B, propterea quod C G, G I, æquales sint rectæ C B; & F G, æqualis rectæ G H, hoc est rectæ A C. Quocirca cum quadratum A D, æquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratū A D, totius lineæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C C F, & rectāgulo cōprehēso sub eisdē segmētis A C, C B, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcumq;, quadratum, quod a tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



ALITER. Quoniam recta A B, diuisa est in C, erit quadratum totius A B, æquale rectangulis, quę sub tota A B, & segmentis A C, C B, comprehẽduntur: Rectangulum autem sub A B, & A C, comprehensum, æquale est rectangulo comprehenso sub A C, C B, & quadrato segmenti A C; Item rectangulum sub A B, C B, comprehensum, æquale est rectangulo sub C B, A C, comprehenso, & quadrato segmẽti C B. Igitur quadratum rectę A B, æquale est quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulis sub A C, C B, & sub C B, A C. quod est propositum.



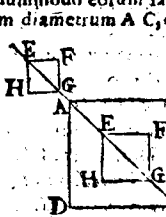
2. *secundi.*

3. *secundi.*

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demõstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ *sunt circa diametrũ* B E, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium illud intelligendum de illis **parallelogrammis circa diametrum quadrati**, quæ **communem** aliquem angulum **habent cum toto quadrato**, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H; Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilo minus verum est de quibuscunq; parallelogrammis circa **diametrum quadrati**, etiam protractis, quamuis non habeant cum **quadrato** angulum aliquem **communem**, dummodo eorum latera **parallela** *sint* **quadrati** *lateribus*. Circa enim *diametrum* A C, quadrati B D, consistat parallelogrammum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamẽ habeat latera lateribus quadrati B D, parallela; Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint A B, E F, erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus & externus; atq; eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erũt: Sunt autem anguli B A C, B C A, semirecti, vt ostensum iam fuit; Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt, propterea; latera E F, F G, illis opposita, æqualia, & angulus F, rectus. Quare cũ E F, F G, latera æqualia sint oppositis lateribus G H, H E, erit F H, quadratum. Quod est propositum.



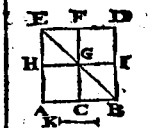
29. *primi.*

32. *primi*
6. *primi*
34. *primi*

SCHOLION.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtcunq; in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem ex hoc theoremate demonstrabimus; Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum esse quadrati ex hac descripti. Sit enim linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa A B, bifariã in C, si fiat constructio, vt in theoremate 3 erunt quatuor parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. omnesq; anguli recti. Quare cum quadratum A D, æquale sit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratum lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi A C. Est. n. vtraq; dimidia lineæ A B.



BREVIVS. Ex hac propositione, quadratum rectæ A B, æquale est quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo sub rectis lineis A C, C B, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus A C, C B, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ A C; Constat quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ A C. cum æquale sit quatuor quadratis æqualibus quadrato rectæ A C.

ECONTRARIO ostendemus; Si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum esse lateris huius. Sit enim quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum esse lateris K. Nam diuisa rectæ A B, bifariam in C, vt A B, dupla sit ipsius A C; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C; Erat autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarum K, & A C, & ipsa recta K, & A C, æquales. Est autem A B, ex constructione, ipsius A C, dupla: Dupla igitur etiam erit ipsius K. Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectãgulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cũ quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia recta sit C D, qua dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit: Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K; Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoq; D H, recta rectæ D B, æqualis: Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaq; est rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale; Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint: Igitur D F, A K, æqualia inter se erunt; quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F, erit & rectangulum



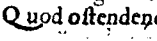
34. primi.

43. primi.

36. primi.

A H, vna cum quadrato A G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.



ALITER hoc theorema ex Francisco Maurolyco demonstrabimus, hoc modo. Quia quadratum ex C B, æquale est quadratis ex C D, D B, vna cum rectangulo bis sub C D, D B: Et rectangulo sub C D, D B vna cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub C B, B D; Erit quadratum ex C B, æquale reliquo quadrato ex C D, vna cum reliquo rectangulo sub C D, D B, & rectangulo sub C B, B D, vel sub A C, B D. Atqui rectangulis sub A C, B D, & sub C D, D B, æquale est rectangulum sub tota A D, D B. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vna cum rectangulo sub A D, D B; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandū.

4. secundi.

3. secundi.

1. secundi.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vna cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI Recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tū ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECI-

SECTVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectũ addatur B D: Dico rectangulum comprehensum sub tota cõposita A D, & D B, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namq; C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, producatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D; Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 4. propos. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, æqualis; Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaq; est, rectangulum A I, vna cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K, æquale est parallelogrãmo C H, quod bases A C, C B, æquales sint; Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementum complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia; erit & rectangulum A I, vna cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaq; si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædã linea in rectũ adijciatur, &c. Quod erat demonstrandũ.



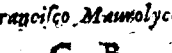
34. primi.

36. primi.

43. primi.

SCHOLION.

ALITER idem ostendemus ex Francisco Maurolyco. *Quia quadratum ex C D, æquale est quadratis ex C B, B D, vna cum rectangulo bis sub C B; B D; hoc est, vna cum rectangulis sub C B, B D, & sub A C, B D. Est autem rectangulis sub A C, D B; C B, D B; & sub D B, D B, hoc est, quadrato ex D B, æquale rectangulum sub A D, D B. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B vna cũ rect-*



4. secundi.

1. secundi.

rectangulo sub A D, D B. Hoc est, rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

Ex hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B; & C D, superet B D, eadem magnitudine C B: habebunt lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vna cum quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

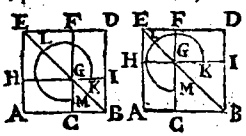


THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur vtcunq; Quod a tota, quodq; ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

RECTA AB, secetur vtcunq; in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cũ quadrato reliqui segmẽti CB. Describatur. n. super AB, quadratũ AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secãs diametrũ in puncto G, per qđ agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollariũ 4. propos. huius lib. CI, HF, quadrata, & quia recta GH, æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulũ AF, cõprehensum sub tota AB, & segmẽto AC. Eadem ratione rectangulum HD, comprehensum erit sub eisdẽ rectis AB, AC, quod rectæ DE, EH, æquales sint rectis AB, AC. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, hoc est, gnomoni KLM, vna cum quadrato CI, æquale est quadratũ AD; si apponatur cõmune quadratũ HF, erũt quadrata AD, HF, æqualia rectangulis AF, DH, (quæ comprehenduntur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti CB. Si igitur recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod erat demonstrandum.



34. primi.

SCHOLION.

ALITER ex Francisco Maurolyco idem demonstrabimus. Quia quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadratis ex AC, CB, AC, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, æquale est rectangulum sub AB, AC; Et proinde rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.



4. secundi.

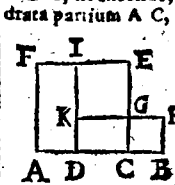
3. secundi.

IN numeris autem, diuidatur numerus 10. *vtcunq; in* 6. *& 4. Igitur* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 36. *quadratus numerus partis* 6. *æquales sunt numero* 120. *qui fit bis ex toto* 10. *in partem* 6. *vna cum* 16. *quadrato numero alterius partis* 4. *vt constat. Sic etiam* 100. *quadratus numerus totius numeri* 10. *&* 16. *quadratus numerus partis* 4. *æquales sunt numero* 80. *qui bis fit ex toto* 10. *in partem* 4. *vna cũ* 36. *quadrato numero alterius partis* 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, sitq; maior pars A C; ponatur autem minori parti C B, æqualis linea A D; vt D C, sit excessus, quo pars A C, superat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub A C, C B, vna cum quadrato lineæ D C. Constituantur quadrata A E, C H; & agatur D I, ipsi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Itaq; quoniam A D, ipsi C B, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est C E, toti D B, æqualis; sed autẽ & C G, ipsi C B, æqualis, quod quadratum sit C H: Igitur & reliqua G E, reliquæ D C, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E, ipsi D C, sit æqualis; erunt G E, I E, æquales: ideoq; I G, quadratum erit ab excessu D C, descriptum. Quoniam vero rectangula A I, D H, continentur sub partibus A C, C B, (sunt enim A C, vtriq; lineæ A F, D B, & C B, vtriq; A D, B H, æqualis:) manifestum est, quadrata A E, C H, partium A C, C B, æqualia esse rectangulis A I, D H, quæ continentur sub partibus A C, C B, vna cum quadrato I G, excessus D C. Quod est propositum.



34. *primi.*

SCHOLION.

IN numeris. Secetur numerus 10. *inæqualiter in* 4. *&* 6.

ita

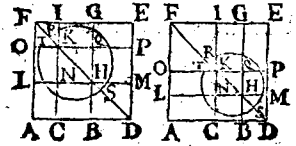
ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 4. qui fit ex 4. in 6. bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI recta linea secetur vtcunq; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorũ, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

SIT recta A B, in C, diuisa vtcunq;. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta A B, & dicto segmento C B, componitur. Producatur A B, versus dictum segmentum C B, ad D, sitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E; Ducta autem diametro



D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium propos. 4. huius lib. O I, N Q, B M, quadrata. Et quia O K, æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmenti A C: Rursus quia N H, æqualis est rectæ C B, erit N Q, quadratũ segmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cũ rectæ C B, B D, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento C B; Atq; adeo duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, cum L H; sit æqualis rectæ A B. Eadẽ rõne erũt duo rectan-

34. *primi.*

34. *primi.*

34. *primi*

rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & C B, cũ N H, HM, rectæ æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ LH, hoc est, rectæ AB: Et quia quadratum NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erũt BM, KG, simul æqualia rectangulo N G. Quapropter quinq; rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem R S T, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon R S T, & quadratum O I, æqualia sint quadrato A E; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento C B. Quãobrem, si recta linea secetur vtcunq;, &c. Quod demonstrãdum erat.

24. primi.

SCHOLION.

ALITER idem ex Francisco Maurolyco demonstrabimus. Quia quadratũ ex AD æquale est quadratis ex AB, BD, vna cũ rectangulo sub AB, BD, bis; hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: Et quadrata ex AB, BC, æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratũ ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.

4. secundi.



7. secundi.

SECETVR iam numerus 10. vtcunq; in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

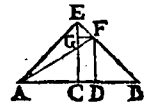
9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & nõ

æqua-

æqualia; Quadrata, quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, duplicia ſunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia ſectionum fit, quadrati.

SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata ſegmentorum inæqualium A D, D B, dupla eſſe quadratorum, quę fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia ſectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpendicularis C E, quæ ſit æqualis dimidiæ A C, vel C B; Ducanturq; rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoq; ad A B, perpendicularis D F, ſecans E B, in puncto F, per quod ducatur F G, parallela ipſi A B, ſecans C E, in G, ducaturq; A F. Quoniam igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia ſunt; erunt anguli C A E, C E A, æquales. Eſt autem angulus A C E, rectus; reliqui igitur anguli alium rectum conficient, ideoq; A E C, ſemirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, ſemirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rurſus, quia trianguli F G E, angulus E G F, æqualis eſt recto E C B, externus interno; erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: oſtenſum autem eſt, angulum F E G, eſſe ſemirectum; igitur & E F G, ſemirectus erit, propterea que cum anguli F E G, F G E, æquales ſint, erunt & latera E G, G F, æqualia inter ſe. Eodem modo oſtendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, eſſe æqualia; nam angulus F D B, eſt rectus, & B, ſemirectus, &c. Itaque cum in triangulo A C E, angulus C, rectus ſit, erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E; Atqui hæc duo quadrata inter ſe ſunt æqualia; quod & lineæ A C, C E, æquales ſint; Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rurſus, quia in triangulo E G F, angulus G, rectus eſt, erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F; At duo hæc quadrata inter ſe æqualia ſunt, ob æqualitatem linearum E G, G F; Igitur



5. primi.

32. primi.

29. primi.

32. primi.

6. primi.

47. primi.

47. primi.

4. primi.



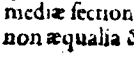
Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ C D; Est enim G D, recta rectæ F G, æqualis, cum C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum A E, E F, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum A C, C D.

7. primi. Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, æqualia

47 primi. quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D. Atqui quadratum rectæ D F, æquale est quadrato rectæ D B; ostensum enim est, rectas D F, D B, esse æquales. Quare duo quoq; quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, rectâ D B; superabit quoq; A C, ipsam C D, eadem rectâ D B. Quare, vt ad 7. prop. huius lib. demonstrauimus, quadrata rectarum A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis vna cum quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vna cum rectangulo



4. secundi. *sub A C, C D, bis, est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D E, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

ALITER ex Francisco Maurolyco. Quia quadratum ex

4. secundi. *linea recta A D, descriptum æquale est quadratis descriptis, ex A C, C D, vna cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehensis; si commune ponatur quadratum ex D E, erunt quadrata ex A D, D B, æqualia quadratis ex A C, C D, D B, vna cum rectangulo bis sub A C, C D,*

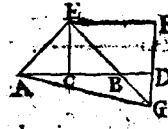
vel sub B C, C D, Aiqui quadrato ex D B, vna cum rectangulo, bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D; Ac propterea quadrata ex A D, DB, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod ostendendum erat. 7. secundi.

IAM verò rursus numerus, 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectũ quæpiam recta linea: Quod à totâ cum adiuncta, & quod ab adiuncta, utraque simul quadrata, duplicia sunt & eius; quod a dimidia, & eius, quod a compositâ ex dimidia & adiuncta, tanquã ab vna, descriptum sit, quadrati.

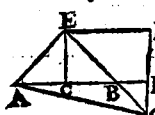
SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D: Dico duo quadrata rectarum A D, BD, dupla esse quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, uel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur DF, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G; & per E, ducatur rectę C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostenditur iã, angulum A E B, esse rectum, ut in præcedenti propos. & C E B, semirectum; ideoque eius alternum E G F, semirectum quoque: Est autem angulus F, rectus, cum in paral-



29. primi
34. primi

lelogrammo C F, recto angulo C, opponatur; Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F æqualis. Quare rectæ B F, F G, & angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G esse æquales, propterea quod angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E, erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C.

32. primi
6. primi
47. primi



Rursus quia quadratū rectæ E G, quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoque quadratum rectæ E G, duplū quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, cum C D,

47. primi
34. primi

recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum: Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G,

47. primi

æquale est quadratum rectæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis æqualibus A D, D G, describuntur. Quadrata ergo rectarum A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptum. Cum igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, dupla quadratorum, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, rectæ B D; superabit quoque C D, ipsam A C, eadem rectæ B D. Quare, vt ad 7. ppos. huius lib. ostendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt



rectangulo sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarū A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vna cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Atqui quadratis

4. secundi

rectarū A C, C D, vna cū rectangulo sub A C, C D, bis, æquale est quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarū A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.

ALITER

ALITER ex Francisco Maurolyco. *Quia quadratũ ex* AD, *æquale est quadratis ex* A C, C D, *vna cũ rectangulo bis sub* AC, C D, *vel sub* B C, C D; *si commune addatur quadratũ ex* B D, *erunt quadrata ex* A D, BD, *æqualia quadratis ex* A C, CD, BD, *vna cũ rectangulo bis sub* BC, CD. *Sed quadrato ex* B D, *vna cũ rectangulo bis sub* B C, C D, *æqualia sunt quadrata ex* C D, BC, *hoc est, quadrata ex* A C, CD. *Igitur quadrata ex* A D, B D, *æqualia sunt quadratis ex* A C, C D, *bis; ac proinde quadrata ex* AD, BD, *dupla sunt quadratorum ex* A C, C D; *Quod erat demonstrandum.* 4. *secundi* 7. *secundi*

NVMERVS 10. *bifariam secetur in* 5. *&* 5. *cui addatur numerus quinis* 3. *vt totus numerus cõpositus sit* 13. *Quadrati igitur numeri* 169. *& 9. horum numerorũ* 13. *& 3. dupli sunt numerorum quadratorum* 25. *&* 64. *qui ex his numeris* 5. *&* 8. *gignuntur, ut perspicuum est.*

PROBL. 1. PROPOS. 11. 11.

DATAM rectam lineam secare, ut cõprehensum sub tota, & altero segmentorũ rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita ut rectangulum cõprehensum sub tota A B, & minori eius segmento, æquale sit quadrato reliqui segmenti maioris. Describatur ex A B, quadratũ A C, & diuiso latere A D, quod cũ linea data A B, angulũ rectũ efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis sumatur E F; & ipsi A F, abscindatur ex recta A B, data æqualis A G. Dico rectam A B, sectã esse in G, ita ut rectangulum comprehensum sub A B, & B G, æquale sit quadrato rectæ A G. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi A G, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrãmum A H, quadratum segmenti A G, cum omnia eius quatuor latera sint 34. *primi*



æqualia; & rectangulum C G, comprehensum sub A B, & segmento B G, quod A B, æqualis sit ipsi B C. Itaque pro bandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqua-



6. secundi

lia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F, erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cum E H, sit æqualis ipsi F A;) una cum quadrato dimidiæ A E, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quæ rectæ E F, æqua-

47. primi

lis est: Est autem quadratum rectæ E B, æquale quadratis rectarum A E, A B: Quare rectangulum D H, vna cū quadrato rectæ A E, æquale est quadratis rectarum A E, A B: Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam A B, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLION.

Hoc theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos numeros diuiditur, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, ut demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus.

12. THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis; quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa obtusum angu

lum,

lum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis A D. Dico quadratum lateris A C, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratum lateris A C, æquale esse duobus quadratis laterum A B, B C, una cũ rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso. Cum enim recta C D, diuisa sit in B, vtcunque, erit quadratum rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarũ C B, B D, & rectangulo cõprehenso bis sub C B, B D. Addito igitur cõmuni quadrato rectæ A D, erunt duo quadrata rectarum C D, D A, æqualia tribus quadratis rectarũ C B, B D, D A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Est aũt quadratis rectarũ C D, D A, æquale quadratũ rectæ A C; Quare & quadratũ rectæ A C, æquale erit tribº quadratis rectarũ C B, B D, D A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Cum igitur quadratis rectarum B D, D A, æquale sit quadratum rectæ A B; erit quadratum rectæ A C, æquale quadratis rectarum C B, B A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.



4. *secundi.*

47. *primi*

47. *primi*

SCHOLION.

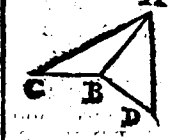
QVONIAM *assumpsit Euclides, perpendicularem ductam ex A, cadere in latus C B, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo A B C, angulus A B C, obtusus, & latus C B, ad partes B, protractũ; Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulũ in latus C B, protractum, cuiusmodi est recta A D. Si enim*

caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus: Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.



CONVERSVM quoque huius theorematis ita ostendemus. In triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC; Dico angulum B, quem dictum latus subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB perpendicularis BD, lineæ BC, æqualis, iungaturq; recta AD.

47. primi. Quoniam igitur quadratū ex AD, æquale est quadratis ex AB, BD, hoc est ex AB, BC; Ponitur autē quadratū ex AC, maius quadratis ex AB, BC: Erit quadratū ex AD, minus quadrato ex AC, & idcirco recta AD, minor quā recta AC. Itaque quia latera AB, BC, triāguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumq; vtriq;, 25. primi. & basis AC, maior est basi AD; Erit angulus ABC, maior angulo ABD: sed ABD, rectus est. Igitur ABC, recto maior, & obtusus erit.

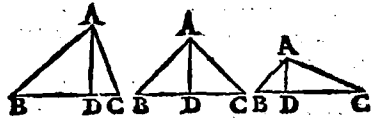


13. THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triāgulis, quadratū a latere angulū acutū subtendente minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulū cōprehendentibus, rectangulo bis comprehēso, & ab uno laterum, quæ sunt circa acutū angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT

SINT omnes anguli trianguli A B C, acuti, & ex A, perpendicularis A D, demissa cadat in latus B C. Dico quadratũ lateris A B, quod acuto angulo A C B, opponitur, minus esse quadratis laterum A C, C B, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratum lateris A B, una cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse duob' quadratis laterũ A C, C B. Cum enim recta B C, diuisa sit in D, utcunque, erunt quadrata rectarũ B C, C D, æqualia rectangulo cõprehenso bis sub B C, C D, & quadrato rectæ B D.



7. secundi

Addito ergo cõmuni quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarum B C, C D, D A, æqualia rectãgulo bis cõprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarũ B D, D A: Duobus autem quadratis rectarũ C D, D A, æquale est quadratum rectæ C A; Duo igitur quadrata rectarum B C, C A, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A. Cũ ergo duobus quadratis rectarum B D, D A, æquale sit quadratum rectæ A B; erunt duo quadrata rectarũ B C, C A, æqualia rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, & quadrato rectæ A B: quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum A B, B C, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub C B, B D, & quadrato rectæ A C, hoc est, quadratum lateris A C, minus esse quadratis laterum A B, B C, rectangulo cõprehenso bis sub C B, B D. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum a latere, &c. Quod demonstrandum erat.

47. primi

47. primi

SCHOLION.

QVAMVIS *Euclides theorema hoc proponat de triãgulis dũtaxat oxygonijs, quæ scilicet oẽs angulos habẽt acutos; Idẽ tamen verum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt conflat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangu-*

lis rectiangulis, & amblygonijs perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso; in oxygonijs vero a quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint enim in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti, angulus vero B A C, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in C B, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta A E, esset in triangulo A B E, angulus exterior A B C, acutus, maior interno & opposito recto A E B, quod



16. primi est absurdum. Si vero caderet extra in B C, productam ad partes C, qualis est recta A F, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commmandinus, etiam si perpendicularis A D, non cadat in latus B C, sed vel eadem sit, quae latus A C, vt in rectangulis, vel extra triangulũ cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. praecedentis demõstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis nõ ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulũ rectangulũ A B C, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quae cadet erit, quae latus A B, propter angulũ rectũ B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulũ C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub latere C B, in quod perpendicularis cadit, & sub linea C D, quae interijcitur inter perpendicularem A D, & acutum angulum C. Cum enim

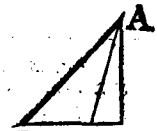


47. primi quadrata ex A B, C B, aequalia sint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, aequalia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem est, quod rectangulum sub C B, C D; Igitur & quadratum ex A B, vna cum rectangulo bis sub C B, C D, aequale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quam quadrata ex

A C,

AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD, Quod est propositum.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum ABC, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam quadrata ex AD, CD, aequalia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, cõmuni, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, aequalia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD, aequale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, vna cũ quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, aequalia quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, vna cum rectangulo sub CB, BD, aequale est rectangulum sub CD, CB; Ac proinde duplo quadrati ex ex CB, vna cum rectangulo bis sub CB, BD, aequale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis sub CB, CD, aequale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, D. Quod est propositum.



47. primi

4. secundi

47. primi

3. secundi

CONVERSVM quoque huius theorematis in quodam antiquo scholio demonstratur in hunc fere modum.

IN triangulo quocunque ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulu , quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim C, ad AC per- ndicularis CD, nea CB, aequalis, ngaturque recta D. Quoniam



itur quadratum ex AD, aequale est quadratis ex AC CD c est, ex AC, CB. Ponitur autem quadratum ex AB, minus

47. primi

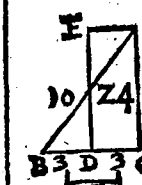
nus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B, & ideo recta A D, maior quam recta A B.



Itaque quia duo latera A C, C D triãguli A C D, aequalia sunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B, vtrunque vtriq; :

25. primi & basis A D, maior basi A B: Erit angulus A C D, maior angulo A C B: Sed A C B, rectus est, ex constructione: ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

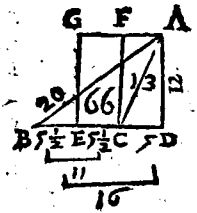
Ex his autem, quae in proximis duobus theorematibus, & in 1. lib. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus. Sit primo triangulum rectangulũ A B C, cuius latera nota sint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. B C, 6. Diuiso latere B C, bifariam in D, vt sit C D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum A C D E, quod aequale est triangulo A B C, vt in scholio propos. 41. lib. 1. ostendimus. Quia vero ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorum producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus; Totidem palmos quadratos continebit triangulum A B C, rectangulo C E, aequale. Quod est propositum.



Sit secundo triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita; A B, 20. palmorum; A C, 13. B C, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineae A D, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, maius

12. secundi est, quam quadrata laterum A C B C, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D; si quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. quae efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabis rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibis reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat

strat propos. 17. lib. 1. de triangulis. Quia vero quadrata laterum A D, C D, æqualia sunt quadrato lateris A C; ſi quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris A C, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144 ſit 12. Itaque diuiſo latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipſi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, ſi E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum. (Eſt enim C F, ipſi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum, quod cum æquale ſit triangulo A B C, ex ſcholio propos. 41. lib. 1. (ſunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eiſdem parallelis) Erit quoque area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod eſt propoſitum. 47. primi



84. primi

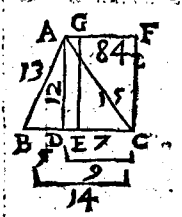
SIT poſtremo triangulum acutangulum A B C, latera habens nota; A B, 13. palmorum; A C, 15. B C, 14. Primũ igitur hic quoque reperienda eſt quantitas perpendicularis A D, hac ratione: Quoniam quadratum lateris A B, minus eſt, quam quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenſo bis ſub B C, C D; ſi quadratum lateris A B, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum A C, B C. hoc eſt, ex 225. 169. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo cõprehenſo bis ſub B C, C D, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum ſub B C. C D Si igitur 126. rectangulum ſub B C, C D, diuidatur per B C, latus notum, ut per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9 ut conſtat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. 13. ſecundi



Quoniam autẽ quadrata ex A D, C D, æqualia ſunt quadrato ex A C; ſi quadratum 81. palmorum, nempe lateris C D, 47. primi

9. pal-

9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris AC; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit latus AD, 12. palmorum. Itaque diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BC, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AF, quæ per A, ipsi BC parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si CE, 7. palmorum ducatur in EG, 12. palmorum; (est enim EG, recta ipsi AD, æqualis) exurget area rectanguli EF, palmorum 84. Quod cum triangulo ABC, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum EF, & triangulum ABC, in eisdem parallelis) erit quoque area trianguli ABC, 84. palmorum. Quod est propositum.

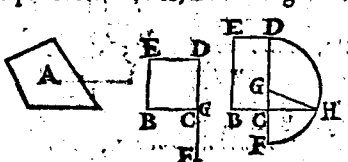


ITAQVE in uniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ a vertice ad basim demittitur, ceu in exemplis datis est manifestum.

14. PROBL. 2. PROPOS. 14.

DATO rectilineo, æquale quadratum constituere.

45. primi SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. Constituatur parallelogrammum BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, ut DC, producatur ad F, sitque CF, recta æqualis rectæ BC. Diuidaturque DF, bifariã in puncto G, quod cadet aut in punctũ C, aut nõ. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, æqualia



14. primi sint

sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si uero punctum G, nõ cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, uel G F, semicirculus F H D, producaturq; B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducatur enim recta G H. Itaq; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectãgulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cum rectæ G F, G H, sint æquales; At quadratum rectæ G H, æquale est quadratis rectarum G C, C H. igitur rectangulum B D, una cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

5. secundi

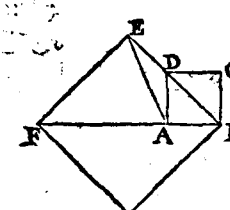
47. primi

SCHOLION.

Quoniam in secundo hoc libro Euclides de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; recte inseri hic poterit sequens problema de quadrato nõ iniucundum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

Excedat diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B, inueniendumque sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum B C, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, ut sit D E, recta recta A D, æqualis. Dico rectam B E, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato A B.



Ducatur

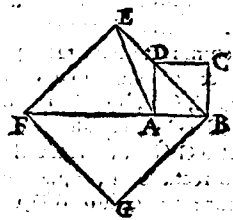
Ducatur enim EF, *perpendicularis ad* BE, *quæ rectam* BA, *producta secet in* F. *Quoniam igitur in triangulo* BEF, *angulus* FEB, *rectus est, &* EBF, *semirectus; erit &* BFE, *semirectus. Quare recta* BE, FE, *æquales sunt. Si igitur ex* F, *ducatur* FG, *parallela ipsi* BE; *& ex* B, *recta* BG, *parallela ipsi* EF, *occurrens priori in* G; *constitutum erit quadratum recta* BE. *Quod si ducatur recta* AE, *erunt anguli* AED, EAD, *æqualibus lineis* DE, DA, *oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis* DEF; DAF, *remanebunt anguli* AEF, EAF, *æquales, ideoque rectæ* EF, AF, *æquales erunt. Quoniam vero diameter* BF, *rectam* AF, *superat data recta* AB; *superabit eadem diameter* BF, *latus quadrati* EF, *eadem recta* AB; *quod est propositum.*

32. primi

6. primi

5. primi

6. primi



FINIS ELEMENTI SECVNDI.

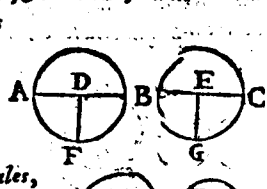
EVCLIDIS ELEMENTVM III.

DEFINITIONES.

I.

AEQVALES circuli sunt, quorũ diametri sunt æquales; uel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

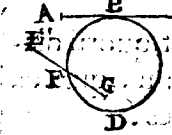
QVONIAM Euclides in hoc 3. lib. uarias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens futurus est usus in hoc lib. Primo itaque decet eos circulos esse æquales, quorum diametri, uel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterũ extremũ fixum, & immobile, ceu in 1. lib. diximus, perspicuũ est eos circulos esse æquales, quorũ semidiametri, seu rectæ ex cẽtris ductæ, sũt quales; uel etiã quorũ totæ diametri æquales sunt. Vt si diameteri AB, BC, uel rectæ DF, EG, ex centris D, & E. ductæ sint æquales, quales erunt circuli AFB, & GBC. Sic etiam si circuli sint æquales, erunt diametri, uel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, uel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales,



quales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem, &c.

II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.



VT recta AB, quia ita circulum BFD, tangit in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicitur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatque intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

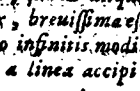
EODEM modo duo circuli A C, B C, se mutuo dicuntur tangere intus, quia ita se se contingunt in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex. Aut enim exteriores se se circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

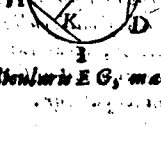


IIII.

IN circulo æqualiter distare a centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ a centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

QVONIAM *inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti a linea accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, a recta B C, dicitur esse perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quævis, quæ non perpendicularis est; quia A D, omnibus est brevior, quod angulus A E D,* 19. primi. *vel A F D, minor sit angulo recto A D E. Immo non solum A E, A F, maiores sunt quam A D, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Fit enim A F, maior, quam A E,* 19. primi. *cum angulus A E F, sit obtusus, Et A F E, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicentur distare a centro E, si perpendiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longius abesse dicetur a centro E. quam linea H I, si perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.*





V.

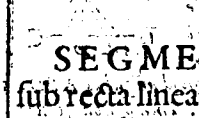
SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



Vt si ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunq;, dicetur tam figura A B D, contenta circunferentia B A D, & recta B D; quàm B C D, comprehensa recta B D, & circunferentia B C D, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta B D, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum B A D; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum B C D. Vocatur à plerisq; Geometris recta B D, chorda, & circunferentia B A D, vel B C D, arcus.

VI.

SEGMENTI autē angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.



DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur; Primo angulum segmenti, dicens, angulum mixtū B A C, vel B C A, contentum sub recta linea A C, & circunferentia A B C; appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum minus semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit

quod-

quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

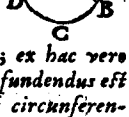
Sit segmentum circuli quodcunq; A B C, cuius basis recta A C: Ex suscepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extremæ basis, rectæ lineæ B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur existere in segmento A B C.

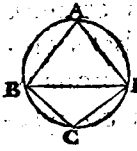


VIII.

CVM vero comprehendentes angulũ rectæ lineæ aliquam assumũt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

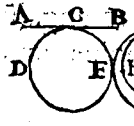
Ex puncto A, quolibet suscepto in circunferentia circuli A B C D, ducantur rectæ duæ lineæ A B, A D, ad duo extrema B, & D, circunferentiæ B C D, cuiusque, quam quidem duæ rectæ A B, A D, assumunt. Angulus itaq; rectilineus B A D, insistere dicitur circunferentiæ B C D. Perspicuum autem est, hunc angulum a præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac vero insistere circunferentiæ B C D. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circunferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circunferentiæ, circunferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur





segmentum aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circunferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit BCD; at eius circunferentiæ CBD, insistens, erit BAD, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circunferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum conuenire potest circunferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem, in quibus. existiunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoq; facile constat ex verbo græco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus D A B, supra circunferentiam C B D.

PRAETER tres dictos angulos cõsideratur etiam a Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circunferentia circuli; vel certe duabus circunferentijs se mutuo tãgentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel C B E, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus C E D, tangat circulum E F G, exterius in E: Item circulus H F I, circulum E F G, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus C E F, quã E F H, vel G F I, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaq;, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo, curuilinei.



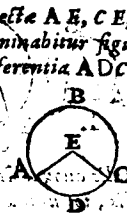
IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & a rectis lineis angulum continentibus, & a peri-

pheria

pheria ab illis assumpta.

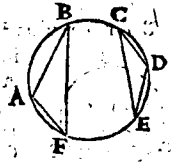
Si in circulo A B C D, cuius centrum E, rectæ A E, C E, constituant angulum A E C, ad centrum E; nominabitur figura A E C D, contenta rectis A E, E C, & circunferentia A D C, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circunferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circunferentiam A D C, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ a rectis A E, C E, assumptæ: Ita quoq; in illa intelligi oportet eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circunferentiam constituti; quandoquidem in vtraq; definitione vsus est eodem verbo graco ἀπολαμβάνω.



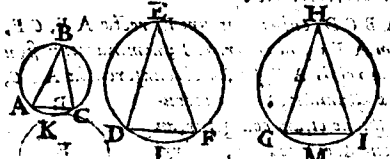
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

Segmenta, seu circunferentiæ A B D F, D C A E, quæ capiunt hos duos angulos A B F, D C E, æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similes dicuntur.



Eodem modo segmenta diuersorũ circulorum tam æqualium, quam inæqualium a Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si anguli A B C, D E F, G H I, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circunferentiæ A B C, D E F, G H I, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc



segmentorũ, circunferentiarũue similitudo in eo, quod qualis pars est vna circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit altera circunferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circunferentiæ; ita vt qualis, & quanta pars est circunferentia A B C, totius circunferentiæ A B C A, talis & tanta quoque pars sit circunferentia D E F, totius circunferentiæ D E F D; Item talis, & tanta circunferentia G H I, totius circunferentia G H I G. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad totas circunferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli; sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiasue, appellari similes.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.

SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque A C, quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta B D, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam B D, centrum, a quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniam ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi C G; (a



centro

centro enim ducuntur) erunt anguli A E G, C E G, æquales, ideoq; recti; Erat autem & angulus A E F, rectus ex constructione; Igitur recti A E F, A E G, æquales sunt, pars & totum quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum. 8. primi.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod B D, recta rectam A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEOR. 1. PROPOS. 2. 2.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

In circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circunferentia: Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta. Inuento igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, nec non ad quoduis punctum D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetq; E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (e centro enim ducuntur) erunt anguli E A D, E C D, æquales: Est autem angulus E D A, angulo E C D, maior, externus interno opposito, cum latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur 1. tertij. 5. primi. 16. primi.

& angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo opposita, hoc est, recta E B, sibi æqualis, maior erit, quam recta E D, pars quam totum, quod fieri absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum A B C, nisi vt eadem sit, quæ circumferentia A B C. Esset enim recta E A, maior, quam recta E B. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum A B C, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaq; si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

IDEM *hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circumferentia circuli A B, cuius centrum C. Dico rectam A B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, æqualia sunt, erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem angulus C D A, angulo C B A, maior, externus interno; Igitur idem angulus C D A angulo C A D, maior erit, & ob id latus C A, latere C D, maius erit. Quare cum C A, sit ducta a centro ad circumferentiam vsque, non perueniet recta C D, ad circumferentiam; ideoq; punctum D, intra circulum cadet: Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit, quod est propositum.*



COROLLARIVM.

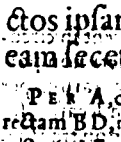
HINC, est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tagit, ita vt eum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum, Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

THEOR.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoq; eam secabit.



PER A, centrum circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, ipsi ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus lateribus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales; Igitur anguli AFB, AFD, æquales erũt, hoc est recti, Quod erat primo propositũ. 8. primi.

SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD; dico rectam BD bifariam secari in F a recta CE. Ductis enim rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF, & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoq; erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo propo nebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrũ extensa, &c. Quod demonstrandum erat. 5. primi. 26. primi.

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectę AB, æquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD Cum igitur quadratũ rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD: Quare dempto communi quadrato rectę AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atq; idcirco rectæ FB, FD, æquales erunt. 47. primi.

THEOR.

4

THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent non per centrum extensæ; sese mutuo bifariam non secabunt.

DVAE rectæ A B, C D, se mutuo in E, secent in circulo A C B D, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum aliquando bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectam A B, bifariam in E, secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

4. tertij.

3. tertij.

5

THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli sese mutuo secent; non erit illorum idem centrum.

CIRCVLI A B D, E B D, se mutuo secent in B, & D. Dico ipsos non habere, idē centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque C, a quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad sectionem B; C A, vero secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli

culi E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

6.

SI duo circuli sese mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DUO circuli A B, B C, se interius tangant in B; Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, a quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B; At D C, secans vtramq; circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, æqualis. Quare rectæ A D, & C D, inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

EVCLIDES *proposuit theorema hoc de circulis sese interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius sese tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.*

THEOR. 6. PROPOS. 7.

7.

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea,

in qua

in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum vero propinquior illi, quæ per centrũ ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodẽ puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

IN diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ F C, F D, F E; Dico omnium, quę ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximãm esse G A, in qua est centrum, minimum vero reliquam G B, quæ diametrum perficit; Deindẽ rectam G C, quæ centro propinquior est, maiorem recta G D, quę a centro plus distat, & eadem ratione G D, maiorem recta G E; Denique ex G, ad vtrasq; partes minimæ lineæ G B, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur e centro F, ad C, D, & E, rectę lineæ F C, F D, F E. Quoniã igitur duo latera G F, F C trianguli G F C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectę G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc est, rectæ G A; erit & G A, maior quam G C; Eadem ratione maior erit recta G A, quam G D, & quam G E. Quare G A, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



20. *primi.*

20. *primi.* DEINDE, quoniam in triangulo E F G, latus E F, minus est duobus lateribus F G, G E; Est autem F E, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta F G; remanebit adhuc G B, minor, quam G E; Eadem ratione minor erit G B, quam G D, & quam G C. Quare G B, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circunferentiam cadunt.

VERSVS, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior est angulo G F D; erit basis G C, maior basę G D; Eadem ratione maior erit G C, quam G E; Item maior erit G D, quam G E. Quare linea

24 *primi.*

propin-

propinquior centro maior est ea, quæ remotior.

FIAT iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H, ita vt G E, G H, æqualiter distent a centro. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, æqualia sunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales; erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ G B, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit centro propinquior, maior quam G H; si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior a centro, minor quam G H, vt ostensum fuit. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ G B, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. 4 primi.

SCHOLION.

HANC *propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.*

SI intra circulum pũctum sumatur, ab eoq; puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt centro propinquiores, æquales autẽ ab eo æqualiter distabũt.



IN circulo A B C, punctum sumatur D, a quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima vero D C; ipsarum vero D E, D F, maior sit D E, denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C,

DC, ipsi DA, esse in directum. Item DE, propinquiorem esse centro, quam DF. Denique DE, DB, æqualiter a centro abesse. Primum enim si DA, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, erit ea omnium ex
7. tertij. D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur. Transit ergo DA, per centrum.

DEINDE, si DC, non est in directum ipsi DA; protracta AD, in directū, erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius AD, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cū DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.

RVRSVS, si DE, non est vicinior cētro, quā DF; aut æqualiter distabūt ab eo, aut DE, longius ab eo abest. Si æqualiter
7. tertij. distant, ipsa erunt æquales; quod est absurdum, ponitur enim DE, maior. Quod si DF, dicatur esse propinquior centro, ipsa
7. tertij. erit maior, quam DE. Quod magis est absurdum.

POSTREMO, si DE, DB, non æqualiter distant a centro, erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absur
7. tertij. dum. Ponuntur enim æquales DE, DB.

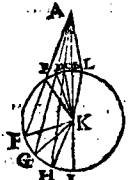
8. THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & dia-

metrum

metrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ.

EX puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum transeat, aliæ vero A H, A G, A F, vtcunq; . Dico omnium esse maximam A I, quæ per centrum incedit: Deinde rectam A H, quæ centro propinquior existit, maiorem recta A G, quæ remotior est a centro; Et eadem ratione A G, maiorem quam A F. E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse. Deinde rectam A G, quæ vicinior est minimæ A B, minorem esse recta A D, remotiore; Et eadem ratione, ipsam A D, maiorem, quam A E. Denique ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ A B, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, maiora sunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc est, rectæ A I erit & A I, maior, quam A H; Eadem ratione erit A I, maior, quam A G, & quã A F. Quare A I, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



20. primi.

DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H, æqualia sunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior est angulo A K G; erit basis A H, basi A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quam A F; Item A G, maior, quam A F. Quare linea centro propinquior maior est linea remotiore.

24. primi.

RVRSVS, ga in triãgulo A C K, recta A K, minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, C K, remanebit adhuc

20. primi.

adhuc A B, minor, quam A C. Simili ratione erit A B, minor, quam A D, & quam A E. Quare A B, omnium harum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

RVRSVS, cum intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ad extremitates lateris A K, erunt A C, C K, minores, quam A D, D K; Sub. atis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor, quam A D. Pari ratione erit A C, minor, quam A E; Item A D, minor, quam A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quam remotior ab eadem. 21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis lateribus contenti æquales; erunt rectæ A C, A L; ex vtraq; parte minimæ A B, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior a minima, maior quam A L; Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimæ propinquior, minor quam A L; vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales a vtraq; partes minimæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, &c. Quod erat demonstrandum. 4. primi.

SCHOLION.

EADEM ratione ab A, in peripheriam contiuam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtraq; partes maximæ A I: Fiat enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iuxta vtrq; recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M; sunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: erunt bases A H, A M, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H, ea vel maior erit, vel minor, quam A H, prout citra vel vltra rectum A H, ducta fuerit; vt manifestum est ex demonstratione theorematis.



4. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

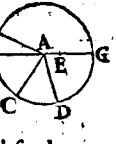
SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ, quam duæ, A B, A C, A D, inter se æquales: Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret utraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.



8. primi

A LITER. Si punctum A, non est centrum circuli, sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, a quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C; erit recta A D, quæ propinquior est centro E, maior, quam recta A C, remotior a centro, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



7. tertij

10. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

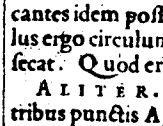


SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulũ AGBDHE, in pluribus, quã duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus bifariam diuisis in I, & K, educantur ex I, & K; ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit utraq; ex corollario propos. 1. huius lib. per centrũ ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrũ dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum. quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

5. tertij.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, & B, & D. Inuentum autem sit I, centrũ circuli AGBDHE, a quo ad dicta tria puncta ducantur IA, IB, ID. quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniã igitur intra circulũ ABCDEF, assumptũ est punctũ I, a quo cadunt in circunferẽtiã plures, quã duæ rectę æquales, erit I, centrũ circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE; Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum; quod est absurdum.

1. tertij.



9. tertij.

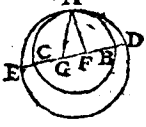
5. tertij.

11. THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta,

cta, i contactu n circulorum cadet.

TANGAT circulus A B C, circulum A D E, intus in A, & sit F, centrũ circuli A B C, & G, centrũ circuli A D E. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in cõtactum A. Si enim non cadit, secet utrumq; circulũ in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur A F, A G. Quoniam igitur in triãgulo A F G duo latera G F, F A, maiora sunt latere G A; Est autem G A, recta rectæ G D, æqualis; (quod G, positum sit centrũ circuli A D E) Erunt & G F, F A, rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi G F, remanebit F A, maior, quam F D: Quare cum F A, æqualis sit ipsi F B; (quod F, positũ fuerit centrũ circuli A B C) erit & F B, maior, quã F D, pars toto, quod est absurdũ. Quod si quis velit cõtendere F, esse centrũ circuli A D E; & G, centrũ circuli A B C, instituetur argumẽtatio hac ratione. In triãgulo A F G, duo latera F G, G A, maiora sunt latere F A; Est autẽ recta F A, rectæ F E, æquàlis: (cum F, ponatur centrũ circuli A D E.) Igitur rectę F G, G A, maiores sunt recta F E; dempta ergo cõmuni F G, remanebit G A, maior, quã G E: Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C; (propterea quod G, ponatur esse centrũ circuli A B C,) erit quoque G C maior, quã G E, pars toto. quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrũ maioris circuli extra minorẽ ponatur. Nõ ergo recta F G, extensa vtrumq; circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



1

20. primi

20. primi

THEOR. 11. PROPOS. 12.

11.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI A B C, D B E tangãt se exterius in B, & centrũ circuli A B C, sit F; circuli uero D B E, centrũ sit G; Dico rectã extensam p F, & G, trãsire per contactũ B. Si enim non

transit, secet circunferentias in C, & E; ducanturque a centris F, G, ad B, contactum rectæ F B, G B. Quoniã igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, maiora sunt latere F G: Est autẽ recta B F, rectæ F C, æqualis; (quod F, sit centrũ circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quod G, sit centrum circuli D B E) erunt & rectæ F C, G E, maiores quam recta F G, pars quã totũ, (cum F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E;) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



20. primi

12. THEOR. 12. PROPOS. 13.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, siue intus, siue extra tangat.

CIRCVLI A B C D, A E C F, tangant se intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quam uno, A, & C. Assumantur igitur centra horum circulorum G, H, per quæ recta G H in utramque partem extendatur, quam necesse est cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A C, diameter, diuidetur A C, bifariam in G. Similiter ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in uno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si enim G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C. Quod si quis dicat rectã G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At uero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare utrumque circulum in I, & K, ut in secunda figura perspicuum est: ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrũ circuli

11. tertij



circuli A B C D; & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C æquales ipsi G K; (quod H C, H K, sint ex centro) & recta G C, rectæ G I; (quod & hæ sint ex centro) erit quoque recta G K, maior, quam G I, pars toto: quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cum utraque ducta sit ex centro H;) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A; Quare dempta communi H G erit G C, maior, quam G A, quod est absurdum, cum utraque ex centro G, ducatur: Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam uno. 20. primi 20. primi

TANGANT se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quam uno, prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrum circuli C B, recta D E, quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B; Ductis igitur rectis D B, E B, erunt rectæ D B E B æquales rectis D F, E F, hoc est ipsi D E: Sunt autem & maiores: quod est absurdum: Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam uno.



12 tertij

20. primi

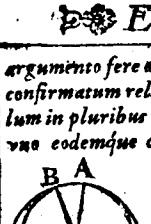
ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra unũ circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra aliũ, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Si recte consideretur Euclidis demonstratio, quæ probauit, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam uno uidetur ea potissimum concludere, circulum nõ posse tangi a circulo in duobus, uel pluribus punctis, quæ longe interuallo a se diffideant; nõ autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem

argumento fere demonſtrari poſſit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non poſſe tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, oſtendemus breuiter, in vno eodemque contactu non poße eſſe plura puncta, quam unum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F, recta ducatur E F, quæ ad contactū

11. tertij



perueniet neceſſario, vt ad punctū A. Dico igitur, hos circulos ſeſe duntaxat tangere in puncto A. Si enim ſe tangant in alio puncto, vt in B; ductis ex B ad centra E, & F, rectis B E, B F, erunt recta E F, F B, maiores recta E B; Eſt autem recta E B, æqualis rectæ E A, cum vtraq; ſit ex centro E: Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt rectæ E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quā F A; quod eſt abſurdum, cum F B, F A, cadant e centro F, ad circumferentiam, ideoque ex circuli defin. æquales exiſtant.

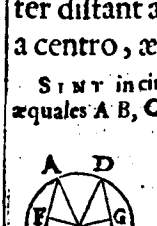
20. primi

13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant a centro. Et quæ æqualiter diſtāt a centro, æquales ſunt inter ſe.

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales A B, C D; Dico ipſas æqualiter diſtare a centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniugantur rectæ E A, E D; Secabuntque rectæ E F, E G, rectas A B, C D, bifariā. Quare cum totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ uidelicet A F, D G, æqualia. Quoniam igi-

3. tertij.



quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter ſe ſunt æqualia: Quadratum autem rectæ E A æquale eſt quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoque quadrata rectarū A F, F E, æqualia quadratis rectarū D G, G E. Ablatis ergo quadratis

47. primi

æquali-

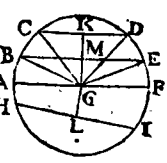
æqualibus æqualiū rectarū A F, D G, remanebunt quadrata rectarū F E, G E æqualia, ideoque & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ A B, C D, æqualiter a centro E.

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter a centro E; Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterū ex cētro E, ad AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; diuidenteq; rectas AB, CD, bifariā. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earū quadrata æqualia: Est autem quadratū rectæ E A, æquale quadratis rectarū A F, F E; & quadratū rectæ E D, æquale quadratis rectarū D G, G E. Quare & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; idcoq; ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atque adeo rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoque erūt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant a centro, &c. Quod erat demonstrandum. 3. tertij. 47. primi

THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

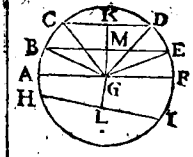
IN circulo maxima quidē linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

IN circulo A B C D E F, cuius centrū G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autem C D. Dico omnium esse maximam A F; & H I, maiorem, quam C D. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior est C D, a cētro, quā H I, erit G K, maior quā G L, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex G K, recta G M, ipsi G L, æqualis, atq; per M, educatur B M E, perpendicularis ad G K, & cōnectantur rectæ G B, G C, G D, G E. Quū igitur rectæ



ppendiculares G M, G L, æquales sunt, æqualiter distabūt rectæ B E, H I, a centro, per 4 defin. huius lib. & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ G B, G E, maiores quidem 14. tertij 20. primi

quidem sunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quam B E; Eadem ratione ostendetur A F, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, G D, triãguli C G D; & angulus B G E, maior est angulo C G D; erit recta B E, maior quam C D; atque adeo H I, quæ æqualis ostensa fuit ipsi B E, maior quoque erit quam C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandũ.



24. primi

SCHOLION.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemque puncto circunferentiæ plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim a puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, transeat. Dico A D, esse omniũ maximam, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E, cum in triangulo A E C, latera A E, E C, maiora sint latere A C, sintque rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc est, rectæ A D; maior erit A D, quam A C; Eademque ratione maior erit, quam A B; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est A D.



20. primi

DEINDE, quia duo latera A E E C, trianguli A E C; æqualia sunt duobus lateribus A E, E B trianguli A E B; & angulus A E C, totus, maior est angulo A E B; erit basis A C, maior basi A B; Eodemque argumento erit A C, maior quacunque alia linea, quæ a centro remotior est.

24. primi

CAETERVM & hinc duæ tantum æquales lineæ duci possunt a puncto A, ad vtrasque partes maximæ A D. Si namq; angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturque recta A F; cum latera A E, E C, æqualia sint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoque A E C, A E F, æquales; Erunt bases A C; A F, æquales, Neque vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi; Quacunque enim ducatur ex A, supra A C, ea minor erit quam A C; si vero infra A C,

4. primi

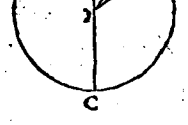
ea

ea maior erit, vt iam demonstratum est.

THEOR. 15. PROPOS. 16. 15.

QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularē necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A E; ducta D B, erunt duo anguli D A B, D B A, æquales; sed D A B, rectus est, per constructionem: igitur & D B A, rectus erit, quod est absurdum; Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; nec eandē ob causam in ipsam circumferentiā, sed extra, qualis est E F. Dico iam inter A E, rectam, & circunferentiā A B, non posse cadere alteram rectā. Cadat enim, si fieri potest, recta A G, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circunferentiam in I. Quoniam igitur in triangulo D A H, duo anguli D H A, D A H, minores sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor, ideoque recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I, maior erit quam D H, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circunferentiam A B: sed quæcunque ex A, du-



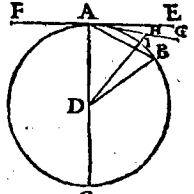
5. *primi*

17. *primi*

17. *primi*

19. *primi*

A, ducatur infra A E, ea secabit circulū. Dico deniq; angulū semicirculi, contentū diametro A C, & circunferētia A B, maiorē esse omni acuto angulo rectilineo; reliquū uero angulū cōtingentiæ, qui cōtinetur recta A E, & circunferentia A B, minorē esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniā ostensū est, omnē rectā ex A ductā infra perpendicularē A E, cadere intra circulū, faciet necessario ea cum A C, minorē angulū angulo semicirculi, at uero cū A E, maiorē angulo cōtingentiæ, cū ille sit pars anguli semicirculi, hic uero totum quidpiam ad angulū contingentiæ. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.



COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod recta a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta, ipsum circulum tangit. Ostensum enim fuit, ipsam cadere extra circulum; Quare solum in puncto illo diametri extremo ipsum attingit.

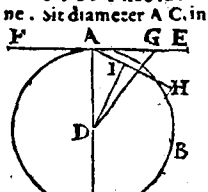
EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter A C, in circulo A B C, cuius centrū D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quā dico extra circulū cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniā igitur in triāgulo A D G, duo anguli D A G, D G A, minores sunt duobus rectis, & D A G, factus est rectus; erit D G A, recto minor. Quare maior erit recta D G, quā D A; ideoq; punctū G, extra circulū erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra A E, recta A H, quā dico necessario secare circulū. Fiat.n. angulus A D I, æqualis angulo E A H. Addito igitur cōmuni angulo D A H, erūt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideoq; minores duobus rectis; quare coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, ut' in I. Dico igitur punctū I, esse intra circulū. Quoniā tres anguli in triā

17. primi

19. primi

11. prim.



gul-

gulo D A I, æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atq; adeo maior, quam D A I, acutus. Quare recta DA, maior est quam D I. Non igitur D I, ad circunferentiã pertueniet; propterea q; punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta A H, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, ut prius. 32. primi 19. primi

SCHOLION.

EXISTIMAT *Peletarius, angulũ contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circũferentiæ, non effici angulum ullum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quã ipse hoc in loco adducit. Sic igitur inquit:*

CVM *huius theorematis caput postremũ attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriã nõ satis sibi constare; immo adeo, repugnantiã in se admittere.*

PRIMVM *enim extra intelligentiã est, ut inter quãtitates minima dari possit; qualẽ hoc loco angulũ, quẽ dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorẽ omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, ut maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundũ eam æquale, & inæquale dicatur. Quantitatis etiam cõtinuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, ut apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.*

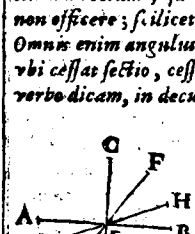
SI a maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quã dimidiũ, idq; continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus, & BCD, angul⁹ (si modo sit angul⁹) cõtactus: Vult prima decimi si auferãt ab angulo A, maius q̃ dimidium, ac rursus a reliqua parte

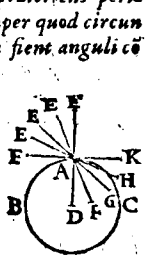
parte maius, quam dimidium; ſicque continuo ex reſiduis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam B C D. Cuius demonſtrationem hic non appono, cum ex ſequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propoſitio eſt, quæ (ut ſic dicam) magis naturaliter uera ſit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non uidet propoſitis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abſtuleris, ut quinarium; tum à ternario reſiduo, maius quam dimidium, ut binarium; relinqui unitatem poſito binario minorem? Neque uero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propoſitionis ſententiam de quantitatibus eiuſdem generis eſſe intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla eſt; quin etiam menti Euclidis contraria, ut nos, cum illuc uentum erit, manifeſtum faciemus. Immò & ipſe Campanus ſecum pugnat, cum in ſecunda duodecimi demonſtranda, aliſque propoſitionibus nonnullis ſolidorum, a curuo rectum auferat.



Nos igitur hanc dubitationem ſic expediemus; ut dicamus lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria anguli non efficere; ſcilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in ſectione conſiſtit, non in contactu. Vbi ceſſat ſectio, ceſſat quoque anguli forma. Atque ut uno uerbo dicam, in decuſſatione (Decuſſationem hoc loco, & ſectionem ſine diſcrimine accipio) omnes angulorum ſpecies perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, ſe ſcindentibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur C D, ſic moueri in orbē, ſcilicet ſuper puncto E, fixo, ut ex C D, fiat F G; hinc ſane ex recto angulo A E C, fiet obtuſus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cūque facta fuerit H K, hinc quidem angulus obtuſior fiet H E A, inde uero acutior B E H; ſicque continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eoſdem terminos concludatur cū ea. Tum enim immerſa, ut ſic dicam linea C D, in lineam A B, euaneſcet angulus. Neque diuerſa ratio eſt in curuo. Sit enim in circulo



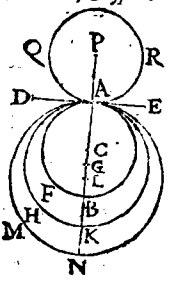
culo A B C A cuius centrum D, linea D E, pretericns peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circun ducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli cõtinuo varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea F D, facta sit E K, & tangat circulum Actum linea D E, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantũ ad angulum attinet: non aliter quam si B A H, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantque spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non cõsistat quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumque A, peripheriæ in suo rotundo; neque vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se velusi lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contraria contraposita, fiant manifestiora. Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; ut nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet: Illud tamen minime urgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus; Habit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hac Geometricis rationibus confirmemus, per theoremata.



CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter vero A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæ sextæ, lineam D E, contingere ipsum A F B A, circulum: ac proptere-a

rea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsextæ. Iam vero inter puncta C, & B, suscipiatur in diametro A B, centrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non esse quantitatem. Constat quippe circulum A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cum sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum ex eodem huiusce decimæsextæ corollario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem corollario, D A M, omni acuto minor. Sicque in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic, omnes æquales, si modo æqualitas inter non quanta dici possit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis cõtactui D A F. Fietq; ut M A F, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat cõtactum D A M. Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.



SED & probabimus contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes: Quapropter anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si D A F, sit quantitas

quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neque per obliquam, vt per lineam A M: Esset enim F A M, pars ipsius D A F: Atqui F A M, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum F A M, non sit quantitas, per primam harum; neque per rectam, cum neq; D A F, sit quantitas, per secundam earundem; neq; D A Q, quantitas per eandem. Quare cum F A Q, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt a diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

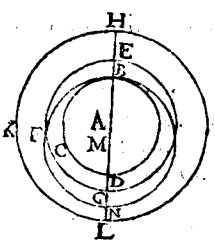
VT in posteriori figura, angulus B A F, æqualis est angulo B A D; cum ipsi nihil accrescat ob contactum D A F, qui quantitas nõ est: & ob id Q A P, rectus est, & æqualis ipsi D A P, cum D A Q, nihil addat: quod erat probandum.

HAEC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quã ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subiicere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt a diametro & peripheria, sunt æquales.

SINT

SINT enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorum diametri B D. & E G & secet E G ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D; (neque enim contra, C B D, maior ullo pacto erit ipso F E D) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum unus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, angulus a diametro & peripheria, verbi gratia, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione ullus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifestè maiores, & minores fiunt.

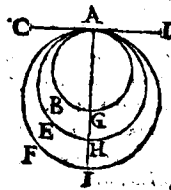


HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circuli interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadem linea ut L, posito, describatur circulus B F N B, tanto internallo, quanto est circuitus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat P C D B, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum: Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D æqualis. Igitur C B F, contactus, nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio, eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

HAEC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset,

dasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, quem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt a nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem; Immo vero asseueramus, quemuis angulū contactus, & si ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus C A B, si per A, describatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A; fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quod si adhuc maior circulus A F I, describatur; erit multo minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inaequalitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque: Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus B A C, minor est recto B A F; & tamen si ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D: Quod si alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multo minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.





PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri pos-

se infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior est angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam A B G, describantur, tangentes rectam C D, in A, angebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodũ quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior est acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit equalis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, uel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui aqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis se secantibus, cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM *modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, angebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est, quouis angulo acuto rectilineo, licet infinites diminuatur, vt Euclides demonstrauit: quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.*

QVOD

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt linea vnius conueniant omnino lineis alterius. si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant; sed prorsus inter se dissideant, ceu ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides: Cuius etiam rei hæc afferri potest causa; Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum: Quare si uel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixa, secabit circulum, cum in vnotantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propositione huius lib. colligimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, paxiter & illi dantaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripheriis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui a peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris: Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod

etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersis, dummodo vtrauis multiplicata alterum excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue deniq; quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem dictæ propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum ixeant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheria,

& li-

& linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sint omnes æquales. Sic etiã omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

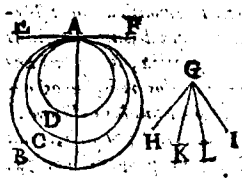
NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propositione 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit vera pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi qualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior sit angulo semicirculi in circulo minori; non tamen propterea sequitur, vt aliquis angulus semicirculi, maior sit angulo recto. Sem-

cto. *Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nihilquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in praecedenti figura cernere licet.*

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



Proponantur enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur describantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam E F in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas G H, G I, aliae rectae cadant G K, G L, diminuetur continue angulus acutus: et tamē semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

1. poster. CAETERVM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR a minori ad maius vel cōtra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per pun-

cta

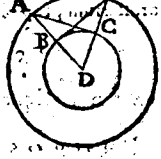
ta D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, efficiri angulum recto maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoq; vitiosam esse positionem consequentiam.



PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B; Deinde centro D, interuallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, secans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, æqualia sint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrunque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusq; D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt & bases B E, C A, & anguli D B E, D C A, super ipsas, æquales: Est autem D B E, rectus ex constructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaq; C A, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum B C, in C. quod faciendum erat.



4. primi.

SCHOLION I.



Quod si punctum A, datum fuerit in circunferentia circuli A B, omne centrum C, facilius ex eo ducetur recta tangens circulum, hoc modo. Ducta semidiametro A C, educatur per A, ad A C, perpendicularis D E. Hæc enim per corollarium præcedentis propositionis, circulum tanget: quod est propositum.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



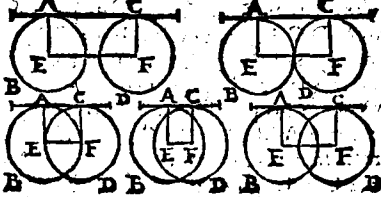
CIRCVLVM A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangens circulum in A, per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.

28. primi.

SCHOLION II.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

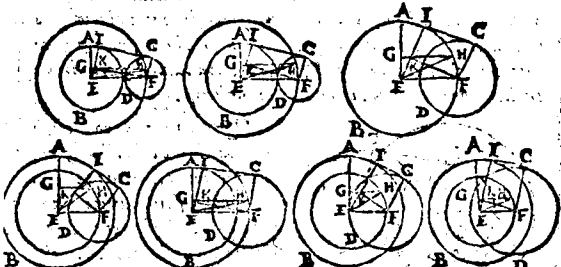
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterū includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum.



SINT primū duo ppositi circuli æquales A B, C D, quorū centra E, & F, recta iungantur E F, ad quā ducātur perpendiculares E A, F C, secātes circun-

circunferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam utrunq; circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallelæ, quod anguli E, & F, recti sint; Erunt quoq; EF, AC, æquales & parallelæ; Ideoq; & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, utrunq; circulũ tanget, cum easdem angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum. 28. primi. 33. primi. 29. primi.

SINT secundo duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorũ rursus cẽtra E, & F, iungãtur recta EF, ad cuius inter



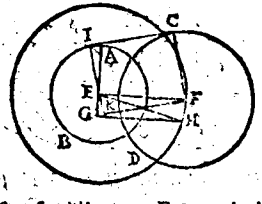
uallũ ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea recta AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsq; ad circunferentiã circuli vltimo descripti. Ducta aũt recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atq; ex F, agatur ipsi EI, parallela recta FC. Dico rectã p̃ puncta I, & C, ductã utrũq; circulũ cõtingere. Abscindatur enim ex IE, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris circuli æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoq;, ducaturq; recta KF. Quoniã igit latera HE, EG trianguli HEG, qualia sunt lateribus FE, EK, triãguli FEK, & anguli ipsis cõtenti æquales, ex cõstructione: Erunt anguli HGE, FKE, æquales; Ac proinde, cũ HGE, rectus sit, ex cõstructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK æquales sunt, & parallelæ, ex cõstructione, erũ quoq; IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus EIC, cũ æqualis sit externo FKE, rectº erit; 4. primi. 33. primi. 29. primi.

Ideoq;

Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrũq; circulũ cõtinget, cũ rectos angulos efficiãt in extremitatibus semidiametrorũ. Quod erat ppositũ.

SATIS aũt constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinq; modis posse fieri. Aut. n. alius extra aliũ cadit, aut se mutuo cõtingũt, aut se inuicẽ p cẽtra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra consistant in cõmuni eorũ segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli ppositi fuerint inæquales, id cõtingere possse septẽ modis. Aut. n. minor totus extra maiorẽ cadit, aut ipsum tãgit, aut ipsũ secat, ita, vt vel cẽtrũ eius sit in circũferẽtia maioris, vel intra, hac tamẽ lege, vt circũferẽtia minoris citra centrũ maioris trãsẽat, vel cẽtrũ minoris sit extra circumferẽtiã maioris, vel intra, ita tamẽ, vt circũferẽtia minoris p̃ maioris centrum incedat, vel deniq; intra, ita tamen, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.



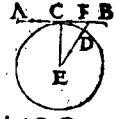
QVONIAM vero, circulis inæqualibus existẽtibus, initiũ cõstructionis sumpsimus semp a maiori, si quis maluerit a minori incipere, id efficiet eadẽ cõstructione, demõstrationeq;, nisi qd recta AE, IE, protrahẽda sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, cõtẽtos lateribus HE, EG; FE, EK; idcirco æquales esse, qd HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales sint ex cõstructione. Deniq; angulũ EIC, esse rectum, ex 29. propos. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulũ tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiũcta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tãgat in C, circulũ CD, cuius cẽtrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendiculare esse ad AB.

A B. Si.n. nō est, ducatur E F, perpēdicularis ad A B, secās circunferentiā in D. Quoniā igitur in triangulo C E F, duo anguli E C F, E F C, minores sunt duobus rectis; Et est E F C, rectus, ex cōstructione: erit E C F, minor. Quare maior erit recta E C, hoc est, E D, quā E F, pars quā totū. qđ est absurdū. Est igitur E C, perpēdicularis ad A B. Quare si circulū tāgat recta quæpiā linea, &c. Qđ demōstrādū erat.



17. primi.

19. primi.

ALITER. Si E C, non est perpendicularis ad A B, erit alter angulorū A C, obtusus, & alter acutus: Sit ergo E C B, acutus, q cū maior sit angulo semicirculi E C D, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: qđ est absurdū. Ois siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto.

16. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a cōtactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C; & ex C, ducatur C E, perpendicularis ad A B. Dico in C E, esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta F C, quæ perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod est absurdū. Nō igitur extra C E, cētrū circuli existet. Itaq; si circulū tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demōstrandū.



18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ſuper baſin BC, conſtituatur angulus BDC, ad centrum; & ſuper eandem baſin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplũ eſſe anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniã igitur rectæ DA, DB, æquales ſunt, erunt anguli DAB, DBA, æquales: Eſt autem externus angulꝰ BDE, æqualis duobꝰ angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorũ, vt anguli DAB. Eodẽ mõ duplus oſtẽdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: qđ eſt ꝓpoſitũ.



5. primi.
32. primi.

SECVNDO non includãt rectæ AB, AC, rectas DB, DC, ſed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis eſt duobꝰ internis DAC, DCA: Hi aũt duo inter ſe ſunt æquales, quod latera DA, DC, ſint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod eſt propoſitum.



32. primi.
5. primi.

TERTIO recta AB, ſecet rectam DC, & per centrũ D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrũ, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandẽ baſin EC, & recta AE, extẽditur per centrũ; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt oſtẽſum fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent. n. hi anguli eandẽ baſin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si. n. totum totius eſt duplũ, & ablatũ ablati; erit & reliquũ reliqui duplũ. In circulo igit angulꝰ ad cẽtrũ duplex eſt, &c. Qđ erat demõſtrãdũ.



19. pron.

SCHOLION.

QVOD ſi recta BD, CD, *in cẽtro angulũ nõ cõſtituãt ad partes baſis BC; qđ tũ demũ fit, quãdo ſegmentũ BAC, eſt vel ſemicirculus, vel ſegmentũ minus; nihilo minus ſpatiũ illud ad centrũ duplũ erit anguli ad circunferẽtiã, qui eãdẽ habeat baſin, quã ſpatiũ illud. Ducta. n. recta AE, per cen-*



trũ

trũ, erit tã angulus BDE, ad cẽtrũ duplus anguli BAE, ad circunferentiã, quã angulus CDE, ad centrũ anguli CAE, ad circunferẽtiã, vt ostẽsum est. Spatiũ igit ad centrũ D, basin habẽs BEC, cõstansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ est totius anguli BAC. Quod est propositum.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

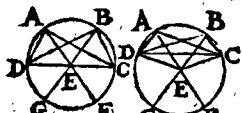
IN circulo ABCD, cuius centrum E, existãt anguli A, & B, in segmento DABC; Dico eos esse æquales. Sit enim primo segmentum DABC, semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrũ. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cũ omnes habeant eandẽ basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli



20. tertij.

E. Quare inter se æquales erunt. Eadẽq; ratione oẽs alij anguli existentes in segmento DABC, ostendent esse æquales. 7. prom.

SIT secũdo segmentũ DABC, vel semicirculus, vel semiculo minus. Ducãtur p centrũ E, rectæ AF, BG, & in segmẽto minori connectãtur rectæ EC, CE. Quũ igit angulꝰ DEF, cẽtrũ, duplꝰ est anguli DAF, peripheriã: Similiter angulus EF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo EF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.



20. tertij.

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedẽtis demonstrauimus, spatiũ ad centrũ E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: 7. prom.
int ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

ALITER. Secẽt sese rectę AC, BD, in F, & connectat recta
; Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æqua-
unt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam

se infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior est angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atq; ita deinceps, si minores semper circuli, quam A B G, describantur, tangentes rectam C D, in A, angebitur perpetuo angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodu quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior est acutus B A D, & multo adhuc maior acutus B A C. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento vnquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit aequalis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui aqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur a duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, qualibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinites dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quam A F I, tangentes rectam C D, in A, angebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario vero, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multo adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est, quouis angulo acuto rectilineo; licet infinites diminuatur, vt Euclides demonstrauit: quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum ixent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant; sed prorsus inter se dissideant, seu ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiusce modi inter se æquales; Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa; Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum: Quare si vel minime inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propositione huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, paxiterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur a peripheriis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur a peripheriis minoribus, maiores erunt; Et qui a peripheriis maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris: Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod

etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue deniq; quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis æquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, vt ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem dictæ propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, ceu videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria a curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodo effici a duabus linois se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum incidant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheriæ, & li

& linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO *demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur a linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiã omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum asseramus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius; contactum interiorem nihil esse.*

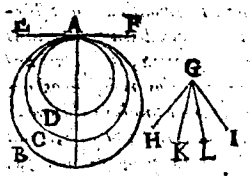
NEGAMVS *deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos cæquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propositione 31. huius libri.*

EX *his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit vera pars eius, cum contrarium nullo modo contineri. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione totum illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum scripsit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior sit angulo semicirculi in circulo minori; non tamen propterea sequitur, vt aliquis angulus semicirculi, maior sit angulo recto. Sem-*

cto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur a peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nullum tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in praecedenti figura cernere licet.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



Proponantur enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur describantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectam E F in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant G K, G L, diminuetur continue angulus acutus: et tamē semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

EX CAMPANO.

CAETERVM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet. *1. poster.*

TRANSITVR a minori ad maius vel cōtra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per pun

cta

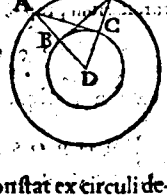
ta D, E, F, donec circulum contingat in A; Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum vero secare cessat, efficiri angulum recto maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoq; vitiosam esse posteriorem consequentiam.



PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum B C, in B; Deinde centro D, interuallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulum A E, in E. Ducta igitur recta E D, secans circulum B C, in C, connectatur recta A C, quam dico tangere circulum B C, in C. Cum enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, æqualia sint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrunque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusq; D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt & bases B E, C A, & anguli D B E, D C A, superipsas, æquales. Est autem D B, E, rectus ex constructione; igitur & D C A, rectus erit. Itaq; C A, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum B C, in C. quod faciendum erat.



4. primi.

SCHOLION I.



Quod si punctum A, datum fuerit in circunferentia circuli A B, cuius centrum C, facilius ex eo ducetur recta tangens circulum, hoc modo. Ducta semidiametro A C, educatur per A, ad A C, perpendicularis D E. Hæc enim per corollarium præcedentis propositionis, circulum tanget: quod est propositum.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



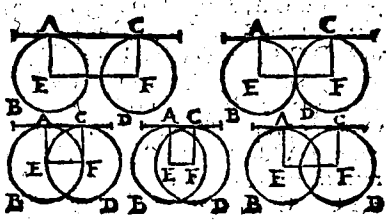
CIRCVLVM A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetq; circulum in A; per corollarium propos. 16. quod erat faciendum.

28. primi.

SCHOLION. II.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

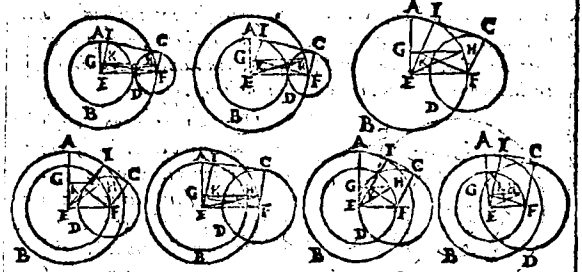
PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterũ includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumq; tangat circulum.



SINT primũ duo ppositi circuli æquales A B, C D, quorũ centra E, & F, recta iungantur E F, ad quã ducãtur perpendiculares E A, F C, secãtes circun-

circunferentiæ in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrunq; circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, & parallelæ, quod anguli E, & F, recti sint; Erunt quoq; EF, AC, æquales & parallelæ; Ideoq; & anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrunq; circulũ tanget, cum eastor angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum. 28. primi. 33. primi. 29. primi.

SINT secundo duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorũ rursus cẽtra E, & F, iungãtur recta EF, ad cuius inter



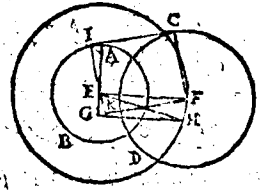
mallũ ex E, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea recta AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsq; ad circumferentiã circuli vltimo descripti. Ducta aũt recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atq; ex F, agatur ipsi EI, parallela recta FC. Dico rectã p̃ctã I, & C, ductã vtrũq; circulũ cõtingere. Abscindatur.n. ex IE, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris circuli æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoq;, ducaturq; recta KF. Quoniã igit̃ latera HE, EG trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, triãguli FEK, & anguli ipsis cõtenti æquales, ex cõstructione: Erunt anguli HGE, FKF, æquales; Ac proinde, cũ HGE, rectus sit, ex cõstructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK æquales sunt, & parallelæ, ex cõstructione, ẽrũ quoq; IC, KF, æquales & parallelæ; Atq; propterea angulus EIC, cũ æqualis sit externo FKE, rectꝰ erit; 4. primi. 33. primi. 29. primi.

Ideoq;

Ideoq; & ICF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrũq; circulũ cõtinget, cũ rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorũ. Quod erat ppoſitũ.

SATIS aũt constat, ſi circuli propoſiti æquales fuerint, id quinq; modis poſſe fieri. Aut.n. alius extra aliũ cadit, aut ſe mutuo cõtingũt, aut ſe inuicẽ p cẽtra ſecant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra conſiſtant in cõmuni eorũ ſegmento, vel certe extra illud.

ITEM ſi circuli ppoſiti fuerint inæquales, id cõtingere poſſe ſeptẽ modis. Aut.n. minor totus extra maiorẽ cadit, aut ipſum tãgit, aut ipſũ ſecat, ita vt vel cẽtrũ eius ſit in circũferẽtia maioris, vel intra, hac tamẽ lege, vt circũferẽtia minoris citra centrũ maioris trãſeãt, vel cẽtrũ minoris ſit extra circumferẽtiã maioris, vel intra, ita tamẽ, vt circũferẽtia minoris p̃ maioris centrum incedat; vel deniq; intra, ita tamen, vt circumferentia minoris includat centrum maioris.



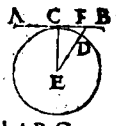
QVONIAM vero, circulis inæqualibus exiſtẽtibus, initiũ cõſtructionis ſumpſimus ſemp a maiori, ſi quis maluerit a minori incipere, id efficiet eadẽ cõſtructione, demõſtrationeq;, niſi qđ recta AE, IE, protrahẽda ſunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales ſint ſemidiametro FC, maioris circuli; Additò inſuper, angulos HEG, FEK, cõtẽtos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales eſſe, qđ HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales ſint ex cõſtructione. Deniq; angulũ EIC, eſſe rectum, ex 29. propoſ. lib. 1. quod & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus ſit oſtenſus.

17. ## THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulũ tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiũcta fuerit, ad ipſam contingentem perpendicularis erit.

RECTA AB, tãgat in C, circulũ CD, cuius cẽtrũ E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularẽ eſſe ad AB.

A B. Si.n. nō est, ducatur E F, perpēdicularis ad A B, secās circunferentiā in D. Quoniā igitur in triangulo C E F, duo anguli E C F, E F C, minores sunt duobus rectis; Et est E F C, rectus, ex cōstructione: erit E C F, minor. Quare maior erit recta E C, hoc est, E D, quā E F, pars quā totū. qđ est absurdū. Est igitur E C, perpēdicularis ad A B. Quare si circulū tāgat recta quæpiā linea, &c. Q đ demōstrādū erat.



17. primi.

19. primi.

ALITER. Si E C, non est perpendicularis ad A B, erit alter angulorū A d C, obtusus, & alter acutus: Sit ergo E C B, acutus, q cū maior sit angulo semicirculi E C D, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: qđ est absurdū. Quis siquidem angulus semicirculi maior est omni acuto.

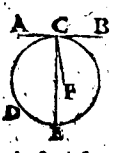
16. tertij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

18.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, a cōtactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C; & ex C, ducatur C E, perpendicularis ad A B. Dico in C E, esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrum, a quo ad C, ducatur recta F C, quæ perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod est absurdū. Nō igitur extra C E, cētrū circuli existet. Itaq; si circulū tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demōstrandū.



18. tertij.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

19.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplũ esse anguli BAC. Includant enim primo duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniã igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulꝰ BDE, æqualis duobꝰ angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorũ, vt anguli DAB. Eodẽ mõ duplus ostẽdetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC: qđ est ꝓpositũ.



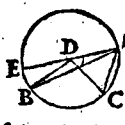
5. primi.
32. primi.

SECVNDO non includãt rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis est duobꝰ internis DAC, DCA: Hi aũt duo inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.



32. primi.
5. primi.

TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrũ D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrũ, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandẽ basin EC, & recta AE, extẽditur per centrũ; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostẽsum fuit: Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent.n. hi anguli eandẽ basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. Si.n. totum totius est duplũ, & ablatũ ablati; erit & reliquũ reliqui duplũ. In circulo igit angulꝰ ad cẽtrũ duplex est, &c. Qđ erat demõstrãdũ.



19. pron.

SCHOLION.



QVOD *si recte* BD, CD, *in cẽtro angulũ nõ cõstituãt ad partes basis* BC; *qđ tũ demũ fit, quãdo segmentũ* BAC, *est vel semicirculus, vel segmentũ minus; nihilo minus spatiũ illud ad centrũ duplũ erit anguli ad circunferẽtiã, qui eãdẽ habeat basin, quã spasiũ illud. Ducta.n. recta AE, per cen-*

trũ

trũ, erit tã angulus BDE, ad cẽtrũ duplus anguli BAE, ad circunferentiã, quã angulus CDE, ad centrũ anguli CAE, ad circunferẽtiã, vt ostẽsum est. Spatiũ igit ad centrũ D, basin habẽs BEC, cõstansq; ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ est totius anguli BAC. Quod est propositum.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 20.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

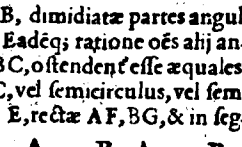
IN circulo ABCD, cuius centrum E, existãt anguli A, & B, in segmento DABC; Dico eos esse æquales. Sit enim primò segmentum DABC, semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrũ E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriã, cũ omnes habeant eandẽ basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. Quare inter se æquales erunt. Eadẽq; ratione oẽs alij anguli existentes in segmento DABC, ostendent esse æquales.



20. tertij.

7. prom.

SIT secũdo segmentũ DABC, vel semicirculus, vel semiculo minus. Ducãtur p centrũ E, rectæ AF, BG, & in segmẽto minori connectãtur rectæ DE, CE. Quoniam igit angul⁹ DEF, cẽtrũ, dupl⁹ est anguli DAF, peripheriã: Similiter angulus EF, anguli CAF; & sunt anguli DEG, GEF, æquales angulo EF: erunt tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

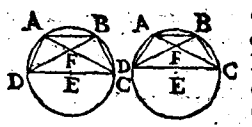


20. tertij.

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedẽtis demonstrauimus, spatiũ ad centrũ E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusq; anguli DAC, DBC, ad circunferentiam: erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

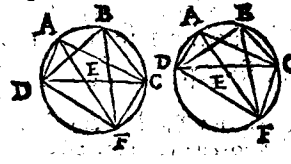
7. prom.

ALITER. Secẽt sese rectę AC, BD, in F, & connectat recta EF. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam



quã hi æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, qui æquales sunt; erũt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostẽsi in segmẽto maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.

15. primi.

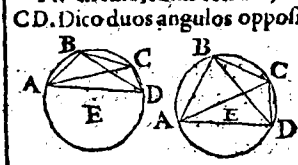


ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad pũctũ circũferẽtiæ quoduis F, includẽtibus cẽtrũ E, ita vt tã DABCF, q̃ FDABC, sit segmẽtũ maius, iungãtur quoq; rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec nõ & anguli FAC, FBC, in segmẽto euã maiori FDABC, existẽtes: Si hi illis addãtur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaq; in circulo, qui in eodẽ segmento sunt, &c. Quod erat ostẽdendũ.

21. THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius cẽtrũ E, inscriptũ sit quadrilaterũ ABCD. Dico duos angulos oppositos ABC, CDA: Irẽ BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis n. diametris AC, BD, erunt duo anguli ABD, ACD, ĩ eodẽ segmẽto ABCD, æquales. Similiter erũt duo anguli CBD, CAD, in eodẽ segmẽto CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igit cõi angulo CDA, erũt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA: Sed hi tres æquales sunt duobus rectis; igitur & duo



21. tertii.

32. primi.

& duo ABC, CDA, duobus erũt rectis æquales. Eodem modo oſtendemus, angulos BCD, DAB, duobus eſſe rectis æquales. Quadrilaterorum igitur in circulis deſcriptorũ, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLION.

CONVERSVM quoq; huius theorematis demonſtrari poteſt, hoc modo.

Si in quadrilatero anguli, q ex aduerſo, duobus rectis ſint æquales; circul⁹, qui p tres quoſcũq; eius angulos deſcribitur, trãſibit etiam per reliquũ quartũ angulũ; Atq; adeo circa ipſum quadrilaterum circulus deſcribi poteſt.

IN quadrilatero enim ABCD, ſint anguli oppoſiti A, & C; Item B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus deſcribatur; (Quo modo autẽ hoc fieri poſſit, in 25. propoſ. huius lib. & in 5. quarti lib. oſtendetur.) quem dico tranſire etiã per D. Si enim nõ, tranſibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AF, ad circunferẽtiã, ita vt nõ ſecent rectas CD, AD. Quo facto, erũt anguli B, & E, æquales duobus rectis; Erãt aũt & anguli B, & D, duobus rectis æquales: Igitur duo anguli B, E, æquales ſunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato cõi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod eſt abſurdũ. Ducta enim recta AC, erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Tranſit igitur circulus p pũctũ D. qđ eſt propoſitũ.

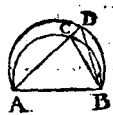


22. tertij.

21. primi.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 22.

SVPER eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia, & inæqualia, nõ conſtituentur ad eaſdem partes.

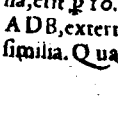


Si .n. fieri pōt, sup recta AB, cōstituātur ad easdem partes duo segmēta similia, & inequalia ACB, ADB. Perspicuū ē aūt, qđ se solū interse cēt in pūctis A, & B; circulus .n. circulū nō secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmēti tota erit extra peripheriā alterius. Ducatur igitur recta AD, secās circunferētias in C, & D, & cōnectātur rectę CB, DB. Quoniā igit segmēta ponūtur simi lia, erit p 10. defin. huius lib angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: qđ est absurdū. Nō igitur segmēta similia. Quare sup eadē recta linea, &c. qđ erat demōstrādū.

10. tertij.

16. primi.

SCHOLION.



Eadem ratione, neq; ad diuersas partes super eadē recta linea duo segmēta circulorū similia, & inæqualia cōstituētur. Nā si alterū eorū intelligaī moueri circa lineā AB vt iā amboſint ad easdē partes, in idē absurdū incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.

23.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

Super rectis lineis æqualibus AB, CD, cōstituta sint segmēta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Li neæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmētū AEB, segmento CFD, cōgruere. Si .n. nō cōgruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, cōstituētur super eadē recta CD, duo segmēta AEB, AFB, similia, & inequalia; qđ est absurdū. Demōstratū .n. est cōtrariū. Q đ si partim extra cadat, partim intra, secabūt sese in plurib⁹ pūctis, q̄ duob⁹, nimirū in A, B, G. Q đ est absurdū. Circul .n. nō se secāt in plurib⁹ pūctis, q̄ duobus. Cōgruet igit segmētū AEB, segmento CFD,



25. tertij.

10. tertij.

CFD, atq; adeo ipſa inter ſe æqualia erũt. Quocirca ſuper æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLION.

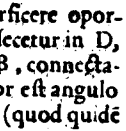
NON ſolum in hac propoſitione oſtenditur ſegmenta ſimilia AEB, CFD, eſſe æqualia, ſuper æquales baſes AB, CD; verũ etiam ipſas peripherias, eo quod, vt demonſtratum eſt, ſibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propoſ. & præcedentis, facile demonſtrabitur. Nimirum, ſegmenta circulorum æqualia ſuper æquales lineas, vel ſuper eandem conſtituta, eſſe ſimilia. Nam propter æqualitatem alterum alteri congruet: quare ſimilia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipſis conſtituti æquales ſint.

PROBL. 3. PROPOS. 25. 24.

CIRCVLI ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

SIT ſegmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quæ bifariam ſecetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, uel maior eſt angulo DAB uel æqualis, uel minor. Sit primo maior, (quod quidẽ continget, quando ſegmentum ABC, minus fuerit ſemicirculo: Tunc enim, quia BD, tranſit per centrum ex corollario propoſ. 1. huius lib. quod eſt extra ſegmentum; cum po natur eſſe minus, erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum, ſit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt; Quare angulus DBA, maior erit angulo DAB.) fiatque angulus BAE, æqualis angulo DBA, & ſecet recta AE, rectam BD, productam in E. Dico E, eſſe centrum circuli, cuius ſegmentũ ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, triãguli CDE, & anguli contenti, recti: Quare baſes EA, EC, æquales erunt;



7. tertij.

18. primi

4. primi

6. primi
9. tertij.

Est autē & E A, æqualis ipsi E B, quod anguli E A B, E B A, æquales sint. Igitur tres lineæ E A, E B, E C, æquales erūt, ac propterea E centrū erit circuli A B C, quandoquidē ex E, plures quā duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.

Sit secundo angulus D B A, anguli D A B, æqualis; (Quod demū continget, quando segmentū A B C, semicirculus fuerit. Tunc enim A C, diameter, & D, centrum, atq; adeo rectæ D A, D B, æquales; quare & anguli D A B, D B A, æquales erunt.) Erunt igitur rectæ D A, D B, æquales. Erat autem & D C, æqualis ipsi D A; Quapropter cum tres rectæ D A, D B, D C, cadant ex D, in circunferentiam, erit D, centrum.



5. primi
6. primi
9. tertij.

Sit tertio angulus D B A, anguli D A B, minor, (quod quidē eueniet, si segmentū A B C, semicirculo maius exterit. Tunc enim, quoniam B D, transit per centrū, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cū maius esse ponatur, existit; erit D B, omnium, quæ ex D, in circunferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quā D A, ideoq; angulus D A B, maior angulo D B A.) fiatq; angulus B A E, æqualis angulo D B A; & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo ipsum ostendimus, quando angulus D B A, minor erat angulo D A B. ut constat, si recta ducatur E C. Circulo igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

7. tertij.
28. primi



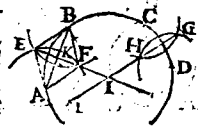
SCHOLION.

BREVIVS *inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C quæ duabus rectis coniungantur* A B, B C, *quæ bifariam secentur in* D, *& in* E. *Deinde ex* D, *& E, educātur ad* A B, B C, *perpendiculares* D F, E F. *Quoniā igitur p corollariū propos. 1. huius lib. tam* D F, *quā* E F, *incedit per centrum circuli, cuius* A B C, *est segmentū, coibunt ambæ in centro, vt in* F. *Quare centrum est inuentum; quod est propositum.*



ALITER, *vt Mechanici solent. Accipiantur in circunferentia*

ferentia duo puncta vtcunque A, & B, e quibus describantur duo arcus adidē internallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Posea ex alijs duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describatur ad quoduis internallum, siue idē quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ E F, G H, transibunt ambæ per centrū: quare punctum I, in quo se secant, erit centrum. Quod autē lineæ E F, G H, per cē trum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ A E, A F, B E, B F, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorū. Quoniā igitur latera A E, F F, trianguli A E F, æqualia sunt lateribus B E, F F, trianguli B E F; & bases quoque A F, B F, æquales: Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rursus ducta recta A B, quæ secet E F, in K; quoniā latera A E, I K, triāguli A E K, æqualia sunt lateribus B E, E K, triāguli B E K; & anguli A E K, B E K, æquales; erunt & bases A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideoque recti. Quare cum E F, dimidiet rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos; transibit per centrū ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum.



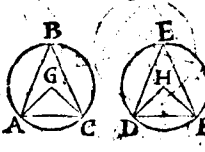
8. primi

4. primi

THEOR. 23. PROPOS. 26. 25.

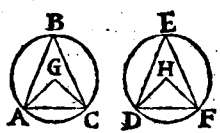
IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorū cētra G, H, cō stituti sint primo ad cētra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, q̄b⁹ insistūt, siue sup̄ quas ascēderūt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs A B C, D E F, duo pūcta B, E, ad q̄ rectæ ducant A B, C B, D E, F E, cō nectāturq; rectæ A C, D F. Quoniam igitur anguli B, & E, dimidij sunt æqualiū angulorum G, & H, erunt ipsi æquales inter se: Quare ex definitione segmēta A B C, D E F, similia erunt.



20. tertij.

Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sunt lateribus D H, H F, trianguli D H F, propter circulorũ æqualitatem, & anguli, quos continẽt G, H, æquales. ex hypothesi erũt bases A C, D F, æquales: Cum igitur segmenta similia A B C, D E F, sint super lineas æquales A C, D F, erunt ipsa inter se æqualia; Quare si a circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta A C, D F, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ A C, D F: Quod est propositum.



4. primi

24. tertij.

SINT secundo ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; dico rursus, peripherias A C, D F, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, ut prius, segmenta A B C, D E F, similia. Cum igitur sint super æquales lineas A C, D F: (cum enim anguli G, H, æquales sint, quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt prius, rectæ A C, D F, æquales) erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur a circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta A C, D F æqualia. In æqualibus itaque circulis; æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

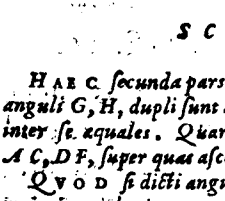
20. tertij. 24. tertii.

SCHOLION.

HAEC secunda pars breuius ita demonstrabitur. *Quoniã anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ A C, D F, super quas ascenderunt, æquales erunt.*

20. tertij.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, *maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, sit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Itẽ angulus A B C, ad circunferentiam maior angulo D E F, ad circunferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem esse peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I, angulo D H E, & angulus C B I, angulo D E F, æqualis; erunt, vt ostensum est, peripheriæ C I, D F, æquales;*

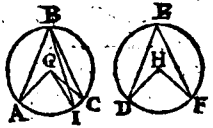


les ; Ac propterea A C, *maior, quam* D F.

THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistūt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primo anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripherijs A C, D F : Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatque angulus A G I, æqualis angulo D H F. Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cum igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum ; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales.



26. *tertij.*

INSISTANT secundo eisdem peripherijs æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias ; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt A B C, maior est ; fiat angulo E æqualis angulus A B I ; eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, ut prius, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum ; quod est absurdum. 26. *tertij.*

SCHOLION.

HAEC *secunda pars ita quoque demonstrabitur. Quoniã anguli* A B C, *&* E, *dimidij sunt angulorum* A G C, *&* H, *quos iã ostendimus esse æquales ; erunt & ipsi inter se æquales.* 20. *tertij.*

SI *vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circunferentiam, quam minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria* A C *maior, quam peripheria* D F. *Dico angulum* A G C, *maio-*

remesse angulo DHF; & angulum ABC, maiorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, ducanturq; rectæ IG, IB, erunt, ut ostensum est, tã anguli ad centrũ CGI, DHF, quã anguli ad circunferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit maior.



EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo nõ secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipiant arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ducta namque recta AC, cum arcus AB, DC, ponantur æquales, erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni, erunt AD, BC, parallelæ.



27. tertij
27. primi

SINT iam AD, BC, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC, ducta recta AC, erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales; ac proinde arcus AB, DC, quibus insistunt, æquales erunt.

29. primi
26. tertij.

VLSVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo ABC, cuius centrũ D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcũ BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctũ contactus A, recta DA, connexisq; rectis DB, DC, erunt anguli ADB, ADC, circunferentijs æqualibus AB, AC, insistentes, æquales. Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, utrumq; utriq;. Igitur & anguli ad G, æquales



27. tertij.

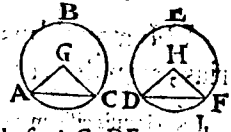
4. primi

les sunt, super bases G B, G C, ac propterea recti. Igitur & AGB AGC, illis deinceps rectis sunt. Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti, quod DA, perpendicularis sit ad EF; Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum. 18. tertij. 28. primi

THEOR. 25. PROPOS. 28. 27.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

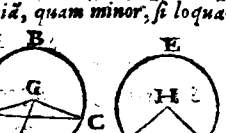
IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales A C, D F. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualem esse maiori D E F; & minorem A C, minori D F. Ductis n. rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F; Sunt autem & bases A C, D F, æquales: Igitur anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.



8. primi 26. tertij.

SCHOLION.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quam minor. In circulis n. æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sit recta A C, maior, quam D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F; At peripheriam A B C, minorem



norem peripheria D B F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F; Ponitur autem basis A C, maior basi D F: Igitur angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, angulo D H F, æqualis; eritque propterea peripheria C I, peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F.

25. primi



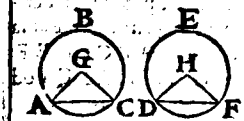
26. tertij.

Ideoque reliqua A B C, minor, quam reliqua D E F.

28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

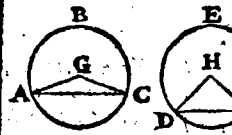
IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; Item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, ut prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F; Sunt autē & anguli G, H, æquales, quod æqualibus peripherijs A C, D F, insistant: Igitur bases A C, D F, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.



27. tertij.
4. primi

SCHOLION.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorē maior linea, quam minorem, si de segmētis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmētis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorem.



rem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores A C, D F, sitque A C, maior, quam D F; Ac proinde A B C, minor quam D E F. Dico lineam A C, maiorem esse, quam D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erit angulus A G C, maior angulo D H F, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera A G, G C trianguli A G C, æqualia sint lateribus D H, H F, trianguli D H F, erit basis A C, maior basi 24. primi *D F, &c.*

Svnt autem proxime antecedentes quatuor propositiones 25. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, &c. ut constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in uno eodemque circulo.

PROBL. 4. PROPOS. 30. 29.

DATAM peripheriam bifariam secare.

Sit peripheria A B C, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens A C, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B; Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti: igitur & bases A B, C B, æquales erunt; Ac propterea peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus: Quod erat faciendum.



4. primi
28. tertij.

THEOR. 27. PROPOS. 31. 30.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui uero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris

ioris segmenti, recto quidē maior est: minoris autē segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI ABC, cuius centrū D, diameter sit A C, cōstituaturque in semicirculo angulus A B C, existens angulus B A C, in maiori segmēto C A B, constituatur quoq; in C E B, minori segmēto angulus B E C. Dico angulum A B C, in semicirculo rectum esse; angulum uero B A C, in maiore segmento, minorem recto; & angulū B E C, in minori segmento, maiorem recto. Item angulū maioris segmenti cōprehensum recta B C, & peripheria B A C, esse recto maiorem: At angulum minoris segmenti comprehēsum recta B C, & peripheria B E C, recto minorem. Ducantur enim rectæ B C, B D, & extendatur A B, in F. Quoniā igitur rectæ D A, D B, æquales sunt, erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem ratione erit angulus D B C angulo D C B, æqualis, ideoque totus angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit: Est autem & angulus F B C externus eisdem duobus internis angulis B A C, B C A, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli A B C, F B C; ac propterea uterque rectus. Rectus igitur est angulus A B C; quod est primum.



5. primi

32. primi

QVONIAM uero in triāgulo A B C, duo anguli A B C, & B A C, sunt duobus rectis minores; Et est angulus A B C, ostensus rectus: Erit angulus B A C, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

17 primi

RVRSVS quia in quadrilatero A B E C, intra circulū descripto, duo anguli oppositi B A C, & B E C, sunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, ostensus est recto minor: Erit B E C, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

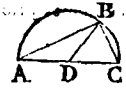
22. tertij.

AMPLIVS cum angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehenditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior; quod est quartum.

POSTREMO, cū angulus segmenti minoris, comprehensus

henſus recta B C, & peripheria B E C, pars ſit quoq; anguli recti F B C; Erit angulus ſegmẽti minoris, recto minor; quod eſt quintum. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo, rectus eſt &c. Quod erat demonſtrandum.

ALIA demonſtratio huius propoſitionis. In ſemicirculo, cuius diameter A C, & centrũ D, ſit angulus A B C, quem dico eſſe rectũ. Ducta.n. recta B D, erunt anguli D B A, D A B, æquales, quod rectæ D A, D B, æquales ſint. Cũ igitur angulus B D C, externus æqualis ſit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D; Erit angulus B D C, duplus anguli D B A; Eodem modo erit angulus A D B, duplus anguli D B C; atq; adeo duo anguli ad D, dupli erũt totius anguli A B C. Cũ igitur anguli ad D, ſint duobus rectis æquales; erit angulus A B C, eorũ dimidius, rectus: quod eſt primũ.

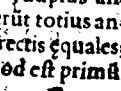


5. primi

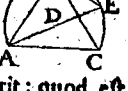
32. primi

13. primi

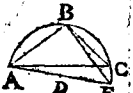
SIT rurſus in ſegmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto minorem. Ducta enim diametro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus. Quare angulus A B C, pars recti, recto minor erit: quod eſt ſecundum.



SIT iterum in ſegmento maiori, cuius centrum D, angulus A B C, quem dico eſſe recto maiorem. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in ſemicirculo rectus; qui cum ſit pars anguli A B C, erit angulus A B C, recto maior: quod eſt tertium.



IAM vero proponatur ſegmentum maius A B C, & ſegmentum minus A D C, quorum centrum B. Dico angulũ C A B, ſegmenti maioris, eſſe recto maiorem; At angulum C A D, ſegmenti minoris, recto minorem. Ducta enim diametro C B & recta B A F, erit angulus B A C, in ſemicirculo rectus, atque adeo ei deinceps F A C. Cum igitur angulus rectus B A C, ſit pars anguli C A B, ſegmenti maioris: & angulus G A D, ſegmenti minoris, pars quoque



quoque anguli recti F A C ; constat utrumque.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est : eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priori demonstratione.

EX CAMPANO.

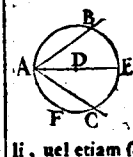
EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus in propos. 16. huius lib. quarum una est.

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media ; ergo per æquale.

ALTERA uero est eiusmodi.

CONTINGET reperire maius, & minus eodem ; igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur recta A B. Erit igitur angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur uersus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cũ peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, peruenerit, ubi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si ulterius moueatur ad A C, faciet a fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, uel etiam segmenti minoris, quorum uterque recto minor est ; non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, uitiosas esse prædictas consequentias.



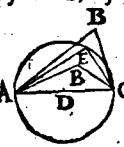
SCHOLION.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis. Hoc est, segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculus est. Nam si esset maius, angulus in eo foret acutus ; si minus, obtusus ; & sic de reliquis partibus theorematis.

HINC etiã perspicuum est, si angulo recto recta subtensa bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circulus describatur

ad

ad interuallum dimidiæ subtensæ; circulum transire per angulum rectum. Angulo enim recto A B C, subtensa A C, bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum D A, uel D C, circulus describatur A E C, quem dico transire per B, si enim transeat citra B, uel ultra, ductis rectis A E, C E, erit angulus A E C, rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum, cum angulus E, sit necessario, uel maior, uel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B, quod est propositum.



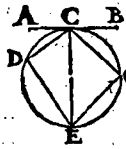
31. tertij.

21. primi

THEOR. 28. PROPOS. 32. 31.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta A B, circulum C D E, in C, puncto, a quo ducatur recta C E, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C B, æqualem esse angulo C G E, in alterno segmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque segmento. Transeat enim primo recta C E, per centrum. Erit igitur uterque angulus A C E, B C E, rectus: sunt autem & anguli C G E, C D E, in semicirculis recti; Igitur angulus A C E, angulo C G E; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis est.





18. tertii
31. tertii

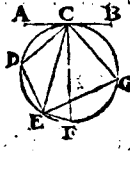
NON transeat iam C E, recta per centrum. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F, eritque C F, perpendicularis ad

18. tertii

31. tertii ad AB, & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt uni recto, ut angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo CF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis. Est autem angulo CFE, æqualis quoq; angulus CGE. cum uterque sit in segmento CGE. Quare & angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam uero in quadrilatero CDEG, duo anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: Sunt aute & duo anguli ACE BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Sicut cunq; igitur tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.



21. tertii



22. tertii

13. primi

SCHOLION.

POTEST *theorema hoc conuerti hoc modo.*

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem constructione transeat prius recta CE, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, tangere circulum. Quoniam angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. *huius lib. AB, circulum tanget. Iam uero CE, non transeat per centrum, construaturque figura, ut supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angulo CGE; in alterno segmento maiori, & hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo communi angulo ECF, erit angulus ACF, æqualis duobus*

31. tertii

21. tertii

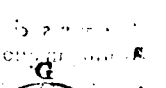
bus angulis EFC, ECF; Æqui anguli EFC, ECF, æquales sunt uni recto, quod angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF, æquales sint duobus rectis: Angulus igitur ACF, rectus quoque erit, ideoque per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget. 31. tertii 32. primi

EODEM modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB, tangere circulum; Cum enim anguli BCE, ACE; duobus sint rectis æquales: Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si ponantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, ut demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget. 13. primi 22. tertii

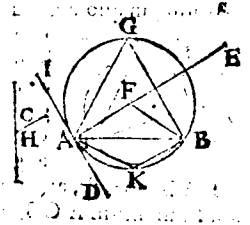
PROBL. 5. PROPOS. 33. 32.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RECTA data sit AB, & datus angulus primo rect° C. oportet igitur super AB, segmentū describere, in quo angulus existens, sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem DA, uel DB, semicirculus AEB; factumque erit, quod proponitur. Nam angulus AEB, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto. 31. tertii.



SIT secundo angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus DAB, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad DA, perpendicularis AE, q̄ cadet supra AB. Fiat deinde angulo FAB, æqualis angul° FBA, secetq; BF, rectā AE, in F. Erūt igitur rectę FA, FB æquales. Quare si circo 6. primi



F, &

F, & interuallo F A, circulus describatur A G B, transibit



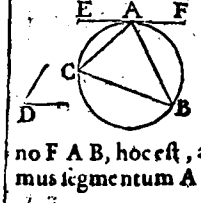
is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod describitur est super A B, esse æqualē angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propos 16. huius lib. Quapropter angulus
32. tertii. D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno.

SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, ut prius, describaturque erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo alterno I A B, hoc est, angulo dato obtuso H. Eadem enim est demonstratio, Itaque super data recta linea describimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

33. ## PROBL. 6. PROPOS. 34.

A DATO circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus sit A B C, a quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo
17. tertii.



D. Ducatur recta E F, tangens circulum in A; Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulū A C B, in segmento ablato A C B, æqualem esse dato angulo D. Est enim
32. tertii. angulus A C B, æqualis angulo alterno F A B, hoc est, angulo D. A dato ergo circulo abscidimus segmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.

THEOR.

THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E; Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim utraque linea transit per centrum, aut una tantum, aut neutra. Transeat primo utraque per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus, æquale esse ei, quod sub reliquis duobus comprehenditur, rectangulo.



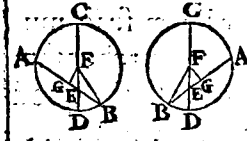
TRANSEAT secundo CD, sola per centrum F, diuidatque prius rectam AB, bifariam, ac propterea ad angulos rectos, coniungatur que recta BF. Quoniam igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; erit rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectæ FD, ideoque quadrato rectæ FB; Sunt.n. rectæ FD, FB, æquales: Est autē quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FE, EB; Igitur rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato rectæ EF, æquale erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato commmuni quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB; cum AE, EB, rectæ sint æquales. 3. tertij. 5. secundi 47. primi



Diuidat iam CD, transiens per centrum rectam AB, nō bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB, eritque FG, perpendicularis ad AB. Quoniam uero rectangulum sub CE, ED, una cum quadrato 3. tertij.

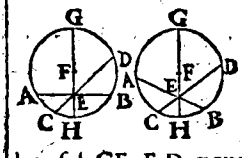
5. secundi 47. primi

rectæ F E. æquale est quadrato rectæ F D, hoc est, quadrato rectæ F B: Est autem quadratum rectæ F E, æquale quadratis rectarum F G, G E; & quadratum rectæ F B, æquale quadratis rectarum F G, G B; Erit rectangulum sub C E, E D, una cum quadratis rectarū F G, G E, æquale quadratis rectarū F G, G B. Dempto ergo cōmuni quadrato rectæ F G, remanebit rectangulū sub C E, E D, una cum quadrato rectæ G E, æquale quadrato rectæ G B. Atqui etiam rectangulū sub A E, E B, una cum quadrato rectæ G E, æquale est eidem quadrato rectæ G B: Igitur rectangulū sub C E, E D, una cū quadrato rectæ G E, æquale est rectangulo sub A E, E B, una cum quadrato eiusdem rectæ G E. Quare ablato communi quadrato rectæ G E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale rectangulo sub A E, E B. quod est propositum.



5. secundi

TERTIO neutra per centrū tranſeat, ſiue una illarum bifariam diuidatur, ſiue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta G H. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub A E, E B, æquale esse rectangulo sub G E, E H, siue A B, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub C E, E D, æquale esse quoq; eidem rectangulo sub G E, E H, siue C D, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub A E, E B, æquale rectangulo sub C E, E D. quod est propositum.



SCHOLION.

CONVERTI *poterit theorema istud hoc modo.*

SI duæ rectæ ita se secent, ut rectangulum sub unius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus.

SECENT

SECENT se mutuo rectæ AB, CD, in E, sitque rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis, (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut ultra C, uel citra, ut per F. Quoniam ergo rectangulum sub FE, ED, æquale est rectangulo sub AE, EB; & rectangulum sub CE, ED, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub AE, EB: Erunt rectangula sub CE, ED; & sub FE, ED, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C, quod erat propositum.



35. tertij.

THEOR. 30. PROPOS. 36. 35.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera uero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum ABC, punctum sumatur D, a quo linea ducatur DA, secans circulum in C, & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primo recta DA, per centrum E, & iungatur recta EB, quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum CD, erit rectangulum sub DA, DC, una cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum quadrato rectæ EB,



17. tertij.

18. tertij.

6. secundi

æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ
47. primi D E, æquale quadratis rectarum E B, B D; Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B; B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; Quod est propositum.

NON transeat iam D A, per centrũ E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F, eritque
18. tertij. 3. tertij.

E B, ad B D, perpendicularis; & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ C F, æ-
6. secundi quale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum sub D A, D C, una cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum
47. primi D F, F E: Est autem quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratum rectæ E C, ideoque quadratũ rectæ E B; Et quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ D E. Cum igitur quadra-
47. primi tum rectæ D E, æquale sit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum sub D A, D C, una cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo cõmuni quadrato rectę B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale; quod est propositum. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.

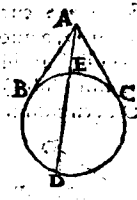
COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, quod si a puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula cõprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se sunt æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub A C, A F; Item sub

sub A D, A G; & sub A E, A H, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula dicta rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt. 36. tertij.

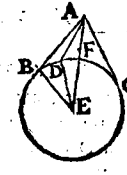
COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulum tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quam quadratum rectæ A C, æquale rectangulo sub A D, A E; Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt. 36. tertij.



COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM denique est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulum tangãt. Si enim præter duas A B, A C, duci possit tertia A D, circulum eundẽ tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoque æquales; quod est absurdum, Nam si ducatur recta A E, erit angulus A D E, maior angulo A B E. 18. tertij. 21. primi



ALITER. Erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, ut ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrũ E, quæ circulum secet in F, erit A D, cum sit propinquior minimæ A F, minor, quam A B, quæ a minima A F, remotior est. Solum igitur duæ rectæ ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum. 8. tertij.

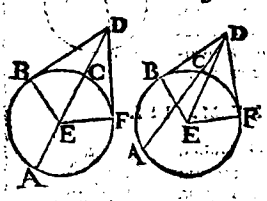
THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, com-

prehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum A B C, cuius centrum E, punctum sumatur D, a quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum, ad punctum B; sitque rectangulum sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B: Dico D B, circulum tangere in B. Ducatur enim A F, tangens circulum, & iungantur rectæ E B, E F. Quod si D A, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, D C, æquale est quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B, erunt quadrata rectarum D F, D B, inter se æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus D B, B E, trianguli D B E, & basis D E, communis; erunt anguli D F E, D B E, æquales: Atqui angulus D F E, rectus est, quod A F, circulum tangat: Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulū sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandū.

17. tertij.



36. tertij.

8. primi
18. tertij.

SCHOLION.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

FINIS ELEMENTI TERTII.

EVCLIDIS ELEMENTVM IIII.

DEFINITIONES.

I.

BIBLIOTECA REALE VITTORIO EMANUELE

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cũ singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

GENS Euclides in quarto hoc libro de uarijs inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus; nec nõ de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa eadem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens a rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangant latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triangulum D E F, in triangulo A B C, esse inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli K L M, non tangit latus H I, trianguli G H I,



non dicetur triangulum K L M, inscribi in triangulo G H I; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera G H, G I.

II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circunscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E CONTRARIO dicetur triangulum ABC, describi circa triangulum DEF, quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt, &c. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cũ singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.



VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriã, nõ diceretur triangulũ esse inscriptũ in circulo.

IIII.

FIGVRA uero rectilinea circa circulum describi dicitur, cũ singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT

At vero, si latera trianguli A B C, singula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

Vicissim dicetur circulus D E F, inscriptus esse in triangulo A B C: At vero circulus A B C, descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Vt recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in periphe-

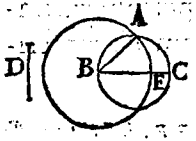


peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, uel C D; quia hæc unum duntaxat extremum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa uero nullum.

1. PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

15. tertij. IN circulo A B C, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datæ D, quæ tamen maior non sit diametro circuli dati. (Cum enim diameter sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta, diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi una æqualis.) Ducatur diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit B C, illi æqualis: Si uero D, minor fuerit diametro, abscindatur B E, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autē B E, circulus describatur E A, secans circulū A B C, in A; Ducta igitur recta B A, erit ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. Est enim B A, æqualis ipsi B E; & D, æqualis eidē B E, per constructionē: Quare A B, & D, inter se æquales quoq; erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

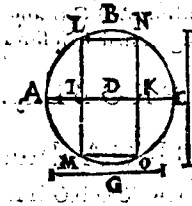


EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accōmodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo A B C, cuius centrum D, accommodanda sit recta

qualis rectæ E F, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ parallela. Ducatur per centrum D, diameter A C, rectæ G, pa- la. Quod si recta E F, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, d proponitur. Si uero E F, dia- ro minor fuerit, ea recta bifariam , abscindatur D I, ipsi H B, & D K, HF, æqualis, ut tota I K, toti E F, qualis. Et per I, K, ad angulos rc ipsi A C ducantur L M, N O, iun rq; L N. Dico L N. accõmodatam æqualem ipsi E F, & ipsi G, pa- lam. Cum enim L M, N O, æqua- a centro distent, ipsæ æquales in e erunt: quæ tam diuidantur bi- m in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta A C, per rum D, transeunte; erunt & earum dimidiæ L I, N K, æquales. d uero L I, N K, parallelæ etiam sunt; erunt quoque L N, I K, ales, & parallelæ. Quare cum I K, æqualis sit ipsi E F, & paral si G; Erit etiam L N, æqualis ipsi E F, & ipsi G, parallela. Ba ratione, si recta ducatur M O, erit ea æqualis ipsi E F, & paral ipsi G. Quod est propositum.



31. primi

11. primi

14. tertij.

3. tertij.

28. primi

33. primi.

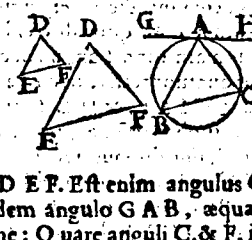
30. primi

PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN dato circulo triangulum describere æquiangulum dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo A B C, dato describendũ triangulũ æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatq; angulus G A B, angulo D æqualis, & angulus H A C, angulo E; atq; extendantur rectæ A B, A C, ad circunferentiam usque in puncta B, C, coniungaturque recta B C. Dico triangulum A B C, angulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo D E F. Est enim angulus C, angulo G A B; & eidem angulo G A B, æqualis angulus F; ex constructione: Quare anguli C, & F, inter se quoq; erũt æquales. Similiter quia angulus B, æqualis angulo H A C, & eidem angulo H A C, æqualis est, per cõstructionẽ, anguli E, erũt etiã anguli B, & E, inter se æquales.



32. tertij.

32. tertij.

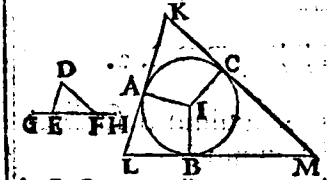
Cum

Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, erunt quoque
32. primi reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum A B C, describendum sit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, utrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta utcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G; & angulus B I C, angulo D F H; Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M; (si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; quare A K, C K, coibunt, &c.) Descriptum est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo D E F. Quoniam omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, ut ad 32. propos. lib. 1 ostensum fuit; & anguli I A L, & I B L, sunt duo recti; erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cum igitur & anguli D E G, D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales A I B, & D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse
13. primi. angulo D F E. Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque ideirco triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.
32. primi

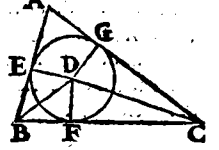


PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN dato triangulo circulum inscribere. 4.

Sit describendus circulus in dato triangulo A B C. Diuisis duobus angulis A B C, A C B, bifariam rectis B D, C D, quæ intra triangulum cocant in D; ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales sunt duobus angulis D B F, D F B, trianguli D B F, uterque utrique; latus B D, commune; erunt quoque latera D E, D F, æqua-



16. primi

les. Eademque ratione æqualia sunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cum igitur tres rectæ D E, D F, D G, sint æquales; circulus ex centro ad interuallum D E, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetq; latera trianguli in E, F, G, per coroll. 16. propos. 15. lib. 3. eo quod perpendicularia sint ad semidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum inscripsimus. Quod erat efficiendum.

PROBL. 5. PROPOS. 5. 5.

CIRCA datum triangulum circulum scribere.

Sit circulus describendus circa datum triangulũ A B C. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, uel obtusangulo sumenda sunt circa rectum, uel obtusum angulum) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus excitentur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quod enim coeant, patet



tet. Nam si ducta esset recta DE, fierent anguli IDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, uel intra triangulum, uel



in latere BC, uel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, triãguli BDF, & anguli ad D, recti: erũt bases FA, FB, æquales. Eodem modo erunt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triãgulum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

4. primi

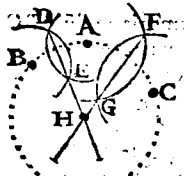
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si uero sit in latere BC, angulum BAC, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, angulũ BAC, obtusum, esse, cum sit in minori segmento circuli.

CONTRA uero perspicuum est, si triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum.

SCHOLION.

COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in una recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, ut constituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo, duo arcus describantur se



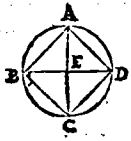
interfecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH.

) H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo, uel etiam, si lacet, eodem, alij duo arcus delineentur secantes se se in F, & , punctis, per quæ recta ducatur F H, secans rectam D H, in l. Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, , & C. Nam si ducerentur rectæ A B, A C, B C, di iderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam a ectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 5. lib. 3. Quare ut in hoc 5. problemate Euclides ostendit, , erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. uod erat propositum.

PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

IN dato circulo quadratum describere.

SIT in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscri ndum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, :antes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur re- e A B, B C, C D, D A. Dico A B- D, esse quadratum inscriptum in dato culo. Nam quia latera E A, E B, trian li A E B, æqualia sunt lateribus E C, B, trianguli C E B, cum omnia sint ex ntro; & anguli contenti sunt recti; erũt tes A B, B C, æquales. Eadem ratione



4. primi

quales erunt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et :tæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, qualia inter se sunt. Sunt autem & anguli recti, cum om s in semicirculis existant. Quare quadratum erit A B- D; propterea que in dato circulo quadratum descripsi- us. Quod erat faciendum.

31. tertij.

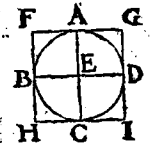
PROBL. 7. PROPOS. 7. 7.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum A B C D, cuius centrum E,

describendum

describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos, & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Dico F H I G, esse quadratū circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli A E B, F B E, sint recti, erūt F H, A C, parallelæ; similiterque erunt G I, A C, parallelæ. Quare & F H, G I parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est A C H F, erunt latera oppositа A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: sed A C H, est rectus, igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus, angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.



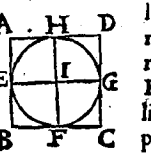
28 primi
30. primi
34. primi

8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D, ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, E B, D H, A E; sunt autem hæ inter se æquales, cum sint dimidiæ æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G,



33. primi

I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum I E, transibit quoque per puncta F, G, H; qui cum contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, de- 29. primi
scriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, secantes se in E. Quoniam igitur latera A B, D A trianguli A B D, æqualia sunt; erunt anguli A B D, A D B, æquales: est autē angulus B A D, rectus; Quare A B D, A D B, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli E A D, E D A, sint æquales; erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo E A, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulū descripsimus. quod erat faciendū.



5. primi
32. primi
6. primi

SCHOLION.

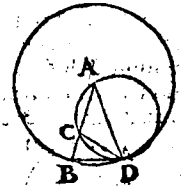
QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, eris quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniam latus quadrati circumscripti æquale est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum uero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.



10. PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulũ constituere; quod habeat utrumq; eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

11. *secundi* 1. *quarti* SVMATVR quæuis recta linea A B, quę diuidatur in C, ita ut rectangulũ sub A B, B C, æquale sit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo uero A B, circulus describatur, in quo accommodetur recta B D, æqualis ipsi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales sunt, erit triangulum A B D, Isosceles. Dico utrumq; angulorum A B D, A D B, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, describatur circa triangulũ A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectangulum sub A B, B C, æquale est quadrato rectę A C, hoc est, quadrato rectæ B D; & recta A B, secat circulum D C A: tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus B D C, æqualis est angulo A, in alterno segmento C A D. Addito igitur cõmuni C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A; sed his eisdem æqualis est etiam angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, hoc est, angulo A B D, cum A B D, A D B, æquales sint; ac propterea rectæ C D, B D, æquales erunt: Est autẽ B D, æqualis posita rectæ A C. Igitur & C D, ipsi C A, æqualis erit, ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Cum igitur angulus A, æqualis sit oftẽsus angulo B D C, erũt quoque anguli B D C, C D A, æquales; ac propterea angulus A D B, duplus erit anguli C D A, hoc est, anguli A, sibi æqualis. Quare & angulus A B D, duplus erit eiusdẽ anguli A. Isosceles ergo triangulum cõstituimus, habens, &c. Quod erat efficiendum.



5. *quarti*

37. *tertij*. 32. *tertij*. 32. *primi* 5. *primi* 6. *primi* 5. *primi*

SCHOLION.

NON *est autem quod se excrucient Campanus, & Peletarius, ut probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, ut eũ nullo*

nullo modo secet. Nã propterea quod quadratũ rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est in ultima propos. 3. lib. rectam BD, perpendiculare esse ad semidiametrũ circuli ex D, ductam. Quare circulũ tanget, & nulla ratione secabit.

PROBL. II. PROPOS. II. II.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituatur triangulum Isosceles FGH, ita ut uterq; angulorũ G, H, duplus sit reliqui F. & in circulo inscribatur triangulum ACD, æquiangulum triangulo FGH, & uterq; angulorũ ACD, ADC, bifariam diuidatur rectis CE, DB; atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonum ABCDE, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterum, & æquiangulum. Cum enim uterque angulorum ACD, ADC, duplus sit anguli CAD; & diuisus bifariam; erunt quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ACE, æquales. Quare arcus AB, BC, CD, DE, EA, super quos ascenderunt, atq; idcirco & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Aequilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æquales sunt, addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB; Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistẽtes æquales erunt. Eodẽ modo æquales erunt cuilibet horũ angulorũ reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus. Aequiangulũ est ergo pentagonum ABCDE. Quare cũ & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptũ erit in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendũ erat.



10. *quarti*
2. *quarti*
9. *primi*
26. *tertij*.
29. *tertij*.
27. *tertij*.

SCHOLION.

QVOD si detur recta linea terminata CD, super ea

10. quarti

constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. Fiat triangulum Isosceles F G H, habens quemlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituani anguli A C D, A D C, æquales angulis G, H, coeantq; rectæ C A, D A, in A, quæ efficient angulum C A D, æqualem angulo F; atque propterea trianguli A C D, uterque angulorum A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam vero circa triangulum A C D, circulus describatur A B C D E; In quo cum sit inscriptum triangulum A C D, si anguli A C D, A D E, bifariam secentur, inscribetur ut prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta C D. Quod est propositum.



32. primi

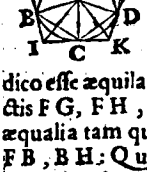
5. quarti

12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit circa datum circulum A B C D E, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducantur perpendiculares G H, H I, I K, K L, L G, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum n. anguli G A E, G E A, duobus sint rectis minores, coibunt rectæ A G, E G, ad partes G; & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum G H I K L, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, ac æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erunt quadrato rectæ F H, æqualia tam quadrata rectarum F A, A H, quam rectarum F B, B H: Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebũt quadrata rectarũ A H, B H, æqualia; ideoq; & rectæ A H, B H,



11. quarti

11. prop.

47. primi

BH, æquales erunt. Quoniam ergo latera AF, FH, trianguli AFH, æqualia sunt lateribus BF, FH, trianguli BFH; Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, ut ostensum est: erunt anguli AFH, BFH, æquales; Igitur & anguli AHF, BHF. Duplus igitur est angulus AFB, anguli BFH; & angulus AHB, anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI, & angulū BIC, anguli BIF. Cum igitur anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circunferentijs AB, BC, quæ æquales sunt, cum a rectis æqualibus subtendantur AB, BC; erunt & dimidij eorum BFH, BFI, æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH, æquales sint duobus angulis BFI, IBF, trianguli IFB, & latus illis adiacens commune BF; erunt & latera BH, BI, æqualia, & anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo recta HI, rectæ HB. Eademque ratione ostendemus GH, rectam duplam esse rectæ HA: Sunt autem ostensæ æquales HB, HA; igitur & earum duplæ HI, HG, æquales erūt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL, LG, æquales esse cuilibet rectarum HI, HG. Aequilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostensum est angulos BHF, BIF, æquales esse, ac dimidios angulorum BHA, BIC; erunt & eorum dupli BHA, BIC, æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG, LGH, erunt æquales cuilibet angulorum BHA, BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. quod efficiendum erat. 8. primi 4 primi. 27. tertij. 28. tertij. 26. primi

PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribēdus circulus in dato pentagono ABCDE; Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cum enim anguli BAF, ABF, 9. primi

sint minores duobus rectis, coibunt necessario rectæ A F, B F: Connectantur deinde rectæ F C, F D, F E. Quoniã igitur latera A B, B F, trianguli A B F, æqualia sunt lateribus



4. primi

C B, B F, triãguli C B F; Sunt autẽ & anguli ipsis contenti æquales A B F, C B F, erunt bases A F, C F, & anguli B A F, B C F, æquales. Cum igitur anguli B A E, B C D, ponãtur æquales, & B A F, dimidium sit anguli B A E, per constructionem; erit & B C F, dimidium anguli B C D. Diuisus est ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos C D E, D E A, diuisos esse bifariam. Ducantur iam ex F, ad singula Pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A, F A G, trianguli F A G, æquales sunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L; estque latus A F, subtensum uni æqualium angulorum, commune; erunt & rectæ F G, F L, æquales. similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares F H, F I, F K, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo F G, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam uero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per corroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cũ rectis F G, F H, &c erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

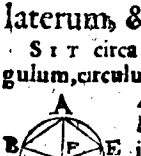
26. primi

14

PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ circulũ describere.

SIT circa pentagonũ A B C D E, æquilaterũ, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis B A E,



A B C, bifariã rectis A F, B F, quæ coeant in F; & coniũctis rectis F C, F D, F E, ostẽdemus, ut in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos B C D, C D E, D E A, secari bifariã; Erunt ergo oẽs anguli deinceps inter se æquales, quod tori anguli æquales ponãtur. Quoniam igitur in triãgulo A F B, duo

duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt[q] rectæ FA, FB, æquales. Eademq; ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autē F A, transibit quoq; per puncta B, C, D, E. Circa datū ergo pentagonū, &c. Quod faciendum erat. 6. primi

PROBL. 15. PROPOS. 15. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquianguluin inscribere.

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribendū hexagonum æquilaterū, & æquiangulum. Ducta diametro A D, describatur circulus ex centro D, interuallo uero D G, qui secet circulū datū in punctis C, & E, e quibus per centrū G, tectæ extendantur CF, EB. Si igitur cōnectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum, & æquiangulum. Cū enim recta G C, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ G C, DC, æquales inter se. Ideoq; triangulum C D G, erit æquilaterū. Quare tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars unius recti. Eodē modo erit angulus DGE, tertia pars unius recti. Sunt autē tres anguli CGD, DGE, EGF, æquales duobus rectis: Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoq; pars est unius recti. Sūt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus eū etiā æquales sint anguli FGA, AGB, BGC; erūt sex anguli ad cētrū G, æquales. Quare circūferentiq, quibus insistūt, ac propterea rectę AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonū A B C D E F. Rursus quia circunferentia B C, æqualis est circunferentiæ A F; si addatur communis CDEF, erunt circunferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, æquales erunt. Similiterq; ostēdemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorū. Quare æquiangulū quoq; est hexago



5. primi
32. primi.
13. primi
15. primi
26. tertij.
29. tertij.
27. tertij.

num A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonū æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendū erat.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

CAETERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa idem hexagonum describemus circulum.

16. PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

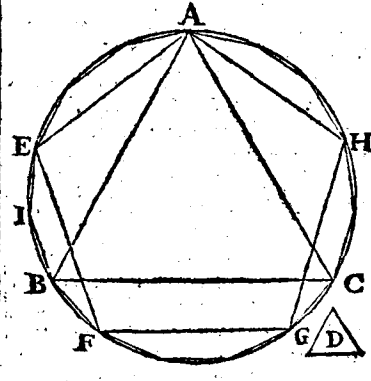
SIT in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, inscribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterū, eruntque tres arcus AB, BC, CA, æquales. Qualiū igitur partiū æqualium quindecim est circunferētia tota ABC, talium quinque erit arcus A B, q tertia pars est totius circunferentiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonū æquilaterum, & æquiangulum A E F G H, eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A.

2. quarti

28. tertij.

11. quarti.

18. tertij.



HA, æquales. Qualium igitur partium æqualiũ quindecim est tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars existens totius circunferentiæ. Itaque cum arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus E B, duas. Diuiso ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, subtendet decimam quintam partem totius circunferentiæ; cui si aliæ quatuordecim æquales in circulo accõmodentur, inscriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, ut perspicuum est. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod erat faciendum. 30. tertij. 1. quarti 27. tertij.

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum; Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLION I.

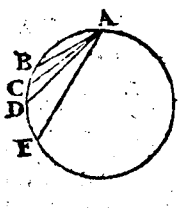
EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, ac ars quædam, qua infinitæ propemodũ figuræ in dato circulo inscribantur. Nam quia recta A B, denominatur a ternario, quod sit latus trianguli æquilateri, & recta A E, a quinario, quod sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex dictis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumque æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc est, 3. exceditur a denominatore lateris A E, nempe a 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuiso arcu B E, bifariam in I, erit subtensa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribantur

duo

duo latera duarum figurarum æquilaterarum, & æquiangularum; continebit arcus inter dicta latera inclusus, tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot unitatibus inter se differunt denominatores dictorum laterum; Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot unitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.

INSCRIBANTVR *in circulo A B C D E, initio semper facto a puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem A B, pentagoni uero A C, & quadrati A D, trianguli deniq; æquilateri A E. Quoniã igitur denominator lateris A B, nempe 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. unitate; continebit arcus B C, inter dicta latera inclusus unum latus figuræ 30. laterum, angulorumque æqualium: Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circunferentia, talium 5. est arcus A B, sexta pars circunferentiæ; & talium 6. est arcus A C, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus B C, unam talem continebit partem. Pari ratione arcus B D, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumque æqualium: Nam denominator lateris A B, uidelicet 6. superat denominatorem lateris A D, nimirum 4, binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24. Ita quoque arcus B E, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum. Arcus uero C D, complectetur unum latus figuræ 20. laterum; & arcus C E, duo latera figuræ 15. laterum. Arcus denique D E, continebit unum latus figuræ 12. laterum, angulorumque æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarũ figurarum latera.*



EX CAMPANO.

OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, aut circunscripta, est

ſt quoque æquiangula. Nam figuræ inſcriptæ anguli, cum inſtant arcubus æqualibus, æquales erunt. Anguli uero circunſcriptæ, æquales oſtendentur, ductis a centro rectis lineis ad omnes angulos, & ad puncta, quibus latera circulum tangunt, ut in pentagono eſt factum, propos. 12. 27. tertij.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inſcribere, talem etiam ſolemus deſcribere circa circulum, & in ea circulum quoque inſcribere, & circa eandem deſcribere circulum, ſi artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inſcripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inſcribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuiſis etenim arcubus, quos latera ſubtendunt, bifariam, & ſubtenſis rectis lineis, conſtat propoſitum. Vt per triangulum æquilaterum inſcriptum inſcribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo deſcripto, inſcribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterũ, figuræ 32. 64. 128. laterum, &c.

SCHOLION. II.

OMNES figuræ æquilaterę & æquiangulę in circulo inſcribi poſſunt officio Iſoſcelium triangulorum, ut recte hoc loco docet Pelearius.

IMPARIVM enim laterũ figuræ inſcribẽt officio triãgulorũ Iſoſceliũ, quorum anguli æquales ad baſin multiplices ſunt eorum, qui ad uerticem ſunt, angulorum. Vt officio Iſoſcelis, cuius utérque angulorum ad baſin æqualis eſt ei, qui ad uerticem, deſcripti in circulo inſcribetur prima figura imparium laterum, hoc eſt, triangulũ æquilaterum. Nam Iſoſceles cuiuſmodi, triangulũ æquilaterũ erit. Quod ſi in circulo inſcribatur Iſoſceles, cuius uterq; angulorũ ad baſin duplus ſit eius, qui ad uerticem, inſcribetur ſecunda figura imparium laterũ, utpote pentagonũ, in circulo, ſi duo anguli æquales ſecentur bifariam, ueluti propos. 11. fuit oſtenſum. At Heptagonũ, tertia figura laterum imparium, inſcribetur in circulo, per triãgulũ Iſoſceles habens utrumq; angulorum ad baſin triplum eius, qui ad uerticem, ſi duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad uerticẽ. Ita quoq; figura quarta imparium laterum, quale eſt Hennagonum, in circulo inſcribetur officio Iſoſcelis, cuius uterq; angulorũ ad baſin quadruplus eſt eius, qui ad uerticem, ſi uterq; diſtribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad uerticem, &c. 6. primi 23. primi 28. primi

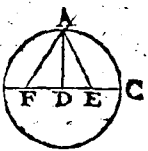
PARIVM

PARIVM vero laterum figuræ in circulo inscribentur, officio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circunferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem; subtendent ipsi tres partes circunferentiæ, & idcirco angulus ad verticem unam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem, insistit sextæ parti circunferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur officio Isoscelis habentis vtrunque angulorum ad basin triplum sesquialterum angulo ad verticem, &c.

S. I. igitur inuenta fuisset ars, qua Isoscelia triangula construerentur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplũ anguli ad verticem, facile in circulo describerentur figuræ omnes laterum imparium. Quod si arcus earum diuiderentur bifariam, inscriberentur quoque omnes figuræ parium laterum, atque adeo qualibet circunferentia circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuideretur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota existit: Non enim recte sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desiderato, de absoluta rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua una eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonum, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus

ulus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, rigatur D A, perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æquales abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, rit A F, latus pentagoni, & D F, atus Decagoni in dato circulo incribendi, ut ipse demonstrat. Caterum cum demonstratio huius rei penleat ex 13. lib. Euclidis, non ideur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, utpote in pros. 13. differenda.



Non erit autem præter institutum nostrum, aut ab hoc ibro alienũ, si sequens adhuc theorema adiungamus; videlicet.

Si bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula in dicta figura, idem centrũ habens.

Sit enim figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inscriptam figuræ ABCDEF, æquilateram esse quoque, ac æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera subtendunt angulos æquales cõprehensos æqualibus rectis, nempe dimidijs laterum æqualium, æqualia sunt. Quoniam uero tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quam tres F L M, M L K, K L E, duobus sunt rectis æquales; Sunt autem A M G, L M F; F L M, K L E, inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque a basibus æqualibus: Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura G H I K L M. Quod autem



4. primi

3. primi.

8. primi.

13. primi

autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunctis quoque rectis N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N; suntq; bases A N, B N, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: Æquales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemq; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cum ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æqualium a centro N; æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet: Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M. Quod est propositum.



8. primi

14. tertij.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM V.

DEFINITIONES.

I.

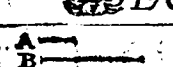
PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris; cum minor metitur maiorem.



GIT in præcedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata: Nunc uero in duobus sequentibus de eadem disputat non absolute, sed pro ut una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. In hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, nõ descendendo ad ullam eius speciem, ut ad lineam, superficiẽ, vel corpus aliquod. In 6. lib. uero ostendit, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circunferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius uocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.

ITAQVE *ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C; dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C.*

At



At uero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit a magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabimus magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.

DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quæda metitur suum totum, ita ut aliquoties repetita totum suum constituas: qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum uel excedit, uel ab eodē deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc in loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solum metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia ut ex lib. 7. constabit, pars aliquanta non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere, partem hoc in loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamē in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc utramq; illam metitur. At uero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metiatur. Itaque pars ad multiplex refertur,

fertur, & multiplex ad partem, ita minor quantitas mensurãs maiorem, dicatur pars maioris; Maior uero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfecte metitur suum totũ. Si enim 6. diceretur metiri 7. ut uult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundũ quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, ut duo numeri, duæ linea, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundum quantitatem, hoc est, secundum quod una maior est, quam altera, uel minor, uel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (ut aliis placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, uel numerus cum linea, non dicetur ea cõparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea, sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundum qualitatem, hoc est, secundum quod una est alba, & altera nigra; aut quod una est calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVAMVIS autem in solis quantitatibus proprie reperiatur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, uoces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, uel minus, uel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora considerantur, ueluti quantitates.

CAETERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad

aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea uero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quod si econtrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum, ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum; consequens uero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

DE PROPORTIONIBVS.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionũ apud Mathematicos, uel ob hanc præcipue utilitatem, ut ea, quæ in his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis uero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati, ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, ceu in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem uero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autẽ quantitates commensurabiles, quæ habent unam cõmunem

munem partem aliquotam, seu quas eadem mensura metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorū est utriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineā 20. palmorum; Ita quoque eadem lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem unitas omnes metitur. Quantitates uero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit repertri: Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. quumuis enim quælibet harum linearū infinitas habeat partes aliquotas, utpote partem dimidiam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota unius, quantumuis minima, alteram metiri potest, ut demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. ultima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter dictas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quam irrationalis proportio continetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales; ut inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorū, & lineā 10. palmorū, &c. Inæqualitatis uero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, ut inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duo-

bus eam connexionem, ut omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, non recte a quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis; cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secunda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori uero in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; ut a nobis factum est.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniam amplius subdiuidi nequit, cum quæcunque quantitates æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeāt proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quādo maior quātitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c.

Pro-

Proportio minoris inæqualitatis eſt, quádo minor quá titas ad maiorem refertur; qualis eſt proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non eſt autem hæc diuiſio inanis & ſuperuacanea, ut multi ſuſpicantur. Neque enim eadem eſt proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. Sed multum inter ſe differunt, cum ualde diuerſus ſit uſus utriuſque, ut perſpicuum eſt iis, qui uel mediocriter in rebus geometricis, & regula Algebræ ſunt uerſati. Hæ igitur ſunt generales diuiſiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla ſecluſa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus ſolas proportiones rationales comprehendunt, ſubdiuidemus; quoniá de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. eſt ſermo futurus.

PROPORTIO *ergo rationalis maioris inæqualitatis, diſtribuitur in quinque genera, ut in proportionem multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem, multiplicem ſuperparticularem, & multiplicem ſuperpartientem. Pari ratione proportio minoris inæqualitatis in eadem genera ſecatur, ſi modo ſingulis uocabulis præponatur præpoſitio (ſub) ut in proportionem ſubmultiplicem, ſubſuperparticularem, ſubſuperpartientem, ſubmultiplicem ſuperparticularem, & ſubmultiplicem ſuperpartientē. Horum autem quinque generum priora tria ſunt ſimplicia, poſteriora uero duo ex illis tribus compoſita, ut manifeſtū eſt. Cur uero tantum ſint quinq; hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis, prope finem omnium proportionum oſtendemus.*

PROPORTIO *Multiplex, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, decies, centies, &c. continet. qualis eſt proportio 20. ad 4. Nam 20. comprehendunt 4. quinquies. Item lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c. Hæc autem ſub ſe continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minoré bis tantú continet, dicitur proportio dupla; ſi ter, tripla; ſi decies, decupla; ſi centies, centupla, &c. Itaque proportio octupla nil erit aliud, quam habitudo maioris quantitatis ad minoré, quando maior minorem octies complectitur. Eodemqi modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: ut proportio quincupla, qualis eſt 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorem continet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10 cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & ſic de reliquis.*

PROPORTIO *ſuperparticularis, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper unam eius partem aliquotam, ſcilicet dimidiam, tertiam, quartam, &c. qualis eſt proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. ſemel, & adhuc unitatem, quæ dimidia pars eſt 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedú, proportionem habet ſuperparticularem, quia prior linea continet poſteriorem ſemel, & adhuc lineam 3. pedum, quæ tertia pars eſt lineæ 9. pedum, &c. Hæc quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, eſt medietas minoris quantitatis, conſtituitur proportio*

ſeſqui-

seſquialtera; Si eſt tertia pars, exurgit proportio seſquitertia; si quarta, seſquiquarta; si milleſima, seſquimilleſima, &c. Vnde ex ipſomet uocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio seſquioctaua, quãdo maior quantitas minorem ſemel includit, & inſuper octauam partem minoris: qualis eſt inter 9. & 8. & inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

PROPORTIO *ſuperpartiens, eſt habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem ſemel duntaxat continet, & inſuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes unam aliquotã. qualis eſt proportio 8. ad 5. Nam 8. continent ſemel 5. & inſuper tres unitates, quarum quælibet eſt pars aliquota, utpote quinta, huius numeri 5. Conſtat autem ternarium ex illis compoſitum, non eſſe partem unam aliquotam numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere conſtituere unam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aſpectu uidentur eſſe ſuperpartientes, cum tamen ſint ſuperparticulares; cuiuſmodi proportio eſt inter 10. & 8. Quamuis enim 10. contineant ſemel 8. & duas unitates, quarum quælibet eſt octaua pars numeri 8. tamen quia binarius ex illis unitatibus compoſitus, eſt quarta pars 8. non dicenda eſt ea proportio ſuperpartiens, ſed ſuperparticularis, nempe seſquiquarta. Itaque, ut duæ quantitates dicantur habere proportionem ſuperpartientem, neceſſe eſt, ut maior quantitas minorem contineat ſemel, & plures eius partes aliquotas, quæ ſimul ſumptæ non conſtituant*

unam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt. Diuiditur primo proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes unam, conficitur proportio superbipartiens; si trés partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c. Diuiditur deinde quodlibet horum generum, habita ratione partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarú maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quod si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus undecimis, appellabitur superdecupartiens undecimas; Quod si decem illæ partes sint decimætertiæ, uocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus. Ne autem proportiones superpartientes uel inter se cõfundantur, uel cum proportionibus superparticularibus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunq; proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter commonstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint: alter uero, quotæ partes, aut quátæ sint, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas,

denotat-

denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorẽ, & adhuc tres eius partes aliquotas; posterior autem ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, eiusmodi esse debere, ut non habeant ullam partem aliquotam communem, præter unitatem, quæ quidem est omnium numerorũ pars aliquota. Tales sunt duo prædicti numeri 3. & 8. Nam sola unitas, ut constat, est utriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habent præter unitatem aliã cõmunẽ mensurã, uidelicet 3. Nã ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senariũ metitur. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cũ maior quãtitas cõtineat semel minorẽ, & eius partẽ dimidiã. Eadẽ rõne nõ recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiẽs sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habẽt 2. cõem partem aliquotã, præter unitatem; atq; ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cũ maior quãtitas cõtineat minorẽ semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur nõ difficile erit unicuiq; denominare cõuenienter reliquas proportiones superpartientes. Perspicuũ ẽt ex dictis relinquitur, cur proportionẽ superpartientẽ diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias,

tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrêtur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter unitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, necne, in Arithmetica edocetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

PROPORTIO multiplex superparticularis, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, ut bis, ter, uel quater, &c. continet, & præterea unam eius partem aliquotam; cuiusmodi est proportio, 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (quæ ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, utpote cum dupla) & insuper comprehendunt unitatem, quæ est quarta pars minoris; qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ eadem proportio proposita similis est. Diuiditur autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita. Veluti multiplex, in duplam superparticularem, triplam superpartientem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper unam partem minoris quantitatis aliquotam. Vnumquodque rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio tripla superparticularis, continet sub se triplam sesquialteram, (ut quando maior quantitas minorem

rem

rem ter continet, & præterea dimidiam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes unam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes unam, ob causam dictam in propertione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ unam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis: Vt proportio 10. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 10. contineant ter 6. & duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt unam tertiam partem: Quare uocabitur proportio tripla sesquitertia. Distribuitur autem hæc proportio primo, habita ratione proportionis multiplicis. Vt multiplex in duplam superpartientem; triplam superpartientem, &c. Deinde quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, continetur tripla superbipartiens; tripla supertripartiens, &c. Postremo quæuis istarum, habita ratione partium aliquotarú, in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens, diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNIA uero, quæ dicta hactenus sunt de quinque his generibus proportionum rationalium maioris in-

inæqualitatis, intelligenda sunt quoq; de quinque generibus correspondentibus minoris inæqualitatis, præmissa tamen semper præpositione (sub,) ut dictum est. Nimsi in exemplis adductis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodum enim proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiens tertias: Ita proportio 3. ad 11. est sub tripla superbipartiens tertias: Atque ita de cæteris.

CAETERVM *ex dictis perspicue colligitur, nõ posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam exposita. Cum enim, ut Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, ut diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fiunt omnis proportio rationalis quarumcumque quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione constituitur proportio multiplex: aut semel tantummodo, ac præterea unam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis; aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes unam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & unam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes unam; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque uero alio modo minor quantitas a maiore contineri potest. Eadem*

ratione

ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis.

QVONIAM uero non exiguus est usus denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, a quibusnā numeris singulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, & aperte habitudinem unius quantitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ, est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ, est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, ut arbitror, quod Euclides in lib. 6. & cæteri Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius, quia denominator, ut diximus, ostendit, quanta sit una quantitas ad alteram, cum qua confertur, ut ex propositis exemplis constat.

Ex dictis autē facile colligi potest denominator cuiusq; proportionis. Denominator .n. proportionis multiplicis, quæcunque ea' sit, est numerus integer; quia maior quantitas aliquoties minorem debet continere. Vt proportionis duplæ denominator, est 2. Nonuplæ 9. Centuplæ 100. millecuplæ 1000. &c. Denominatores autem proportionū submultiplicium multiplicibus correspōdentiū, sūt partes aliquotæ a dictis denominatoribus denominatæ: Vt denominator proportionis subdu-

subduplæ, est $\frac{1}{2}$; *subnonuplæ*, $\frac{1}{9}$: *subcentuplæ*, $\frac{1}{100}$: *submillecuplæ*, $\frac{1}{1000}$; *Denominator autē proportionis subquintuplæ est* $\frac{1}{5}$. *Eodē modo & denominatores alia rū proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis, est numerus fractus; cuius numerator perpetuo est unitas; denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, ut ex dictis exemplis patet.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis superparticularis, est unitas cum parte una aliquota: quoniam maior quantitas debet minorem semel tantum, & unam eius partem aliquotam comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator, est* $1\frac{1}{2}$; *sesquioctauæ*; $1\frac{1}{8}$; *sesquimillesimæ*, $1\frac{1}{1000}$; *&c. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores unatantum unitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est* $\frac{2}{3}$; *subsesquioctauæ*, $\frac{8}{9}$; *subsesquimillesimæ*, $\frac{1000}{1001}$; *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus unitate maior: Vt denominator proportionis subsesquidecimæ est* $\frac{10}{11}$, *&c.*

DENOMINATOR *cuiusuis proportionis superpartientis, est unitas cum pluribus partibus aliquotis non efficientibus unam: quia maior quantitas debet semel tantum minorem continere, & plures eius partes. Vt denominator proportionis supertripartientis*

tis ſeptimas, eſt 1 3/7; ſupertripartientis uigeſimas, 1 3/20; &c. Denominatores autem proportionum ſubſuperpartientium, ſunt fractiones, quarum numeratores tot unitatibus minores ſunt, quam earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem ſuperat. Vt denominator proportionis ſubſupertripartientis ſeptimas, eſt 7/10; ſubſupertripartientis uigeſimas, 20/23; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperpartientis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partium aliquotarum, cui ſi addatur numerus partium, habebitur eiuſdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis ſubſuperquadripartientis undecimas, eſt 11/15; Denominator autem proportionis ſubſupertripartientis quintas eſt hæc fractio 5/8. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum ſubſuperpartientium denominatores.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis ſuperparticularis, eſt numerus cum una parte aliquota: quia maior quantitas continere debet minorem aliquoties, & inſuper unam eius partem aliquotam. Vt denominator proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ, eſt 3 1/7. Quintuplæ ſeſquinonæ, 5 1/9, &c. Denominatores autem proportionum ſubmultiplicium ſuperparticularium, ſunt fractiones, quarum numeratores numeri ſunt. Vt denominator proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, eſt 7/22; ſubquintuplæ ſeſquinonæ, 9/47; etc. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ, cui ſi multiplicetur per denominatorem proportionis multipli-

multiplicis, addaturque unitas numero producto, habebitur denominator eiusdem fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$, *&c.*

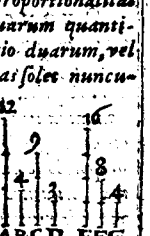
DENOMINATOR *cuiuscuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus cum pluribus partibus aliquotis, non constituentibus unam: quoniam maior quantitas minorem debet aliquoties comprehendere, & eius plures partes aliquotas non facientes unam. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est* $3\frac{5}{8}$; *quadruplæ superbipartientis quintas,* $4\frac{2}{5}$, *&c. Denominatores uero proportionum submultiplicium superpartientiũ, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est* $\frac{8}{29}$; *subquadruplæ superbipartientis quintas,* $\frac{5}{22}$, *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est* $\frac{13}{34}$, *&c.*

DENOMINATOR *denique proportionis æqualitatis, perpetuo est unitas: quia una quantitas debet alteram semel duntaxat continere.*

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία plerisque autem latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus; habitudinem autē proportionum, Proportionalitatē) a scriptoribus, præsertim Boetio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu harmonica: Verum Euclides de sola Geometrica agit in hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita ut nullæ fiat proportionum interruptio; sed quælibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis præcedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita ut fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed nel antecedēs tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.



V.

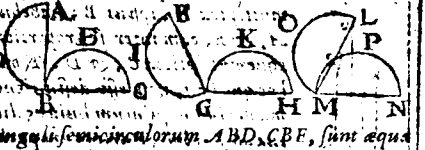
RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM *Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat proportionem, seu rationem; explicat nunc in hac 5. definitione, quid nam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alterum tandem superet; adeo vt si alterutra quamcunque multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem, (dicet irrationalem,) quæ nullo possit numero exprimi, quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circunferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis exlorata, atque cognita,) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circunferentiam superat, cum omnis circunferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrũ eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionem habent, quia & æqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum, ad modum Lunæ nouæ, quadrato falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, illecuidam lunulæ, hic uero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo qua-*

20. primi.

drato

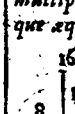
drato. Hoc idem demonstrauit Proclo in angulis rectilineis, ac curuilineis. Ostendit enim, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa



quas semicirculi describantur A D B, B E C. Quoniã igitur anguli semicirculorum A B D, C B E, sunt æquales, addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, totiꝰ anguli recti A B C, æqualis. Similiter ostendes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; nec non curuilineum O L P, acuto L M N, idemmodo hic alijs semicirculorum I M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum, posse alterum excedere, quare proportionem inter se habebunt. At uero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, ullam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiã minimo: ꝛeu propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque ut apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, uoluit hac definitione, ex intelligi, quæ hanc conditionem habeant, ut alterutra multiplicata, alteram possit superare, alias non. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare unam propositarum magnitudinum, quæ proportionem dicuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus.

PERSPICVVM est ex his, quam inepte, & quam falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duæ quæcunque

propositæ quantitates habeant. Itaque ut inquit, nulli Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, eam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habebunt magnitudines A, & B, eam inter se proportionem, quam earum æquemultiplicia C, & D. Non laudavit autem, hoc quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius, lib. ubi demonstratur ab Euclide, Partes cum partibus multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quæ illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduxerat ad notitiam proportionis inter A, & B; Est ergo sensus huius definitionis talis, quem exposuimus, ut liquido constat ex verbis Euclidis.



VI.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundã, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrunque ab utroque uel una deficiunt, uel una æqualia sunt, uel una excedunt; si ea sumãtur, quæ inter se respondent.

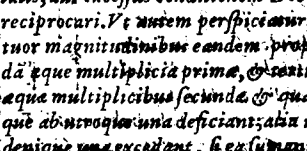
EXPLICAT hoc in loco Euclides, quasnam conditiones requiram apud Geometrãs, magnitudines, ut eandem dicantur habere proportionem. Quod ut rectius exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, ut complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam

quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, ſecunda; C, tertia; & D, quarta, ſumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipſius A; & F, ipſius C. Item ſumantur ſecundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipſius B; & H, ipſius D. ſint hæc duo poſteriora ſint ita multiplicia ſecundæ, & quartæ, ſicut priora duo multiplicia ſunt primæ, & tertiæ, ſiue non. Quod ſi iam inter ſe conferantur ſumpta æque multiplicia ea, quæ inter ſe reſpondent, ut multiplex primæ, & multiplex ſecundæ inter ſe, hoc eſt E, & G; Item multiplex tertiæ & multiplex quartæ inter ſe, hoc eſt F, & H; deprehenſumque fuerit perpetuo, ea ita inter ſe ſe habere, ut ſi E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex ſecundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus ſit quam H; multiplex quartæ magnitudinis D: Aut ſi E, æquale fuerit ipſi G; etiam F, æquale ſit ipſi H; Aut denique ſi E, maius fuerit quam G; etiam F, maius ſit quam H; (quod eſt utrumque ab utroque vel vna deficere, uel una æqualia eſſe, uel una excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium poſſit reperiri, ideſt, vt nunquam E, minus ſit quam G, quin & F, minus ſit quam H; & ni nunquam E, æquale ſit ipſi G, quin & F, ipſi H, ſit æquale; Denique ut nunquam E, maius ſit quam G, quin & F, maius ſit, quam H. Si inquam deprehenſum fuerit, æque multiplicia quauis accepta, perpetuo ſe ſe ita habere; vt dictum eſt, dicetur eadem eſſe proportio primæ magnitudinis A, ad ſecundam magnitudinem B, quæ eſt proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quod ſi deprehendere-tur aliquando, etiam in ſolo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere a multiplici G; non autem multiplex F, deficere a multiplici H; Aut E, æquale eſſe ipſi G, at F, non æquale ipſi H; Aut denique E, excedere ipſum G, at F, non excedere ipſum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propoſitæ eandem habere proportionem, ſed diuerſas, ceu in defin. 8. fiet perſpicuum.



THEOR. VI. Si demonſtrationis alicuius concludantur quatuor

tuor quantitates eandem habere proportionem; ostendendum erit, quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collatæ cum quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, quælibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collatæ cum quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus conditionem. Debet enim definitio & definitio reciprocari. Vt autem perspiciatur, quomodo pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus, quædam æque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, a quibusdam æque multiplicibus secundæ, & quartæ magnitudinis, utrumque ab utroque una deficiant, alia vero una æqualia sint, alia denique una excedant, si exsumantur, quæ inter se respondent, placuit unum exemplum adducere in numeris. Sint enim quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumanturque primi & tertii æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æque multiplices, ut septupli 14. & 28. Videsne igitur tam 12. multiplicem primi deficere a 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij a 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertij



sumantur alij æque multiplices, nempe noncupli 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æque multiplices, ut noncupli 18. & 36. Videsne ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe octupli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, ut dupli 4. & 8. Videsne igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus inquacunque sumantur multiplicatione semper deprehendatur, primam trium horum verum esse, dicemur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.

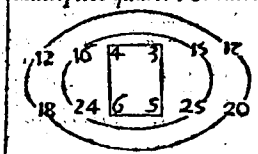
CAMPANVS vero atque Orontius longe aliter definitionem

tionem hanc exponunt, Dicunt enim Euclidem uelle, tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secunda & quarta æque multiplicibus, utrumque utrique, uel una deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione: uel una æqualia sunt, uel una excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, ut ait Campanus, quando earũ æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cĩ eandẽ proportionem habet multiplex primæ ad multiplex secundæ, quam multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non uidet, si ita intelligatur definitio, Euclidem idẽ per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides uult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se confrantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æque multiplicia eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est, idem per idem demonstrari, quod ridiculum est; ueluti eo in loco demonstrabimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, ut proprijs in locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, ut exposuimus, ita ut, propositis quatuor magnitudinibus in eadem proportione, si multiplex primæ deficit a multiplici secundæ, uel æquale sit, uel excedat; etiam multiplex tertiæ deficiat a multiplici quartæ, uel æquale sit, uel excedat, quicunque sit ille defectus, excessusve. Nam in 4. posita Theoremate demonstrabitur, dictum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nã si de quocunque intelligeretur, essent quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadẽ proportione. Si enim primi & tertij, utpote 4. & 6. sumantur æque multiplices numeri, ut dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. æque multiplices, ut dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam



di quam 12. multiplex tertij, 10. multiplicium quarti. Idemq; cernitur ſi primi, & tertij ſumantur quadrupli 16. & 24. ſecundi vero, & quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur ſufficit, vt æque multiplicia ſumpta vna excedant ſeſe quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter ſe mutuo ſuperent, erit eadem proportio 4. ad 3, quæ eſt 6. ad 5. quod falſum eſt, cum proportio 4. ad 3. ſit ſeſquitertia, proportio vero 6. ad 5. ſeſquiquinta. Intelligendus igitur eſt defectus, aut exceſſus æque multiplicium, proportionalis. Ita enim fiet, non eſſe eandem proportionem 4. ad 3. quæ eſt 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non ſe ſe excedant proportionaliter, vt conſtat. Veruntamen dicendum eſt, Campanum mirum in modum hallucinatum fuiſſe. Quamuis enim numeri æque multiplices additi ſe ſe vna excedant; tamen quamplurimi alij reperiuntur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quincuplices ſumantur, 15. & 25. excedat quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25 multiplicem quarti, ſed deficiet. Quod ſi primi, & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At vero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cum igitur non deprehendantur quælibet æque multiplicia dictorum numerorum ſic ſe habere, vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoque multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æque multiplicibus ita eſſe contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionẽ, vt adhuc clarius conſtabit ex 8. definitione.



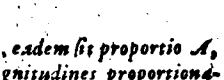
CAETERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines, eandem habentes proportionem, ſi modo ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcumque ſumpta ad 9. & 6. nel vna deficiunt ab æque multi-

multiplicibus sumptis ad 6. & 4. vel æqualia sunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales uocentur.

VT si magnitudinum A, B, C, D, eadem sit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur dictæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, si eadem sit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædam magnitudines proportionales cõtinuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales sunt magnitudines E, F, G; Quædam vero proportionales sunt non continuæ, sed discretæ, cuiusmodi sunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum est in 4. definitione.



VIII.

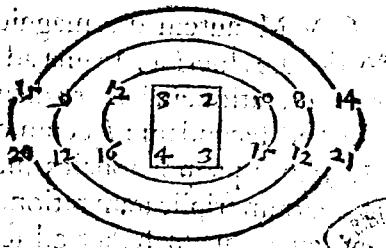
CVM uero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ; At multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quammam conditionem habere debant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartã, dicens.

dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehẽsumq; fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplici secundæ, multiplex autem tertiæ non esse maius multiplici quartæ, sed uel minus, uel æquale; dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartam: ut perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F, secundæ uero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H; Et quoniam E, multiplex primæ maius est quam G, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius non est quam H, multiplex quartæ, sed minus; idcirco maior esse dicetur proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam. Non est autem necesse, ut quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionem, quam tertia ad quartam, æque multiplicia secundum quamuis multiplicationem sic se habere, ut multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, ut secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque fieri, ut tã multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quam multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item ut & multiplex primæ minus sit multiplice secundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamen quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ, uel minus est, uel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad secundam, quam tertia ad quartam, ut perspicuum est in sequenti exemplo. Itaque ut quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est, ut æque multiplicia earum, iuxtæ quasuis multiplicationes acceptæ, uel una deficiant, uel una æqualia sint, uel una excedant, ceu in 6, defin. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, ut secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex uero tertiæ non superet multiplex quartæ; quamuis inxtæ innumeras multiplicationes,



tiones, æque multiplicia primæ, ac tertiæ excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ. Quod si aliquando e contrario multiplex primæ deficiat a multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ; dicetur prima magnitudo ad secundam minorẽ habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis secundum plurimas multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.



IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

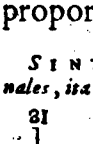
QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quã interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autem proportio habet & antecedens, & consequens, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duo antecedentia, ac duo consequentia. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines. At vero si fuerit continua, erunt cum minimũ tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscumque, solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.



X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

SINT magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E. Proportio igitur A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam; quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; vt proportio A, ad B; & B, ad C. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B; propterea quod quatuor proportiones interiiciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.



QVOD si e contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D: At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoq; proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTER-

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione; si proponantur aliquot quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam, &c. Quod tamen nullatenus concedendum. Nec enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionē primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperiantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, ut diximus. Non autem, illam duplam esse huius, intellexit, ne Theorema proponeret, quod meritò quisquam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continuè proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius sit quincupla? At vere, illam dici huius duplicatam, nemo infitiabitur, ac quod bis sit posita, & continuè proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor sit, hæc autem maior? Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quintæ partis. Quare & si proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est eiusdē dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cum tamen quadruplæ duplicata, sit sedecupla, vt hic patet 16. 4. 1.

ITAQVE hoc in loco Euclides explicare tantum, quid nam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentium librorum percipiantur, rebusq; possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quæ nam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Quare cum ex propositione 20. lib. 6. constet, proportionem quadrati ad quadratum duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuentur proportionales rectarum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita ut si prioris quadrati latus fuerit

rit trium palmorum, posterioris autem unius palmi; priusquã dicamus ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem intelligendum est, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius noua pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Similiter autem, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratum, sphæras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam; colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur tripla proportionis, cum hic perspicitur 27. 9. 3. 1. &c.

CAETERVM proposita quacunque proportione rationali, si eius denominator in seipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur proposita proportionis: Vt quia ex multiplicatione 4. denominatoris scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideo proportio sedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatoris subquadruplæ, proportionis subquadruplæ, in se, producuntur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus inuentum prædictum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ, vt in priori exẽplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicatæ, vt hic uides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atque ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatã proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis,

portionis bis ducta, in hunc modum 3. 3. ac sese multiplicatio. Nam ter tria faciunt 9. denominatorem conceptæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cernit potest. 9. 3. 1. Item his 18. 6. 2. Numero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex proposita proportionis denominatore ter posito et sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3 ter posito sic. 3. 3. 3. atq; ita multiplicato, dicendo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exoritur ex denominatore quater posito; Quintuplicata ex eodem quinquies posito, ac sic multiplicato, &c. Quo circa proportio duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapit naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur. Proportio vero, cuius quantitates inter primam vnicum medium in continua proportionalitate, habet conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportio, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interponuntur, obtinet naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum et cubus ex tribus lineis æqualibus conflatur. Verum de his plura inuenies apud Arithmedicos, qui Algebra regulam exposuerunt, &c.

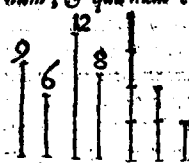
XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes uero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionū esse similitudinem. Docet iam, non solum in proportionalitate quantis proportiones dici similes. Verum etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologas ve, dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus

in

in quam plurimis demonstrationibus, qua num laterum figurarum inter se comparatæ, antecedentia debeant esse proportionum, & quænam consequentia, ceu in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D; propter similitudinem enim proportionum, necesse est, utrumq; magnitudinum antecedentium vel æqualem esse utriq; consequenti, vel eodē modo maiorem, aut minorem; aliàs non haberet utraque antecedens ad utranque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, nempe dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, censimue proportionalibus, ubi tam E, & F, homologa sunt, quam F, & G, ut constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æquemultiplicia prima & tertia magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secunda, & quarta magnitudinū, nempe consequentium. Ha enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, ut ex hac definitione constat; in magnitudinibus uero non proportionalibus dissimiles.



ORONTIVS, *& nonnulli alij interpretes, longè aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus uarie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; ceu in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & usus eiusdem in 6. lib. cō sideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.*

XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT *hic quosdam modos argumentandi ex proportionibus,*

portionibus, quorum frequentissimus est usus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, uel disiuncta proportionalitas: Quintus, conuersio rationis, siue auersa proportionalitas: Sextus denique uocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandē esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari ex permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione uruntur hoc fere modo loquendi: Vt est A. ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu uicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterum in dicto modo argumentandi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdē generis, ut inter binas ut ut assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur; Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, ut linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contra, ut perspicuum est ex dictis.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentē, uelut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, ut D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad

B, ita C, ad D. Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoq; 12 B, ad A, ut D, ad C. Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendemus propos. 4 huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse unius generis, & posteriores alterius. Itaque manifestè licebit inferre, vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D. Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C.

9 6 12 8

A B C D

XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F. Si igitur ex hoc colligamus, eam quoque esse proportionem totius A C, nempe antecedentis cum consequente, ad B C, consequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum consequente, ad E F, consequentem. Dicetur huiusmodi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, componendo ergo erit & A C, ad B C, vt D F, ad E F. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.

A B C D E F

XV.

DIVISIO, rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

Vt si dicatur, quæ proportionem habet A B, ad C B, ea est tota D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens eo-

A 12 C 4 B

sequentem superat, ad C B, con-

D 6 F 2 E

sequentem, ut D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem huc rationis ita loquuntur interpretes; ergo dividendo, &c. Hæc porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

Quod si colligamus hac modo. Sicut est tota magnitudo A B, ad C B, ita tota D E, ad

A 6 C 4 B

F E; igitur ita etiam erit eadē

D 12 F 8 E

A B, ad A C, excessum, quo consequentem superat antecedens. vt D E, ad D F; Dicemur proportionem conuertere. Hinc sane fere loquuntur scriptores. Igitur per conuersionē rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus propos. 19. huius lib.

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidē D, E, F, sintque binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad vltima in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis mediis, colligunt habere unā, eandemque inter se proportionem, eam in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, sumendo binas ac binas magnitudines in eadem proportione, atque ordinate procedendo; altero vero, cum ordo inuertitur; fit vt duplex sit proportio ex æqualitate, non quidem ratione proportionis extremorum, sed ratione proportionis magnitudinum intermediarum. Id quod clarissime duæ sequentes definitiones explicant.

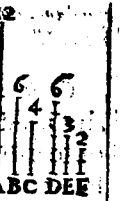


XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; Ideoque concludatur A, ad C, vt D, ad F; Di-

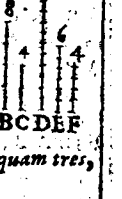
F 3 dicetur talis modus argumentandi ex æqualitate, ordinata proportio, quod in vtrisque magnitudinibus idem ordo in proportionibus seruetur. Hic autem modus demonstratur propos. 22. huius lib.



XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

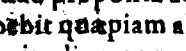
SIT, *ut ex æqualitate colligatur eadem proportio extremorum, ordo in proportionibus perturbetur, ita ut dicatur, quēadmodum A, ad B, Ita E, ad F; Deinde ut in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, sic a in secundis magnitudinib⁹ aliud quidpiā ad E, antecedentē magnitudinē; nuncupabitur huiusce modi mod⁹ argumentandi ex æqualitate, Perturbata proportio, & nō seruetur idē ordo in proportionib⁹ magnitudinum. Consectationem uero hanc ualidam esse, ostendetur propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quā ordinata, semper infert ex æqualitate eandē extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, ceu propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.*



VTVNTVR *Euclidis interpretes hoc in libro, & in alijs, ubi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate*

quodam, quod ut sic subiceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est;

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

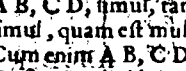


Vt, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Non enim ex hoc absurdum aliquod consequitur, quamuis ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, quam sane esse posse, dubitandi non est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quã multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines A B, C D, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines A B, C D, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex A B, ipsius E, uel C D, ipsius F. Cum enim A B, C D, sint æque multiplices ipsarum E, & F; si A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipsi



E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipsi F, æquales; erũt magni-

magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam vero A G, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, erunt A G, C I, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt G H, & I K, simul, æquales ipsis E, & F, simul; Necnon H B, & K D, eidem E, & F. Quoties igitur E, in A B, uel F, in C D, continentur, toties & E, F, simul, in A B, C D, simul comprehendentur. Quare quam multiplex est A B, ipsius E, tam sunt multiplices A B, C D, simul, ipsarum E, & F, simul. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum. 2. pron.

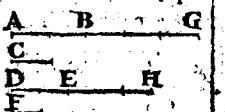
SCHOLION.

Hoc idem demonstrabitur vniuerse in omni genere proportionis, propos. 12.

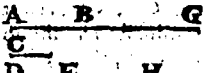
THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cũ quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cũ B G, quinta compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quã multiplex est D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartę. Cum enim A B, D E, sint æque multiplices ipsarum C, F; erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales,



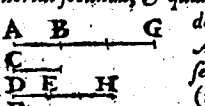
les, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erũt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H; erunt totę multitudines A G, D H, æquales. Quare toties cõprehẽditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.



2. pron.

SCHOLION.

Quod si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ: Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint secundæ, & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota A G, (prima, & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinũ æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, ceu perspicuum est in proposito schemate. Si uero tam primæ & tertiæ, quam quintæ, & sextæ æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius existit, primam & quintam simul; atque tertiam & sextam simul, æque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.



Hoc quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis uniuerse propos. 24.

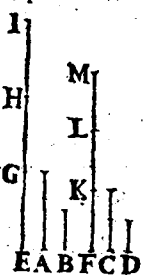
3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque

atque tertia quartæ; ſumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt C, tertia quartæ D; ſumanturque E, & F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo, tam multiplicem eſſe E, ipſius B, quam eſt F, ipſius D; Nã cum E, & F, ſint æque multiplices ipſarum A, & C; ſi diſtribuantur E, & F, in magnitudines ipſis A, & C, æquales, ut in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipſi A, quot ſunt in F, æquales ipſi C. Quoniam uero EG, F K, æquales ſunt ipſis A, & C; ſunt autem A, & C, æque multiplices ipſarum B, & D, ex hypotheſi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt G H, K L; Itẽ H I, L M, æque multiplices earundem B, & D. Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam eſt multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F K, tertia quartæ D; Item G H, quinta tam multiplex eſt eiuſdem ſecundæ B, quam multiplex eſt K L, ſexta eiuſdem quartæ D; Erit & E H, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt multiplex F L, compoſita ex tertia & ſexta, quartę D. Rurſus cum ſit E H, prima tam multiplex ſecundæ B, quam multiplex eſt F L, tertia quartæ D; ſit autem & H I, quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt L M, ſexta multiplex quartæ D; Erit & E I, compoſita ex prima & quinta, tam multiplex ſecundæ B, quam eſt F M, compoſita ex tertia ac ſexta, multiplex quartæ D. Eademque eſt ratio, ſi plures fuerint partes in E, & F. Si ſit ergo prima ſecundæ æque multiplex, atque tertia quartæ, &c.



2. *quinti.*

Quod oſtendendum erat.

SCHO-

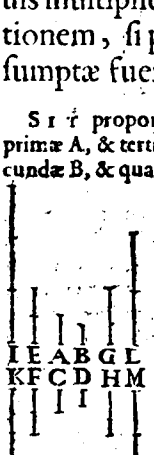
SCHOLION.

OSTENDETVR *hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ binæ sumptæ eandem habent proportionem.*

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item, secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quāuis multiplicationem: Dico quoque esse ut E, multiplicem primæ ad G, multiplicē secundæ, ita F, multiplicem tertiæ ad H, multiplicem quartæ: Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, primæ ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; sumptæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ; Item L, M, æque multiplices secundæ & quar-



3. *quinti.*

& quartæ; fit ut si I; multiplex primæ deficit ab L, multi- 6. defin. 5.
plici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ deficiat ab M, mul
tiplici quartæ: & si I, æqualis sit ipsi L, etiam K, ipsi M, sit
æqualis: & si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat ipsam
M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplici-
bus ipsarum E, & F, nec non magnitudinum G, & H. Ita
que cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ, F;
Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H;
ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam
L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quo-
que esse M, multiplici quartæ, &c. atque hoc contingere in
quacunque multiplicatione; Erit, ut E, prima ad G, secun- 6. defin. 5.
dam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad se-
cundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat de-
monstrandum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si quatuor quantitates fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione, proportionales esse. Cum enim, propterea quod sit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam; ostensum sit, si I, multiplex primæ minor fuerit quam L, multiplex secundæ, uel æqualis, uel maior, etiam K, multiplicem tertiæ minorem esse, uel æqualem, uel maiorem M, multiplici quartæ; Perspicuum est, si e contrario L, maior fuerit quam I, uel æqualis, uel minor, etiam M, maiorem fore, uel æqualem, uel minorem, quam K, secundum quamcunque multiplicationem sint sumptæ hæc æque multiplicia. Nam si utraque I, K, minor est quam utraque L, M; erit contra utraque L, M, maior quã I, K, &c. Quare erit ut B, prima ad A, secundam; ita D, tertia ad 6. defin. 5.
C, quartam.

SCHOLION.

ORONTIVS *quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxtæ suam expositionem, ita esse I, ad L, ut K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, ut F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est inuersa, tum quia secundam hunc sensum demonstra*

tur

tur conuersum 6. definitionis, per conuersum eiusdem, atque idcirco idem per idem, quod est absurdum; tum etiam, quia eodem modo statim a principio licuisset illi inferre, sic esse, per conuersum 6. definitionis E, ad G, ut F, ad H, sine acceptione nonarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda est ergo huiusce modi demonstratio, una cum expositione 6. definitionis, ut supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, uel æqualis, uel maior, etiam K, minorem esse, uel æqualem, uel maiorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, si sumantur, pro ut inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, ut est F, tertia ad H, quartam.

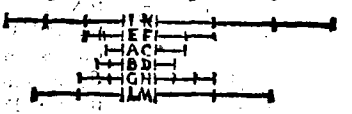


CAETERVM non uidetur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis mathematicis ualde familiare, quamuis a nemine, quod sciam, sit demonstratum. Videlicet.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam; etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad secundam, & quartam magnitudines, eandem habebunt rationē: Necnon æque multiplices secundæ & quartæ ad primam & tertiam magnitudines. Et contra eandem rationē habebunt secunda & quarta, ad æque multiplices primæ & tertiæ; Nec non prima & tertia, ad æque multiplices secundæ & quartæ.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam, sumanturque E, & F, æque multiplices ipsarum A, & C; Item G, & H, æque multiplices ipsarum B, & D. Dico ita esse E, ad B, ut F, ad D; Item G, ad A, ut H, ad C; Et e conuerso,

uersus, ita esse B, ad E, ut D, ad F; Item A, ad G, ut C, ad H. Sumantur enim rursus ipsarum E, F, æque multiplices I, K; Item ipsarum G, H, æque multiplices L, M. Erit igitur ex æquo, ut ante probatum est, I, K, æque multiplices ipsarum A, C; Item L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Quocirca si I, multiplex primæ A, deficit à G, multiplici secundæ B, etiam K, multiplex tertiæ C, deficiet ab H, multiplici quartæ, &c. Igitur erit ut E, prima ad B, secundam, ita F, tertia ad D, quartam. Eodem modo ostendetur, ut est G, ad A, ita esse H, ad C; Atque idcirco erit conuertendo, ut B, ad E, ita D, ad F; Item ut A, ad G, ita C, ad H;



3. quinti.

6. defin. 5.

6. defin. 5.

Ex quo conflat modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometræ, maxime Apollonius Pergæus, Archimedes, Theon, &c. Videlicet; Vt est A, ad B, ita est C, ad D; ergo ut duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius A, utpote E, ad B; ita quoque erit duplum, uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius C, quale est F, ad D. Item ut est A, ad B, Ita est C, ad D; igitur ut A, ad duplum uel triplum, uel quadruplum, &c. ipsius B, nempe ad G; ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, nimirum ad H.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

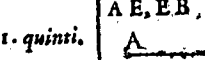
5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.

ITA multiplex sit tota AB, totius CD, ut est multiplex AE, ablata ablatæ CF: Dico reliquam EB, ita esse multipticem reliquæ CD, ut est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis uidelicet

delicet ipsius G C, ut est A E, ipsius C F. Quoniam igitur A E, E B, æque sunt multiplices ipsarum C F, G C; erit

1. quinti.



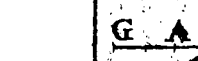
tota A B, totius G F, ita multiplex, ut A E, ipsius C F, hoc est, omnes omnium, ut una unius. Sed tam multiplex ponitur A B, ipsius C D, quam est multiplex A E, ipsius C F; Igitur A B, tam



est multiplex ipsius G F, quam ipsius C D; atque idirco æquales sunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipsius F D, quam multiplex est ipsius G C. Sed ita multiplex posita fuit E B, ipsius G C, ut A E, ipsius C F, hoc est, ut tota A B, totius C D. Quare tam multiplex est reliqua E B, reliquæ F D, quam est tota A B, totius C D, quod est propositum.

ALITER. Sit ita multiplex tota A B, totius C D, ut ablata A E, ablatæ C F. Dico reliquam E B, reliquæ F D, esse sic multiplicem, ut est tota totius. Posita enim G A, ita multiplici ipsius F D, ut est A E, ipsius C F; erit tota G E, sic multiplex totius C D, ut A E, ipsius C F. Sed ita quoque multiplex est A B, eiusdem C D, ut A E, ipsius C F, ex hypothesi: Aeque multiplices sunt igitur G E, A B, ipsius C D, atque adeo inter se æquales. Quare dempta communi A E, æquales erunt G A, E B; Idcoque æque multiplices ipsius F D, cum G A, sit multiplex posita ipsius F D. Atqui ita est multiplex posita G A, ipsius F D, ut A B, ipsius C D; Igitur & E B, reliqua sic erit multiplex ipsius F D, reliquæ, ut A B, tota totius C D; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

1. quinti





SCHOLION.

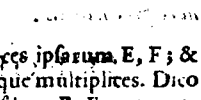
VNIVERSE idipsum demonstrabitur propos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, &c.

THEOR

THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

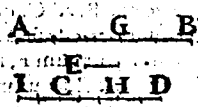
SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdé aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

SINT AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata quoque AG; erit reliqua GB, uel æqualis ipsi E, uel eius multiplex, alias inæqualis, uel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E; Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, ut HI, tertia cum sexta, quartæ F; Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex quã AB, ipsius E; Æque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F; Ideoque æquales inter se. Quare dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F; erit quoque HD, eidem F, æqualis. quod est propositum.



2. *quinti.*

SIT secundo GB, multiplex ipsius E; Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI, ita multiplici ipsius F, ut est multiplex GB, ipsius E, erit, ut rius AB, ita multiplex ipsius E, ut HI, ipsius F. Quare 2. *quinti.*
erum æquales erunt HI, CD, atque adeo reliquæ CI, HD;



HD; sed CI, est ita multiplex ipsius F; ut GB, ipsius E, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

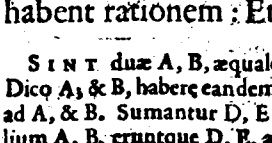
SCHOLION.

HOC quoque ostendemus uniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C; Item C, ad A, & B. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarũ æqualium A, B, eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, utcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sũt, fit ut utraque uel minor sit, quam F, uel æqualis, uel maior, iuxta quãcunque multiplicationẽ id fiat. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplici secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinũ, &c.) uel æquales, uel maiores; Erit ea proportio primæ A, ad C, secundã, quæ tertiæ B, ad C, quartam. Eodem pacto ostendemus F, uel minorem esse utraque D, E, uel utrique æqualẽ, uel maiorem. Igitur cum F, multiplex primæ & tertiæ C, una deficiat a D, & E, æque multiplicibus secundæ A, & quartę B; uel una æqualis sit, uel maior; Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartã B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi



6. defin. 5.

6. defin. 5.

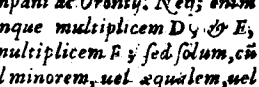
per

per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit esse A, ad C, ut B, ad C, erit contra C, ad A, ut C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandem habent rationem; Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex his desin. iuxta expositionem Campani ac Orontij. Neq; enim per demonstrationem constat, utranque multiplicem D, & E, eandem habere proportionem ad multiplicem F; sed solum, cū illæ sint æquales, utramque esse uel minorem, uel æqualem, uel maiorem multiplici, F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositum colligunt.

EODEM fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales; eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, ut B, ad D. Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ, & quartæ; Erit tam E, & F, inter se æquales, quam G, & H, inter se, ut constat ex his, quæ in 1. lib. docuimus, cum axioma sextum explicaremus; quod E, & F, sint æqualium A, & B, æque multiplices, necnon G, & H, æque multiplices quoque æqualium C, & D. Quare si E, multiplex primæ deficit a G, multiplici secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplici quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam, ex defin. 5. Quod est propositum.



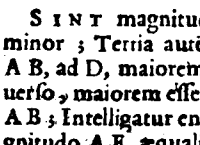
THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem ha-

bet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorē.

SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At e conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad A B; Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, ut sit reliqua E B; Vtraq; deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, ut G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quam D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed uel maior, uel æqualis. Quoniam igitur duæ F G, G H, æque multiplices sunt duarū



5. *quinti.* B E, E A; erit & tota F H, ita multiplex totius A B, ut H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & A E: Capiatur quoque ipsius D, multiplex I K, quæ proxime maior sit, quam H G, nempe dupla. Quod si dupla, maior non fuerit quam H G, sumatur tripla, uel quadrupla, &c. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quam H G, (alias I K, non erit multiplex ipsius D, proxime maior quam H G; sed & I L, maior erit quam H G) & idcirco H G, erit uel æqualis ipsi I L, uel maior. Et quia F G, maior est posita quam D; L K, uero æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quam L K; Est autem H G, non minor, quā I L, ut demonstratū est, sed uel æqualis, uel maior: Erit igitur tota F H, maior quam I K. Itaq; cum F H, H G, sint æque multiplices primæ A B, & tertiæ C; Atque I K, multiplex ipsius D, quę instar est secundæ & quartæ; sit autē F H, multiplex primæ, maior quā I K, multiplex secundę; At H G, multiplex tertiæ non sit maior, quā I K, multiplex quartæ; immo minor, ex hypothesi (sumpta enim est I K, multiplex maior, quā H G) erit maior proportio A B, primę ad D, secundam, quā C, tertiæ ad D, quartam.

8. *defin.* 5. QVONIAM uero e contrario I K, multiplex primæ D, (ponitur

D, (ponitur enim nunc D, prima ac tertia; At C, ſecunda, & A B, quarta) maior eſt quam H G; multiplex ſecundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non eſt, quam E H, multiplex quartæ A B, immo minor, cum F H, maior ſit, quam I K, ut oſtenſum eſt; Erit maior proportio D, primæ ad C, ſecundam, quam D, tertiæ ad A B, quartam: quod eſt propoſitum. Inæqualium igitur magnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat oſtendendum. 8. *defin.* 5.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoq; ſunt inter ſe æquales.

HABEANT primo A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, eſſe inter ſe æquales. Sit enim, ſi fieri poteſt, altera nempe A, maior & B, minor. Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quã B, minoris ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo inæquales ſunt A, & B, ſed æquales. Habeat ſecundo C, eandem proportionem ad A, & B; Dico adhuc A, & B, eſſe æquales. Nam ſi altera, nempe A, eſſet maior, & B, minor; haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quam ad A, maiorem: quod eſt contra hypotheſin. Non igitur maior erit A, quam B, ſed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonſtrandum erat.



8. *quinti.*

8. *quinti.*

THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem

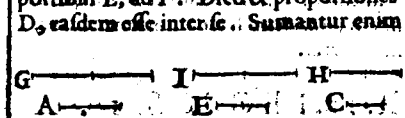
maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primo A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B. Si
7. *quinti.* enim A, foret ipsi B, æqualis, haberent A, & B, eandem proportionem ad C; Si autem A, minor esset, quam B, haberet B, ma-
8. *quinti.* ior ad C, maiorem proportionem, quam A, minor ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis uel minor quam C, sed maior. Habeat secundo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse, quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hypothesin. Neque uero B, maior erit quam A; alias haberet C, ad
7. *quinti.* minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quam
8. *quinti.* A; quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

II. THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, E, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, ut E, tertia ad F, quartam;



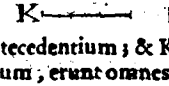
fit,

fit, ut si G, multiplex primæ deficit a K, multiplici secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplici quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, uel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, uel maior; sed (ut eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, uel æqualis, uel maior, est quoque H, minor, quam L, uel æqualis, uel maior, propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplici secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplici quartæ D; Et si G, æqualis est, uel maior quam K, etiam H, æqualis erit, uel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque æque multiplicibus. Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum. *5. defin. 5.* *5. defin. 5.* *6. defin. 5.*

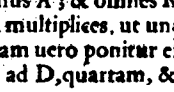
THEOR. 12. PROPOS. 12. 12.

SI sint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, ut C, ad D; & E, ad F. Dico ut est una antecedentium ad unam consequentium, nimirum A ad B; ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, ut una unius nempe ut G, *1. quinti.*



ipſius A; & omnes K, L, M, ſimul omnium B, D, F, ſimul ita multiplices, ut una unius, nimirum ut K, ipſius B. Quoniam uero ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam, & ut E, tertia ad F, quartam; ſit ut ſi G, multiplex primæ deficit a K, multiplici ſecundæ, deficiat quoq; H, multiplex tertiæ ab L, multiplici quartæ, & I, ab M; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, uel maior, æqualis quoque ſit H, ipſi L, & I, ipſi M, uel maior. Quare ſi G, minor eſt, uel æqualis, uel maior quam K, erunt & omnes G, H, I, omnibus K, L, M, minores, uel æquales, uel maiores. Quocirca ut eſt A, prima ad B, ſecundam, ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si ſint itaq; magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.



6. defin. 5.

6. defin. 5.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

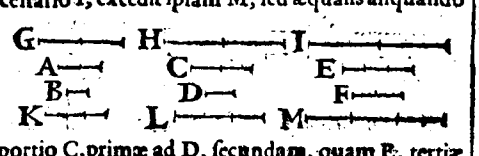
SI prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia uero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIT A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam: ſit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quam E, quintæ ad F, ſextam, Dico & proportionem A, primæ ad B; ſecundam eſſe maiorem quam E, quintæ ad F, ſextam. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus conſequentium, cum ſit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam; ſit ut ſi G, multiplex primæ exceſſerit K, multiplicem ſecundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipſam

6. defin. 5.

L, mul-

L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipſam L, non neceſſario I, excedit ipſam M, ſed æqualis aliquando erit, aliquando minor, quã maior ponatur proportio C, primæ ad D, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur ſi G, excedit K, non neceſſario I, excedit M. Maior eſt ergo proportio A, primæ ad B, ſecundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem ſi prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, &c. Quod oſtendendum erat. 3. *defin.* 5. 8. *defin.* 5.



SCHOLION.

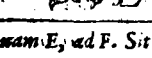
QVOD ſi proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, ſextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, ſecundam minor quam E, quintæ ad F, ſextam. Si enim proportio C, ad D, minor eſt quam E, ad F, hoc eſt, proportio E, ad F, maior quam C, ad D; ſit ut ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario H, excedat ipſam L, ſed aliquando deficiat, uel ei æqualis ſit. Sed ſi H, deficit ab L, uel ei æqualis eſt, etiam G, deficiet a K, uel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, ſecundam, ut A, tertia ad B, quartam. Quare ſi I, excedit ipſam M, non neceſſario G, excedet ipſam K; atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, ſecundam, quam A, tertiæ ad B, quartam, hoc eſt, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F, quod eſt propoſitum. 8. *defin.* 5. 8. *defin.* 5. 8. *defin.* 5.

EODEM modo. Si prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

QVOD ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundã, minorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

SIT ꝓportio A, ad B, maior, quã C, ad D; & C, ad D, maior, quã E, ad F. Dico proportionem A, ad B, maiorem quoque eſſe,

quam E, ad F. Sit enim ut C, ad D, ita G, ad B; ita ut A, ad B, maiorem habeat rationem, quam G, ad B. Quo posito, erit ratio G, ad B, maior quam E, ad F; Cum igitur ratio A, ad B, maior sit quam G, ad B; multo maior erit ratio A, ad B, quam E, ad F.



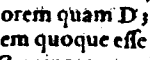
13. quinti.

IAM vero, si proportio A, ad B, minor fuerit, quam C, ad D; & C, ad D, minor, quam E, ad F; demonstrabimus, per ea, quæ in hoc scholio ostensa sunt, proportionem G, ad B, minorem esse quam E, ad F. Cum ergo proportio A, ad B, minor sit quam G, ad B; erit multo minor proportio A, ad B, quam E, ad F.

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima uero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si uero minor, & minor erit.

SIT A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D; Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D; Si denique A, minor fuerit quã C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primo A, maior quã C, eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, ut ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam; Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sex-



8. quinti.

13. quinti.

B, sextam. Minor est ergo D, quam B; Ideoque B, maior erit quam D, quod est propositum. 10. *quinti.*

SIT secundo A, æqualis ipsi C, eritque idcirco A, ad B, ut C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; Ideoque æquales erunt B, & D, quod est propositum. 7. *quinti.* 11. *quinti.* 9. *quinti.*

A—
B—
C—
D—

SIT tertio A, minor quam C, eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem; Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, ut A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextam; Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam; Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandē habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum. 8. *quinti.* 13. *quinti.* 10. *quinti.*

A—
B—
C—
D—

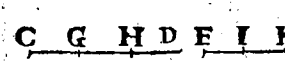
THEOR. 15. PROPOS. 15. 15.

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æque multiplices C D, & E F. Dico ita esse C D, ad E F, ut A, ad B. Cum enim C D, & E F, sint æque multiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C D, in partes C G, G H, H D, æquales ipsi A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipsi B; eritque C G, ad E I, ut A, ad B, ex scholio propos 7. huius lib. quod C G, & A, æquales inter se sint, nec non E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K, & H D, ad K F, ut A, ad B; Ideoque

C G H D E I K F
A— B—

11. quinti. B; Idcoque CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandem habebunt proportionē. Quo circa ut CG, ad EI, hoc ēst, ut A, ad B, ita erit CD, ad EF, nempe omnes CG, GH, HD, simul, ad omnes EI, IK, KF, simul, quod est propositum. Partes itaque cū pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

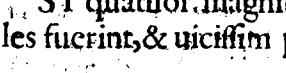


12. quinti.

16. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erūt.

SIT A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, ut B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, æque multiplices E, F; Item ipsarum C, D, æque multiplices G, H; eritque E, ad F, ut A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, ut C, ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B, erunt & ipsæ inter sē eædem. Rursus quia proportiones E, ad F; & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D, erunt & ipsæ eædem inter se, hoc est, ut est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare si E, maior est quam G, uel æqualis, uel minor, erit quoque F, maior quam H, uel æqualis, uel minor, in quacunque multiplicatione. Est igitur A, prima ad C, secundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum B, & F, sint æque multiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his una deficiant, uel una æqualis sint, uel una excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.



13. quinti.

14. quinti.

5. defin. 5.

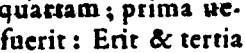
SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc & illud demonstrabitur.

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima uero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

SIT enim ut A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secunda; & C, tertiam maiorē esse quarta D; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Erit enim permutando, ut A. ad C, ita B, ad D. Quare si A, maior est, quam B, erit & C, maior, quam D; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.



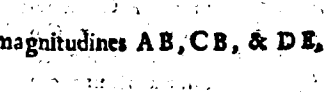
16. quinti.
14. quinti.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

17.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

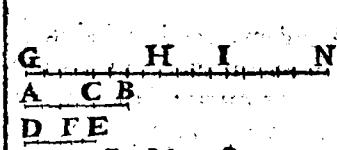
SINT compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, AB, ad CB, ut DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, ut est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE. Ipsarum enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM, eritque GI, ita multiplex ipsius AB, ut est GH, ipsius AC,



1. quinti.

hoc est

hoc est, ut K L, ipsius D F; sed ut est multiplex K L, ipsius D F, ita quoque multiplex est K M, ipsius D E. Aeque multiplices ergo sunt G I, K M, ipsarum A B, D E: Capiantur rursus I N, M O, aeque multiplices ipsarū C B, F E. Quoniam igitur si est multiplex H I, prima secundæ C B, ut L M, tertia quartæ F E; Itē tā est multiplex I N, quinta secundæ C B, quā M O, sexta quartæ F E; erit & H N, sic multiplex secundæ C B, ut L O, multiplex est quartæ F E. Itaque cum sit A B, prima ad C B, secundam, ut D E tertia ad F E, quartam; sumptæque sint æque multiplices primæ ac tertiæ; Item secundæ & quartæ; fit ut si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici secundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplici quartæ F E; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Deficiat nunc G I, ab H N, & K M, ab L O. Ablatis ergo communibus H I, L M, deficiet quoq; G H, ab I N, & K L, ab M O. Quod si G I, æqualis fuerit ipsi H N, & K M, ipsi L O, erit & G H, æqualis ipsi I N, & K L, ipsi M O. Et si G I, excesserit ipsam H N, & K M, ipsam L O; excedet quoque G H, ipsam I N, & K L, ipsam M O. Quam ob rem cum G H, K L, sumptæ sint æque multiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O, æque multiplices secundæ C B, & quartæ F E, ostensum q; sit, æque multiplices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ uel una deficere, uel una æquales esse, uel una excedere; Erit A C, prima ad C B, secundam, ut D F, tertia ad F E, quartam. quod est propositum. Si ergo positæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.



1. quinti.

2. quinti.

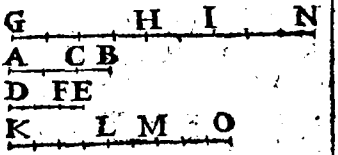
6. defin. 5.

18. THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales,

nales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt.

SINT diuiſæ magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales, hoc eſt, A C, ad C B, ut D F, ad F E; Dico eas etiam compoſitas proportionales eſſe, ut A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumantur enim, ut prius, ipſarum A C, C B, D F, F E, æque multiplices G H, H I, K L, L M; Item ipſarum C B, F E, aliæ æque multiplices I N, M O; eruntque rurſus G I, K M, ipſarum A B, D E, æque multiplices. Item H N, L O, ipſarum C B, F E, eu in præcedenti Theoremate oſtenſum fuit. Quoniam uero ponitur eſſe A C, prima ad C B, ſecundam, ut D F, tertia ad F E, quartam; ſumptæque ſunt æque multiplices primæ ac tertiæ; Item ſecundæ & quartæ; fit ut ſi G H, multiplex primæ deficit ab I N, multiplici ſecundæ, etiam K L, multiplex tertiæ deficiat ab M O, multiplici quartæ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi excedit, excedat. Deficiat nunc G H, ab I N, & K L, ab M O: additis igitur communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Quod ſi G H, æqualis fuerit ipſi I N, & K L, ipſi M O, erit & G I, ipſi H N, æqualis, & K M, ipſi L O. Et ſi G H, exceſſerit ipſam I N, & K L, ipſam M O, excedet quoque G I, ipſam H N, & K M, ipſam L O. Quoniam ergo ſi G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplici ſecundæ C B; etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplici quartæ F E; & ſi æqualis, æqualis, & ſi excedit, excedit; erit A B, prima ad C B, ſecundam, vt D E, tertia ad F E, quartam: quod eſt propoſitum. Itaque ſi diuiſæ magnitudines ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.



1. *quinti.*

2. *quinti.*

6. *defin.* 5.

6. *defin.* 5.

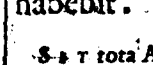
THEOR.

19. THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad tótum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum, se habebit.

SIT tota A B, ad totam C D, ut ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam F D, ut est tota A B, ad totam C D. Cum enim sit A B, ad C D, ut A E, ad C F, erit & permutando A B, ad A E, ut C D, ad C F. Diuidendo ergo erit E B, ad A E, ut F D, ad C F. quare permutando rursus erit E B, ad F D, ut A E, ad C F, hoc est ut tota A B, ad totam C D, cum posita sit A B, ad C D, ut A E, ad C F; Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

16. quinti.
17. quinti
16. quinti.



COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur a conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT enim A B, ad E B, ut C D, ad F D; Dico per conuersionē rationis esse quoque A B, ad A E, ut C D, ad C F; Cum enim sit A B, ad E B, ut C D, ad F D; erit permutando A B, tota ad C D, totam ut E B, ablata ad F D, ablatam: ut igitur tota A B, ad totā C D, ita A E, reliqua ad C F, reliquam. Permutando ergo rursus erit A B, ad A E, ut C D, ad C F: quod est propositum.

16. quinti.
19. quinti.
16. quinti.

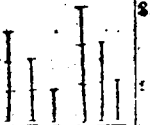
20. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quā tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sex-

ta,

ta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, ut D, ad E; & B, ad C, ut E, ad F, sit autem primo A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita D, ad E; maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quam C, ad B; At ut C, ad B, ita F, ad E; (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo ut C, ad B, ita F, ad E,) maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E; Quare D, maior erit, quam F; quod est propositum. 8. *quinti.* 13. *quinti.* 10. *quinti.*



SIT secundo A, æqualis ipsi C; Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, erit A, ad B, ut C, ad B; est autem ut A ad B, ita D, ad E; Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B; At ut C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, uti prius. Quare erit D, ad E, ut F, ad E; Ideoque æquales erunt D, & F; Quod est propositum. 7. *quinti.* 11. *quinti.* 9. *quinti.*



SIT tertio A, minor quam C; Dico & D, minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; sed ut A, ad B, ita D, ad E; Minor ergo proportio est D, ad E, quã C, ad B; Est autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E; Igitur minor est proportio D ad E, quam F ad E; propterea que D, minor erit quam F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendendum. 8. *quinti.* 10. *quinti.*



THEOR.

21. THEOR. 21. PROPOS. 21.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quã tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; Sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit ut A, ad B, ita E, ad F, & ut B, ad C, ita D, ad E; Sit autem primo A. prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cum enim A, maior sit quam C, erit maior proportio A, ad B quam C, ad B; est autem ut A, ad B, ita E, ad F: Maior ergo proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam uero ut B, ad C, ita D, ad E, erit conuertendo ut C, ad B, ita E, ad F. Quare maior erit proportio E, ad F, quam E, ad D; Ideoque maior erit D, quam F; quod est propositum.

8. *quinti.*

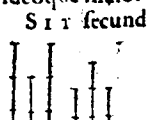
4. *quinti.*

10. *quinti.*



SIT secundo A, ipsi C, æqualis; Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, erit A, ad B, ut C, ad B; sed ut A, ad B, ita est E, ad F: Igitur erit ut C, ad B, ita E, ad F; est autem, ex inuersa ratione, ut C, ad B, ita E, ad D, uelut prius. Igitur erit ut E, ad F, ita E, ad D; atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit: quod est propositum.

7 *quinti.*



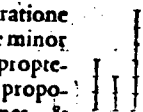
5. *quinti.*

SIT tertio A, minor, quam C; Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B; Vt autem A, ad B, ita E, ad F: minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B.

8. *quinti.*

Quoniam

Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione vt C, ad B, Ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F; quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



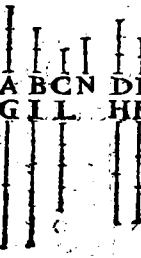
10. *quinti.*

THEOR. 22. PROPOS. 22.

22.

SI sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Sint quotcunq; magnitudines A, B, C, & aliæ totidem D, E, F, sitq; A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F; Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; erit quoq; G, multiplex primæ ad I, multiplicem secundæ, vt H, multiplex tertiæ ad K, multiplicem quartæ. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; erit I, multiplex primæ ad L, multiplicem secundæ, vt K, multiplex tertiæ ad M, multiplicem quartæ.



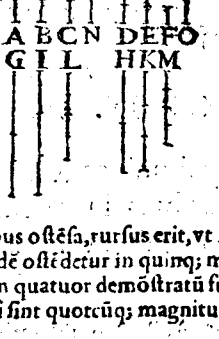
4. *quinti.*

Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur, sit vt si G, superat ipsam L, superet quoque H, ipsam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaq; cum G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiāt vna ab L, M, æquemultiplicibus secūdæ C, & quartæ F, vel vna æqua-

20. *quinti.*

les sint, vel vna excedat, in quacunq; multiplicatione; Erit A, prima ad C, secundã vt D, tertia ad F, quartã. qđ est ꝓpositũ.

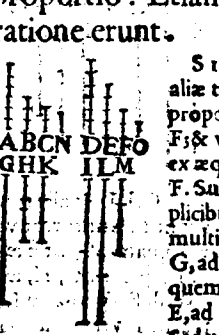
6. defin. 5.



Quod si fuerint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiã C, ad N, vt F, ad O; Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cũ. n. iã sit ostẽsum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur, ut sit C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadẽ fõne sumũtur: ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostẽsa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodẽq; modo idẽ ostẽdetur in quinq; magnitudinib⁹, per quatuor; sicut id in quatuor demõstratũ fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaq; si sint quotcũq; magnitudines, &c. Quod erat ostendẽdũ.

23. THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæq; ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earũ proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoq; ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis. n. ipsarũ A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Itẽ ipsarũ C, E, F, æquemultiplicib⁹ K, L, M; Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarũ A, B, æquemultiplices; At vt A, ad B, ita est E, ad F; Igitur vt G, ad H, ita est E, ad F; Sed vt E, ad F, ita est quoq; L, ad M, qđ

15. quinti.

11. quinti.

15. quinti.

L, M,

L, M, sint ipsarũ E, F, æquemultiplices. Igitur erit vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secũdã, ut D, tertia ad E, quartã, & itaquoq; ut H, multiplex primæ ad K, multiplex secundæ, ita I, multiplex tertiæ ad L, multiplicem quartæ. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadẽ rõne sumũtur, estq; earũ proportio perturbata; fit ut si G, superat ipsã K, superet quoq; I, ipsam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaq; cũ G, I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, a K, & M, æquemultiplicibus secũdæ C, & quartæ F, uel una deficiant, uel una æqualia sint, uel una excedant; erit ut A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. 11. quinti. 21. quinti. 6. def. 5.

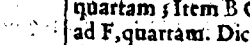
Quod si fuerint plures magnitudines tribus, fuerit q; earum proportio perturbata, ut si fuerit A, ad B, ut F, ad O; & B, ad C, ut E, ad F; & C, ad N, ut D, ad E. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, ut D, ad E; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quę binæ in eadem sumuntur proportione, estq; perturbata earum proportio: Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 24. PROPOS. 24. 24.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

SIT A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniã igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H; erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H: componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rursus sit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

4. *quinti*.



22. *quinti*.
18. *quinti*.
22. *quinti*.

SCHOLION.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theorema sextum huius lib. demonstrauit in æquemultiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

Si duę magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionẽ, & detractæ quędam habeant ad easdem eandẽ proportionẽ: & reliquæ ad easdem eandẽ proportionẽ habebũt.

HABEANT AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item detracta AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem, ita vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F; Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F; erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad F; & C, ad AB, vt F, ad DE; erit ex æqualitate AG, ad AB, vt DH, ad DE. Diuidendo ergo erit vt BG, ad AB, ita EH, ad DE,

4. *quinti*.
22. *quinti*.
17. *quinti*.

Itaque

Itaque cum rursus sit B G, ad A B, vt E H, ad D F; & A B, ad C, vt D E, ad F; erit ex æquali B G, ad C, vt E H, ad F. 22. *quinti.*
Quod est propositum.

THEOR. 25. PROPOS. 25. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT A B, ad C D, vt E, ad F, sitq; A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, simul esse maiores duabus C D, & E, simul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, æqualis ipsi E; & ex C D, alia C H, æqualis ipsi F; Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc est, vt A B, ad C D. Quare cum sit tota A B, ad totam C D, vt ablata A G, ad ablatam C H; erit quoq; vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D. Est autem A B, (cum sit omnium maxima) maior, quam C D: Igitur & G B, maior erit quam H D. Quoniam vero A G, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & C H; fient A G, & F, simul æquales ipsis E, & C H, simul. Additis igitur inæqualibus G B, & H D, fient A B, & F, simul maiores quam E, & C D, simul, cum G B, sit maior quam H D. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A G B E
C H D F

19. *quinti.*

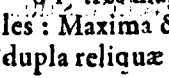
SCHOLION.

NECESSE est autem, *si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam*, ceu in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt A B, ad C D, ita E, ad F; & A B, maior quam E; erit quoq; C D, maior quam F. Item quia maior est A B, quam C D, erit quoque E, maior quam F. Quod si a contrario

14. *quinti.*

antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neq; ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



Sit vt A, ad B, ita B, ad C. Sitq; A maxima, & C minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt quam E, & D, simul, vt proxime demonstratum est, hoc est, quã dupla ipsius B. Quod est propositũ.

Hic finem Euclides imponit quinto libro; Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, quasi fieri potest, breuitate demonstrare, nec non in numerum, ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autẽ traduntur de magnitudinib⁹ improportionalibus, quarum prima hæc est.

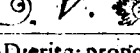
26. THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartã: habebit cõuertẽdo secũda ad primã minorẽ proportionẽ, quã quarta ad tertiam.

HABEAT A, ad B, maiorẽ proportionẽ, quã C, ad D. Dico proportionẽ B, ad A, minorẽ esse proportione D, ad C.

Intel-

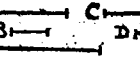
Intelligatur.n.esse E, ad B, vt C, ad D; eritq; proportio A, ad B, maior quoq; quã E, ad B; ac propterea A, maior erit quã E; Quare minor erit proportio B, ad A, maiorẽ quã B, ad E, minorẽ; Sed ut est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C; quod est propositum. 10. quinti. 8. quinti. 4. quinti.



SCHOLION.

Eodem fere modo demonstrabimꝰ, si prima ad secundã habuerit minorẽ proportionẽ; quã tertia ad quartam, cõuertendo maiorẽ esse proportionẽ secũde ad primã, quã quartæ ad tertiã; dũmodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contra.

Sit enim minor proportio A, ad B, quã C, ad D. Dico conuertendo, B, ad A, maiorẽ habere proportionẽ, quã D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, etiã minor, quã E, ad B; ac propterea A, minor erit, quã E. Quare maior erit proportio B, ad A, minorẽ, quã B, ad E, maiorẽ. Sed vt B, ad E, ita est cõuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum. 10. quinti. 8. quinti.



THEOR. 27. PROPOS. 27.

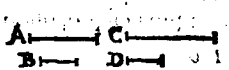
SI prima ad secundam habuerit maiorẽ proportionẽ, quã tertia ad quartam: Habebit quoq; vicissim prima ad tertiã maiorẽ proportionẽ, quã secunda ad quartam. 27.

Habeat A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorẽ esse quoque proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur nãq; esse E, ad B, ut C, ad D, eritq; proportio A, ad B, maior etiam quã E, ad B; Ideoq; A, maior erit quam E. Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C: Quoniam vero permutando, est vt E, ad C, 10. quinti. 8. quinti.



16. quinti. ad C, ita B, ad D; (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D, quod est propositum.

SCHOLION.



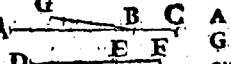
SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quã tertia ad quartam, vicissim primam ad tertiã minorẽ esse proportionẽ, quã secundam ad quartã.

SIT namq; minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Erit q; proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; Ac propterea A, minor erit, quam E. Quare minor erit proportio A, ad C, quã E, ad C. Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quam B, ad D. Quod est propositum.

28. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem esse proportionem A C, ad B C, quam D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F; eritq; proportio A B, ad B C, maior quoque, quam G B, ad B C; Ideoq; A B, maiori quam G B. Addita ergo communi B C,

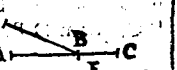


10. quinti.

BC, fiet AC, maior quam GC; maiorq; proptereà erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC; Sed componendo, ut est GC, ad BC, ita est DF, ad EF; (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF,) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF, quod est propositum. 8. quinti. 18. quinti.

SCHOLION.

EADEM ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem prima & secundæ simul, ad secundam, quam tertiæ & quartæ simul, ad quartam.

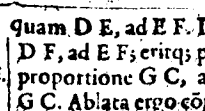


SIT minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quã DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DF, ad EF; erit q; proportio AB, ad BC, minor quoque quam GB, ad BC; ideoq; AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC, fiet AC, minor, quam GC; minorq; proptereà erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. quod est propositum. 10. quinti. 8. quinti.

THEOR. 29. PROPOS. 29. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cũ quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

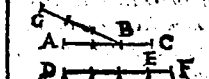
SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionẽ AB, ad BC, quam

quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, ut D F, ad E F; eritq; proportio A C, ad B C, maior quoque
10. *quinti.* proportione G C, ad B C; ideoq; maior erit A C, quam G C. Ablata ergo cõmuni B C, maior erit A B, quam G B;
8. *quinti.* Ac propterea maior erit proportio A B,
17. *quinti* 

ad B C, quam G B, ad B C; sed diuidendo, vt est G B, ad B C, ita est D E, ad E F; (Posita namq; est G C, ad B C, ut D F, ad E F,) Igitur maior quoq; erit proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F, quod est propositum.

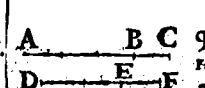
SCHOLION.

QVOD *si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cũ quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartã: vt eodem modo potest ostendi, si modo vocem maioris vbiq; mutes in vocem minoris, & contra, cum in præcedentibus factum est.*



30. THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad se cũdam habuerit maiorem proportionem, quam cõposita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

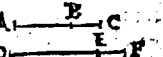


29. *quinti.* SIT maior proportio A C, ad B C, quã D F, ad E F. Dico per conuersionẽ rationis, minorẽ esse proportionẽ A C, ad A B, quã D F, ad D E. Cum enim sit A C,

A C, ad B C, maior proportio, quam D F, ad E F; erit & diuidendo maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quare conuertendo minor erit proportio B C, ad A B, quam E F, ad D E; Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad A B, quam totius D F, ad D E. Quod est propositum. 29. quinti. 26. quinti. 28. quinti.

SCHOLION.

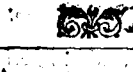
NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ & secundæ ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam: dummodo vbique pro voce maioris reponamus vocem minoris.



THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiã, quam primæ posteriorum ad tertiã.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam D, ad E; Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut E, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C; Ideoq; B, maior quã G. Quare maior erit pro- 10. quinti.

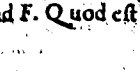


proportio A, ad G, minorem quam A, ad B, maiorem; Ponitur autē proportio A, ad B, maior quam D, ad E: Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; Idq; A, maior erit, quam H. Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandem C; Atqui vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F: (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) maior ergo proportio quoq; est A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

8. *quinti.*

22. *quinti.*

SCHOLION.



EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad F; At B, ad C, maior quam F, ad F: Vel contra, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F, ceu in proposita figura cernere licet.

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem.

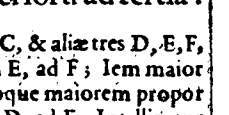
QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus.

32. THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ poste-

posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoq; ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorū ad tertiā.

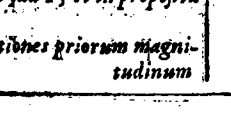
SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quam E, ad F; Iem maior B, ad C, quam D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C; Ideoq; maior erit B, quam G. Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quam eiusdem A, ad B, maiorem: est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritq; propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; ideoq; maior erit A, quam H. Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionē, quam H, minor ad eandem C: At vt H, ad C, ita est ex æqualitate D ad F, (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & vt E, ad F, ita est H, ad G,) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.



10. *quinti.*
8. *quinti.*
10. *quinti.*
8. *quinti.*
23. *quinti.*

SCHOLION.

EADEM *ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F; At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel cōtra, si proportio A, ad B, maior quam E, ad F; At B, ad C, eadem, quæ D, ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F; vt in proposita figura perspicitur.*



HAVD *secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum*

pudinũ minores fuerint, etiã extremarũ pportionẽ esse minore.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque vel minorem esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimã, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c.

33. THEOR. 33. PROPOS. 33.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT maior proportio totius A B, ad totam C D, quã ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B ad reliquam F D, maiorem esse, quam totius A B, ad totam C D. Cum enim maior sit proportio A B, ad C D, quam A E, ad C F, erit quoque permutando maior proportio A B, ad A E, quã C D, ad C F; ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quã C D, ad F D. Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quam E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquam F D, maiorem habebit proportionem, quam tota A B, ad totam C D, quod est propositum.

27. quinti.

30. quinti.

27. quinti.

QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quam tota ad totam, ut ex modo demonstrandi liquet.

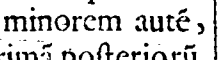
34. THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitq; maior proportio primæ priorum ad primam posteriorũ,

quam

quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum; Item maiorem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autē, quam prima priorum ad primā posteriorū.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres, D, E, F; Sit aūt maior proportio A, ad D, quā B, ad E; Itē maior B, ad E, quā C, ad F. Dico ꝓportionē ipsarū A, B C, simul, ad ipsas D, E, F, simul maiorē esse proportione C, ad F, & proportione ipsarū B, C, simul, ad ipsas E, F, simul, minorē vero proportione A, ad D. Cū. n. maior sit proportio A, ad D, quā B, ad E; erit permutando maior A, ad B, quā D, ad E. Igitur cōponēdo maior erit proportio ipsarū A, B, simul ad B, quā ipsarū, D, E, simul ad E: ꝓmutādo ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul quā B, ad E. Itaq; cū tota A, B, ad totā D, E, maiorē habeat ꝓportionē, quā ablata B, ad ablatā E, habebit quoq; reliqua A, ad reliquā D, maiorem ꝓportionē, quā tota A, B, ad totā D, E. Eadē rōne, maior erit ꝓportio B, ad E, quā totius B, C, ad totā E, F. Multo ergo maior erit ꝓportio A, ad D, quā B, C, totius ad totā E, F. Permutādo igitur, maior erit ꝓportio A, ad B, C, quā D, ad E, F; & cōponēdo ergo maior est ꝓportio totius A, B, C, ad B, C, quā totius D, E, F, ad E, F; & rursus ꝓmutādo maior ꝓportio oīum A, B, C, simul ad oēs D, E, F, simul, quā B, C, ad E, F; qđ est secūdū. Itaq; cū sit maior ꝓportio totius A, B, C, ad totā D, E, F, quā ablatæ B, C, ad ablatā E, F; erit & maior ꝓportio reliquæ A, ad reliquā D, quā totius A, B, C, ad totā D, E, F. qđ est tertiū. Quoniam uero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; erit permutando maior quoque



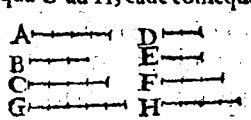
7. quinti.
28. quinti.
27. quinti.
33. quinti.
27. quinti.
28. quinti.
27. quinti.
33. quinti.
7. quinti.

quoque B,ad C,quam E, ad F; & componendo maior totius B C,ad C, quam totius E,F, ad F; & rursus permutando maior B C;ad E,F,quam C,ad F. Est autem maior proportio A,B,C,ad D,E,F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F. Multo ergo maior erit proportio omniū A,B,C, ad omnes D,E,F quam vltimæ C,ad vltimā F; quod est primū.

28. *quinti.*
27. *quinti.*

Quod si fuerint quatuor magnitudines vtrobiq; cū ea dē hypothesi, hoc est, si sit quoq; maior proportio C,ad F, quā G ad H; eadē consequentur. Vt.n. iam in tribus est ostensum, maior est proportio B,ad E, quā B,C,G,ad E, F,H. Multo ergo maior erit A,ad D, quam B,C,G,ad E, F, H. Permutādo ergo, maior erit A, ad B,C,G, quam D,ad E; F, H; & componendo maior A, B, C,G,ad B,C,G, quam D,E,F,H,ad E,F,H; & permutādo A,B C,G,ad D,E,F,H, maior quā B,C,G,ad E,F,H, quod est secundum. Itaq; cum sit maior proportio totius A, B, C,G,ad totam D,E,F,H, quam ablatæ B,C,G, ad ablatam E,F,H; erit & reliquæ A,ad reliquam D, maior proportio, quam totius A,B,C,G,ad totam D,E, F, H; quod est tertium. Quoniam vero vt in tribus est demonstratū, maior est proportio B C,G,ad E F,H, quam G, ad H; & maior A,B,C,G, ad D,E,F,H, quam B,C,G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A,B,C,G, ad D,E, F,H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est primum. Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinq;, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. constat ergo totum Theorema, &c.

18. *quinti.*
27. *quinti.*
33. *quinti.*



FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VI.

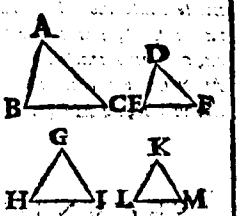
DEFINITIONES.

I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habẽt, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula ABC, DEF, similia dicentur, si fuerint æquiangula, ita ut angulus A, angulo D; & B, ipsi E; & C, ipsi F, æqualis sit; Itẽ latera circa æqua les angulos proportionalia, hoc est, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF; & ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, & ut AC, ad CB, ita DF, ad FE.

QVOD si anguli unius æqua. les fuerint angulis alterius, singuli singulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contra; non dicentur tales figuræ simiiles. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas et æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quamuis inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim æqualitatem

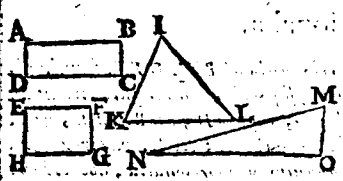


tarum, erit G H, ad G I, ut K L, ad K M; Item G H, ad H I, ut K L, ad L M; & G I, & I H, ut K M, ad M L, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de aliis id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.

II.

RECIPROCÆ autem figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

Vt si in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, ut utrobique sit & antecedens, & consequens, diuersarum proportionum, hoc est, ut sit ea proportio A B, ad E F, quæ F G, ad B C; seu A B, ad F G, ut E F, ad B C; (utroque enim modo A B, est antecedens vnius proportionis & B C, consequens alterius, in figura A B C D; quemadmodum & primo modo E F, est consequens vnius, & F G, antecedens alterius; uel secundo modo F G, consequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similium enim triangula I K L, M N O; reciproca, si fueris ut I K, ad M N, ita M O, ad I L; uel ut I K, ad M O, ita M N, ad I L.

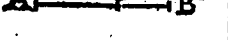


III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum

cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

Si linea recta quæuis A B, *ita diuidatur in* C, *inæqualiter, ut sit, quemadmodum tota* A B, *ad maius segmentum* AC, *ita* A C, *maius segmentum ad* CB, *minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebis Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub alijs uerbis iam docuit lib. 2. propos. 11. ut fies perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque utilitates lineæ hoc modo diuisæ, ceu ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. ut non immmerito a quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea est diuisa.*



IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a uertice ad basin deducta.

Si a uertice A, trianguli A B C, *ad basin* B C, *perpendicularis ducatur* A G; *dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli* A B C; *ita ut tantam dicatur habere altitudinem dictum triangulum, quanta est perpendicularis* A G. *Sic etiam perpendicularis* D H, *ducta a* D, *uertice trianguli* D E F, *ad basin* E F, *ad partes* E, *protractam, appellabitur altitudo trianguli* D E F. *Vnde si duarum figurarum perpendiculares a uerticibus ad bases, (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem dictæ perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac uertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares* A G, D H, *triangulorum* A B C, D E F, *in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli* A G H, D H G,



interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo
28. primi. *recti; erunt rectæ A G, D H, parallelæ; sunt autem & A D, G H, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G;*



34. primi. *ac propterea latera oppositi A G, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicetur dicta triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero A B, & D E; non habebunt eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin D E, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin A B, deductæ, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.*

RECTE *vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente simplicio, in libro de dimensione, mensuræ cuiuscunque rei debet esse recta, determinataque & non indefinita: Inter oës autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataque. Quæ de re plura scripsimus ad initium cõmentariorum, quos in sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.*

V.

RATIO ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM *denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4 ostendit, in quauis proportione quadruplà antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero propotionis*

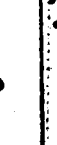
subqua-

subquadruplæ videlicet $\frac{1}{4}$, indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vulgitus in hac definitione Euclidis, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis, quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ & sextuplæ; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producuntur eadem 12. denominator scilicet duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quincuplæ. Nam harũ denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuo proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. cum illæ ex his medijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, ceu in quinto libro defin. 10. exposuimus: ita ut si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam, duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiã in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam, consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primo, inductione quadam Theonis Alexandrini, quã hoc in loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonstrationibus, quarum una traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11.

altera autem ex Vitellione lib. 1. propos. 13. sua perspectiuæ, comprobabimus.

THEON *igitur rem propositam ita conatur absoluere. Habeat* A B, *ad* C D, *rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & eandem quoque datam. Dico quod ipsius* A B, *ad* E F, *ratio constat ex* A B, *ad* C D; *& ex* C D, *ad* E F; *uel quod ipsius* A B, *ad* C D, *rationis quantitas multiplicata in ipsius* C D, *ad* E F, *rationis quantitatem, efficit ipsius* A B, *ad* E F, *rationis quantitatem. Sit enim primum* A B, *quam* C D, *maior; &* C D, *quam* E F: *& sit quidem* A B, *ipsius* C D, *dupla, &* C D, *ipsius* E F, *tripla. Quoniam igitur* C D, *ipsius* E F, *tripla est, ipsius autem* C D, *dupla est* A B; *erit* A B, *ipsius* E F, *sexcupla. Quoniam si triplum alicuius duplicamus, fit sexcuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam* A B, *dupla est ipsius* C D, *dividatur* A B, *in ipsi* C D, *æqualia, hoc est,* A G; *&* G B: *& quoniam* C D, *ipsius* E F, *tripla est; æqualis autem est* A G, *ipsi* C D; *&* A G, *igitur ipsius* E F, *triplus est: Id propterea &* G B, *ipsius* E F, *triplus est. Tota igitur* A B, *ipsius* E F, *sexcupla est. Ipsius igitur* A B; *&* E F, *ratio connectitur per* C D, *medium limitem, compositus ex ipsius* A B, *ad* C D; *&* C D, *ad* E F, *ratione.*



SIMILITER *autem, & si minor fuerit* C D, *utraque ipsarum* A B, *&* E F, *idipsum colligitur. Sit enim rursus* A B, *ipsius* C D, *tripla; At* C D, *ipsius* E F, *sit dimidia. Et quoniam* C D, *ipsius* E F, *dimidia est; Ipsius autem* C D, *tripla est* A B; *erit* A B, *sesquialtera ipsius* E F. *Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebis ipsum semel, & dimidium. At quoniam* A B, *ipsius* C D, *tripla est; &* C D, *ipsius* E F, *dimidia: qualium* A B, *æqualium ipsi* C D, *trium, talium est* E F, *duorum. Quare sesquialterum est* A B, *ipsius* E F. *Igitur ratio ipsius* A B, *ad* E F, *connectitur per* C D, *medium limitem, compositus ex ipsius* A B, *ad* C D; *&* C D, *ad* E F, *ratione.*



SED *iam rursus sit* C D, *utraque ipsarum* A B, *&* E F,

maior

maior; & sit quidem A B, ipsius C D, dimidium, & C D, ipsius E F, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est A B, duorum, talium est C D, quatuor; qualium autem C D, quatuor, talium E F, trium. Et qualium igitur A B, duorum, talium E F, trium. Componetur igitur rursus ratio ipsius A B, ad E F, per C D, medium limitem, qua duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus; & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si ex composita ratione quevis una compositarum auferatur, vno simplicium ejecto, reliqua compositarum assumetur.



Hæc ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII *vero demonstratio ita se habet.*

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facile demonstrabitur, assumpto prius hoc principio; Quantitatem, seu denominatorem cuiuscuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcirco 3. multiplicata in 4. producunt 12, &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D; proportionis vero B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B; producatur quoque G, ex multiplicatione F, in C. Ostendendum ergo est G, aqualem esse ipsi A; atq; adeo ex multiplicatione F, in C, produci A. Quoniam F, & E, multiplicantes C, produ-



8. septimi
7. septimi

cunti G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, ut dictum est,) erit ut F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; erit ut E, ad B, ita F, ad A; & permutando ut E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, ut F, ad E, ita A, ad B. Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur ut A, ad B, ita G, ad B; Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; propterea quæ F, quantitas erit proportionis A, ad C; quod est propositum.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimam componitur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C; & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; et B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Euclidis. Denominatorem uidelicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominatpr proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod



ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) erit ut F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. quod est propositum. Hæc Vitellio. 19. septimi

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, ut prius ex Eutocio.

ITAQVE *cum proportio extremorum componatur ex proportionibus intermedijs, ceu demonstratum fuit; nihil aliud colligendum erit, quando proportio aliqua ex duabus proportionibus dicetur esse composita, quam eam proportionem eandem esse, quæ illa, quam habet prima aliqua quantitas ad tertiam, si modo tres quantitates ita coordinentur, ut proportio primæ ad secundam sit eadem, quæ altera componentium, & proportio secundæ ad tertiam eadem, quæ reliqua componentium. Vt, quãdo dicitur proportio 16. ad 12. composita esse ex proportionibus 8. ad 3. & 2. ad 4. nihil aliud est intelligendum, quam si enumentur tres quilibet numeri 24. 9. 18. secundum proportionẽ 8. ad 3. & 2. ad 4. (est enim ut 8. ad 3. ita 24. ad 9. & ut 2. ad 4. ita 9. ad 18.) eam esse proportionem 16. ad 12. quam habent 24. ad 18. Vt manifestum erit propos. 23 huius lib.*

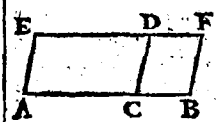
QVINQVE *autem prædictis definitionibus Euclidis addendam esse censemus sequentem sextam, quæ multum conducet, ut rectè intelligantur 27, 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quamplurimæ aliæ decimi libri. Ea autem est eiusmodi.*

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatũ, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere uero, quando occupat maiorem lineam, quã

sit ea, secundum quam applicatur.

Sit data recta linea A B, supra quam constituatur parallelogrammum A C D E, quod non occupet totam lineam A B, sed desit C B; & ducta B F, parallela ipsi C D, donec cum E D, protracta conueniat in F, complea tur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrãmum igitur A D, applicatum secundum rectam A B, deficere dicitur parallelogrammo D B, ita ut D B, appelletur defectus.



Rursvs sit data recta linea A C, supra quam constituatur parallelogrammum A B F E, quod habeat latus A B, maius recta data A C; & ducatur C D, ipsi B F, parallela. Parallelogrammum igitur A F, applicatum secundum rectam A C, excedere dicitur parallelogrammo D B, ita vt D B, uocetur excessus.

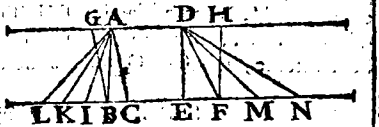
Hic autem defectus D B, uel excessus, in rectangulis quidem esse potest uel quadratum, uel altera parte longior figura: In non rectangulis autem, uel Rhombus, uel Rhombo ides, ut perspicuum est.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases.

Sint duo triangula A B C, D E F, quorum bases B C, E F, habentia eandem altitudinem. Item duo parallelogramma C G, E H, eiusdem altitudinis, quorum eædem bases B C, E F. Dico ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H, ut est basis B C, ad basin E F. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogramma inter easdem parallelas G H, L N. (Nam ut in defin. 4. dictum

ctum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares a uerticibus ad bases demissæ æquales erunt) & ex B L, sumantur quotcunque rectæ B I, I K, K L ipsi B C, æquales; Item ex F N, abscindantur quotcunque rectæ F M, M N, æquales rectæ E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ A I, A K, A L, D M, D N. Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, A L K, super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula D E F, D F M, D M N. Quam multiplex est igitur recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quam multiplex est recta E N, rectæ E F, tam quoque, multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F; quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas æquales sectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N; Quoniam uero si basis C L, æqualis fuerit basi E N, necessario triangulum A C L, æquale est triangulo D E N; & si C L, maior fuerit quam E N, necessario A C L, maius est quam D E N; & si minor, minus; deficient propterea una C I, recta, & triangulum A C L, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ A B C, ab E N, recta, & triangulo D E N, æque multiplicibus secundæ E F, & quartæ D E F; uel una æqualia erunt, uel una excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Quare quæ proportio est primæ B C, ad secundã E F, basis ad basin, ea est tertiæ A B C, ad quartã D E F, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita triãgulum ad triangulum. quod est propositum.



38. primi

38. primi

6. defin. 5.

QVONIAM autem ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita parallelogrammum C G, (quod duplũ est trianguli A B C, per 34. propositionem primi.) ad parallelogrammum E H (quod est duplũ trianguli D E F) perspicuũ est, ita quoq; esse parallelogrammum ad parallelogrammum

15. quinti.

11. quinti.

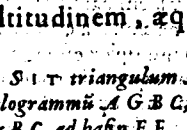
mum, ut est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo usi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G; nec non ex punctis M, N, parallelæ, ipsi F H. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, ut bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Sed & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, ut bases, eandem habent altitudinem, æqualesue.

Sit triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, ut basis B C, ad basin E F. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares A I, D K, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit A I, si fieri potest, maior, quæ D K. Abscissa igitur I L, ipsi D K, æquali, ductaque L M, ipsi B C, parallela, quæ latus A C, secet in N, coniunctaq; recta B N, erit N B C, triangulum ad triangulum D E F, vt basis B C, ad basin E F; cum altitudines L I, D K, ponantur æquales. Sed fuit etiam A B C, ad D E F, ut B C, ad E F. Igitur triangula N B C, A B C, ad triangulum D E F, eandem habent proportionem; Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines A I, D K, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus, parallelogramma N M B C, A G B C, æqualia esse, si altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.



1. *sexti.*
11. *quinti*
9 *quinti.*

ADDIT hoc in loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quo-

rum,

rum æquales sunt baſes, uel eadem, ita ſe habent inter ſe, ut altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia baſes æquales BC, EF. Dico eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, ut altitudo AI, eſt ad altitudinem DK.



Si enim ſumantur rectæ IL, KM, baſibus BC, EF æquales; ducanturque rectæ LA, MD; erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum ſint ſuper baſes æquales LI, BC, & inter eaſdem parallelas AG, EB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. Quare erit, ut ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM. Eſt autem, ut ALI ad DKM, ita AI, ad DK. (Namſi baſes ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, ut AI, ad DK. Quod eſt propoſitum. 38. primi. 7. quinti. 1. ſexti.

QVONIAM uero eſt, ut ABC, ad DEF, ita parallelogrammum AGBC, triangulus ABC, duplum, ad parallelogrammum DEFH, triangulus DEF, duplum; Erit quoque AGBC, ad DEFH, ut AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur LG, MH. Idem ſequetur, ſi triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſin. 15. quinti. 11. quinti.

HOC uero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, ut altitudines, æquales habent baſes.

SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, ut altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum baſes BC, EF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, ſi fieri poteſt,



test, maior, quam E F. Abscissa igitur B L, ipsi E F, æquali, & ductaq; recta L A; erit, ut proxime demonstrauimus, A B L, ad DEF, ut A I, ad D K: Sed ut A I, ad D K, ita ponitur esse ABC, ad DEF. Igitur A B L, A B C, ad DEF, eandem habent proportionem; Ac proinde inter se æqualia sunt; pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales: Eademque est ratio de parallelogrammis. Similiter enim argumentu, ducta L M, ipsi G B, parallela, ostendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, æqualia esse, si bases BC, E F, dicantur inæquales.

11. quinti.

et 9. quinti.



IN omnibus autem his non uariabitur demonstratio, etiam si triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita ut altitudines sint ipsorum latera, nec unum fuerit rectangulum, alterum uero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget quandoque constructione.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

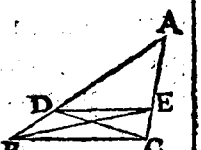
SI ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse ut A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E, erunt triangula D E B, D E C, super eandem basin D E, & inter easdem parallelas D E,

37. primi

B C,

B C, constituta, inter se æqualia. Quare ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C; Æqui ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita basis A D, ad basin D B, (cum hæc triangula sint eiusdem altitudinis, ut constat, si per E, agatur parallela recta ipsi A B;) & eadem ratione, ut triangulum A E D, ad triangulum D E C, ita basis A E, ad basin E C. Vt igitur A D, ad D B, ita A E, ad E C. (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli A D E, ad triangulum D E B, uel trianguli A E D, ad triangulum D E C.) quod est propositum.



7. quinti.

1. sexti.

11. quinti.

Secet iam recta D E, latera A B, A C, proportionaliter. Dico D E, parallelam esse reliquo lateri B C. Ductis enim rursus rectis C D, B E, erit ut basis A D, ad basin D B, ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem ut A D, ad D B, ita A E, ad E C; igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita A E ad E C. Sed rursus ut basis A E, ad basin E C, ita triangulum A E D, ad triangulum D E C, cum sint altitudinis eiusdem. Igitur ut triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita triangulum idem A E D, ad triangulum D E C. Aequalia ergo sunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea cum eandem habeant basin D E, inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est D E, ipsi B C; quod est propositum. Si itaq; ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

1. sexti.

11. quinti

1. sexti.

11. quinti

9. quinti.

39. primi

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

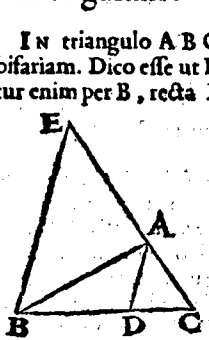
SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt

rationem

rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a uertice ad sectionē producitur, ea bifariam secat trianguli ipsius angulum.

IN triangulo A B C, recta A D, secet angulum B A C, bifariam. Dico esse ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipsi A D, donec cum C A, producta, conueniat in E; eritque angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cum igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erunt & anguli E B A, & E, inter se æquales; Ideoque rectæ B A, E A, inter se æquales. Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandem A C; Atqui ut E A, ad A C, ita B D, ad D C, cū in triangulo B C E, recta A D, sit parallela lateri B E; Igitur ut B A, ad A C, ita B D, ad D C, quod est propositum.

29. primi



6. primi. 7. quinti

2. sexti. 11. quinti

SIT iam ut B A, ad A C, ita B D, ad D C. Dico rectā A D, bifariam secare angulum B A C. Agatur enim rursus per B, recta B E, ipsi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam igitur ut B A, ad A C, ita ponitur B D, ad D C; ut autem B D, ad D C, ita est E A, ad A C; (quod in triangulo B C E, recta A D, sit lateri B E, parallela) Erit ut B A, ad A C, ita E A, ad eandem A C. Aequales igitur sunt B A, & E A, inter se; ac propterea anguli A B E, & E, æquales erunt. Cum igitur angulus A B E, æqualis sit alterno B A D; & angulus E, externo D A C; erunt & duo anguli B A D, D A C, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

2. sexti

11. quinti 9. quinti. 29. primi.

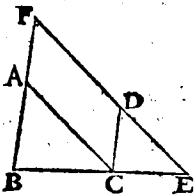
THEOR.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

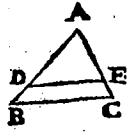
SINT æquiangula triangula A B C, D C E, sintq; æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico esse A B, ad B C, ut D C, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D; & A B, denique ad A C, ut D C, ad D E; Ita enim latera circa æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera B C, C E, secundum lineam rectam, ita ut angulus D C E, externus sit æqualis interno A B C; pariterque externus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B, minores sunt duobus rectis; est autē angulo A C B, æqualis angulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. Quare rectæ B A, & E D, productæ ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniā uero angulus externus D C E, æqualis est interno opposito A B C; parallelæ erunt C D, & B F. Eadem ratione, parallelæ erunt C A, & E F, quod angulus externus A C B, sit æqualis interno D E C. Parallelogrāmum est igitur A C D F; propterea que recta A F, æqualis rectæ C D; & recta C A, rectæ D F. Quoniam igitur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F, erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æqualis est ipsi A F,) ut B C, ad C E. permutando igitur erit A B, ad B C, ut D C, ad C E. Rursus quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri B F, erit B C, ad C E, ut F D, hoc est, ut C A, (quæ



17. primi
11. pron.
28. primi
34. primi
2. sexti.
16. quinti
2. sexti.

16. quinti. æqualis est ipsi F D) ad E D. permutando igitur erit B C, ad C A, ut C E, ad E D. Cum igitur sit A B, ad BC, ut DC, ad C E; & B C, ad C A, ut C E, ad E D: erit & ex æquali
22. quinti. A B, ad CA, ut D C, ad E D. quod est propositum. Æquiangulorũ ergo triangulorũ proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.



HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur uni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico triangulum A D E, toti triangulo A B C, esse simile. Aequiangula namque sunt, cum anguli A D E,
29. primi A E D, æquales sint angulis A B C, A C B, externi internis; & angulus A, communis. Quare ut
4. sexti. demonstratum est, habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

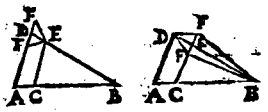
SCHOLION.

NON *alienum a nostro instituto esse putani, si hic demõstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs quæ uehuntur in aqua; Secundum uero in commentarijs in Apollonij Conicą. Horum primum est.*

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum uero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita ut proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum unius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremum alterius lineæ.

SIT recta A B, & ex punctis A, *&* C, *educantur duæ parallelæ* A D, C E, *proportionem habentes, quam* A B, B C, *ita ut sit* A D, *ad* C E, *sicut* A B, *ad* B C, *uel* C E, *ad* A D.

vt B C, *ad* A B. *Dico rectam, quæ coniungit extrema* B, *&* E, *transire per punctum* D. *Item rectam, quæ coniungit extrema* B, *&* D, *transire per punctum* E. *Si enim recta* B E, *nõ transit per* D, *coeat cum* A D, *in* F, *puncto, quod sit vel supra* D, *vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula* B A F, B C E, *similia sunt; erit, vt* A B, *ad* A F, *ita* B C, *ad* C E; 4. *sexti.* *Et permutando, vt* A B, *ad* B C, *ita* A F, *ad* C E: *Vt autem* A B, *ad* B C, *ita erat quoque* A D, *ad* C E; *Igitur erit, vt* A F, *ad* C E, *ita* A D, *ad* C E: *Ac propterea æquales erunt rectæ* A F, A D, *pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta* B E, *per punctum* D. *Quod est primum.* 16. *quinti.* 11. *quinti* 9. *quinti*

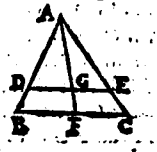


RVRSVS *si recta* B D, *non transit per* E, *transeat per* F, *punctum, quod sit vel supra* E, *vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo, per dictum coroll. triangula* B A D, B C E, *similia sunt; erit, vt* A B, *ad* A D, *ita* B C, *ad* C F; *&* 4. *sexti.* *permutando, vt* A B, *ad* B C, *ita* A D, *ad* C F: *Vt autem* A B, 16. *quinti.* *ad* B C, *ita quoque erat* A D, *ad* C E; *Igitur erit, vt* A D, 11. *quinti.* *ad* C F, *ita* A D, *ad* C E: *Ac proinde æquales erunt recta* 9. *quinti.* C F, C E, *pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta* B D, *per* E. *Quod est secundum.*

Secundum uero est.

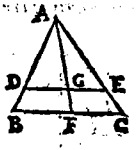
SI in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus dictum, in eadem rationes.

IN *triangulo* A B C, *ducta sit* D E, *lateri* B C, *parallela, & ex puncto* F, *quocunque ad angulum* A, *recta extendatur* F A, *secans* D E, *in* G. *Dico esse, vt* B F, *ad* F C, *ita* D G, *ad* G E. *Quoniam triangula* A F B, A G D, *ex coroll. huius propos. similia sunt; erit vt* A F, *ad* B F, *ita* A G, *ad* D G; *&* *permu-* 4. *sexti.*



16. quinti. sando, ut A F, ad A G, ita B F, ad D G. Atque eodem argumento concludemus esse, ut A F, ad A G, ita F C, ad G E. Igitur erit, ut B F, ad D G, ita F C, ad G E; & permutando, ut B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod est propositum.

11. quinti.



ALITER. Quoniã triangula A B F, A D G, similia sunt, necnon triangula A F C, A G E, per coroll. huius propos. erit, ut B F, ad F A, ita D G, ad G A: Item ut F A, ad F C, ita G A, ad G E. Ex æquo igitur, ut B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod erat demonstrandum.

4. sexti.

5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

HABEANT triangula A B C, D E F, latera proportionalia, sitque A B, ad B C, ut D E, ad E F; & B C, ad C A, ut E F, ad F D; & A B, denique ad A C, ut D E, ad D F. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F; sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C; conueniantque rectæ E G, F G, in G; eritq; reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula A B C, G E F. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; Vt autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. Igitur ut G E, ad E F, ita D E, ad E F, eandem: propterea que æquales erunt G E, D E. Rursus, quoniam ut B C, ad C A, ita E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D;

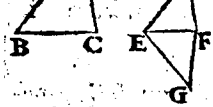
32. primi

4. sexti.

11. quinti.

9. quinti.

4. sexti.

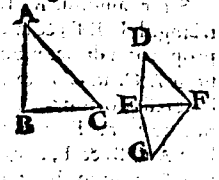


F D; erit ut E F, ad F G, ita eadē E F, ad F D; ideoque æquales erunt F G, F D. Itaque cum latera E G, F G, æqualia sint lateribus D E, D F, utrumque utrique; & basis communis E F, erunt anguli G, & D, æquales; ac propterea reliqui anguli G E F, reliquis angulis D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A, erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemque modo angulus D E F, angulo B; & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat. 9. *quinti.* 8. *primi* 4. *primi*

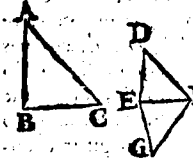
THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

SIT angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc est, sit A B, ad B C, ut D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulū scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, ut in præcedenti propos. dictum est, triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare ut A B, ad B C, ita G E, ad E F; sed ut A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F; igitur ut D E, ad E F, ita G E, ad eandem E F; ac idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cum latera D E, 4. *sexti.* 11. *quinti.* 9. *quinti.*



E F, æqualia sint lateribus G E, E F, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est, æqualis angulus F E G, æqualis est positus angulus D E F, propterea aq; æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F,) erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus E F G, angulo C; erunt etiam anguli A, C, æquales anguli D, E F D; & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F. quod est propositum. Si igitur duo triangula unũ angulum uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.



4. primi

7.

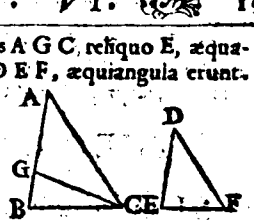
THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum uero simul utrunque aut minorem, aut nõ minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F; & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est, sit ut A C, ad C B, ita D F, ad F E; hac tamen lege, ut quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit uel minor recto, uel non minor. Dico æquiangula esse triangula, angulos scilicet A C B, & F, circa quos sunt latera proportionalia, nec non & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primo tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, non sunt æquales, sit A C B, maior, quam F; fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cum igitur, & angulus A, angulo D,

ponatur

ponatur æqualis, erit & reliquus A G C, reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare ut A C, ad C G, ita D F, ad F E; sed ut D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B: Vt igitur A C, ad C G, ita eadem A C, ad C B; ac propterea æquales erunt C G, C B, & anguli C B G, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoque ei deinceps A G C, recto maior; cum A G C, C G B, sint duobus rectis æquales; Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est angulus E; Sed positus est etiam recto minor: quod est absurdum.



32. primi
4. sexti.
11. quinti.
9. quinti.
5. primi
13. primi

Sit rursus secundo tam B, angulus, quam E, recto non minor, eritque ut prius angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & C G B, recto non minor erit, ac propterea anguli C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed uel maiores, uel æquales duobus rectis, quod est absurdū. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, ac idcirco reliqui etiā anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula unum angulum uni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

17. primi
32. primi

SCHOLION.

Addidit Euclides, utrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse uel minorem recto, uel non minorem. Nam alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, habebunt duo triangula A B C, A G C, unum angulū uni angulo æqualē, immo angulum A, cōmunem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, ut A C, ad C B, ita eadem A C, ad C G, cum æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt ullo modo æquiangula triangula A B C, A G C, ut constat. Quod ideo euenit, quia non uterque angulorum A B C, A G C, minor est recto, uel non minor. Immo A B C, est quidem recto minor, A G C,

7. quinti.

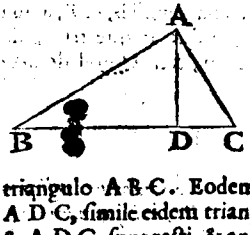
uero recta maior. Cum enim C G, C B, latera æqualia sint, & ideo anguli C B G, C G B, æquales; erit uterque eorum recto minor, ac propterea A G C, recto maior.

5. primi
17. uel 32. primi.

8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit; quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, a quo ad basin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, similia esse & toti triangulo A B C, & inter se. Cum enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, sint recti, & angulus B, communis, erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Æquiangulum est igitur triangulum D B A, triangulo A B C, ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est, erit ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & ut B A, ad A C, ita B D, ad D A; & ut B C, ad C A, ita B A, ad A D. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C; Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, communis; ac propterea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare ut B C, ad C A, ita C A, ad C D; & ut C A, ad A B, ita C D, ad D A; & ut C B, ad B A, ita C A, ad A D. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B, & A D C, cũ anguli A D B, A D C, sint recti, & anguli A B D, C A D, ostensi æquales, nec non anguli B A D, A C D; Atq; idcirco sit ut B D, ad D A, ita D A, ad D C, &c. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.



32. primi
4. sexti.
32. primi
4. sexti.

CORROL-

COROLLARIVM.

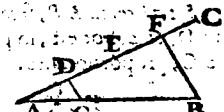
Ex hoc manifestum est, perpendicularē quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item latus utrumlibet angulum rectum ambiens, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod dicto lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse ut B D, ad D A, ita D A, ad D C; ac propterea D A, esse mediam proportionalem inter B D, & D C: Item esse ut C B, ad B A, ita B A, ad B D; & idcirco B A, mediam esse proportionalem inter C B, & B D: Denique esse ut B C, ad C A, ita C A, ad C D; ideoque C A, esse proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod est propositum.

PROBL. 1. PROPOS. 9. 11.

A DATA recta linea imperatum partem auferre.

IMPERETVR, ut ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, utcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex A B, ut in proposito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, esse partem tertiam imperatam.



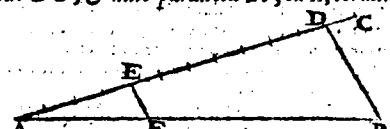
Nam cum in triangulo A B F, lateri F B, parallela sit recta D G; erit ut F D, ad D A, ita B G, ad G A; componendo igitur, ut F A, ad D A, ita B A, ad G A: sed F A, ipsius A D, est tripla ex constructione; Igitur & B A, ipsius A G, erit tripla, ideoque A G, erit tertia pars ipsius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat. 2. *sexti.* 18. *quinti.*

SCHOLION.

QVOD *si ex A B, auferenda sit pars, quæ contineat quatuor undecimas ipsius A B, sumenda erunt ex A C, undecim*

partes

partes æquales usque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partiũ.



Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rursus ut D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare, & conuertendo ut A E, ad A D, ita A F, ad A B: Est autem A E, pars continens quatuor undecimas ipsius A D, ex constructione; Igitur & A F, eadẽ pars erit rectæ A B. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas.

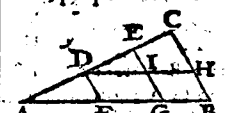
4. *quinti.*

12.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam insectam similiter secare; ut data altera recta secta fuerit.

SIT recta A B, secanda similiter, ut secta est recta A C, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunque B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipsi B C. Deco rectam A B, similiter esse sectam in F, & G, ut est secta A C, in D, & E. Nam ut A D,



2. *sexti.* ad D E, ita A F, ad F G; Proportionales ergo sunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quod si ducatur D H, ipsi

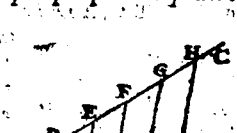
2. *sexti.* F B, parallela, secans E G, in I, erit rursus ut D E, ad E C, ita D I, ad I H, hoc est, ita F G, ad G B; quod F G, ipsi D I,

34. *primi* & G B, ipsi I H, æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, ut data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLION.

Ex hoc problemate colligi potest facilis admodum nia, ac ratio dividendi lineam rectã datam in partes quotcunque æquales; id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus. Sit enim data recta A B, dividenda in quinque partes æquales. Ducta recta A C, faciente cum A B, quemcunque angulũ C A B, sumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, utcunque est divisa, si ex H, ad B, ducatur recta H B, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur D I, E K, F L, G M; erit A B, similiter divisa, ut A H, ceu constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur A H, sit divisa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes divisa. Haud aliter in plures partes æquales dividerur eadem recta A B.



Huic rationi dividendæ linea rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt alia non iniucunda, ceu propos. 10. lib. 1. sumus polliciti. Sit enim rursus data linea recta A B, dividenda in quinque partes æquales. Ducatur ex B, recta B C, utcunque faciens angulum cum A B; Deinde ex assumpto puncto D, agatur D E, parallela ipsi A B, ex qua abscindantur quinque æquales partes D F, F G, G H, H I, I K, ea lege tamen, ut D K, minor sit quam A B. Postremo ex A, per K, recta ducatur A L, occurrens ipsi B C, in L, puncto, a quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur L P, L O, L N, L M, quæ dico dividere rectã A B, in quinque partes æquales. Cum enim D E, sit parallela ipsi A B, erit angulus L I K, angulo L M A, & angulus L K I, angulo L A M, æqualis: est autem angulus A L M, communis; Æquiangula igitur sunt triangula L K I, L A M, ac propterea ut L I, ad I K, ita L M, ad M A; Item eadem ratione, ut L I, ad I H, ita L M, ad M N: sed ut L I,



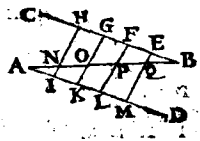
29. primi

4. sexti.

ad

7. quinti. 11. quinti. 9. quinti. ad I K, ita L I, ad I H, quod æquales ſumptæ ſint I K, I H; igitur ut L M, ad M A, ita eadem L M, ad M N; ideoque æquales erunt A M, M N. Non aliter oſtendes M N, æqualē eſſe ipſi N O; & N O, ipſi O P, & O P, ipſi P B. Diuiſa eſt ergo A B, in quinque partes æquales. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ B C, A D, inter ſe parallelæ; Et ex B C, abſcindantur quatuor partes æquales B E, E F, F G, G H, ut ſint tot partes una minus, in quot eſt linea diuidenda; His autem ex A D, totidem æquales reſecentur A I, I K, K L, L M. Ductis igitur rectis E M, F L, G K, H I, ſecantibus rectam A B, in N, O, P, Q; dico ipſam A B, ſectam eſſe in quinque partes æquales.



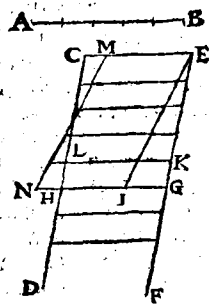
33. primi Cum enim æquales ſint, & parallelæ G H, I K, erunt & H I, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cum A M, ſecta ſit in quatuor æquales partes, erit & A Q, ſimiliter in quatuor partes æquales diuiſa, ut conſtat ex demonſtratione huius 10. propoſ. Eadem ratione diuiſa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quod B H, in totidem eſt partes æquales diuiſa: Quare cum tam A N, quam B Q, æqualis ſit ſingulis partibus N O, O P, P Q; erūt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Præparatur prius inſtrumentum huic rei accommodatum in hunc modum. Ductis duabus rectis inter ſe parallelis utcunque C D, E F; ex utraque abſcindantur partes inter ſe æquales quotcunque, ſaltem tot in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correſpondentia lineis rectis iungantur. Deinde officio circini capiatur longitudo rectæ A B, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ C E, ut ex E, transferatur in inſtrumentum ad punctum I, illius lineæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exemplo eſt recta G H; ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremo ex E, ad I, recta ducatur E I, quā dico diuiſam eſſe in quinque æquales partes. Cum enim G K, H I, æquales ſint, & parallelæ, erunt quoque G H, K I, parallelæ; Eodemque modo omnes lineæ inter rectas C D, E F,

13. primi

inter

inter se parallelæ ostendentur. Quare, ut ex demonstratione huius 10. propos. liquet, quemadmodum E G, diuisa est in quinque partes æquales, ita similiter in totidem diuisa erit E I. Si igitur officio circini singulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propositam A B, ipsi E I, æqualem, diuisa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.



ALIQVANDO autem necesse est lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadē linea transferatur ab M, usque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoque M N, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi E G, parallela, usque ad rectam G H. Quod si linea dividenda fuerit admodum brevis, accipiendæ erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio datam lineam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam. Id enim non raro a Geometris exigitur.

SIT secanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter se, quam rectæ C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta A F, ipsi C, & F G, ipsi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F, parallela F H. Dico A B, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, cum sit, ut A F, ad F G, atque adeo, ut C, ad D, ita A H, ad H B. 2. sexti.



POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, quæ vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones

ctiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.

SECENTVR *rectæ* A B, C D, *proportionaliter in binis punctis* E, F, *&* G, H, *ita ut ſit* A E, *ad* E B, *ſicut* C G, *ad* G D; *Item* A F, *ad* F B, *ut* C H, *ad* H D. *Dico ſectiones inter medias* E F, G H, *proportionales quoque eſſe cum duobus ſegmentis* A E, C G; *uel cum duobus* F B, H D; *hoc eſt, eſſe* A E, *ad* E F, *ut* C G, *ad* G H. *Item* F B, *ad* E F, *ut* H D, *ad* G H. *Cum enim ſit, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* E B, *ita* C D, *ad* G D. *Item cum ſit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D; *Erit componendo, ut* A B, *ad* F B, *ita* C D, *ad* H D; *& conuertendo, ut* F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D. *Itaque cum ſit, ut* F B, *ad* A B, *ita* H D, *ad* C D; *Et ut* A B, *ad* E B, *ita* C D,
22. *quinti.* *ad* G D; *Erit ex æquo, ut* F B, *ad* E B, *ita* H D, *ad* G D; *Et conuertendo, ut* E B, *ad* F B, *ita* G D, *ad* H D; *Et per conuerſionem rationis, ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Et diuidendo, ut* F B, *ad* E F, *ita* H D, *ad* G H. *Quod eſt ſecundum.*

RVRSVS, *quia eſt, ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Et ut* E B, *ad* E F, *ita* G D, *ad* G H; *Erit ex æquo, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod eſt primum.*

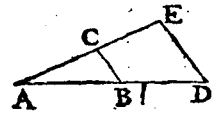
BREVIVS *tota propoſitio demonſtrabitur hoc modo. Cõueniant duo puncta* A, *&* C, *in unum, ut fiat angulus* B C D, *uel* B A D; *iungantúrque rectæ* D B, H F, G E. *Quia igitur eſt,*
2. *ſexti.* *ut* A E, *ad* E B, *ita* C G, *ad* G D; *Parallela erit* G E, *ipſi* D B. *Rurſus, cum ſit, ut* A F, *ad* F B, *ita* C H, *ad* H D;
30. *primi* *Parallela erit eadem ratione* H F, *ipſi* D B. *Quare &* G E, H F,
2. *ſexti.* *inter ſe parallelæ ſunt: Ac propterea erit, ut* A E, *ad* E F, *ita* C G, *ad* G H. *Quod eſt propoſitum.*

10. ## PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ A B, A C, *ita diſpoſitæ, ut efficiant* angulum

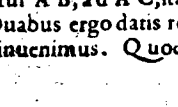
angulum A, quemcumque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam uolumus esse antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipsi A C. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipsi A C, productæ in E. Dico C E, esse tertiam proportionalé, hoc est, esse ut A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cum enim in triãgulo A D E, lateri D E, parallela sit recta B C; erit ut A B, ad B D, ita A C, ad C E; Sed ut A B, ad B D, ita eadem A B, ad A C, æqualem ipsi B D: Vt igitur A B, ad A C, ita A C, ad C E. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



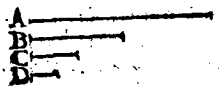
2. *sexti.*
7. *quinti.*

SCHOLION.

ALITER *idem demonstrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ* A B, B C, *constituantur ad angulum rectum* A B C; *& coniungatur recta* A C. *Producta autem* A B, *antecedente, ducatur ex* C, *ad* A C, *perpendicularis* C D, *occurrens ipsi* A B, *productæ in* D. *Dico* B D, *esse tertiam proportionalem. Cum enim in triãgulo* A C D, *angulus* A C D, *sit rectus, & ab eo ad basin* A D, *deducta perpendicularis* C B; *erit per coroll. 8. propos. huius lib.* B C, *media proportionalis inter* A B, *&* B D, *hoc est, ut* A B, *ad* B C, *ita erit* B C, *ad* B D. *Quod est propositum.*



INVENTA *autem tertia linea continue proportionali, si primam omiseris, & alijs duabus tertiam inueneris, habebis quatuor lineas continue proportionales. Vt si lineis* A, *&* B, *adinueniatur tertia proportionalis* C, *& duabus* B, *&* C, *tertia proportionalis* D, *erunt quatuor lineæ* A, B, C, D, *continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis,*

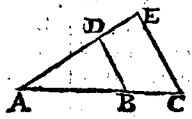


tionalis, sexta, septima, octaua, &c.

10. PROBL. 4. PROPOS. 12.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

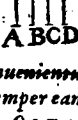
SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Disponantur primæ duæ A B, B C, secundum lineam rectã, quæ sit A C: Tertia uero A D, cum prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, esse quartam proportionalem. Cum enim in trianguło A C E, lateri C E, acta sit perpendicularis B D, erit ut



2. *sexti.* A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

HINC *facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, & tertia quælibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, ut sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarum binæ semper eandem habeant proportionem.*

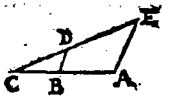


OSTENDEMVS *etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.*

TRIBVS datis rectis lineis, quartã inuenire, quæ sit ad tertiam, ut prima ad secundam.

SINT

SINT tres rectæ AB, BC, CD; oporteatque inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, ut AB, prima ad BC, secundam. Disponantur primæ duæ AB, BC, in directum, ut faciant rectam AC: Tertia uero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque.



Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ, in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, ut est AB, prima ad BC, secundam. Hoc autem manifestum est, cum AC, EC, proportionaliter secentur in B, & D. 2. sexti.

PROBL. 5. PROPOS. 13. 9.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & intervallo EA, uel EC, semicirculus describatur ADC; Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam usque. Dico BD, esse mediam proportionalē. Ductis enim rectis AD, CD, erit angulus ADC, rectus in semicirculo existens. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium 8. propos. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediā proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.



31. tertij.

SCHOLION.

PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo a quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam usque, mediam esse proportionalem,

inter duo diametri segmenta, quæ a perpendiculari facta sunt. Deturenim semicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circumferentiam recta D B, perpendicularis ipsi A C. Dico D B, esse proportionalem mediam inter A D, & D C, id quod liquido constat ex demõstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ A B, C B, fiet angulus

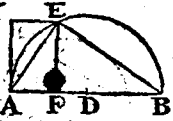


31. tertij. *A B C, rectus; Quare per coroll. propos. 8. constat propositũ. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, &c.*

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, ut data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

SIT data recta A C, & dividenda proponatur recta A B, (quæ minor non sit quam dupla ipsius A C, sed uel dupla, uel maior) ita ut inter huius segmenta, media proportionalis sit A C. Disponantur rectæ A B, A C, ad angulum rectum B A C, & divisa A B, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem D A, uel D B, semicirculus describatur A E B. Deinde per C, ducatur ipsi A B, parallela C E, secans circumferentiam in E, puncto, a quo demittatur ad A B, perpendicularis E F. Dico A C, esse medium proportionalem inter segmenta A F, F B. Ductis enim rectis A E, B E,



34. primi erit ut iam est demonstratum, ex coroll. 8. propos. huius lib. E F, media proportionalis inter A F, & F B. Cum igitur E F, æqualis sit ipsi A C, eo quod parallelogrammum sit A C E F; (Est enim

28. primi C E, ipsi A F, parallela per constructionem, & A C, ipsi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A;) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod est propositum.

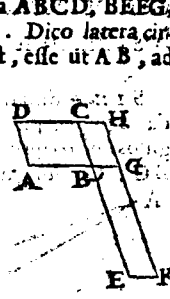
13. ## THEOR. 9. PROPOS. 14.

AEQVALIVM, & unum uni æqua-

lem

lem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos A B C, E B G, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut A B, & B G, unam efficiant lineã rectam. Quo facto, cum anguli ABC, E B G, sint æquales, erunt & E B, B C, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam D C, & F G, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma D B, B F, erit ut D B, ad B H, ita B F, ad idem B H. Sed ut D B, ad B H, ita est A B, basis ad basin B H, quod parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter ut B F, ad B H, ita est basis E B, ad basin B C: Igitur ut A B, ad B G, ita est E B, ad B C, quod est propositum.



7. quinti.
1. sexti.

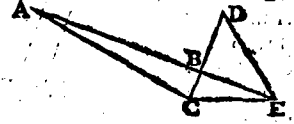
E CONTRARIO, sint iam latera circa æquales angulos A B C, E B G, reciproca, hoc est, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, esse æqualia. Facta enim eadem constructione, cum sit, ut A B, ad B G, ita E B, ad B C; Vt autem A B, ad B G, ita D B, ad B H; & ut E B, ad B C, ita B F, ad idem B H: erit quoque ut D B, ad B H, ita B F, ad idem B H; Ac idcirco æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

1. sexti.
9. quinti.

14. THEOR. 10. PROPOS. 15.

AEQVALIVM, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

SINT duo triangula æqualia A B C, D B E, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur triangula ad angulos æquales, ita ut



A B, B E, unam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli A B C, D B E, sint æquales; erũt & D B, B C, una recta linea, ceu demonstratum est, ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E; quoniam æqualia sunt triangula A B C, D B E, erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, ad idẽ B C E, sed ut triangulum A B C, ad triangulum B C E, 7. quinti. ita est basis A B, ad basin B E, quod hæc triangula eiusdem 1. sexti. sint altitudinis; & similiter ut D B E, ad B C E, ita basis D B, ad B C; Quare ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Quod est propositum.

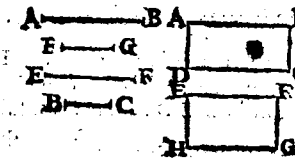
IAM ucro contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, ut A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit ut A B, ad B E, ita D B, ad B C; 1. sexti. ut autem A B, ad B E, ita triangulum A B C, ad triangulũ B C E; & ut D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit ut A B C, ad B C E, ita D B E, 9. quinti. ad idem B C E; propterea; æqualia erunt triangula A B C, D B E.

DBE. Aequalium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 11. PROPOS. 16. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod ſub extremis comprehenditur rectangulum, æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur, rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C, ut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehenſum ſub extremis A B, B C; rectangulum uero E F G H, comprehenſum ſub medijs E F, F G. Dico rectangula A C, E G, eſſe æqualia. Cũ enim anguli recti B, & F, ſint æquales, & ſit ut A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. Quare parallelogrãma A C, E G, æqualia erunt. Quod eſt propoſitum.



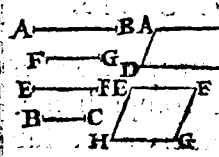
14. *ſexti.*

CONTRA uero, ſint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe ut A B, ad F G, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia ſint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & C; erunt latera circa hoſce angulos reciproca, ſicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque ſi quatuor rectæ lineæ proportionales

14. *ſexti.*

fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

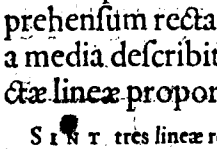


IDEM *verum est, etiam si parallelogramma A C, E G, non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.*

16. THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT tres lineæ rectæ A B, E F, & B C, proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C, sitque rectangulum A B C D, contentum sub extremis A B, B C; & quadratum mediæ E F, sit E F G H. Dico æqualia esse rectangulum A C, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi E F, erunt quatuor lineæ A B, E F, F G, B C proportionales, ut quidem A B, ad E F, ita F G, ad B C; eritque quadratum E G, comprehensum sub mediis E F, F G, propter æqualitatem rectarum E F, F G; Quare rectangulum A C, comprehensum sub



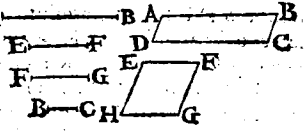
extre-

extremis A B, B C, æquale est quadrato E G, hoc est, rectangulo sub medijs E F, E G, comprehenso: Quod est propositum. 16. sexti.

Sed sint iam æqualia rectangulum A C, & quadratū E G. Dico esse ut A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cum enim æqualia sint rectangula A C, & E G, erit ut A B, ad E F, ita F G, ad B C. Vt autem F G, ad B C, ita est E F, ipsi F G, æqualis, ad eandem B C. Quare ut A B, ad E F, ita est E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. 16. sexti. 7. quinti.

SCHOLION.

Eadem omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut E G, sit Rhombus, & A C, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, ut figura indicat.



COROLLARIVM.

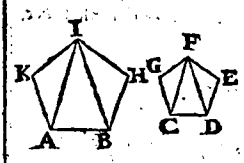
Ex posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalē inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, ostensum fuit, esse ut A B, ad B F, ita E F, ad B C. Quare E F, media est proportionalis inter A B, & B C.

PROBL. 6. PROPOS. 18. 19.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describere.

Sit data recta A B, super quam describendum sit rectilineum

ctilineum rectilineo C D E F G, simile similiterq; positum, Ducantur ex quolibet angulo, ut ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangu la C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantque rectæ A I, B I, in puncto I; eritque reliquo angu-
32. primi lo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis, totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rursus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus B I H; conueniantque B H, I H, in puncto H; eritque eadem ratione triangulũ B H I, triangulo D E F, æquiangulum. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K; coeantque A K, I K, in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G E, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura exiterint. Dico igitur, rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, simile esse, similiterque positum. Cũ enim angulus I A B, constiturus sit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis; Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit, & reliqui reliquis, ut constat ex constructione. Quare æquiangulum erit rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam uero ita est A B, ad B I, ut C D, ad D F; & ita B I, ad B H,
4. sexti. 22. sexti. ut D F, ad D E; erit ex æquo ita A B, ad B H, ut C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E,
4. sexti. proportionalia sunt. Sunt autem & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia, ob triangula æquiangula
4. sexti. B H I, D E F. Rursus ita est H I, ad I B, ut E F, ad F D; & ita I B, ad I A, ut F D, ad F C; & ita I A, ad I K, ut F C,
22. sexti. ad F G; Quare ex æquo erit ita H I, ad I K, ut E F, ad F G; & ideo latera quoque circa angulos H I K, E F G, proportionalia; & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterque descripta. A data

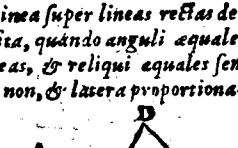


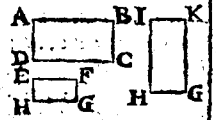
efgo

ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus; Quod faciendum erat.

SCHOLION.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & reliqui æquales semper ordine sese consequuntur, nec non, & latera proportionalia. Vt triangula A B C, D E F, non solum erunt similia, sed etiã super rectas B C, E F, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit A B, ad B C, ut D E, ad E F, &c. At super rectas B C, D E, non dicentur similiter esse descripta, cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula A C, E G, similia, dicentur similiter esse descripta sup rectas D C, H G, quoniam ut A D, ad D C, ita est E H, ad H G, &c. At vero rectangula A C, I G, non dicentur similiter descripta super rectas D C, H G, quamuis sint similia, ut manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas D C, I H, uel super rectas A D, H G.

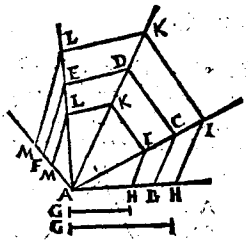




Omnes autem figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, ut patet in rectilineis A B H I K, C D E F G, super lineas A B, & C D, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter.

FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo A B C D E F, super datam rectam G, describendum simile rectilineum, similiterque positum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ A C, A D, A E, quantumlibet. Deinde ex A B, abscindatur A H, æqualis datæ rectæ G, uel certe ex ipsa A B, ulterius producta, si uidelicet G, fuerit maior, quam A B. Posthac per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, recta

I, recta I K, lateri C D, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis A B, A F; factumq; erit, quod proponitur. Cū enim angulus A, sit communis; & anguli A B C, A F E, æquales sint anguli A H I, A M L; Nec non & anguli A C B, A C D, æquales sint anguli A I H, A I K, hoc est, toti angulo B C D, æqualis sit angulus H I K; Eodemque modo anguli C D F, D E F, æquales sint anguli I K L, K L M: Æquiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, ut A B, ad B C, ita A H, ad H I. Rursus, ut B C, ad C A, ita H I, ad I A; Et ut C A, ad C D, ita I A, ad I K: Ac proinde, ex æquo, ut B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, & similiter posita.



29. primi

4. sexti.

17.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

SINT triangula similia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E; Item C, & F, &c. Et sit ut A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico triangula inter se rationem habere duplicatā eius, quam habent latera homologa B C, & E F. Sint enim primum latera B C, E F, æqualia; eruntque propterea triangula inter se æqualia, habebuntque proportionem æqualitatis, quemadmodū & latera homologa; Atqui proportio æqualitatis



26. primi

litatis duplicata ſolum efficit proportionem æqualitatis: (Poſitis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad ſecundam, ut conſtat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, ſicuti & prima ad ſecundam.) Igitur triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet latus B C, ad E F. Quod eſt propoſitum.

SIT ſecundo B C, latus latere E F, maius; & ex B C, abſcindatur rectis BC, E F, tertia proportionalis BG, ducaturq; recta A G. Quia igitur eſt ut A B, ad B C, ita D E, ad E F; erit permutando ut A B, ad D E, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad E F, ita eſt per conſtructionem E F, ad B G: Vt ergo A B, ad D E, ita erit E F, ad B G. Quare cum triangula A B G, D E F, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, ipſa inter ſe æqualia erunt; & propterea ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G; Vt autem triangulum A B C, ad triangulum A B G, eiuſdem altitudinis, ita eſt baſis B C, ad baſin B G. Igitur ut triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita eſt B C, ad B G. Atqui cum tres lineæ B C, E F, B G, ſint proportionales, erit proportio primæ B C, ad tertiam B G, duplicata proportionis B C, primæ ad E F, ſecundam. Quare & triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem habet duplicatam proportionis B C, ad E F. Similia igitur triangula inter ſe ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

11. *ſexti.*



11. *quinti.*

15. *ſexti.*

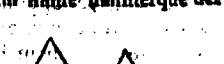
7. *quinti.*

1. *ſexti.*

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint; ut eſt prima ad tertiam, ita eſſe triangulum ſuper primam deſcriptum ad triangulum ſupra ſecundam ſimile ſimiliterque deſcriptum.

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & ſuper primam A, & ſecundam B, conſtituta triangula A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta.



Dico,

Dico, ut est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B: Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit ut recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.

19. sexti.



EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiã simile similiterq; descriptum, ut est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, ut est recta C, ad rectã A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; erit ut C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.

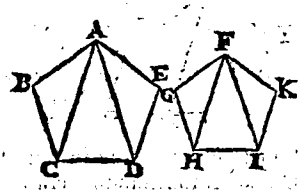
18.

THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

SINT polygona similia A B C D E, F G H I K, habentia angulos æquales B A E, G F K; Item angulos B, G, & sic deinceps. habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; ut quidem A B, ad B C, ita F G, ad G H; & ut B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primo, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint A C, A D, F H, F I; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia, cũ propter similitudinem habeant angulos numero æquales. Quoniam uero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia, æquiangula erunt triangula

triangula A B C, F G H, habentia angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G; ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt. Eadem ratione erunt similia triangula A E D, F K I. Deinde quia est ut A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob similitudinem triangulorum A B C, F G H; ut autem C B, ad C D, ita est, ex hypotesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum; Ex æquo erit ut A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; est autem & ablatus A C B, ostensus æqualis ablato F H G; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. Quare triangula A C D, F H I, æquiangula erunt, ideoque similia.



6. *sexti.*
4. *sexti.*
22. *quinti.*
6. *sexti.*

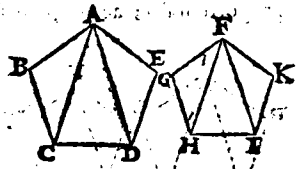
Dico præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis. Quoniam similia sunt triangula A B C, F G H, erit eorum proportio duplicata proportionis homologorum laterum A C, F H: Atque eodem argumento proportio triangulorum A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum A D E, ad triangulum F I K, ut A C D, ad F H I. Atque ita proportionalia sunt triangula unius polygoni cum triangulis alterius, ita ut triangula unius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem unum antecedens ad unum consequens, ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia. Igitur ut quodlibet triangulum unius polygoni ad sibi respondens triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

19. *sexti.*
12. *quinti.*

Dico postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa. Cum enim sit ut triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K; Trigulum

gulum uero A B C, ad triangulum F G H, habeat proportionem duplicatam eius, quam habet latera homologa A B, F G: habebunt quoque polygonia inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum A B, F G.

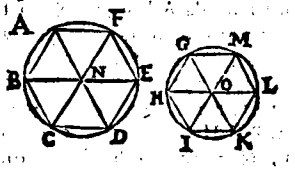
19. quinti.



Itaq; similia polygona in similia triangula diuidentur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Quod si polygona similia, fuerint aequilatera, & aequiangula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero aequalia, ductis è centris circulorum ipsis circunscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, aequilatera, & aequiangula A B C D E F, G H I K L M, quæ circunscribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur N A, N B, &c. Dico triangula N C D, O I K, similia esse. Quoniam anguli C N D, I O K, æquales sunt, (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam utrunque spacium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & quantitate æquales, subtensos nimirum a basibus æqualibus, connexosque lateribus æqualibus.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum utrobique sit proportio æqualitatis; Similia erunt triangula N C D, O I K. Eademque est ratio de cæteris. At uero hec triangula esse homologa totis polygoniis, nullo negocio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, ut patet, habebunt utique eandem cum ipsis proportionem.



6. sexti.

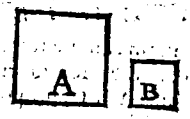
15. quinti.

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theore-

theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

Si linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

Sit primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, ut constat ex 1. defin. huius lib. erit, per hanc propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum proportionem habeant duplam; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, ut hic apparet. 1. 2. 4.



Sit iam quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, ut dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, ut in exemplo adducto superius apparet.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, ut est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum.



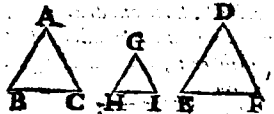
Hoc non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quam ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate: Vt perspicuum est in hac figura apposita.

THEOR.

20. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SINT rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia: Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis



rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiusdem rectilinei G H I; erunt per communem sententiam, anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cum ob eandem similitudinem latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea uidelicet, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia laterib⁹ eiusdem rectilinei G H I; erunt quoque latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea nimirum, quæ angulos ambiunt æquales; Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea A B C, D E F. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

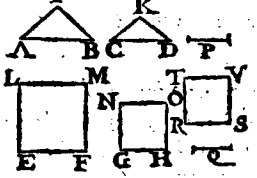
11. *quinti*

21. THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales,

nales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Constituantur super A B, C D, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta A B I, C D K; Item super E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q. eritque ex æquo, ut A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. uel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. Igitur ut A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod est propositum.



11. *sexti.*

22. *quinti.*

11. *quinti.*

E CONVERSO, sint iam dicta rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, esse quoque proportionales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H. Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, super quam describatur rectilineum R S V T, simile rectilineo E M, & ob id rectilineo G O, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, ut iam est ostensum, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoque ponitur E M, ad G O: Igitur erit ut E M, ad R V, ita E M, ad G O; Ac idcirco æqualia erunt R V, G O. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus, super rectas R S, G H, æquales. Quare erit ut E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, ut A B, ad C D. Igitur erit ut A B, ad C D, ita E F, quoque ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

12. *sexti.*

21. *sexti.*

11. *quinti.*

9. *quinti.*

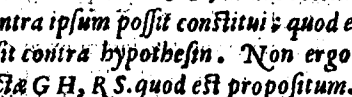
7. *quinti.*

11. *quinti.*

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV; Ponatur autem GH, maior quam
14. quinti. RS; erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui: quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. quod est propositum.

ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ AB, DE; esse æqua-

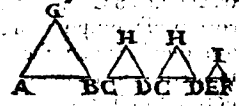


lia. Si enim nō credatur æqualia, sit AB, maius, quam DE; inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, ut AB, ad DE, ita DE, ad G; Est autem AB, maior, quam DE: Erit quoque DE, maior, quam G; ac propterea multo maior AB, quam G. Vt uero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. Igitur cū AB, maior sit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione;

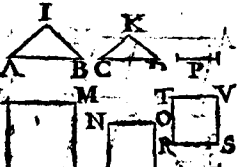
ne; quia & rectilineum A B C, minus ostenderetur rectilineo D E F; quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ A B, D E.

SCHOLION.

EODEM modo, *si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, ut hic Euclides demonstravit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, eo quod & linea secunda sit æqualis tertiæ; manifestum est, quod proponitur.*



BREVIUS *tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primo esse ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico esse quoque ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Cum enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Itē proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H: erunt proportiones A B I, ad C D K, & E M, ad G O, æquales; quādoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium A B, ad C D; & E F, ad G H. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoque ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Cum enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum.*



19. uel 20. sexti.

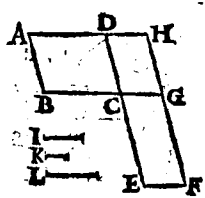
19. uel 20. sexti.

24.

THEOR. 17. PROPOS. 23.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut B C, C G, efficiant unam lineam rectam; Quo facto, cum anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec cõueniant in H. Sumpta iam recta I, quacunque, inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K: Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H; Vt autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K; erit quoque ut A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut H C, ad C F, ita K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; hoc est, ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque



12. *sexti.*

1. *sexti.*
11. *quinti.*
22. *quinti.*

demque ratione oſtendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, ut B C, C E, efficiant unam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum. 1.

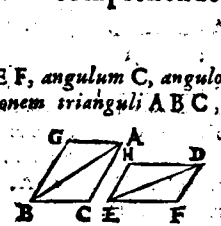
SCHOLION.

EXPEDITIVS *idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, ut prius; Cum ſit ut A C, ad C H, ita B C, ad C G: & ut C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.* 1. *ſexti.*

DEMONSTRAT *hoc in loco Federicus Commandinus nonnulla alia ad compoſitionem proportionum pertinentia non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonſtrationibus; Sunt autem ea, quæ ſequuntur.*

TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam. I.

SINT *triangula* A B C, D E F, *angulum* C, *angulo* F, *habentia æqualem. Dico proportionem trianguli* A B C, *ad triangulũ* D E F, *compoſitam eſſe ex lateribus, hoc eſt, ex proportione* B C, *ad* E F, *& ex proportione* A C, *ad* D F; *Vel ex proportione* B C, *ad* D F, *& proportione* A C, *ad* E F. *Completis enim parallelogrammis* C G, F H, *eruntea æquiangula; atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula* A B C, D E F, *cum ipſis, quorum ſunt dimidia, eandem habeant proportionem; Erit*

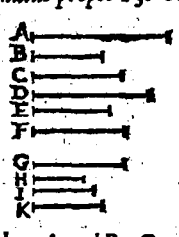


2. 3. *ſexti.* 15. *ſexti.*

queque proportio A B C, *ad* D E F, *compositæ ex proportionibus laterum* B C, A C, *ad latera* E F, D F.

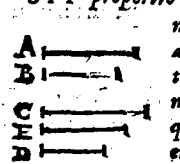
II. PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos 23. *Sint enim tres proportiones* A, *ad* B; C, *ad* D; *&* E, *ad* F. *Oportet iam ex ipsis unã proportionem componere. Fiat ut* A, *ad* B, *ita* G, *ad* H; *& ut* C, *ad* D, *ita* H, *ad* I; *& ut* E, *ad* F, *ita* I, *ad* K. *Dico proportionem* G, *ad* K, *compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim composita sit ex proportionibus* G, *ad* H; H, *ad* I; *&* I, *ad* K, *per defin.* 5. *huius lib. composita etiam erit ex proportionibus* A, *ad* B; C, *ad* D; *&* E, *&* F; *quod his illæ sumptæ sint æquales.*



III. PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

SIT proportio A, *ad* B, *minor auferenda ex proportione maiore* C, *ad* D. *Fiat, ut* A, *ad* B, *ita* C, *ad* E; *statuaturque* E, *terminus medius inter* C, *&* D. *Dico ablatam esse proportionem* A, *ad* B, *ex proportione* C, *ad* D, *reliquamque esse proportionem* E, *ad* D. *Cum enim proportio* C, *ad* D, *componatur ex proportionibus* C, *ad* E, *&* E, *ad* D: *Si proportio* C, *ad* E, *hoc est* A, *ad* B, *auferatur, relinquetur proportio* E, *ad* D.

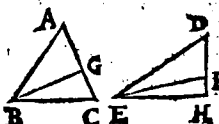


IIII. TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateri-

bus

bus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula A B C, D E F, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse A B C, ad D E F, ut rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub D E, D F. Ductis nim ad A C, D F, perpendicularibus B G, E H, erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, vt constat ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. cũ duo ãguli A, AGB, duobus angulis D, D H E, sint æquales. Igitur erit, ut G B ad B A, ita H F, ad E D: Vt autem G B, ad B A, ita est rectangulum sub B G, A C, ad rectangulum sub ∀ B, A C. (Nam si bases ponantur G B, B A, erit eorum eadem altitudo A C) Et eadem ratione, ut H E, ad E D, ita est rectangulum sub E H, D F, ad rectangulum sub D E, D F. Rectangulum igitur sub B G, A C, ad rectangulum sub A B, A C, est, ut rectangulum sub E H, D F, ad rectangulum sub D E, D F; & permutando, rectangulum sub B G, A C, ad rectangulum sub E H, D F, ut rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub D E, D F. Sed ut rectangulum sub B G, A C, ad rectangulum sub E H, D F, ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F, quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases A C, D F, altitudinesque easdem B G, E H; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum A B C, ad triangulum D E F, ut rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub D E, D F. Quod est propositum.



4. sexti.

1. sexti.

11. quinti.

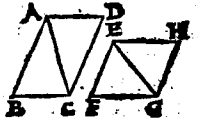
15. quinti.

41. primi

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa. V.

SINT parallelogramma A B C D, E F G H, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse,

ut B D, ad F H, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Ductis enim diametris A C, E G, quæ angulos æquales B, F, subtendant, habebunt triangula A B C, E F G, angulũ B, angulo F, æqualem. Quare, ut iam demonstrauimus, erit, ut A B C, ad E F G, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Cum ergo parallelogramma B D, F H, eandem habeant proportionem, quam triangula A B C, E F G, ipsorum dimidia; Erit quoque ut B D, ad F H, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F, F G. Quod est propositum.

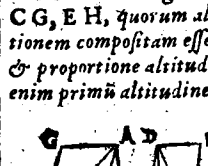


15. quinti.
11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent cõpositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

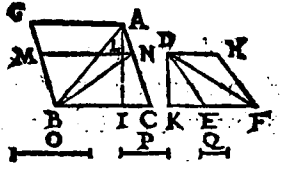
SINT triangula A B C, D E F, & parallelogramma C G, E H, quorum altitudines A I, D K. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis B C, ad basin E F, & proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K. Sint enim primũ altitudines æquales, bases uero uel æquales etiã, uel inæquales: Fiatque, ut B C, ad E F, ita L, ad M; Vt autem A I ad D K, ita M, ad N. Quo facto, erit M, ipsi N, æqualis, quod & A I ipsi D K, æqualis ponitur; Ac proinde erit L, ad N, ut L, ad M, hoc est, ut B C, ad E F. At uero, ut B C, ad E F, ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H. Igitur quoque erit, ut L, ad N, ita triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H; Sed proportio L, ad N, composita est ex proportione L, ad M, hoc est, basis B C, ad basin E F; & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis A I, ad altitudinem D K. Proportio ergo trianguli A B C, ad triangulum D E F, & pa-



7. quinti.
1. sexti.

& parallelogrammi C G, ad parallelogrammi E H, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

SINT iam altitudines A I, D K, inaquales, & A I, maior; bases vero B C, E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt A I, ad D K, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abscissa deinde I L, æquali ipsi D K; ducatur per L, ipsi B C, parallela L M, secãs A C, in N, iungaturq; recta B N. Quoniam igitur est triangulum A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum C M, vt altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipsi I L, æqualem, hoc est, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. ostendimus: Et vt triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, ita est, basis B C, ad basin E F, (cum eadē sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q, erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc est, basis B C, ad basin E F: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod est propositum. 1. sexti.



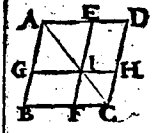
EODEM pacto ostendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor est, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, composita esse ex proportione basis E F, ad basin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinē A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius, erit triangulū D E F, ad triangulū N B C, & parallelogrammū E H, ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C, hoc est, vt Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, seu D K, ad A I, hoc est, vt P, ad O. Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, E F, 1. sexti.

E F, ad B C, & ex proportione P, ad O, hoc eſt, D K, ad A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eiſdem proportionibus.

22. THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.

ESTO parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctũ I, ducantur duę rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogrãma circa diametrũ, nẽpe E G, F H, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe ſe. Quod enim æquiangula ſint toti, facile oſtendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam angulus G A E, idem eſt qui angulus B A D; & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum eſt E G, ipſi B D: Et eadẽ ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonſtrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum ſit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, ut perſpicuum eſt ex 29. propos. lib. 1. uel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. erit ut A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa angulos B, & G, proportionalia ſunt. Rurſus erit ut B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item ut C A, ad C D, ita I A, ad I E. Ex æquo igitur, ut B C, ad C D, ita G I, ad I E; ac propterea & latera circa angulos B C D, G I E, proportionalia exiſtunt. Non aliter demonſtrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, eſſe proportionalia. Quare per definitionem, ſimile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte oſtendes parallelogrãmum



4. *ſexti.*

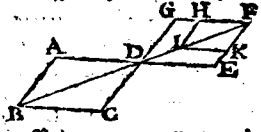
22. *quinti.*

mum F H, simile esse eidem parallelogrammo B D; atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum. 21. sexti.

SCHOLION.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius, esse talia, quæ habeant unum angulum cum toto parallelogrammo communem, ut manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, iisdem fere mediis ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim A B C D, diameter B D, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammum D E F G, cuius



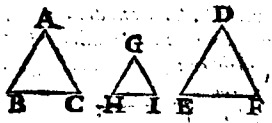
duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, simile esse parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare his oppositi C, & E, æquales quoque 34. primi erunt. Rursus quia anguli A D C, G D E, ad verticem, sunt 15. primi æquales, erunt his quoque oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur 34. primi æquiangula sunt G E, A C, parallelogramma. Quod autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulum sit triangulo D G F; & triangulum B C D, triangulo D E F, vt constat ex propos. 29. lib. 1. Erit vt B A, ad A D, ita D G, 4. sexti. ad G F. Rursus vt A D, ad D B, ita G F, ad F D; & vt D B, ad D C, ita F D, ad F E; ac propterea ex æquo vt A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse.

Quare

20. ## THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SINT rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis



rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales angulis eiusdem rectilinei G H I; erunt per communem sententiam, anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cum ob eandem similitudinem latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea uidelicet, quæ circum æquales sunt angulos; Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia laterib⁹ eiusdem rectilinei G H I; erunt quoque latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea nimirum, quæ angulos ambiunt æquales; Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea A B C, D E F. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

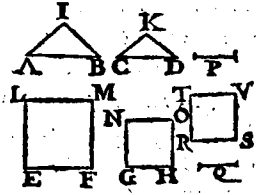
11. *quinti*

21. ## THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales,

nales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Constituantur que super A B, C D, duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta A B I, C D K; Item super E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterque descripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, ut quidem A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia proportionalis Q, eritque ex æquo, ut A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. uel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, ut E F, ad Q, ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. Igitur ut A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod est propositum.



11. *sexti.*

22. *quinti.*

11. *quinti.*

E CONVERSO, sint iam dicta rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D, E F, G H, esse quoque proportionales, ut quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H. Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, super quam describatur rectilineum R S V T, simile rectilineo E M, & ob id rectilineo G O, similiterque positum. Quoniam igitur est, ut A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, ut iam est ostensum, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt autem A B I, ad C D K, ita quoque ponitur E M, ad G O: Igitur erit ut E M, ad R V, ita E M, ad G O; Ac idcirco æqualia erunt R V, G O. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, ut mox ostendemus, super rectas R S, G H, æquales. Quare erit ut E F, ad R S, ita E F, ad G H. Ponitur autem E F, ad R S, ut A B, ad C D. Igitur erit ut A B, ad C D, ita E F, quoque ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

12. *sexti.*

21. *sexti.*

11. *quinti.*

9. *quinti.*

7. *quinti.*

11. *quinti.*

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea, similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit ut GH, ad HO, ita RS, ad SV; Ponatur autem GH, maior quam RS; erit quoque HO, maior quam SV; & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsum possit constitui: quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ GH, RS. quod est propositum.

14. quinti.

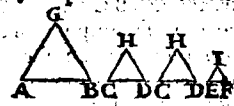
ALITER. Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ AB, DE; esse æqualia. Si enim nō credatur æqualia, sit AB, maius, quam DE; inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, ut AB, ad DE, ita DE, ad G; Est autem AB, maior, quam DE: Erit quoque DE, maior, quam G; ac propterea multo maior AB, quam G. Vt uero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. Igitur cū AB, maior sit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF: quod est absurdum, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione;



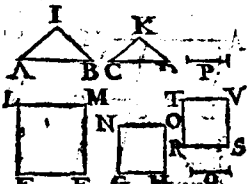
ne; quia & rectilineum A B C, minus ostenderetur rectilineo D E F; quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ A B, D E.

SCHOLION.

Eodem modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilineæ similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilineæ proportionalia, ut hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod a secunda est descriptum, æquale sit ei, quod a tertia, eo quod & linea secunda sit æqualis tertiæ; manifestum est, quod proponitur.



Brevius tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primo esse ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico esse quoque ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Cum enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Itē proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H: erunt proportiones A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales; quādoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium A B, ad C D; & E F, ad G H. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse, ut A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoque ut A B, ad C D, ita E F, ad G H. Cum enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum.



19. uel 20. sexti.

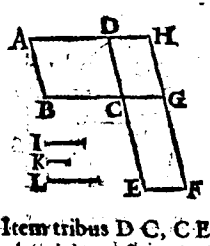
19. uel 20. sexti.

24.

THEOR. 17. PROPOS. 23.

AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

SINT parallelogramma æquiangula A C, C F, habentia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera unius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita ut antecedentia proportionum sint in uno parallelogrammo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem A C, parallelogrammi ad parallelogrammum C F, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E. Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectæ D C, ad rectam C G. Coniungantur parallelogramma ad angulos æquales, ita ut B C, C G, efficiant unam lineam rectam; Quo facto, cum anguli B C D, E C G, sint æquales, erunt & D C, C E, una recta linea, ut ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec cõueniant in H. Sumpta iam recta I, quacunque, inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K: Item tribus D C, C E, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, ut B C, ad C G, ita A C, ad C H; Vt autem B C, ad C G, ita posita est I, ad K; erit quoque ut A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, ut H C, ad C F, ita K, ad L. Ex æquo igitur erit, ut A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; hoc est, ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eisdem ergo proportionibus componetur proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque



12. *sexti.*

1. *sexti.*
11. *quinti.*
22. *quinti.*

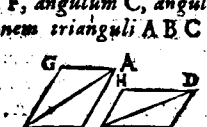
demque ratione oſtendemus, proportionem A C, ad C P, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos rectos, ut B C, C E, efficiant unam rectam lineam, &c. Aequiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum. 11

SCHOLION.

EXPEDITIVS *idem demonſtrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, ut prius; cum ſit ut A C, ad C H, ita B C, ad C G: & ut C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H, & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.* 1. *ſexti.*

DEMONSTRAT *hoc in loco Federicus Commandinus nonnulla alia ad compoſitionem proportionum pertinentia non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonſtrationibus; Sunt autem ea, quæ ſequuntur.*

TRIANGVLA, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compoſitam. I.

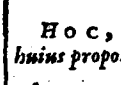


SINT *triangula* A B C, D E F, *angulum* C, *angulo* F, *habentia æqualem. Dico proportionem trianguli* A B C, *ad triangulũ* D E F, *compoſitam eſſe ex lateribus, hoc eſt, ex proportione* B C, *ad* E F, *& ex proportione* A C, *ad* D F; *Vel ex proportione* B C, *ad* D F. *& proportione* A C, *ad* E F. *Completis enim parallelogrammis* C G, F H, *erunt ea æquiangula; atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula* A B C, D E F, *cum ipſis, quorum ſunt dimidia, eandem habeant proportionem; Erit* 23. *ſexti.* 15. *ſexti.*

quæque proportio A B C, ad D E F, compositæ ex proportionibus laterum B C, A C, ad latera E F, D F.

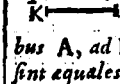
II. PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, uel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, Oportet iam ex ipsis unã proportionem componere. Fiat ut A, ad B, ita G, ad H; & ut C, ad D, ita H, ad I; & ut E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim composita sit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; quod his illæ sumptæ sint æquales.



III. PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

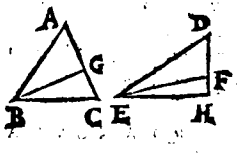
SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. Fiat, ut A, ad B, ita C, ad E; statuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.



IIII. TRIANGVLA, quę unum angulum uni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateri-

bus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT *triangula* A B C, D E F, *angulum* A, *angulo* D, *habentia æqualem. Dico esse* A B C, *ad* D E F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Ductis enim ad* A C, D F, *perpendicularibus* B G, E H, *erunt triangula* A B G, D E H, *æquiangula, vt constat ex coroll.* 1. *propos.* 32. *lib.* 1. *cũ duo ãguli* A, A G B, *duobus angulis* D, D H E, *sint æquales. Igitur erit, ut* G B *ad* B A, *ita* H F, *ad* E D: *Vt autem* G B, *ad* B A, *ita est rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* V B, A C. (*Nam si bases ponantur* G B, B A, *erit eorum eadem altitudo* A C) *Et eadem ratione, ut* H E, *ad* E D, *ita est rectangulum sub* E H, D F, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Rectangulum igitur sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* A B, A C, *est, ut rectangulum sub* E H, D F, *ad rectangulum sub* D E, D F; *& permutando, rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* E H, D F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Sed ut rectangulum sub* B G, A C, *ad rectangulum sub* E H, D F, *ita est triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases* A C, D F, *altitudinesque easdem* B G, E H; *ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *ut rectangulum sub* A B, A C, *ad rectangulum sub* D E, D F. *Quod est propositum.*



4. *sexti.*

1. *sexti.*

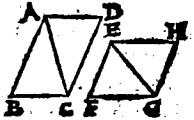
11. *quinti.*

15. *quinti.*
41. *primi*

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa. V.

SINT *parallelogramma* A B C D, E F G H, *æquiangula inter se, quorum anguli* B, *&* F, *sint æquales. Dico esse,*

ut B D, *ad* F H, *ita rectangulum sub* A B, B C, *ad rectangulum sub* E F, F G. *Ductis enim diametris* A C, E G, *quæ angulos æquales* B, F, *subtendant, habebunt triangula* A B C, E F G, *angulũ* B, *angulo* F, *æqualem. Quare, ut iam demonstrauimus, erit, ut* A B C, *ad* E F G, *ita rectangulum sub* A B, B C, *ad rectangulum sub* E F, F G. *Cum ergo parallelogramma* B D, F H, *eandem habeant proportionem, quam triangula* A B C, E F G, *ipsorum dimidia; Erit quoque ut* B D, *ad* F H, *ita rectangulum sub* A B, B C, *ad rectangulum sub* E F, F G. *Quod est propositum.*

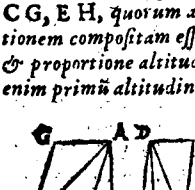


15. quinti.
11. quinti.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent cõpositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

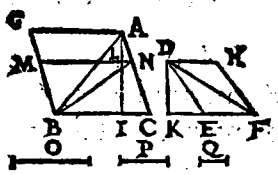
SINT triangula A B C, D E F, *& parallelogramma* C G, E H, *quorum altitudines* A I, D K. *Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis* B C, *ad basin* E F, *& proportione altitudinis* A I, *ad altitudinem* D K. *Sint enim primũ altitudines æquales, bases uero uel æquales etiã, uel inæquales: Fiatque, ut* B C, *ad* E F, *ita* L, *ad* M; *Vt autem* A I *ad* D K, *ita* M, *ad* N. *Quo facto, erit* M, *ipsi* N, *æqualis, quod & ipsi* A I *æqualis ponitur; Ac proinde erit* L, *ad* N, *ut* L, *ad* M, *hoc est, ut* B C, *ad* E F. *At uerò, ut* B C, *ad* E F, *ita est triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *& parallelogrammum* C G, *ad parallelogrammum* E H. *Igitur quoque erit, ut* L, *ad* N, *ita triangulum* A B C, *ad triangulum* D E F, *& parallelogrammum* C G, *ad parallelogrammum* E H; *Sed proportio* L, *ad* N, *composita est ex proportione* L, *ad* M, *hoc est, basis* B C, *ad basin* E F; *& ex proportione* M, *ad* N, *hoc est, altitudinis* A I, *ad altitudinem* D K. *Proportio ergo trianguli* A B C, *ad triangulum* D E F, *& pa-*



7. quinti.
1. sexti.

& parallelogrammi C G, ad parallelogrammi E H, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

SINT iam altitudines A I, D K, inaquales, & A I, maior; bases vero B C, E F, vel æquales, vel etiam inaquales. Fiat, vt A I, ad D K, ita O, ad P; & vt B C, ad E F, ita P, ad Q. Abscissa deinde I L, æquali ipsi D K; ducatur per L, ipsi B C, parallela L M, secãs A C, in N, iungaturq; recta B N. Quoniam igitur est triangulum A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum C M, ut altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipsi I L, æqualem, hoc est, ut O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. ostendimus: Et ut triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H, ita est, basis B C, ad basin E F, (cum eadē sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q, erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, ut O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc est, basis B C, ad basin E F: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod est propositum. 1. sexti.



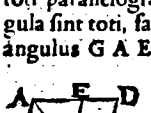
EODEM pacto ostendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor est, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, composita esse ex proportione basis E F, ad basin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinē A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius, erit triangulū D E F, ad triangulū N B C, & parallelogrammū E H, ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C, hoc est, ut Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, seu D K, ad A I, hoc est, vt P, ad O. Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, E F, 1. sexti.

E F, ad B C, & ex proportione P, ad O, hoc est, D K, ad A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eisdem proportionibus.

22. THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

ESTO parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctū I, ducantur duę rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogrāma circa diametrū, nēpe E G, F H, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam angulus G A E, idem est qui angulus B A D; & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum est E G, ipsi B D: Et eadē ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum A G I, æquiangulum sit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, ut perspicuum est ex 29. propos. lib. 1. uel etiam ex coroll. propos. 4. huius lib. erit ut A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus erit ut B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item ut C A, ad C D, ita I A, ad I E. Ex æquo igitur, ut B C, ad C D, ita G I, ad I E; ac propterea & latera circa angulos B C D, G I E, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrā-



4. *sexti.*

22. *quinti.*

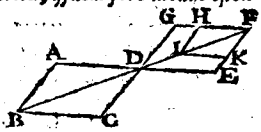
mum

mum F H, simile esse eidem parallelogrammo B D; atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum. 21. sexti.

SCHOLION.

INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius, esse talia, quæ habeant unum angulū cum toto parallelogrammo communem, ut manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrāmi producta consistat parallelogrammum aliud, ita ut duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, uel certe illa his sint parallela, ijsdem fere mediis ostenderur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter B D, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammum D E F G, cuius duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, simile esse parallelogrammo A C. Quod enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur ex propos. 29. lib. 1. Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoque est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G. Quare his oppositi C, & E, æquales quoque erunt. Rursus quia anguli A D C, G D E, ad uerticem, sunt æquales, erunt his quoque oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula sunt G E, A C, parallelogramma. Quod autē latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum B A D, æquiangulū sit triangulo D G F; & triangulum B C D, triangulo D E F, ut constat ex propos. 29. lib. 1. Erit ut B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rursus ut A D, ad D B, ita G F, ad F D; & ut D B, ad D C, ita F D, ad F E; ac proptera ex æquo ut A D, ad D C, ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E. Non secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse.



34. primi
15. primi
34. primi
4. sexti.

Quare

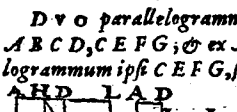
Quare similia sunt parallelogramma A C, G E. Quod si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonstrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant rectis F K, F H, productis in E, & G; erit H K, simile ipsi G E, ut Euclides demonstrauit: Atqui eidem G E, simile est quoq; A C, vt nunc ostendimus. Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod est propositum.

22. sexti.

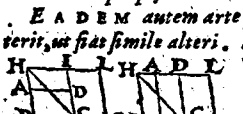
SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammmis æqui angulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

DVO parallelogramma equiangula, sed non similia, sint A B C D, C E F G; & ex A B C D, abscindendum sit parallelogrammum ipsi C E F G, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita ut sit una linea recta B C G, & propterea ut ad ppos. 15. lib. 1. demõstratum est, E C D, quoq; una recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H, secet vel latus A D, vel latus A B; & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogramum abscissum H C, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum; Quare inter se similia, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.

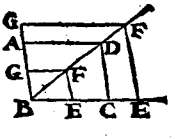


EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, ut fiat simile alteri. Sit enim augendum A B C D, ut fiat ipsi C E F G, simile. Coniungantur vti prius; & diameter F C, extendatur, donec in H, secet vel latus B A, protractum, vel latus D A, protractum. Deinde per H, ducatur H I, parallela ipsi A D, vel ipsi A B, donec secet vel C D, protractam, vel C B, protractam in I. Dico parallelogrãmum auctum H C, simile esse parallelogrammo C F. Nam si com-



compleatur totum parallelogrammum K L, consistent H C, C F, circa diametrum; Quare similia inter se erunt.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis a nobis proposita in hoc Scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia; Verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo A B C D, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus unum, nempe B C; Atque ex E, quolibet puncto ultra C, ipsi C D, parallela E F, ducenda, secans diametrũ B D, productã in F; & per F, ducenda F G, parallela ipsi A D, occurrens rectæ B A, productæ in G. Erit enim parallelogrammum G E, simile similiterque positum ipsi A C, & maius eodem. Quod si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, vltra C, & reliqua perágendá, ut prius; seu figurá indicat.

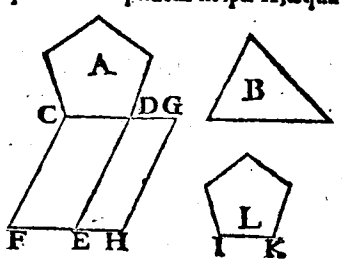


PROBL. 7. PROPOS. 25.

25.

DATO rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

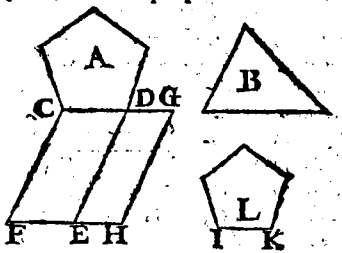
SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale uero ipsi B. Super C D, unum latus rectilinei, cui simile debet constitui, constituatur parallelogrãmum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis sit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipsi B; eritque C D G, linea una



44. *uel* 45. *primi.*

una recta, nec nõ F E H, ceu demonstratum fuit propos. 45. lib. 1. Inueniatur iam inter rectas C D, D G, tertia proportionalis I K, super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positũ. Dico L, æquale etiã esse alteri rectilineo B. Cũ enim sint, proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit p coroll. propos. 20. huius lib, ut C D, prima ad D G, tertiã, ita A, rectilineum super primam C D, ad rectilineum L, super I K, secundam simile similiterq; descriptũ.

13. *sexti.*
18. *sexti.*



1. *sexti.* Vt autem C D, ad D G, ita est parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiusdem altitudinis. Igitur erit ut C E, ad D H, ita A, ad L. Vt autẽ C E, ad D H, ita est A, ad B, propter æqualitatem parallelogrammorum, & horum rectilineorum. Quare erit ut A, ad B, ita A, ad L; propterea q; æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum,

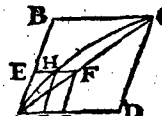
11. *quinti.*
9. *quinti.*

23. THEOR. 19. PROPOS. 26.

SI a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

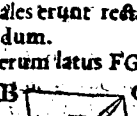
Ex parallelogrammo B D, abscissum sit pallelogrammũ E G, simile similiterq; positum, habens cum ipso angulũ cõmunẽm E A G. Dico E G, consistere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ si fuerint una linea

linea recta, perſpicuum eſt, cum A F, ſit diameter ipſius E G, & A C, diameter ipſius B D, parallelogrammum E G, conſiſtere circa diametrũ A F C, totius parallelogrammi. Quod ſi A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter A C, ſecans latus E F, in H puncto, per quod ipſi F G, parallela agatur H I. Quoniã igitur parallelogramma B D, E I, ſunt circa eandem diametrum A H C, ipſa erunt ſimilia, ſimiliterq; poſita. Quare

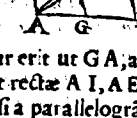


erit ut B A, ad A D, ita E A, ad A I: Sed ut B A, ad A D, ita quoque eſt E A, ad A G; quod parallelogramma B D, E G, ponantur ſimilia, ſimiliterque poſita. Igitur erit ut E A, ad A I, ita E A, ad A G. Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G; pars, & totum; quod eſt abſurdum. 24. ſexti. 11. quinti. 9. quinti.

Quod ſi dicatur recta A H C, ſecare alterum latus F G; Tunc ducta H I, parallela ipſi E F; erunt rurſus ſimilia parallelogramma B D, I G, ſimiliterq; poſita. Quare erit ut D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed ut D A, ad A B, ita quoque eſt G A, ad A E, ob ſimilitudinem parallelogrammorum B D, E G; Igitur erit ut G A, ad A I, ita G A, ad A E; ideoq; æquales erunt rectæ A I, A E; pars & totum: Quod eſt abſurdum. Itaq; ſi a parallelogrãmo parallelogrammum ablatum ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

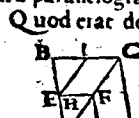


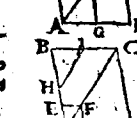
24. ſexti. 11. quinti. 9. quinti.

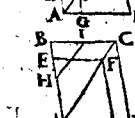


SCHOLION.

ALITER idem theorema demonſtrabimus oſtenſiue, hoc modo. Diuiſis lateribus A B, B C, bifariam in punctis H, I, ſiue punctum H, cadat in punctum E, ſiue ſupra, ſiue infra; ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur, propter ſimilitudinem parallelogrammorum, eſt ut A B, ad B C, ita A E, ad E F; Vt autẽ tota A B ad totam B C, ita eſt dimidia H B, ad dimidiam B I; Erit ut H B, ad B I, ita A E, ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cum habeant circa angulos

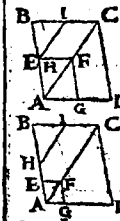






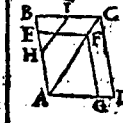
15. quinti. 11. quinti

angulos æquales B, E, latera proportionalia, erunt æquiangula, habebuntq; æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas H I, A F. 6. *sexti.*



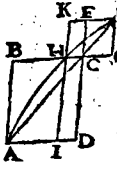
28. *primi*

Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniã uero recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, ducitur concipitur, parallela quoq; est rectæ H I, præterea quod latera A B, BC, triangulí tunccõ stituti A B C, proportionaliter essent secta in H, & I, utpote bifariam; efficitur, ut ducta recta A C, eadem fiat quæ A F, transeatq; per punctum F; cum ex puncto A, solum una linea parallela rectæ H I, possit duci, ut manifestum est. Consistunt ergo B D, E G, parallelogramma circa eandem diametrum A F C. 2. *sexti.*



Quod est propositum.

QVOD *si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed unum sit extra aliud, hac tamen lege, ut ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, ut duo latera unius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem fere medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterque posita B D, E G, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungãtur, ut lineæ B C, C G, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15 lib. 1. ostendimus, linea D C, C E, unam quoq; lineã rectam componant. Dico parallelogrãma B D, E G, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum A C, cum diametro F C, unam rectam lineam conficere. Si enim A C, F C, nõ faciunt unam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans B C, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipsi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogrãma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, productam consistunt, efficiuntq; duæ rectæ B H, H I, cum duabus rectis H G, H K, lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq; posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit ut H B, ad B A, ita F K, ad K H. Habet autem C B, maior ad B A, maiorem proportionem, quam H B, minor ad eandem B A; &* 8. *quinti.*



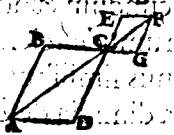
est

est ut C B, ad B A, ita F E, ad E C, eo quod parallelogramma B D, E G, communiter similia similiterque descripta: Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam H B, ad B A, hoc est, quam F K, ad K H. Quare rursus componendo, F E, ad E H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad eandem K H, erit F E, maior quam F K; pars quam totum: Quod est absurdum. 10. quinti.

QVOD si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat rectæ F G, protractæ in K, erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit ut H D, ad D A, ita F K, ad K H. Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionem, quam H D, ad D A; Et est ut C D, ad D A, ita F G, ad G C, propterea quod parallelogramma B D, E G, similia similiterque posita sunt concessa; Igitur & F G, ad G C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quam F K, ad K H; ideoque F G, maior erit, quam F K, pars quam totum: Quod est absurdum. 8. quinti. 10. quinti.

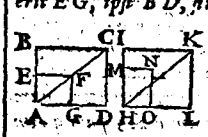


OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum B D, E G, anguli B, E, sunt æquales; estque ut A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia, ac idcirco æquiangula erunt, habebuntque angulos B C A, E F C, æquales. Additio ergo communi angulo B C F, erunt duo anguli E C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales; sed hi inter parallelas B C, E F, æquales sunt duobus rectis. Quare & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales; Ac propterea A C, F C, unam component rectam lineam. Quod est propositum. 6. sexti. 29. primi 14. primi

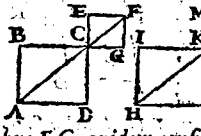


RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum a toto ablatum non solum esse toti simile, verum id similiter positū, vt ostendatur circa eandē cū toto diametrū. Nam si ex altera parte longiori B D, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistens,

24. sexti. erit E G, ipsi B D, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo I L, quod sit aequilaterũ ipsi B D, sumatur H M, aequalis ipsi E F, & M N, aequalis ipsi A F, &c. erit quidem rectangulum M O, aequale & simile rectangulo E G, propter aequalitatẽ laterum, & angulorum, qui sunt recti, & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto I L, diametrum.



IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis, quorum unum est extra alterum, secundum tamen angulos eorum ita inter se connexa, ut duo latera unius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O; in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum: At vero M O, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cũ prorsus sit aequale ipsi E G. Nam K M, aequalis est ipsi E F, & M N, ipsi E C, &c.

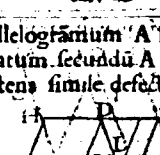


26. ## THEOR. 20. PROPOS. 27.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod a dimidia describitur; maximũ id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammũ simile existens defectui.

DETVR recta A B diuisa bifariam in C, superq; eius dimidiam B C, constituatur quodcunque parallelogrammũ C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur rorum paralle-

parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammum A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundū A B, deficiens parallelogrammo C E, & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum, deficiensque parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quę secundum A B, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, utcunque in diametro B D, & ductis per G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B, D E; erit parallelogrammum F K, secundum rectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo K I, quod ipsi C E, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum C E, diametrum. Quoniam uero complementa C G, G E, æqualia sunt, si addatur commune K I, erunt quoque æqualia G I, K E. Est autem G I, æquale ipsi C F, propter bases æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt, additoq; cōmuni C G, æqualia erunt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cum C E, maius sit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonē parallelogrāmum adhuc D G,) erit quoq; A D, æquale existens ipsi C E, propter bases æquales A C, C B, maius quam parallelogrammum A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemq; modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam A B, applicantur, ut punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam dimidia A C, habentque minorem altitudinem, quam A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.



ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo. Parallelogramma F D, D I, sunt æqualia, cum bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius quam G E, hoc est, quam complementum C G, sibi æquale, parallelogrammo D G; Igitur & F D, maius erit, quam C G, parallelogrammo eodem D G. Ac idcirco addito communi C F, maius erit A D, quam A G, parallelogrāmo eodem D G.

QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta

Ee 2 HM,

36. primi

43. primi

24. sexti.
43. primi

36. primi

36. primi

HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq; rectis AK, BE, protractis in H, & M; Iæ ducta GF, parallela ipsi AH erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiés parallelogrammo FM, quod



24. *primi* ipsi CE, est simile similiterque positū, cum sit circa eandem diametrum cum CE; Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim

34. *primi* 36. *primi* CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, idcoque æqualia parallelogramma HD, DM. Cum igitur DM, sit æquale complemento DF, erit & HD, æquale ipsi DE. Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Isdem argumentis concludes AD, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, ut punctum G, sit ultra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam dimidia AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidia AC, qualis est AK, in priori figura, vel minorem, cuiusmodi est AF, in figura posteriori; prout punctum G, sumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

27. PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ simi-

lis

lis fit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

A D datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, super mediatetem E B, describatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale est ipsi C, cum sit applicatum ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D, factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus erit. Nam cum per præcedentem ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari ullum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora: Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoq; sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua uero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus; docuimus ad ppos. 45. lib. 1.) & cõstituatur parallelogrammũ K L M N, simile quidem ipsi D, seu ipsi E G, æquale uero excessui inuento I, ut sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul, & ob id maius quam K M. Cum igitur ob similitudinem sit ut E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoque latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, uel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, uel minus, ut constat. Quare abscissis rectis F O, F Q, quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi



18. *sexti.*

25. *sexti.*

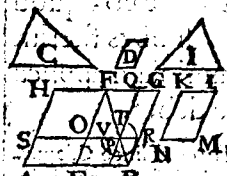
L N, æquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi E G: atque adeo circa eandem diametrum cum E G, consistet, quæ sit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, adrectam A B, applicatum, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est ipsi E G, & propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. Nam cum P G, æquale sit complemento P E; si addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, quod æquale est ipsi E R, propter bases æquales E A, B B. Quare si æqualibus A Q, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V, Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C. (Nam cum E G, parallelogrammum æquale sit ipsi C, una cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

26. sexti.

24. sexti.

43. primi

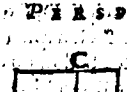
36. primi



SCHOLION.

MOVENT hoc in loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Quæ de re consule eorum commentarios.

PRAEDICTVM autem ex dictis est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C; Cum ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C E; continebitur quoq; A C, sub segmentis A D, D B, per applicationem factis.

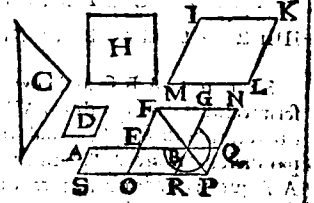


PROBL.

PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

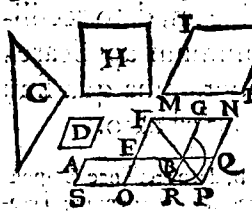
AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B bifariam in E; super dimidiam E B, construatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum. 18. *sexti.* Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G constituatur quadratum H, æquale, cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile uero ipsi E G, similiterque positum; eritque propterea I K L M; maius quam E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod cōstructū est rectilineo C, una cum parallelogrammo E G, æquale. Cum igitur ob similitudinē M K, E G, sit ut M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoq; latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, uel minora, esset quoque M K, uel æquale ipsi E G, uel minus, ut perspicuum est. Productis igitur F E, F G, ut rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrāmo O N, erit hoc simile similiterque positum ipsi E G, cui sit æquale ipsi M K, & simile. Quare O N, E G, circa eandem diametrum consistent, quæ sit F P. Productis iam A B, G B, ad Q, R; & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S; erit parallelogrammum A P, applicatum ad rectam A B, excedens parallelogrammo Q R, quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse rectilineo C. Nam cū A O, E R, sint æqualia; & E R, equa- 24. *sexti.* 25. *sexti.* 24. *sexti.* 26. *sexti.* 36. *primi*



43. primi

le complemento B N, erit & A O, ipsi B N, æquales. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P N. At qui gnomon E P N, æqualis est rectilineo C, (nam cum M K, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, una cum E G; Si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P N, & rectilineū C.) Igitur & A P æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P; excedens parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.



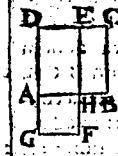
29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

PROPOSITAM rectam lineam terminatā, extrema, ac media ratione secare.

SIT recta A B, secanda extrema ac media ratione. Describatur super eam quadrato A B C D; ad latus D A, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, eritq; propterea A F, quoq; quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet deinde recta E F, rectam A B, in H. Dico A B, in G, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint D F, & A C; si demātur cōmune A E, remanebunt æqualia G H, H C; quæ cum habeant angulos æquales A H F, B H E, utpote rectos; erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit ut E H, hoc est, ut A B, sibi æqualis, ad H F, hoc est, ad A H, sibi æqualem, ut A H, ad H B. Quare secta est A B, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineā terminatam, &c. Quod erat faciendum.

29. sexti.

14. sexti.



ALITER

ALITER. oſtendemus AB, eſſe ſectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, ſitq; rectangulum HC, comprehenſum ſub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; erunt ipſæ proportionales, ut AB quidē ad AH, ita AH, ad HB. Quare per definitionem ſecta eſt AB, in H, extrema ac media ratione. 17. ſexti.

ALITER totum problema conficiemus. Diuidatur AB, in C, ita ut rectangulum ſub tota AB, & ſegmento CB, æquale ſit quadrato alterius ſegmenti AC. Dico AB, in C, eſſe ſectam extrema ac media ratione. Erunt enim rurſus, ut prius, tres lineæ AB, AC, CB, continuè proportionales. Conſtat ergo propoſitum. 18. ſecundi. 17. ſexti.



SCHOLION.

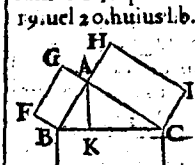
HAEC admiranda hac ſectio lineæ extrema ac mediæ ratione inſignes utilitates, proprietatesque, ceu in libris Stereometriæ manifeſtum erit, ut nō ſine cauſa apud plerisque Mathematicis lineæ ita diuiſæ diuinam quodammodo, ob admirabilē eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs uero ſimpliciter nocetur diuiſa proportionaliter.

THEOR. 21. PROPOS. 31. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum ſubtendēte deſcripta, æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus rectū angulum continentibus deſcribuntur.

TRIANGVLVM rectangulum ſit ABC, habens angulum BAC, rectū; deſcribaturq; ſuper BC, quæcunq; figura rectilinea BCDE, cui ſimiles ſimiliterq; poſitæ ſuper AB, AC, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK, erit per corollarium propoſ. 8. huius 18. ſexti.

huius lib. ut B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare ut B C, ad C K, prima linea ad tertiã, ita figura B D, super primã, ad figuram C H, super secundam, similiter positã, per coroll. propos. 19. uel 20. huius lib. & conuertendo ut C K, ad B C, ita figura C H, ad figurã B D. Non secus ostendetur, esse quoque ut B K, ad B C, ita figurum B G, ad figurã B D; sum tres lineæ B C, B A, B K, sint quoq; proportionales, &c. Quoniã igitur est ut C K, prima quantitas ad B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut B K, quinta quantitas ad B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; erit ut prima C K, cum quinta B K, ad B C, secundam, ita tertia C H, cum sexta B G, ad B D, quartã. Sunt autem prima C K, & quinta B K, simul æquales secundæ B C; ergo tertia C H, & sexta B G, simul æquales quoque erunt quartæ B D. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. Quod erat ostendendum.



24 *quinti.*

8. *sexti.* ALITER. Cum triangulo A B C, simile sit triangulũ K A C, sintq; homologa latera ipsorum B C, C A; (Nam est ut B C, ad C A; in triãgulo A B C, ita C A, ad C K, in triãgulo K A C) habebit triangulũ K A C, ad triangulũ A B C, duplicatã proportionem eius, quam habet C A, ad B C. Habet autẽ & figura C H, ad figuram B D, proportionẽ duplicatã proportionis C A, ad B C. Quare erit ut triangulũ K A C, ad triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione ostendetur esse, ut triangulũ K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rursus est, ut K A C, prima quantitas ad A B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item ut K B A, quinta ad A B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; erit & prima K A C, composita cum quinta K B A, ad secundam A B C, ita composita tertia, C H, cum sexta B G, ad quartam B D. Sunt autẽ K A C, K B A, prima & quinta simul, æquales secundæ A B C; Igitur & C H, B G, tertia & sexta simul, æquales erunt quartæ B D.

19. *sexti.*

19. *uel* 20. *sexti.*

11. *quinti.*

24 *quinti.*

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita est figura C H, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem,

titatem, cum utraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit ut quadratū rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundā quantitatē, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. Quocirca erit, ut prima quantitas cum quinta, nempe quadratū rectę A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundā, hoc est, ad quadratū rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, nempe ad figuram B D: Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt. 19. *vel* 20 *sexti.* 24. *quinti.* 47. *primi*

SCHOLION.

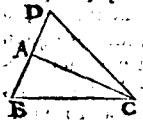
VIDES igitur, longe esse uniuersalius theorema hoc Euclidis, quod se se ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, ut propos. 47. primi lib. monuimus. Est tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, adhuc uniuersalius hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisque etiam non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque similibus, & similiter positis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano nō aliter, quam 47. propositionem primi lib. in hunc modum.

Si figura, quæ ab uno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum A B C, sitque figura quæuis super latus B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq; descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulū B A C, esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sui ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniā igitur angulus C A D, rectus est, erit figura super C D, (quæ similis

31. sexti. *similia sit ei, quæ super B C, similiterque posita) descripta æqualia figuris super A D, A C, descriptis, quæ ei similes sint, similiterque posita: Est autem figura super A D, æqualis figuræ super A B, ob æqualitatem laterum; Quare figura super C D, æqualis erit figuris super A B, A C. Cum igitur figura super B C, eisdē figuris super A B, B C, æqualis ponatur; erunt figuræ super C D, B C, inter se æquales, ac propterea rectæ C D, B C, æquales erunt, ut constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, triangulī A D C, æqualia sunt lateribus A B, A C, trianguli A B C; & basis D C, ostensa est quoque æqualis basi B C; erunt anguli*

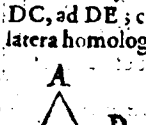


8. primi *D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit B A C; quod est propositum.*

30. THEOR. 22. PROPOS. 32.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela; tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineā collocata reperiētur.

HABEANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, ut quidem A B, ad A C, ita D C, ad D E; componanturque ad angulum A C D, ita ut latera homologa A B, D C; Item A C, D E, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua B C, C E, rectam cōponere lineam. Cum enim parallelæ sint A B, D C, erit angulus A, alterno A C D, æqualis: Eademq; ratione angulus D, eidem A C D, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula A B C, D C E, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa erūt



29. primi

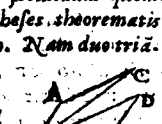
inter

inter se æquiãgula, habebuntq; æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito commun ACB, fient tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB, æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis: ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: Ac idcirco BC, CE, unam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum. 6. sexti. 32. primi 14. primi

SCHOLION.

DEBENT quem prædicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula cõponuntur; veluti in schemate theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quẽ triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales. & propterea triangula esse æquiangula; atque aliter ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.

QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliqua hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AE, ad AC, ita DE, ad DB; compostæque sunt ad angulum CBD, ita vt sint homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallelæ: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, non constituunt vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, ut perspicuum est.



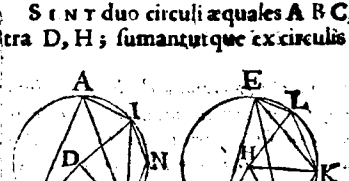
Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

THEO-

32. THEOR. 23. PROPOS. 33.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper uero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumantutque ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem insistãt anguli B D C, F H G; ad circumferentias uero anguli B A C, F E G. Dico esse ut arcū B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G; & angulum B A C, ad angulum F E G; & sectorem B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur, ad sectorem F H G, quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, applicentur ipsis in circulis æquales rectæ, C I; quidem ipsi B C, At uero G K, K L, ipsi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales sunt rectæ B C, C I, erunt quoque æquales arcus B C, C I, ac propterea anguli B D C, C D I, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus F G, G K, K L, & anguli F H G, G H K, K H L. Quã multiplex ergo est arcus B C I, ipsius arcus B C, tam multiplex erit & angulus B D I, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui B C I, anguli B D C: Et quã multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G, tam multiplex erit angulus F H L, seu aggregatum angulorum prope centrum H, arcui F G K L, insistentium, anguli F H G: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli B D I, F H L, in quot arcus æquales secti sunt arcus B C I, F G K L. Quoniã uero



1. quarti.
28. tertij.
27. tertij.

uero ſi arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, neceſſario angulus B D I, angulo F H L, æqualis eſt; Ac proinde ſi arcus B C I, maior fuerit arcu F G K L, neceſſario angulus B D I, maior eſt angulo F H L: & ſi minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & angulus B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab F G K L, arcu, & angulo F H L, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; uel una æqualia erũt; uel una excedent; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent. Quare quæ proportio eſt arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, ſecundam magnitudinem, ea erit anguli B D C, tertiæ magnitudinis, ad angulum F H G, quartam magnitudinem. *27. tertij.* *6. defin. 5.*

QVONIAM uero, ut angulus B D C, ad angulum F H G, ita eſt angulus B A C, ad angulum F E G, cum illi horum ſint dupli; perſpicuum eſt, ita eſſe quoque angulum B A C, ad angulum F E G, ut eſt arcus B C, ad arcum F G. Quod tamen eiſdem argumentis demõſtrari poteſt, quibus uſi ſumus in angulis ad centra conſtitutis, ſi prius ducãtur rectæ I A, K E, L E. *15. quinti* *20. tertij.* *11. quinti.*

CONSTITVANTVR iam in ſegmentis B C, C I, anguli B M C, C N I, qui æquales erunt, cum inſiſtant arcubus æqualibus B A C, C B A I. Quare ſimilia erunt ſegmenta B M C, C N I, atque adeo inter ſe æqualia, propterea quod ſint ſuper rectas B C, C I, quæ inter ſe ſunt æquales. Additis igitur triangulis B D C, C D I, quæ æqualia quoque ſunt, fient ſectores B D C, C D I, æquales. Quapropter tam multiplex erit ſector B D I, ſectoris B D C, quã eſt multiplex arcus B C I, ipſius arcus B C. Similiter oſtendemus, ſectorem F H L, tam multiplicem eſſe ſectoris F H G, quam multiplex eſt arcus F G K L, ipſius arcus F G. Quoniã uero ſi arcus B C I, æqualis fuerit arcui F G K L, ſector quoque B D I, ſectori F H L, æqualis eſt; (ceu in ſectoribus B D C, C D I, oſtenſum fuit.) & ſi maior, maior; & ſi minor, minor: Deficient propterea una arcus B C I, & ſector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ B D C, ab arcu F G K L, & ſectore F H L, æque multiplicibus ſecundæ magnitudinis F G, & quartæ F H G; uel una æqualia erunt; uel una excedent; ſi ea ſumantur, quæ *27. tertij.* *24. tertij.* *4. primi*

quæ inter se respondent. Quamobrem quæ proportio est
6. defin. 5. arcus B C, primæ magnitudinis, ad arcum F G, secundam magnitudinem, ea erit sectoris B D C, tertiæ magnitudinis, ad sectorem F H G, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM. I.

Hinc manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, ut est an-
11. quinti. gulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportio-ni arcus ad arcum. Quare & inter se eædem erunt.

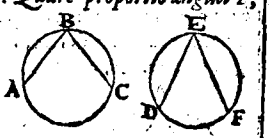
COROLLARIVM. II.

Perspicvvm quoque est, ut est angulus ad centrum ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circunferentiam. Et contra, ut sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circunferentiam ad arcum illi angulo subtensum. Nam ut est angulus in centro ad angulum rectum in centro, ita est
33. sexti. arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit ut angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circunferentiã, per ea, quæ ad 4. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est ut angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circunferentiam, erit & conuertendo, ut quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circunferentia ad arcũ angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabitur. Cum sit, ut angulus rectus in centro ad
33. sexti. angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 4. lib. 5. ostendimus, ut quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circunferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositũ.

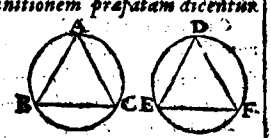
SCHOLION.

Caeterum ex theoremate hoc luce clarius colligit angu-lũ, qui circunferentiæ alicui insistit, referendum esse ad arcũ, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt nuls Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales

æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentiam cõstituti sint B, E, maior quidem B, minor autem E. Quo posito erit arcus A C, maior arcu D F, ac propterea reliquus arcus A B C, minor reliquo arcu D E F. Quare proportio anguli F, ad angulũ F, est maioris inæqualitatis; proportio uero arcus A B C, ad arcum D E F, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus A C, D F, tum demũ erit angulus B, ad angulum E, ut arcus A C, ad arcum D F, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cum dicimus, angulum insistere segmento seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.



NON obscure quoque ex hoc theoremate deduci potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circunferentiæ similes, ad integras circunferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea qualis pars est una circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoque sit alia circunferentia similis totius suæ circunferentiæ; veluti in expositione predictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferentias constituantur æquales B A C, E D F; Quo posito, segmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem prefatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circunferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circunferentias. Cum enim ob circulorum æqualitatem, arcus B C, E F, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circunferentias B A C, E D F, esse quoque æquales. Quare ad totas circunferentias, quæ æquales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt: Atque idcirco quæ pars est arcus B A C, totius circũferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D.

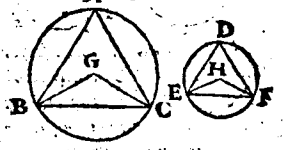


26. tertij.

SINT *secundo duo circuli inæquales* ABC, DEF, *in quibus anguli ad circunferentias constituantur æquales* BAC, EDF. *Quo posito, dicentur segmenta* BAC, EDF, *ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus* BAC, EDF, *eandem habere proportionem ad integras suas circunferentias. Ducantur enim ad centra* G, H, *rectæ* BG, CG, EH, FH. *Quoniam igitur anguli* A, *&* D, *æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli* G, *&* H, *æquales, cum hi illorum dupli existant. Quare quatuor recti ad angulum* G, *eandem habebunt rationem, quam ad angulum* H. *Atqui ut quatuor recti ad angulum* G, *ita est tota*

20. tertij.

7. quinti.



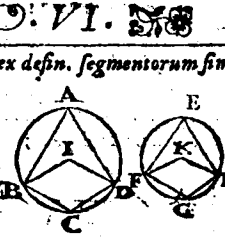
circunferentia ABCA, *ad arcum* BC: *Et ut quatuor recti ad angulum* H, *ita est tota circunferentia* DEFD, *ad arcum* EF, *ex coroll. 2. huius propos. 33. Igitur ut tota circunferentia* ABCA, *ad arcum* BC, *ita erit tota circunferentia* DEFD, *ad arcum* EF. *Dividendo ergo erit, ut arcus* BAC, *ad arcũ* BC, *ita arcus* EDF, *ad arcum* EF. *Et convertendo rursus, ut arcus* BC, *ad arcũ* BAC, *ita arcus* EF, *ad arcũ* EDF. *Ac propterea componendo, ut circunferentia tota* ABCA, *ad arcum* BAC, *ita circunferentia tota* DEFD, *ad arcum* EDF. *Et rursus convertendo, ut arcus* BAC, *ad totam circunferentiam* ABCA, *ita arcus* EDF, *ad totam circunferentiam* DEFD. *Quocirca quæ pars est arcus* BAC, *totius circunferentiæ* ABCA, *eadem pars erit arcus* EDF, *totius circunferentiæ* DEFD.

11. quinti.

CONSTAT *igitur, rectè Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales; quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.*

MANIFESTVM *etiam est ex dictis, angulos insistentes arcubus circulorum similibus, sive ad centra, sive ad circunferentias insistant, æquales esse inter se. Sint enim in circulis* ABCD, EFGH, *quorum centra* I, K, *arcus similes* BCD, FGH, *quibus insistant, ad centra quidem anguli* I, *&* K, *ad circunferentias autem anguli* A, *&* E. *Dico tam illos, quam hos esse inter se æquales. Constituantur enim in dictis arcubus anguli* BCD,

BCD, FGH, *qui æquales erunt, ex defin. segmentorum similium; Sunt autem tam anguli* C, *&* A, *quam* G, *&* E, *duobus rectis æquales: Ablatis igitur æqualibus* C, *&* G; *reliqui* A, *&* E; *ac proinde eorum dupli* I, *&* K, *æquales erunt.*



22. tertij.

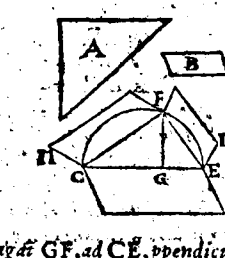
Vicissim quoq; liquet, arcus, quibus insistunt siue ad centra, siue ad circunferentias, anguli æquales, similes esse. Nã si anguli A, *et* E, *fuerint æquales; erunt & reliqui duorũ rectorũ* C, *&* G, *æquales. Igiĩ, p definitiõ ẽ, arcus* BCD, FGH, *similes sunt, quibus dicti anguli* A, *&* E, *insistũt. Quod si* I, *&* K, *æquales sint, erũt et eorũ dimidij* A, *et* E, *æquales. Quare, vt prius, arcus* BCD, FGH, *similes sunt.*

Quoniam vero Euclides multa dixit de inuentione linearũ proportionaliũ, nihil vero de superficierũ, vel planorum proportionaliũ inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorũ multa circa inuentionẽ superficierũ proportionaliũ uersantur, scitu nõ iniucunda, loco appẽdicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam; quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducuntur. Hinc autem exordium capiemus.

I.

A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, ut & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.

Sit ex rectilineo A, *auferenda tertia pars, quæ similis sit, similiterque posita rectilineo* B, *relinquatq; rectilineum eidem* B, *simile, & similiter positũ. Cõstituatur rectilineũ* C D, *æquale quidẽ ipsi* A, *simile vero ipsi* B, *superq; vnũ eius latus* CE, *semicirculus describatur* CFE. *Deinde ablata parte tertia* GE, *imperata nimirũm, ex* CE, *agatur* GF, *ad* CE, *ppendicularis, cõnectanturq; rectæ* CF, EF, *sup quas cõstituant rectilinea*



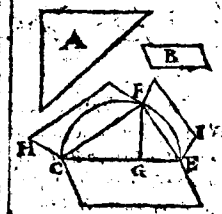
23. sexti.

9. sexti.

18. sexti.

18. sexti. 31. tertij. 32. sexti.

F H, F I, similia similiterque posita ipsi C D. Dico igitur factum esse, quod iubetur. Cum enim angulus C F E, rectus sit, quippe qui in semicirculo existit; erit rectilineum C D, aequale rectilineis H F, F I: atque adeo si auferatur rectilineum F I, simile ipsi B, ex rectilineo C D, hoc est, ex sibi aequali A, relinquetur rectilineũ H F, simile quoque ipsi B. Quod autem rectilineum ablatum F I, sit tertia pars rectilinei C D, ita ostendetur. Quoniam est ut recta C G, ad G F, ita recta C F, ad F E, eo quod triangula, C G F, C F E, sint similia: Habet autem C G, ad G E, proportionem duplicatam proportionis C G, ad G F, propterea quod proportionales sint tres rectae C G, G F, G E, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectilineum H F, ad rectilineum F I, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum C F, F E; Erit vt recta C G, ad G E, ita rectilineum H F, ad rectilineum F I; quandoquidem hae proportiones duarum aequalium proportionum duplicatae sunt. Componendo igitur erit, vt C E, ad G E, ita duo rectilinea H F, F I, simul, hoc est, rectilineum C D, quod est illis aequale, ad rectilineum F I. Est autem C E, ipsius G E, tripla, per constructionem; Igitur & rectilineum C D, triplum erit rectilinei F I. Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.



4. sexti. 8. sexti. 19. vel 20. sexti.

QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammum B C, sibi aequale; & ex latere B D, auferatur D E, tertia pars imperata, & per E, agatur ipsi C D, parallela E F. Dico E C, tertiam esse partem ipsius B C, hoc est, rectilinei dati A. Cum enim sit vt D E, ad D B, ita E C, ad C B: Sit autem per constructionem D E, ipsius D B, pars tertia; erit & E C, ipsius C B, tertia pars. Quod est propositum.



45. primi 1. sexti.

11.

DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

SINT

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inuenẽdum sit tertium proportionale. Constituatur ipsi A, rectilineum æquale EFG, simile vero similiterque positum ipsi BCD. Deinde inuentis homologis EF, BC, inueniatur tertia linea proportionalis HI, super quam constituatur rectilineũ HIK, simile similiterque positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertium proportionale. Cum enim proportionales sint rectæ EF, BC, HI, erunt & rectilinea EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cum sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum autem EFG, per constructionem, æquale sit ipsi A, erunt & rectilinea A, BCD, HIK, proportionalia.

25. sexti. 11. sexti. 18. sexti. 22. sexti.

III. TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

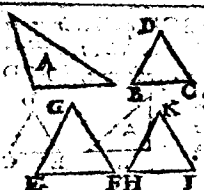
TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartum sit inueniendum proportionale. Constituatur rectilineum EKLM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterque positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, inuenta quarta proportionali NO, constituatur super NO, rectilineum NOP, ipsi FGH, simile similiterque positum. Dico NOP, rectilineum esse quartum proportionale. Cum enim quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales, erunt & rectilinea similia similiterque posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cum igitur IL, ipsi A, sit æquale, erunt & quatuor rectilinea A, BD, FGH, NOP, proportionalia.

25. sexti. 12. sexti. 18. sexti. 22. sexti.

IIII. DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilinea A, BCD, quibus medium inueniendum est proportionale. Constituatur rectilineum EFG, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC, inuenta media proportionali HI, constituatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterque posi-

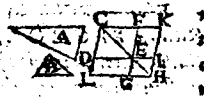
25. sexti. 13. sexti. 18. sexti.



tum ipsis EFG, BCD. Dico H I K, medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ E F, H I, B C, erunt quoque rectilineæ ab ipsis descriptæ E F G, H I K, B C D, proportionales, cum sint similes similiterque posita, &c.

22. sexti.

ALITER. Sit vero inter rectilineas A, & B, perquirendum medium proportionale. Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammum quodcunque C D B F; ipsi vero B, æquale parallelogrammum E G H I, simile autem similiterque positum ipsi C D E F. Conuallantur autem hæc parallelogramma ad angulos æquales, ut D B, E I, efficiant unam lineam, ac propterea, per ea, quæ ad 15. propos. 1. lib. demonstrauimus, una quoque linea componatur ex F E, E G; perficiaturque totum parallelogrammum K L. Dico rursum libet E K, vel E L, medium esse proportionale inter D F, G I, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint, similiterque posita D F, G I, erit vt D E, ad E E, ita E I, ad E G. Permutando ergo vt D E, ad E I, ita F E, ad E G. Vt autem D E, ad E I, ita D F, ad E K; & vt F E, ad E G, ita E K, ad G I. Igitur vt D F, ad E K, ita E K, ad G I, &c.



45. primi

25. sexti.

1. sexti.

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum D F, G I, similia sint, similiterque posita, consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa E K, E L, æqualia erunt. Vt autem D F, ad E K, ita est E L, ad G I, eo quod vtraque proportio eadem sit proportioni D B, ad E I. Igitur erit, vt D F, ad E K, ita E K, ad G I.

26. sexti.

1. sexti.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia cõstituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantque inter se proportionem propositam quamcunque.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio recta B, ad C, oporteatque constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantque proportionem, quam B, & C, ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiuis D. Constituatur rectilineum E F G H, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi D. Diuisa deinde

25. sexti.

deinde latere eius E H, in I, secundum proportionem B, ad C. (quod facile fiet, si conficiatur vna linea ex B, & C. Nam tunc similiter secanda erit E H, &c.) describatur circa E H, semicirculus E K H, & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, connectanturq; rectæ E K, H K. Describantur iam ex E K, K H, rectilineæ E K L M, K H N O, ipsi E G, vel ipsæ D, similia similiterq; posita; quæ dico æqualia esse ipsi E G, seu ipsi A, habereque proportionem datam B, ad C. Cum enim angulus E K H, in semicirculo existens rectus sit, erunt rectilineæ E L, H O, æqualia rectilineo E G, cui sint similia inter se, similiterq; descripta. Quoniam uero est, vt E I, ad I K, ita E K, ad K H, cum triangula E I K, E K H, similia sint; Est autē E I, ad I H, in proportione duplicata proportionis E I, ad I K, quod tres E I, I K, I H, sint, ex corollario propos. 8. lib. huius, proportionales. Item E I, ad H O, in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum K H; erit vt E I, ad I H, hoc est, vt B, ad C, ita E L, ad H O. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo æqualia E L, H O, quæ similia sunt, similiterque posita dato rectilineo D, habentque proportionem inter se datam B, ad C.

10. sexti.

8. sexti.

1. tertij.

1. sexti.

4. sexti.

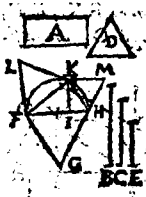
20. sexti.

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posito, quorū latera homologa proportionē habeāt, quā B, ad C. Inuēta ipsis B, C, tertia proportionali E, fiat rectilineū F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positū ipsi D. Diuisoq; latere F H, in I, ēm proportionē B, ad E, describāt circa F H, semicirculus F K H, & ex I, ducatur ad F H, perpēdicularis

FK, connectantur rectæ EK, HK. Describatur iam ex FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similia, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, communique quarta homologa EK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. Cum enim anguli

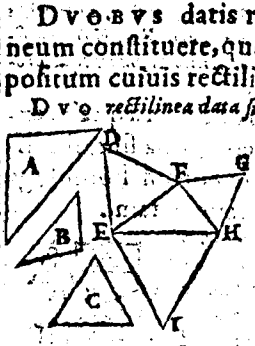


31. tertij. 31. sexti. FKH, in semicirculo rectus sit, erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineæ FGH, ipsi & rectilineæ A æqualia. Quoniam vero est vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH: Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK, (quod res FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) Ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex constructione.) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C; quandoquidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt.

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.

DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendū, simile similiterq; positum ipsi C. Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autē similiterque positū ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur GFH, simile vero eidem C, similiterq; positū. Deinde rectilinea DEF, GFH, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituant angulum EFH, rectū, cui subtendatur recta EH, ex qua describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C. Perspicuum autem est EHI, æquale esse duobus DEF, GFH; atque idcirco duobus A, & B.



25. sexti. 2. sexti. 31. sexti.

BREVIVS. Constituatur parallelogrammū æquale duabus

bus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. Si enim huic parallelogrammo constituerimus æquale rectilineum E H I, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum E H I, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq; positum rectilineo C. 25. sexti.

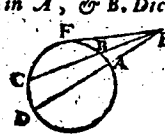
SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint: Erunt segmenta unius segmentis alterius reciproca. VIII.

IN circulo A B C D, se mutuo secent rectæ A C, B D, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmentis B E, E D: Hoc est, esse vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel ut A E, ad E D, ita B E, ad E C. Cum enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub B E, E D, contento; erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum. 35. tertij. 14. sexti.



SI extra circulum sumatur punctũ aliquod, ab eoque in circulum cadãt duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quę circulum secet & eius segmentum exterius. IX.

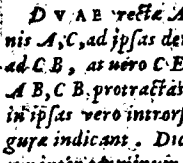
EXTRA circulum A B C D, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ E C, E D, secantes circulum in A, & B. Dico rectas E C, E B, esse reciprocas rectis E D, E A: Hoc est, esse, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B: Vel ut E C, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, tangente circulum in F, erit rectangulum sub E C, E B, quadrato rectæ E F, æquale; Item rectangulum sub E D, E A, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula sub E C, E B, & sub E D, E A, æqualia erunt: Ac propterea latera eorũ circa angulos æquales reciproca. Quoniã autẽ quadrato rectæ E F, æquale est rectangulũ sub E C, E B: Item rectangulũ sub E D, E A, erunt tres rectæ E C, E F, E B. Itemq; tres 36. tertij. 14. sexti. 36. tertij.



ures E D, E F, E A, proportionales, atque adeo E F, media proportionalis inter quamlibet lineam quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

X. SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & a duobus eorum terminis perpendiculares sibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum una inter terminũ, & sectionẽ, altera uero inter eundẽ terminũ, & suã perpendicularem interijcitur, alijs duabꝰ eodẽ modo inclusis reciprocę.

DVAE rectæ A B, C E, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares, A D; quidem ad C B, at uero C E, ad A B; quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas ultra B, si angulus A B C, fuerit obtusus; in ipsas uero introrsum, si idem angulus acutus fuerit, ut figuræ indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior uero inter sectionem B, & perpendicularẽ suam C E, quæ nimirum ad ipsam A B, ducitur) reciprocas esse duabus C B, B D, (quæ inter similes terminos in eluduntur) hoc est, esse ut A B, ad B C, ita B D, ad B E: Vel ut A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cum enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales sint angulis C B E, C E B, trianguli C B E. (Nã A D B, C E B, recti sunt; & A B D, C E B, ad verticem in priori figura, in posteriori autem unus & idem angulus) erunt triangula A B D, C B E, æquiangula. Quare



4. sexti. *erit ut A B, ad B D, ita C B, ad B E: Ac propterea permutando quoq;, ut A B, ad B C, ita B D, ad B E. Quod est propositum.*

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium A D, C E, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula A F E, C F D, sint aquiangula; erit

4. sexti. *ut A F, ad F E, ita C F, ad F D: Et permutando quoque, ut A F, ad C F, ita F E, ad F D.*

XI. IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuo secantes, diuidunt parallelo-

grammum

grammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

IN parallelogrammo A B C D, duæ rectæ E F, G H, lateribus A D, D C, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma E G, G F, B I, I C, esse proportionalia. Cū enim sit, vt E I, ad I F, ita E G, ad G F: Item vt E I, ad I F, ita B I, ad I C; Erit quoque vt E G, ad G F, ita B I, ad I C, quod est propositum.



1. sexti.

1. quinti.

XII.

QVMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

DIVIDANT diametri A C, B D, se mutuo secantes in E, quadrilaterum A B C D. Dico quatuor triangula A E D, C E D, A E B, C E B, esse proportionalia. Erit enim vt A E, ad E C, ita triangulum A E D, ad triangulum C E D; & triangulum A E B, ad triangulum C E B. Quare vt triangulum A E D, ad triangulum C E D; ita triangulum A E B, ad triangulum C E B. Eademq; ratione ostendes esse vt B E A, ad D E A, ita B E C, ad D E C, cum vtraq; proportio eadem sit proportioni B E, ad E D. Quod fuit ergo propositum.

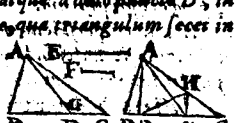


1. sexti.

XIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum A B C, oporteatque a dato puncto D, in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur B C, in G, secundum proportionē E, ad F, eademq; prima punctum G, in datum punctum D, ducaturq; recta D A. Quoniam igitur est vt B D, ad D C, ita triangulum B D A, ad triangulum C D A, secabit recta D A, triangulum datum secundum proportionem datam B G, ad G C, hoc est, E, ad F.

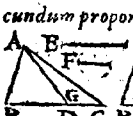


1. sexti.

CADAT secundo punctum G, inter C, & D. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coeantq; vtræq;

vers-

recta DH. *Dico rectam* DH, *secare trianguli angulum datum secundum proportionem datam, hoc est, esse trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH, *vt* E, *ad* F, *seu vt* BG, *ad* GC. *Ducta enim recta* GA, *erunt triangula* HGA, GHD, *aequalia, cum sint super eandem basin* GH, *& inter eas sint parallelae* AC, HD. *Addito igitur communi triangulo* CGH, *fiet aequalia triangula* CGA, CDH. *Ac proinde triangulum* ABC, *eandem habebit proportionem ad* CGA, *& ad* CDH. *Dividendo igitur, erit vt triangulum* BGA, *ad triangulum* CGA, *ita trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH. *Est autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur erit & trapezium* BDHA, *ad triangulum* CDH, *vt* BG, *ad* GE, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod est propositum.*



37. primi

7. quinti,

7. quinti

1. sexti.

CADAT *tertio punctum* G, *inter* B, *& D, ducaturq; recta* DA, *cui rursus per* G, *agatur parallela* GH. *Dico igitur, rectam ductã* DH, *secare triangulum* ABC, *secundum proportionem datam* E, *ad* F, *hoc est, esse triangulum* BDH, *ad trapezium* CDHA, *vt* E, *ad* F. *Ducta enim recta* GA, *erunt, vt prius triangula* HGA, GHD, *aequalia; additoq; communi* BGH, *aequalia fient* BGA, BDH. *Quare erit* ABC, *ad* BGA, *vt ad* BDH. *Dividendo ergo erit vt* CGA, *ad* BGA, *ita trapezium* CDHA, *ad triangulum* BDH; *& conuertendo, vt* BGA, *ad* CGA, *ita* BDH, *ad trapezium* CDHA. *Est autem* BGA, *ad* CGA, *vt* BG, *ad* GC. *Igitur & BDH, ad trapezium* CDHA, *erit vt* BG, *ad* GC, *hoc est, vt* E, *ad* F. *Quod erat propositum.*



37. primi

7. quinti.

17. quinti.

1. sexti.

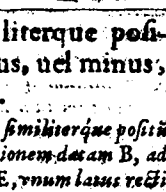
HINC *perspicuum est, quomodo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectum, quae a quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam a dato puncto ducta dividatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatae, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur; vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator aequalis est denominatori partis, cum priori denominatori proportionis multiplicis addatur unitas, quae unde deerat.*

DATO

XIIII.

DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius, uel minus, ſecundum proportionem datam.

SIT rectilineum datum A, cui ſimile ſimiliterque poſitũ ſit deſcribendum maius, ſecundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (ſit autem DE, unum latus rectilinei dati quodcunque) inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, inueniatur media proportionalis GH, ſuper quam ipſi A, deſcribatur rectilineum I, ſimile, ſimiliterque poſitum. Dico I, maius eſſe quã A, ſecundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales ſint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propoſ. 19. uel 20. libri huius, ut DE, prima ad F, tertiam, hoc eſt, per conſtructionem B, ad C, ita rectilineum A, ſuper primam ad rectilineum I, ſuper ſecundã, illi ſimile ſimiliterq; poſitum.



12. ſexti.
13. ſexti.
18. ſexti.

NON ſecus dato rectilineo A, minus rectilineum I, deſcribemus, illi ſimile ſimiliterque poſitũ, ſecundum proportionem datam B, ad C. Ceu in hac figura factum eſſe cernis. Eadem enim prorſus eſt conſtructio, atque demonſtratio.

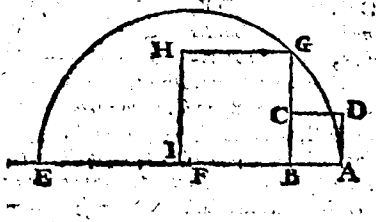


FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, uel aliud rectilineũ duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, etc. Atque aliud conſituemus, quod ſit illius dimidium, uel tertia pars, uel quarta, uel quinta, &c. ſeruata nihilominus ſemper eadem rectilinearum ſimilitudine, quemadmodum & quadratorum eadem remanet ſimilitudo. Si namq; proportio B, ad C, ſumatur ut 1. ad 2. uel 1. ad 3. uel 1. ad 4. &c. Item ut 2. ad 1. uel 3. ad 1. uel 4. ad 1. &c. reliqua uero perficiantur, ut prius; habebitur rectilineum ſimile ſimiliterq; deſcriptũ, quod propoſiti rectilinei duplum exiſtet, uel triplum, uel quadruplum, &c. Uel quod dimidium erit, uel tertia pars, uel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON uidetur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipſe facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, ſeu parallelogrammum quodcunq; oblatum. Ex hac enim conſtruemus quoq; rectilineum ſimile, ſimiliterque deſcriptum cui cun-

cunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam afferat rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio a precedenti differt, vt mox ostendemus.

SIT igitur quadratum A B C D, quincuplicandum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, sumantur quinque partes ipsi A B, æquales, a puncto B, incipiendo, usque ad E, vt sit B E, quincupla ipsius A B. Diuisa dein de tota A E, bifariã in F, describatur ex F, ad interuallum F A, vel F E, semicirculus A G E, produ-



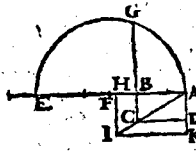
catúrque latus B C, ad circunferentiam vsque in G. Dico quadratum B G H I, ex B G, descriptum, quincuplum esse quadrati A B C D. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. B G, media proportionalis inter E B, B A. Igitur erit vt E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum secundæ, ad A C, quadratũ tertiæ, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem E B, per constructionem, ipsius A B, quincupla. Igitur & quadratum B H, quadrati A C, quincuplum erit. Quod est propositum. Quod si recta B E, sumatur sexcupla lateris A B, erit & quadratum rectæ B G, quadrati A B C D, sexcuplum. Si autem B E, fuerit tertia pars ipsius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Denique in quacunque proportione sumatur B E, ad A B, eandẽ habebit quadratum B H, ad quadratũ A C.

SIT rursus rectangulum A B C D, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere A B, producto sumatur B E, dupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariã in F, & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta C B ad G, erit B G, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur A H, æqualis ipsi B G, & per H, agatur ipsi B C, parallela H I, occurrens diametro A C, protractæ in I, perficiatúrque parallelogrammum H K, erit H K, ipsi B D, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius

14. sexti.

B D.

B D. *Cum enim proportionales sint tres rectæ* E B, B G, B A, *ex corollario propos.* 13. *huius lib.* *Erit vt prius, sicut* E B, *prima ad* B A, *tertiam, ita rectangulũ* H K, *supra* A H, *secundã (sumpta enim fuit* A H, *ipsi* B G, *secundæ æqualis) ad rectangulum* B D, *supra tertiam* A B, *quod est simile similiterque descriptum.*



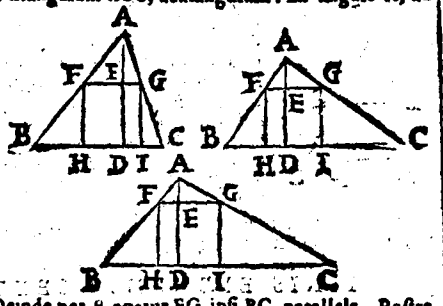
EODEM *modo, si supra* A B, *constitutum fuerit quod cunque rectilineum, erit quod ex* B G, *illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex* B G, *ad rectilineum simile ex* A B, *quam habere ponetur recta* E B, *ad rectã* B A, *ex constructione.*

PERSPICVVM *autem est, hanc operationem vna cũ eius demonstratione a nostra antea tradita nõ differre, nisi quod hac simul tradat inuentionem mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuũ lineas* E B, B A, *quæ proportionem habẽt datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.*

EX FEDERICO COMMANDINO.

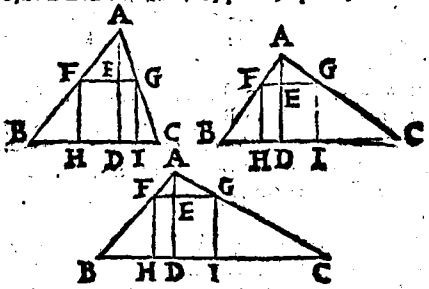
In dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo A, ad BC, perpẽdicularis demittatur A D, quæ in E, ita secetur, per ea, quæ in Scholio *propos.* 10 huius libri docuimus, ut eadẽ sit *proportio* A E, ad B D, quæ A D, ad B C. Deinde per E, agatur F G, ipsi B C, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi D E, parallelæ ducantur F H, G I. Dico F G I H, rectilineum triangulo A B C, inscriptum, esse quadratũ. Cum enim F E G, ipsi C, sit parallela, erit vt B D, ad D C, ita F E, ad B G, ex scho-



lio propos. 4. huius lib. & componendo, ut B C, ad D C, ita BG, ad E G. Sed ut D C, ad AD, ita est EG, ad A E; ergo per coroll. ppos. 4. huius lib. triangula ADC, AEG, sunt similia. Igitur erit ex æquo, ut B C, ad AD, ita FG, ad A E. Quia uero per constructionem est, ut A D, ad BC, ita A E, ad ED; erit rursus ex æquo, ut BC, ad BC, ita F G, ad E D. Est autem BC, ipsi BC, æqualis, immo eadem: Aequalis igitur est & F G, ipsi ED. Quare cũ FG, ipsi HI, & ED, ipsis F H, G I, æqualis existat; Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia inter se.

34. primi

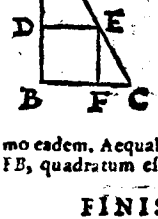


29. primi

Et quia anguli E D H, F H D, duobus rectis æquales sunt: Est autem F DH, per constructionem rectus: erit & F H D, rectus. Quocirca, per ea, quæ ad defin. 3. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli H FG, FGI, GIH, recti sunt; Ac propterea F I, quadratũ est. quod est propositum.

NON secus idẽ problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum uel obtusangulum, dummodo ex angulo recto, uel obtuso perpendicularem demittamus, seu in posterioribus duobus triangulis apparet.

4. sexti



QVOD si in triangulo rectangulo quadratũ describere libeat, ita ut duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulũ rectũ nitantur; diuidemus perpẽdicularẽ AB, in D, ita ut eadẽ sit proportio A D, ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipsi B C, parallelã ducemus DE; per E, uero ipsi A B, aliã parallelã EF. Quoniã igitur est, ut B C, ad AB, ita DE, ad A D; quod triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. ppos. 4. huius lib. Est autẽ per cõstructionẽ, ut AB, ad B C, ita A D, ad DB. Erit ex æquo, ut BC, ad BC, ita D E, ad DB: Est autem BC, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Aequalis igitur est & D E, ipsi DB. Quare ut prius, D E FB, quadratum est. Quod est propositum.

FINIS ELEMENTI SEXTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VII.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quã unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.



ACTENVS *egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana uersatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus differere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio lineariũ requiratur, idque adeo, ut absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atque usum, neque exprimi queant, neque intelligi: Nam pleraque laterũ sunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel certe, si non sunt Irrationales, longitudine inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, ac intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, ut absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam nunterorũ explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioque constaret, lineis*

anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, ut in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur. Incipiens igitur more suo a principijs, definit initio unitatem, dicetque eam esse, secundum quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum esse dicitur: Nam secundum unitatem unum lapidem, unum animal, unum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum unitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, ut in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex unitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerũ quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes; Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nempe vnitates, quarum quælibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum quælibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos una eademque mensura, nimirũ vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurimæ illarum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, ut clarissime lib. 10. ostendetur.

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON

NON est dissimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 50. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; ut 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodē modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

Vult Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem nō metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cū eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars est huius numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, nō autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superua canea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM *partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura utrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita ut si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum cō-*

munis mensura, illum metiatur per 6. hunc uero per 10. Idem iudicium habeto & in reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc in loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantum eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, ceu propos. 4. huius lib. ostendetur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes uero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cum ea persæpe sint incommensurabiles, ut aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides in quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX uero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo ut numerus maior, cuius minor est pars, sit uicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si uero maiorem minor nõ metiatur, nullo modo eris maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hãc definitionem. Et uicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem nõ metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin.

maior minoris multiplex.

VI.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

VT omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR uero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui unitate differt a pari.

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia unitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. uel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pari-

ter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoque par numerus 60 metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM si recte duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit, fieri posse, ut unus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar uocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdum, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum; ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparem 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis

clidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponit, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeste omnem numerū parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parē appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habēt impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec solum pariter pares, nec solum pariter impares illi sint. Sed hac planius in lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparē. Sic quoque hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus est, quem unitas sola metitur.

QVOD si numerum quempiam nullus numerus, sed sola vnitas metiatur, ita vt neq; pariter par, neque pariter impar, neq; impariter impar possit dici, appellabitur numerus primus; quales sunt omnes isti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c. Nam eos sola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter se numeri sunt, quos sola unitas, communis mensura, metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur, Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatem, nullus numerus, tamquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem uero isti 2. 4. tamen nullus istorum vtrunque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. primi inter se dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quius numerus, dici possunt, licet improprie, numeri inter se primi: quia sola vnitas unitatem, & numerum quemuis metitur.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quē numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes

nes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus: quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorũ & se ipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus nocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante unitates, & procreatus fuerit aliquis.

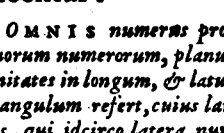
VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusque fuerit numerus 48. Ita quoque contra numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimusque eundem numerũ 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus

ptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. & e contrario. Et sic de reliquis.

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui uero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac rectæ lineæ angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur,



ut latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latũ dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum uero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CAETERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides solum definit planum quadrangulum

rem

rem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte quadrato geometrico, & figuræ altera parte longiori, similes sint, et æquales, siue ambitum, siue aream, capaciatemue spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quoad ambitum: tamen si aream, seu capaciatem consideres, ab iisdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

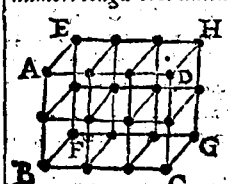
POTEST autem unus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum: Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie: quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ nouo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM uero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figurã quãdam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, ut lib. 11. explicabimus; cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 3. efficietur numerus 6. basis solidi numeri longa tres vnitates, & lata duas: Et si hæc basis in 4.



multiplicetur, hoc est, accipiatur quater, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens quatuor vnitatum. At si numerus 2. in 4. multiplicetur, habebitur basis 8. vnitatum, quæ multiplicata in 3. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 3. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit A B C D, duodecim vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B A, latitudo, tres complectitur; superponetur ei altera basis similis, & æqualis E F G H, ut totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo B F, vnitates duas. Similiter, si basis sit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor, & latitudo B F, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ duæ bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem B A, habens trium vnitatum. Si denique basis sit A B F E, sex vnitatum, cuius longitudo A B, tres continet, & latitudo B F, duas, superponentur illi tres aliæ bases similes, & æquales, constabitque totus numerus solidus unitatibus 24. quarum quatuor, altitudinem dabunt B C. Idem hîc numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cũ ex his mutuo multiplicatis pducat. Eodem q; modo de alijs numeris solidis iudicandũ erit.

DENIQVE

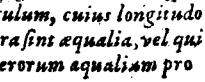
DENIQVE & vnitas aliquando solidus appellabitur numerus, & si non proprie, quia eius latera sunt tres vnitates, ipsam vnitatem ex mutua earū multiplicatione procreantes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, continenturque sub tribus numeris, omissis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam, quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius vnitates in formā planam rediguntur, referet perfectum quadratum Geometricum, in omnibus lateribus habens quinque vnitates, ideoque æqualiter æqualis erit.



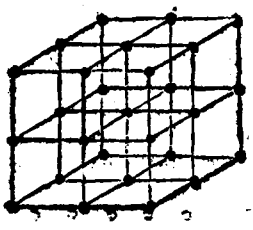
ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati a Geometris, radix vero ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

XIX.

CVBVS uero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius unitates in longũ, latum, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris æqualibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cũ ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipse numerus. 27. est æqualiter æqualis æqualiter.



QVILIBET vero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, plerisque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; uel eadem pars, uel eædem

parte;

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, uel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Definitio etenim uulgata Euclidis, quã puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atque imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſub multiplicitate, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis: At uero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente; In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, nec æque multiplex eſt, nec eadem pars, nec eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad defin. 3. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nempe triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quarta. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper

insuper eandem partem, nempe sextam; In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In ultimo tandem primus secundum, & tertius quartum, bis, et præterea easdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, nõ sit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel denique primus secundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propositi proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse ponuntur, concedendum necessario erit, si quidem maiores cum minoribus cõferuntur, quod primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes easdem: Et e contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habent. Nam si de proportione æqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto æqualem debere esse, ut proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra, eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem; Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idẽ eandẽ habet proportionem, æquales esse. Cum enim æquales numeri sint eiusdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadẽ partes; Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq; insuper illius partem, vel partes; Item cum idem numerus æqualiũ sit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadẽ partes:

Vel

Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, uel partes; perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

Rvrsvs quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel equemultiplices, uel eadem pars, uel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, uel partes: Item quia idē numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, uel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestum est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.

Pari ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionē, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si rectè hæc definitio intelligatur.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

Non necesse est, ut planus numerus plano numero sit similis, quælibet duo illius latera quibuslibet duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundū suas vnitates in formam planā redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniā illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. uel 12. 2.

Eodem modo, vt duo numeri solidi similes sint, nō requi-

ritur, ut quæuis tria unius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, ut tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. uel 16. 4. 3.

ITAQVE *possunt duo numeri plani, uel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, ut dictū est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.*

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS *ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ simul sumptæ conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua uia, ac ratione procreentur, (sunt enim præter ires dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. ultima lib. 9.*

QVOD *si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abūdans: si uero minores, Diminutus.*

His definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes uti uidentur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, uel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus secundum 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia uero vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam unius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, uel pars, partesue; uel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, uel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nempe quincuplus, dicetur

hac comparatio, habitudone, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60 confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aeque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, aequaliter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quã habet ad secundum: Et semper deinceps uno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiose explicata fuit in quinto lib. Vnde cum omnia, quae ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad ultimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertiũ, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

Hoc ita se habere, pluribus nerbis a nobis demonstratum est ad defin. 5. lib. 6.

Possvnt etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro tradita de alterna ratione, inuersaque; de compositione, diuisione, & conuersione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones uersantur, demõstrabuntur quoque in hoc septimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet posse sumi æquales, uel multiplices.

II.

QVOLIBET numero sumi posse maiorem.

Qvamvis enim numerus infinite diminui nequeat, sed necessario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri potest infinite per additionem continuam unita-

tis. Quare quolibet numero proposito maior exhiberi potest, ille uidelicet, qui ex unius unitatis, uel etiam plurium additione, consurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorū, uel eiusdem æque multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex est, uel æque multiplices sunt æquales, inter se æquales sunt.

III.

QVI numeri æqualiū numerorum, uel eiusdem, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, uel æquales, eadem pars, uel eædem partes fuerint, æquales inter se sunt.

V.

VNITAS omnem numerum per uni-

tates

tates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM unitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito unitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per unitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis unitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per unitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per unitatē.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquē produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, unitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

A .... B ...
C .....

VIII.

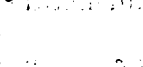
SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, unitates,

hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. uel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quē metitur, uel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.



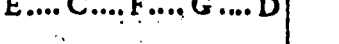
METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, uel multiplicatum a B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum B D. Cum enim A, metiatur ipsos B C, C D; erit tam B C, quam C D, ipsius A, multi-

A, multiplex: Diuiso ergo BC, in partes BE, EC, ipsi A, æquales, & ipsa CD, in partes CF, FG, GD, eidem A, æquales; erit numerus BD, compositus ex omnibus partibus BE, EC, CF, FG, GD, ipsi A, æqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum BD, metitur. Quod est propositum.



XI.

NVMERVS quemcunque numerũ metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum CD. Dico eundem A, metiri quoque numerum CD, quẽ B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum CD; erit CD, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo CD, in partes CE, ED, ipsi B, æquales; metietur A, ipsos numeros CE, ED; quandoquidem numerum B, tam numero CE, quam ED, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum CD, ex CE, ED, compositum. Quod est propositum.



XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum BC, & ablatum BD. Dico eundem A, metiri quoque reliquum DC. Cum enim A, metiatur & BC, & BD; erit tam EC, quam BD, ipsius

ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales; Eris reliquus numerus D C, uel una pars numeri B C, ipſi A, æqualis, uel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, uel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C.

A . . .
B ..... D . . . C
B ..... D C

Quod eſt propoſitum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus unquã metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

A ..... E .. G . B
C ... F .. D
H ——

SINT duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatẽ G B, quæ quidem præcedentẽ numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos; hoc eſt ſolam unitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter unitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerũ A E, (quod C D, uel pars ſit ipſius A E, uel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) metietur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum A B;

11. prop

AB; igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipſum CF; Igitur & H, ipſum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur, metietur quoque reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum EG; metietur etiã H, ipſum EG: Metiebatur autem & H, totum EB; Reliquam igitur unitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrẽ, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum. 12. pron. 11. pron. 12. pron. 11. pron. 12. pron.

SCHOLION.

CONVERTEMVS *facile cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.*

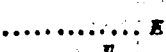
SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas.

SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorũ minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur.

A . . . . . E . . G -- B
C . . . . . F . . D

Metiatur enim, antequam ad vnitatẽ detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG; metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſe ipſum metiatur; metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF; Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atq; adeo cũ & ipſum FD, poſitus ſit metiri; metietur quoque CD, ex CF, FD, compoſitum. At vero CD, 11 pron. 10. pron. 11. pron. 10. pron.

11. pron. CD, metiatur ipsum AE: Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; metietur & AB, ex vtroque AE, EB, com



10. pron. positum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.

EODEM modo & hoc demonstrabimus.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem usque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquã reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, vt Euclides demonstrauit: Si uero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur; ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus utrunque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquũ GB, vtrunque AB, & CD, metiri.

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter

inter se, maximam eorum cõmunem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat repẽrire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B, quoties potest, relinquatq; E B, numerum, qui ex C D, subtractus relinquat F D, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidẽ peruenietur ad numerum, qui præcedentẽ metiatur. Nam si ad unitatẽ deueniretur, numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentũ ergo iam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrunq; metiatur, ita ostendemus. Quia F D, metitur ipsum E B; & E B, ipsum C F; metietur quoque F D, ipsum C F; atq; adeo cũ & seipsum metiatur, metietur & totũ C D, ex C F, F D, compositum. At C D, ipsum A E, metitur; Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac proptera cum F D, metiatur quoque ipsum E B; metietur etiã totum A B, ex utroque A E, E B, compositum. Metitur igitur F D, utrunquen umerum A B, C D.

A E B C F D G

1. *septimi*

11. *pron.*

10. *pron.*

11. *pron.*

10. *pron.*

QVOD autem F D, sit maxima mensura communis illorũ, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrunque A B, C D; Et C D, metitur ipsum A E; metietur quoque G, ipsum A E. Igitur & residuum E B: At uero E B, metitur C F; Metietur ergo & G, eundem C F; Igitur & residuum F D; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quã F D, numeros A B, C D, metietur; Ac proinde F D, maxima est mensura numerorum A B, C D.

11. 12. & 11. *pron.* 12. *pron.*

QVOD si minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipse maxima

A . . . . . B
C . . . . . D

[illegible] demonstrare. Datæ autem [illegible]

X. Ax. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

[illegible]

SCHOLIUM.

[illegible]

xima mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autē C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se sunt compositi. Quod est propositum.

A . . . . . .
B . . . . . .
C . . . . .
D . . . . . .
. . . . . 2. *septimi*
A . . . . . .
B . . . . . 11. *pron.*
C . . . . . .
D . . . . E . .

Simili arte explorabimus, an plures numeri; quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum cōmunem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensurā cōmunem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur

A . . . . . .
B . . . . . D . . .
C . . . . . E . . F — 2. *septimi*

quoque

quoque ipſum C; perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C. Nàm ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si uero D, nõ metiatur ipſum C; erũt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll. propos. 2 huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. Sit eorum

A . . . . . .
B . . . . . D . . . .
C . . . . . E . . F . . . .

2. *Septimi* maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram cõmunem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorum menſura cõmunis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C. & D; at D, ipſos A, & B; metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

11. *prop.* Quod autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quam E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communẽ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc perſpicuum eſt, quod numerus metiens tres numeros, metitur quoque maximam eorum communem mẽſuram. Hoc etiã colligitur ex ultima parte demonſtrationis; Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum

merum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maximā eorum communem mensurā inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, ut de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

A

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primo A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet unitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, nō primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito manifestum est A, partē esse numeri B.

A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipsum B; inuentā autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. Quia igitur C, pars est ipsius B, cū ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B: similiter & D E, & E F: Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

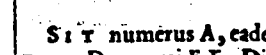
A .. D .. E .. F
B .....
C ..

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alte-

alterius eadem pars: Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico utrunque numerum A, & D, simul, utriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est uel A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F,



ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodē argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, uel C, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque A, & D, simul utriusque B C, & E F, simul, quę est A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

EODEM *modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.*

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera unitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas, uel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

HOC

Hoc autem perspicuum in his appositis exēplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A. D. A. D.
B. G. C. E, H. F. B. G. C. E. H. F.

Possumvs etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorū, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius.

Sint numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorū eadē pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omniū numerorum.

DE, FG, A. B. C.
HI, simul D. K. E. F. L. G. H. M. I
eandem esse

partē, quæ est A, ipsius DE. Diuisis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partiū numeri DE, æqualis multitudini partiū tam numeri FG, quā numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addātur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM, erunt quoq; A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erūt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatis numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, cōtinetur. Quamobrē eadē pars erūt A, B, C, simul ipsorū DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

Idem sequitur, si loco unius numerorū A, B, C, sumatur unitas, uel loco pluriū, uel etiā omniū, plures unitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

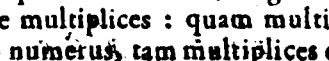
A. B. C. A. B. C.
D. K. E F. L. G H. M. I D. K. E F. L. G H. M. I

Theoremati quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

Si sint quotcũque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, eqhe multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul eorum D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F, erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E ipsius B, & F, ipsius C. Pertota igitur, quæ nuperne nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A. Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

QVOD si loco unius numerorum D, E, F, assumatur minor, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures minores, eadem rursus eodem modo demonstrabitur, ut ex sequentibus figuris apparet.



6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit, quæ unus unius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus

merus D E, numeri F. Dico utrunque numerum A B, & D E simul utriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ A B, ipsius C, uel A ... G ... B D ... H ... E D E, ipsius F. C ... F ... Diuisis. n. numeris A B, D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eadem partes est numerus A B, numeri C, quas numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; erit uterque A G, D H, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, uel D H, ipsius F. Eadem ratione erit uterque G B, H E, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, uel H E, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt totæ aggregata partium in numeris A B, D E, comprehensa, partes eædem numerorum C, F, simul, quot partes eadem est numerus A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Ac propterea eædem partes erit uterque numerus A B, D E, simul, utriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

5. *septimi*

SCHOLION.

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros extendemus, hoc modo ampliscabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ unus unius.

Eadem enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; ut hic perspicuum est.

A ... K ... B C ... L ... D E ... M ... F
G ... H I ...

ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo tam B C, quam B D, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus D C, uel una pars numeri B C, ipſi A, æqualis, uel plures, atque adeo D C, æqualis erit ipſi A, uel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum D C.

A . . .
B ..... D . . . C
B ..... D C

Quod eſt propoſitum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neq; reliquus unquã metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit unitas; qui principio propoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erunt.

SINT duo numeri propoſiti inæquales A B, C D, quorum C D, minor ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad unitatẽ G B, quæ quidem præcedentẽ numerum F D, metitur, detractio perueniat. Dico numeros A B, C D, eſſe inter ſe primos; hoc eſt ſolam unitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter unitatem. Quia ergo H, metitur numerum C D; & C D, numerũ A E, (quod C D, uel pars ſit ipſius A E, uel certe ei æqualis, cum detractus ex A B, reliquerit numerum E B,) metietur quoque H, ipſum A E: At H, metitur quoque totum A B;

A ..... E .. G . B
C ... F .. D
H ——

11. *pron*

A B; igitur & reliquum E B, metietur. Metitur autem E B, ipſum C F; Igitur & H, ipſum C F, metietur; Ac propterea, cum & totum C D, metiatur, metietur quoque reliquum F D. Cum ergo F D, metiatur ipſum E G; metietur etiã H, ipſum E G: Metiebatur autem & H, totum E B; Reliquam igitur unitatem quoque G B, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter unitatem, numeros A B, C D, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrẽ, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum. 12. pron. 11. pron. 12. pron. 11. pron. 12. pron.

SCHOLION.

CONVERTEMVS facile cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas.

SINT duo numeri inter ſe primi A B, C D, quorũ minor C D, ex maiore A B, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus E B, ex C D, quoties etiam poteſt; & reliquus F D, ex E B, relinquens G B. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur.

A ..... E .. G -- B
C ..... F .. D

Metiatur enim, antequam ad vnitatẽ detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus G B, præcedentem F D, ex E B, ablatum. Quia igitur numerus G B, numerum F D, metitur; & F D, ipſum E G; metietur quoque G B, ipſum E G. Cum ergo G B, & ſe ipſum metiatur; metietur quoque numerum E B, ex E G, G B, compoſitum: Metitur autem E B, ipſum C F; Igitur & G B, eundem C F, metietur: Atq; adeo cũ & ipſum F D, poſitus ſit metiri; metietur quoque C D, ex C F, F D, compoſitum. At vero C D, 11 pron. 10. pron. 11. pron. 10. pron.

11. pron. CD, metitur ipsum AE: Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde cum & ipsum EB, metiatur,

10. pron. vt ostensum est; metietur & AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.

EODEM modo & hoc demonstrabimus.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem usque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, vt Euclides demonstrauit: Si uero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur; ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus utrunque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrunque AB, & CD, metiri.

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter

inter se, maximam eorum cõmunem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri A B, C D, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor C D, ex maiore A B, quoties potest, relinquatq; E B, numerum, qui ex C D, subtractus relinquat F D, & sic deinceps semper minor de maiore subtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidẽ peruenietur ad numerum, qui præcedentẽ metiatur. Nam si ad unitatẽ deueniretur, numeri A B, C D, essent inter se primi; quod est contra hypothesim. Peruentũ ergo iam sit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex E B, nihil relinquat, sed eum metiatur. Dico F D, esse maximam mensuram communem numerorum A B, C D. Quod enim utrunq; metiatur, ita ostendemus. Quia F D, metitur ipsum E B; & E B, ipsum C F; metietur quoque F D, ipsum C F; atq; adeo cũ & seipsum metiatur, metietur & totũ C D, ex C F, F D, compositum. At C D, ipsum A E, metitur; Igitur & F D, eundem A E, metietur. Ac proptea cum F D, metiatur quoque ipsum E B; metietur etiã totum A B, ex utroque A E, E B, compositum. Metitur igitur F D, utrunquen umerum A B, C D.

A ∴ E ∴ B
C ∴ F ∴ D
G

1. *septimi*

11. *pron.* 10. *pron.* 11. *pron.* 10. *pron.*

QVOD autem F D, sit maxima mensura communis illorũ, ita probabimus. Si enim fieri potest, detur maior mensura communis G, quam F D. Quoniam ergo G, metitur utrunque A B, C D; Et C D, metitur ipsum A E; metietur quoque G, ipsum A E. Igitur & residuum E B: At uero E B, metitur C F; Metietur ergo & G, eundem C F; Igitur & residuum F D; maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quã F D, numeros A B, C D, metitur; Ac proinde F D, maxima est mensura numerorum A B, C D.

11. 12. & 11. *pron.* 12. *pron.*

QVOD si minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita ut detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipse maxima

ma amborum mẽsura communis, cum & se ipsum metiatur. Duobus igitur numeris datis non primis inter se, &c. Quod erat faciendum.

A . . . . . B
C . . . . . D

COROLLARIVM.

Ex hoc manifestum est, quod numerus metiens duos numeros, metitur & maximam eorundem communem mensuram. Hoc elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit F D, esse maximam mensuram ipsorum A B, C D. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros A B, C D, metiri quoque numerum F D, maximam eorum mensuram cõmunem. Eademq; ratio est de cæteris.

SCHOLION.

Ex dictis facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.

A . . . . . B . . . . . C . . . . . D

Si vero A, & B, fuerint inter se compositi, sit eorum maxima mensura communis inuenta D; qua si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numerum D, communem mensuram. 2. *septimi*

Quod si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; Erunt C, & D, uel inter se primi, uel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicamur esse inter se compositi, ita ut habeant numerum communem mensuram, metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam

ximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autē C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. Inuenta enim numerorum C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se sunt compositi. Quod est propositum.

A . . . . . .
B . . . . . .
C . . . . .
D . . . . . .
A . . . . . .
B . . . . . .
C . . . . .
D . . . . E . .

2. *septimi*

11. *pron.*

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri; quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum idetit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, ut de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum cōmunem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensurā cōmunem oporteat reperire. Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur

A . . . . . .
B . . . . . D . . .
C . . . . . E . . F ——

2. *septimi*

quoque

quoque ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C. Nàm ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum. Si uero D, nõ metiatur ipſum C; erũt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll. propos. 2 huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur, etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe compoſiti. Sit eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram cõmunem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorum menſura cõmunis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipſos A, & B; metietur quoque E, ipſos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . .
C . . . . . E . . F . . . .

2. *Septimi*

11. *prop.*

QVOD autem E, ſit maxima eorum communis menſura, perſpicuum eſt. Si enim fieri poteſt, ſit F, maior quam E, eorum menſura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum menſuram communẽ. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum menſuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima menſura eſt ipſorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perſpicuum eſt, quod numerus metiens tres numeros, metitur quoque maximam eorum communem mẽſuram. Hoc etiã colligitur ex ultima parte demonſtrationis; Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum

merum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumq; habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua uero omnia perageanda, ut de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primo A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet unitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, nō primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito manifestum est A, partē esse numeri B.

A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipsum B; inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes A D, D E, E F, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. Quia igitur C, pars est ipsius B, cū ipsum metiatur; erit quoque A D, pars eiusdem B; similiter & D E, & E F: Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

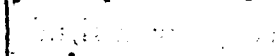
A .. D .. E .. F
B .....
C ..

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alte-

alterius eadem pars: Et simul uterque utriusque simul eadem pars erit, quæ unus unius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ est numerus D, numeri E F. Dico utrunque numerum A, & D, simul, utriusque numeri B C, & E F, simul eandem esse partem, quæ est uel A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Diuisis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F,



ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars est A, ipsius B C, quæ D, ipsius E F. Quia igitur A, & B G, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, simul æquales ipsis B G, & E H, simul: Eodē argumento erunt A, & D, simul ipsis G C, & H F, simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, uel C, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit uterque A, & D, simul utriusque B C, & E F, simul, quę est A, ipsius B C, uel D, ipsius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

EODEM *modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.*

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera unitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul utraque unitas, uel unitas & numerus simul, utriusque numeri simul eadem pars erit, quæ unitas numeri.

HOC autem perspicuum in his appositis exẽplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A. D. A. D.
B. G. C. E. H. F. B. G. C. E. H. F.

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quæcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorũ, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ unus unius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorũ eadẽ pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omniũ numerorum

DE, FG, A... B... C...
HI, simul D... K... E. F... L... G. H... M... I
eandem esse
partẽ, quæ est A, ipsius DE. Diuisis.n. numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partiũ numeri DE, æqualis multitudini partiũ tam numeri FG, quã numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addãtur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM, erunt quoq; A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erũt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatis numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, cõtinetur. Quamobrẽ eadẽ pars erũt A, B, C, simul ipsorũ DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco unius numerorũ A, B, C, sumatur unitas, uel loco pluriũ, uel etiã omniũ, plures unitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A. B... C.. A. B. C.
D. K. E F. L. G H. M. I D. K. E F. L. G H. M. I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est unius unus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul cum omnium D, E, F, simul tam multiplicans esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E ipsius B, & F, ipsius C. Pertota igitur, quæ antea nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A. Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

QVOD si loco unius numerorum D, E, F, assumantur unitas, ut etiam loco pluriorum, aut omnium, plures unitates, eadem prorsus eodem modo demonstrabitur, ut ex sequentibus figuris apparet.

A ... B ... C ... A ... B ... C ...
D . E . F ... D . E . F .

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul uterque utriusque simul eædem partes erit, quæ unus unius.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quæ numerus

merus D E, numeri F. Dico utrunque numerum A B, & D E simul utriusque numeri C, & F, simul eadem partes esse, quæ A B, ipsius C, uel A G ... B D ... H E D E, ipsius F. C ... F ... Diuisis. n. numeris A B, D E, in partes A G, G B; D H, H E, numerorum C, & F, erit multitudo partium in numero A B, æqualis multitudini partium in numero D E; propterea quod eadem partes est numerus A B, numeri C, quas numerus D E, numeri F. Quia igitur, quæ pars est A G, numeri C, eadem est D H, numeri F; erit uterque A G, D H, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ A G, ipsius C, uel D H, ipsius F. Eadem ratione erit uterque G B, H E, simul eadem pars utriusque C, F, simul, quæ G B, ipsius C, uel H E, ipsius F. Et sic deinceps, si plures partes fuerint in A B, D E, erunt congregata partium in numeris A B, D E, simul, partes eædem numerorum C, F, simul, quot partes eadem est numerus A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Ac propterea eadem partes erit uterque numerus A B, D E, simul, utriusque numeri C, F, simul, quæ A B, ipsius C, uel D E, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. 5. *septimi*

SCHOLION.

Sed & hanc propositionem ad quotcunque numeros extendemus, hoc modo amplificabimus.

Si sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ unus unius. ... A ... K ... B ... L ... D ... E ... M ... F ... G ... H ... L ...

Eadem enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; ut hic perspicuum est.

7.

THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus A B, eadem pars numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquum E B, eandem esse partem reliqui F D, quæ est totus A B, totius C D. Nam cum enim E B, numerus G C, eadem pars, quæ est A E, ipsius C F, uel totus A B, totius C D. Quia igitur A E, eadem est pars ipsius C F, quæ E B, ipsius G C; erit uterque A E, E B, simul eadem pars utriusq; simul C F, G C, quę A E, ipsius C F, hoc est, quæ totus A B, totius C D; Ac propterea cum A B, eadem sit pars utriusque numeri F G, C D, erunt ipsi numeri F G, C D, inter se æquales. Demptо ergo communi C F, æquales remanebunt G C, F D. Eadem igitur pars erit E B, ipsius F D, quæ ipsius G C, hoc est, quæ totus A B, totius C D. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . E . . B
G . . . . . C . . F . . . . . D

5. *septimi*

SCHOLION.

IDEM *hoc theorema uerum est, etiam si ablata sit unitas A E, uel reliqua fuerit unitas E B; uel denique & ablata, & reliqua sit unitas, ut ex his exemplis apparet.*

A . F . . B A . . . E . B A . E . B
G . . . . . C . . F . . . . . D G . . C . . . . . F . . D G . . C . . F . . D

CAETERUM *& ex his theorematі quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus.*

8. SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita

multi-

multiplex erit, ut totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theoreme illud quintæ lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D, æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita esse multiplicem, ut est totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipsius C D, sit æque multiplex, atque A E, ipsius C F; erit e contrario totus C D, totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E. Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac proinde e contrario E B, ita multiplex erit ipsius F D, ut A B, ipsius C D, est multiplex. 7. septimi

A . . . . . E . . . . . B
C . . . . F . . D

SI aliquando ex C D, ablata fuerit unitas C F; uel reliqua sit unitas F D: uel denique & ablata sit unitas C F, & alia reliqua F D; idem demonstrabitur, ut hæc exempla commonstrant.

A . . . E . . . . . B A . . . . E . . . B A . . . . E . . . . B
C . F . . D C . . F . D C . F . D

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquũ E B, easdem esse partes reliqui F D, quæ totus A B, totius C D. Sumpto enim numero G H, æquali ipsi A B; erit

A . . . . . K . . . . . E . . . . B
C . . . . . F . . . . . D
G . . . . . L . . I . . . . . M . . H

GH, eædem partes ipsius CD; quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo GH, in partes GI, IH, numero CD; & AB, in partes AK, KE, numero CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partiũ AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, uel IH, totius CD. Quoniã ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius FD; erit uterque GL, IH, simul eadem partes ipsius CD, quæ uterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & uterque LI, MH, simul eadem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quòd uero si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliquæ EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoque EB, reliquus eadem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nempe, quæ uterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A.....K.....E....B
C.....F.....D
G.....L..I.....M..H

7. *Septimi*

6. *Septimi.*

SCHOLION.

Non demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentẽ, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabat hic, reliquum numerũ EB, alicuius numeri eaſdem esse partes, quas est numerus AE, numeri CF; ibi uero perspi-

perfpicuum erat, reliquum E B, alicuius numeri eandem eſſe partem, quæ eſt A E, ipſius C F. Licet enim ipſius E B, duplũ aſſumere, triplum, quadruplum, &c. donec E B, ſit itæ ſub multiplex numeri aſſumpti G C, ut A E, eſt ſubmultiplex ipſius C F.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9. I

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; Et uicissim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadẽ pars erit, uel eædem partes & ſecundus quarti.

SIT numerus A, numeri B C, eadem pars, quæ numerus D, numeri E F, ſintque A, B C, minores ipſis D, E F, ſinguli ſinguli. Dico & uicissim eandem partem eſſe, aut eadem partes A, ipſius D quã eſt, aut quales B C, ipſius E F. Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C, & E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F. Quæ uero B G, G C, inter ſe ſunt æquales, & minores quã E H, H F, quæ inter ſe etiam æquales ſunt; quod & totus B C, toto E F, minor ponitur; Erit B G, ipſius E H, eadem pars, aut partes, quæ G C, ipſius H F; ac propterea & uterque B G, G C, ſimul, nempe B C, ſecundus utriuſque E H, H F, ſimul, nimirum E F, quarti eadem pars, uel partes, quæ B G, ipſius E H, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . .
B . . . . G C
D . . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

5. uel 6. ſeptimi.

SCHOLION.

QVOD ſi loco primi numeri unitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars ſit, quæ alter numerus ulterius: Erit uicissim unitas ad



unitas tertij numeri eadē pars, quæ ſecundus numerus quarti; id, quod eodem argumento confirmabitur, ſi loco partium aſſumamus partem in demōſtratione, ut ex hoc exemplo apparet.

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et uiciſſim, quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

SIT numerus A B, eædem partes numeri C, quę numerus D E, numeri F, ſintque A B, C, ipſis D E, F, minores, ſinguli ſingulis. Dico & uiciſſim, numerum A B, eaſdem partes eſſe, aut partem numeri D E, quæ numerus C, eſt numeri F. Diuiſis enim numeris A B, D E, in partes A G, GB, & D H, H E, numerorum C, & F; erit multitudo partiū in A B, æqualis multitudini partium in D E, & tam A G, quam G B, eadem pars ipſius C, quæ tam D H, quam H E, ipſius F. Viciſſim ergo eadem pars erit, aut partes A G, ipſius D H, & G B, ipſius H E, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadē pars erit, uel partes A G, ipſius D H, quæ G B, ipſius H E. Igitur & uterque A G, GB, ſimul, nimirum primus A B, eadem pars erit, aut partes utriuſque D H, H E, ſimul, nimirum D E, tertij, quæ A G, ipſius D H, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.



9. *ſeptimi*

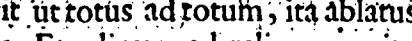
7. *uel* 5. *ſeptimi.*

THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

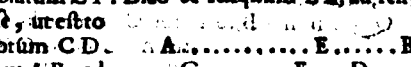
SI fuerit ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, ut totus ad totum.

SIT ut totus numerus A B, ad totum C D, ita ablatus A E, ad ablatum C F. Dico & reliquum E B, ad reliquum F D, esse, ut est totus A B, ad totum C D.



Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita A E, ad C F; erit per defin. 20. A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, uel æque multiplex, uel eadem pars, uel eædem partes: uel certe A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel easdem partes. Sit primum A B, ipsius C D, & A E, ipsius C F, æque multiplex. Quo posito erit e contrario C D, totus totius A B, eadem pars, quæ ablatus C F, ablati A E, propter A B, A E, æque multiplices ipsorum C D, C F. Igitur & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, quæ totus C D, totius A B; Ac propterea e contrario A B, ipsius C D, & E B, ipsius F D, æque multiplex erit. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D. 7. *Septimi*

SIT secundo A B, ipsius C D; & A E, ipsius C F, eadem pars, uel eædem partes. Quo posito, erit & reliquus E B, reliqui F D, eadē pars, uel partes, quæ totus A B, totius C D; Ac proinde, per defin. 20. erit ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

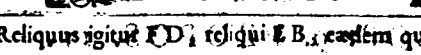


7. *uel* 8. *Septimi.*

CONTINEAT tertio A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quo posito, erit e cōtrario C D, totus totius A B, eadē partes, quæ ablatus C F, ablati A E, ut mox demōstrabimus.

Reli-

8. *septimi* Reliquus igitur F D, reliqui E B, eadem quoque partes

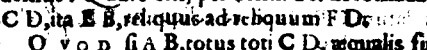


erit, quæ totus C D, totius A B: Ac propterea, e contrario A B, ipsum C D, & E B, ipsum F D, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes, ut mox ostendemus. Quare erit, per defin. 20. ut totus A B, ad totum C D, ita E B, reliquus ad reliquum F D.

QVOD si A B, totus toti C D, æqualis fuerit, & ablatus A E, ablato C F, perspicuum est reliquum E B, quoque esse æqualem reliquo F D. Nam si ab æqualibus æqualia demantur, quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, ut totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. QUOD erat demonstrandum.

LEMMA.

QVOD *autem, si A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius uel partes; e contrario C D, ipsius A B, & C F, ipsius A E,*



sit eadem partes: Et si C D, ipsius A B, & C F, ipsius A E, sit eadē partes: e contrario A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter contineat, eandemque illius partem uel partes; hoc modo demonstrabimus. Contineat primo A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, nempe semel, uel bis, uel ter, &c. eandemque insuper partem, G B,

quidem

quidem ipsius C D, & H E, ipsius C F, ita ut numeri reliqui A G, A H, sint uel æquales ipsis C D, C F, uel eorum æque multiplices. . . Diuisis igitur numeris C D, C F, in partes C I, I K, K D: & C L, L M, M F, ipsis G B, H E, æquales; erit multitudo partium numeri C D, multitudini partium numeri C F, æqualis, quod G B, ipsius C D, sit eadem pars, quæ H E, ipsius C F. Similiter diuisis numeris A G, A H, in partes A N, N O, O G: &, A P, P Q, Q H, eisdem G B, H E, æquales: erit quoque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis. Cum enim A G, A H, uel æquales sint ipsis C D, C F, uel eorum æque multiplices: erunt uel tot partes in A G, A H, quot in C D, C F; uel certe numerus partium numeri C D, toties continebitur in A G, quoties numerus partium numeri C F, in A H; propterea æque multitudo partium numeri A G, multitudini partium numeri A H, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes G B, H E, erit & multitudo partium numeri A B, multitudini partium numeri A E, æqualis: Atque adeo una pars numeri C D, eadem pars erit numeri A B, quæ una pars numeri C F, est numeri A E. Quare cum multitudo partium numeri C D, æqualis sit multitudini partium numeri C F: erit C D, eadem pars numeri A B, quæ C F, ipsius A E.

CONTINEAT secundo A B, ipsum C D, & A E, ipsum C F, æqualiter, nimirum semel, bis, ter, quoties uis, &c. easdemque insuper partes illius, numerus quidem A B, partes G B, numeri C D, & numerus A E, partes H E, numeri C F, ita ut reliqui numeri

ri AG, AH, sint rursum uel æquales ipsis CD, CF, uel eorũ æquemultiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CB, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, quod qualibet partium numeri GB, eadem pars sit numeri CD, quæ unaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, uel æquales sint ipsis CD, CF, uel earum æquemultiplices; erunt uel tot partes in AG, AH, quot in GD, CE, uel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH: propterea aq; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atque adeo una pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ una

pars

pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

IAM uero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, eadem partes. Dico e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, uel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, superueritque eadem pars, uel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF, continentur in AE, & quæ pars, aut partes ipsius CF, supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & AB, AE. Ita enim fit, ut multitudines æquales partium numerorum AB, AE, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum CD, CF, & insuper in duobus illis numeris supersint. partes numerorum CD, CF, multitudine æquales. Quam ob rem AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, uel partes. Quod secundo est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 13.

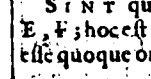
SI sint quotcunque numeri proportionales,

nales, erit quemadmodum unus antecedentium ad unum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B, C, D, E, F; hoc est, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoque omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, ut est A, ad B. Sint enim primæ A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, eadem pars est, aut partes A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E, ipsius F; erit quoque uterque A, C, simul utriusque B, D, simul eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, uel E, ipsius F. Rursus quia uterque A, C, simul, tanquam unus, utriusque B, D, simul, tanquam unius, eadem pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; erunt & ambo A, C, tanquam unus, & E, simul, amborum B, D, tanquam unius, & F, simul eadem pars, uel partes, quæ A, ipsius B. Quare, per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul ad omnes B, D, E, simul, quæ est ipsius A, ad B.

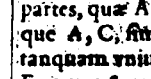
1. uel 6. septimi.

2. uel 6. septimi.



SINT secundo A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars, quam D, ipsius C, & F, ipsius E; Atque adeo ut prius, erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & e contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. Quare per defin. 20. eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hocidem utrumlibet, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, uel etiam omnes, sint numerorum ad unitatem. Est enim eadem semper demonstratio, ut hinc apparet,

5. septimi



paret, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

A... C... E..... A... C... E..... A... C... E...
B. D.. F... D. D. F... B. D.. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C, ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque insuper partem, A..... G... E.....
uel partes; Erit B..... D... F.....
per lemma præce-
dentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & E, ipsius E, eadem partes. Igitur ut prius, erunt omnes B, D, F, omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ B, ipsius A. Atque adeo per idem lemma, e contrario continebunt: omnes numeri A, C, E, simul, omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum B, æqualiter, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. 6. septimi.

SINT quarto & ultimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C,
simul æquales ipsis B, A .... C .... E....
D, simul, quibus si rur- B .... D .... F....
sum addantur æquales
E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, ut A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum utrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 14.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et uicissim proportionales erunt.

SINT A, ad B, ut C, ad D. Dico uicissim esse A, ad C,

ut B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quam B, & D; & A, quoque minor, quam C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem,

A . . . . C . . . . . A, ipsius B, & C, ipsius D,
B . . . . D . . . . . eadem pars, uel partes. Vicissim ergo & A, ipsius C, &

9. vel 10. septimi. B, ipsius D, eadē pars erit, uel partes: Ac proinde per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

SINT secundo A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, uel

A . . . . . C . . .
9. vel 10. septimi. B . . . . . D . . . . partes. Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit, uel partes: Atque adeo e contrario, uel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, uel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. erit ut A, ad C, ita B, ad D.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo posito, erit ob eandem proportionem, uel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; uel certe

A, ipsum B, & C, ipsum D, cō-
A . . . . C . . . . . tinebit æqualiter, eandemq; in-
B . . . . D . . . . . super partem, uel partes; Atq; adeo e cōtrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, uel eadem pars, uel certe, per lemma propos.

9. vel 10. septimi. 11. huius lib. eædem partes. Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, uel partes; Ac proinde, per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque major quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, uel æque multiplex, uel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter cōtinebit, eandemque insuper partem uel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, uel eadem pars, uel certe, per

per lemma propos. 12. huius lib. eædem partes. Vicissim ergo & D, ipsius B; & C, ipsius A, eadem pars erit, uel partes; Ac propterea e contrario uel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, uel certe, per lemma adductum, B, ipsum D, & A, ipsum C continebit æqualiter, eandemque insuper partem uel partes. Quare per defin. 20. eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit ut A, ad C, ita B, ad D. 9 *uel* 10. *septimi*.

SINT quinto A, & C, ipsis B, & D, æquales, & A, minor quã C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, uel eadem pars, uel eædem partes sunt; Erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . C . . .
B . . . D . . .

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorũ C, & D, uel æque multiplices sunt, uel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, uel partes; erit, per defin. 20. ut A, ad C, ita B, ad D.

A . . . . C . . .
B . . . . D . . .

SINT septimo ac ultimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales. Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, uel eadem pars, uel eædem partes; uel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, uel partes; suntque A, & C, æquales, æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, ut A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & uicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A . . . . . C . . . .
B . . . D . . .

SCHOLION.

COACTI *sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere eosque demonstrationibus certissimis confirmare, una cum lemmate propos. 11. ut earum uti-*

tat in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat offendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, ut perspicue ex eorundem auctorum demonstrationib⁹ apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, ut nonnulli concedunt, quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, ubi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, uel eadem pars, uel eadem partes, &c. Nam si existimaret maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, uel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, ut manifestum est: quare reliqua omnia uerba definitionis supernacanea essent.

15. ## THEOR. 12. PROPOS. 14.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque ut A, ad B, ita D, ad E; & ut B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse ut A, ad C, ita D, ad F. Quoniam est, ut A, ad B, ita D, ad E; erit uicissim, ut A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eadem ob causam, cum sit, ut B, ad C, ita E, ad F; erit uicissim, ut B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit ut A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim utraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni

13. *septimi*

A..... D.....
B..... E.....
C..... F...
G..... H.....

portioni B, ad F, ut demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, ut mox oſtendetur.) Ac proinde uiciſſim, ut A, ad C, ita D, ad F. 13. ſeptim

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita ut ſit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe, ut A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autē ut C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit ut A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLION.

IDEM uerum eſt, ſi loco unius numeri unitas aſſumatur, uel etiam loco plurium plures unitates, ut in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A . D . . .
B . . E . . . . .
C . . . F . . . . . .
G . H . . .

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorū, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, uel eadem pars, uel

A . . . . . B . . . . . C . . . .
D . . . . . E . . . . . F . . .

eadem partes; uel certe B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quam C, ipsum F, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, uel partes. Quare per defin. 20. pumeri A, D, C, F, proportionales sunt, ut quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositum.

Hoc idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

16. ## THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI unitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterũ quẽdam numerum metiatur: Et uicissim æque unitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR unitas A, numerum B C, & numerus D, numerum E F, æque. Dico uicissim unitatem A, numerum D, & numerum B C, numerum E F, æque metiri. Diuiso enim numero

A. D.. B C, in unitates B G, G H, H C, & numero E F, in partes E I, I K, K F, ipsi D, æquales; erit multitudo unitatum numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, metieturque æque unitas A, numerum D, & unitas B G, ipsum E I, atque unitas G H, ipsum I K, & unitas H C, ipsum K F: atque idcirco eadem pars erit unitas A, numeri D, & unitas B G, numeri E I, quæ unitas G H, numeri I K, & unitas H C, numeri K F. Quare per ea, quæ ad propos. 5 huius lib. ostendimus, eadem pars erunt unitates B G, G H, simul numerorum E I, I K, simul, quæ unitas B G, numeri E I, uel unitas H C, numeri K F. Itaque quia eadẽ pars est unitas H C, numeri K F, quæ numerus B H, numeri E K; erit, ut ibidẽ demõstrauimus, unitas H C, & numerus B H, simul, utriusque

que numeri K F, E K, simul, eadem pars, quæ unitas H C, numeri K F, hoc est, quæ unitas A, numeri D; Ac proinde unitas A, numerum D, & numerus B C, ex unitate H C, & numero B H, compositus, numerum E F, ex numeris A F, E K, compositum æquè metietur. Si unitas igitur numerū quempiam metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Illvd idem, quod Euclides demonstravit de numeris, propos. 13. ostendit hoc in loco separatim de unitate, & tribus numeris, propterea quod unitas non est numerus. Quod quidem brevius ita nos demonstrabimus. Quia unitas A, numerum B C, æque metitur, atque numerus D, numerum E F; erit unitas A, eadē pars numeri B C, quæ numerus D, numeri E F. Per ea igitur, quæ ad propos. 9. demonstravimus, erit uicissim unitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus B C, numeri E F; Ac propterea unitas A, numerum D, & numerus B C, numerum E F, æque metietur.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri mutuo se se multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

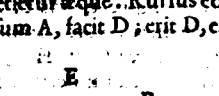
Dvo numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita ut A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim unitate E; cū A, ipsum B, multiplicans faciat C; erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, unitates; atque adeo unitas E, numerū A, & numerus B, numerum C, æque metietur. Vicissim ergo & unitas E, numerum B, & numerus A, numerum C,

E
A . . . B . . .
D . . . . . C . . . . . .

15 *defin.*

15. *septimi*

metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, unitates, atque adeo unitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autē & eadem unitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerum C, æque. Aeque igitur numerus A, utrunque numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

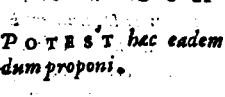


SCHOLION.

POTEST *hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.*

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur unus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam ut prius, cū A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus unitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At uero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, etiam unitas E, numerum B, & numerus A, numerū factum, per defin. 15. æque metitur. Idē ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quando quidem ipsum numerus A, æque metitur, atque unitas E, ipsum B.



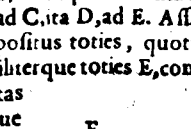
18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans, fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandem ra-

tionem

tionem habebunt, quam multiplicati.

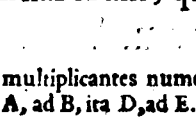
NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, ut B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim unitate F; erit D, ex B, cõpositus toties, quoties unitas F, est in A, per defin. 15. similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem unitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit; Ac proinde, per defin. 20. erit ut B, ad D, ita C, ad E; et permutando, ut B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat. 13. *septimi*



THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiã multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse ut A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cũ ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicãs ipsos A, & B, facit D, & E; erit, ut A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum. 16. *septimi* 17. *septimi*



SCHO-

SCHOLION.

HANC propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multipli cet, uel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, uel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, uel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quos numeri multiplicantes, uel multiplicati B, C, D: hoc est, esse, ut B, ad C, ita E, ad F; & ut C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, uel ex B, C, in A, fiant E, F; erit ut B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, uel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque ut C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E . . . . . F . . . . . G . . . . . .

17. uel 18. septimi.

20. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, ut quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quar-

D quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; erit, ut C, ad D, hoc est, ut A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam uidelicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus. 17. septimi 18. septimi

A . . .
B . .
C . . . . . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartũ genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, ut quidẽ A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; erit ut C, ad D, ita G, ad E, uel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, ut ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; erit quoque, ut A, ad B, ita idẽ G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, ut A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum. 17. septimi 18. septimi

SCHOLION.

POTERAT *huius theorematis prima pars proponi etiam ad hunc modum.*

SI duo numeri duos numeros eandem, quá illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA *enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente,*

dente, in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

20. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidē A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, erit numerus factus ex A, in C,

A.....
B..... D.....
C....

19. *septimi* æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur.

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se: Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B; erit, ut B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D,

19. *septimi* tertium; erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, ut quidem A, ad B, ita D, ad C, uel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c.

Quod demonstrandum erat.

THEOR.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor uero minorem.

SINT numeri A B, C D, minimi in proportione eadē, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita ut sit, quemadmodum A B, ad C D, ita E, ad F. Dico A B, C D, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem A B, ipsum maiorem E, at minorem C D, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, ut A B, ad C D, ita E, ad F; erit uicissim, ut A B, ad E, ita C D, ad F; Atque adeo cum A B, C D, minores sint, quam E F; erit A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eadem pars, uel partes. Partes quidem nequaquam; Diuisis namque, si fieri potest, A B, C D, in partes A G, G B; C H, H D, numerorum E, F; erit multitudo partium A G, G B, æqualis multitudini partium C H, H D; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. Erit ergo, ut A G, ad E, ita C H, ad F; & uicissim, ut A G, ad C H, ita E, ad F, uel A B, ad C D; Ac proinde numeri A G, C H, minores quam A B, C D, eandem habebunt proportionem, quam A B, C D. Quod est absurdum; cum A B, C D, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo A B, ipsius E, & C D, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea A B, ipsum E, & C D, ipsum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandē cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . .
F . . . . . .

13. *septimi*

20. *defin.*

SCHOLION.

PARI *ratione, & hoc uerum est, quod Campanus docet,*

QVOT-

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B, C D, E F, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit

A... K... B C.. L. D E.... M.... F
G..... H..... I.....

proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, ſiue non; ita ut non poſſint reperiri alij numeri ipſis A B, C D, E F, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, ut A B ad C D; & ſecundus ad tertium, ut C D ad E F, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio A B, ad C D, in numeris 4. ad 2. uel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis A B, C D; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8 & 10. proportio uero 20. ad 25. in 4. & 5, uel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, ut A B, ad C D; & H, ad I, ut C D, ad E F. Dico A B, ipſum G, & C D, ipſum H, & E F, ipſum I, metiri æque. Cum enim ſit ut A B, ad
13. ſeptimi *C D, ita G, ad H; erit uicißim ut A B, ad G, ita C D, ad H. Eodem modo, cum ſit ut C D, ad E F, ita H, ad I, erit quoque uicißim, ut C D, ad H, ita E F, ad I. Quare A B, ipſius*
20 defin *G, & C D, ipſius H, & E F, ipſius I, erit uel eadem pars, uel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, A B, C D, E F, in A K, K B; C L, L D; E M, M F, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in A B, quot in C D, & in E F; atque adeo A K, ipſius G, &*
20 defin. *C L, ipſius H, eadem pars. Erit ergo ut A K, ad G, ita*

C L,

C L, ad H & uicissim ut A K, ad C L, ita G, ad H, uel A B, ad C D. Eodemque modo erit, ut C L, ad E M, ita C D, ad E F. Quare continuantur numeri A K, C L, E M, in proportionibus numerorum A B, C D, E F, & minores quam A B, C D, E F. Quod est absurdum, cum hi ponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Non ergo A B, C D, E F, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea A B, ipsum G, & C D, ipsum H, & E F, ipsum I, aque metietur. Quod est propositum. 23. septimi

Quod si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita ut etiam quilibet duo minimi sint, facilius idem hoc modo demonstrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui easdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, aque metiri. Nã per hãc propos. 21. A, B, cũ sint minimi in proportione A, ad B, aque metientur ipsos D, E; eademq; ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, eque metiatur, ac B, ipsum E; metientur aque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

A.. B.... C...
D.... E..... F.....

THEOR. 20. PROPOS. 22. 19.

SI fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini sumantur, & in eadẽ ratione, sitque perturbata eorũ proportio, ut quidẽ A, ad B, ita E, ad F; & ut B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque esse

A ..... H ...
B ... D ....
C..... E .....
G....., F ..

ut

ut A, ad C, ita D, ad F. Cum enim sit ut A, ad B, ita E, ad
19. *septimi* F; erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, eum sit etiam ut B, ad C, ita D, ad E, erit eidē numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atq; adeo numerus genitus ex A, primo in F, quantum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. Quare erit
19. *septimi* ut A, ad C, ita D, ad F.

A . . . . . H . . .
B . . . D . . . .
C . . . . . E . . . . . .
G . . . . . F . .

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita ut sit etiam C, ad G, ut H, ad D; Dico adhuc esse, ut A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse ut A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem, ut C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, ut A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idē ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

QVONIAM Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13 & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliquos quatuor modos in numeris, & alia quædam ostendere, octo sequentibus theorematibus.

I. SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo proportionales erunt.

SIT

SIT, ut A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse ut B, ad A, ita D, ad C. Cum enim sit C, ad D, ut A, ad B, erit uicissim C, ad A, ut D, ad B. Rursus quia est D, ad B, ut C, ad A, erit uicissim D, ad C, ut B, ad A, hoc est, ut B, ad A, ita D, ad C. Quod est propositum.

A ... C
B ... D

13. septimi

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt. II.

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & dividendo esse, ut AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit ut AB, ad CB, ita DE, ad FE, erit uicissim, ut totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, ut totus AB, ad totum DE, ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, ut CB, ad FE. Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, ut DF, ad FE. Quod est propositum.

A ... C ... B
D ... F ... E

13. septimi
11. septimi
13. septimi

SI diuisi numeri proportionales sint; Hi quoque compositi proportionales erunt. III.

SIT ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo, esse ut AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit uicissim, ut AB, ad DE, ita BC, ad EF; Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, ut BC, ad EF: Et uicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, ut DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

A ... B ... C
D ... E ... F

13. septimi
12. septimi
13. septimi

SI compositi numeri proportionales sint; Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. IIII.

SIT ut AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuer-

sionem rationis esse quoque, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cum enim sit, ut A B, ad C B, ita D E, ad F E, erit uicissim,

13. *septimi* *ut totus A B, ad totum D E, ita ablatus C B, ad ablatum F E; Ac proinde, ut totus A B, ad totum D E, ita*

11. *septimi* *erit reliquus A C, ad reliquum D F,*

13. *septimi* *Vicissim igitur, ut A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.*

A. B. C. D. E. F.

REVERSO *ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.*

V. SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eádem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT ut A B, primus ad C, secundum, ita D E, tertius ad F, quartum: Item ut B G, quintus ad C, secundum, ita E H, sextus ad F, quartum. Dico ita esse A G, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, ut est D H, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cũ enim sit, ut B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo ut C, ad B G, ita F, ad E H; erit ex aequalitate ut A B, ad B G, ita D E, ad E H. Componendo igitur, ut A G, ad B G, ita D H, ad E H. Itaque cum rursus sit, ut A G, ad B G, ita D H, ad E H: & ut B G, ad C, ita E H, ad F; erit ex aequalitate, ut A G, ad C, ita D H ad F. Quod est propositum.

A. B. C. D. E. F. G. H.

EODEM *modo & hoc Theorema ostendemus.*

VI. SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant

habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

SIT ut totus AB, ad C, ita totus DB, ad F; Item ut detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquum GB, esse ad C, ut est reliquus HE, ad F. Cum enim sit, ut AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, ut C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur est, ut AB, ad C, ita DE, ad F; & ut C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex aequalitate ut AB, ad AG, ita DE, ad DH. Dividendo ergo ut GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rursus sit, ut GB, ad AG, ita HE, ad DH; & ut AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex aequalitate, ut GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum. III.

A ..... G .. B
C .... F .....
D ..... H ... E

ITEM & hoc demonstrabimus.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. VII.

SIT ut primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & ut primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, ut est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, ut A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo ut BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est ut BC, ad A, ita EF, ad D; & ut A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex aequalitate ut BC, ad CG, ita EF, ad FH; & componendo, ut BG, ad CG, ita EH;

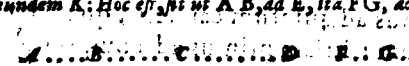
A ..... D
B .... C .. G E ..... F ... H

ad F H3 & conuertendo, ut C G, ad BG, ita FH, ad E H. Quoniam ergo est, ut A, ad C G, ita D, ad F H3 & ut C G, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex æqualitate, ut A, ad BG, ita D, ad E H. Quod est propositum.

DEINDE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII. Si quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionē, quam omnes hi simul ad eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idē numerus ad omnes illos simul proportionem, quā idem numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri A B, B C, C D, ad eundem E, proportiones, quas totidem F G, G H, H I, habent ad eundem K; Hoc est, sit ut A B, ad E, ita F G, ad K; & ut B C,



ad E, ita G H, ad K; & ut C D, ad E, ita H I, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum A D, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul, hoc est, ipse F I, ad K. Cum enim sit, ut A B, primus ad E, secundum, ita F G, tertius ad K, quartum: Item ut B C, quintus ad E, secundum, ita G H, sextus ad K, quartum; erit quoque ut A C, primus cum quinto, ad E, secundum, ita F H, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, ut A C, primus ad E, secundum, ita F H, tertius ad K, quartum: Item ut C D, quintus ad E, secundum, ita H I, sextus ad K, quartum; erit vtiam, ut A D, primus cum quinto, ad E, secundum, ita F I, tertius cum sexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED, habeas iam idem numerus E, ad numeros quotcunque

A E, B C, C D, proportiones eadem, quæ idem numerus K, ad eosdem F G, G H, H I; Hoc est, sit ut E, ad A B, ita K, ad F G; & ut E, ad B C, ita K, ad G H; & ut E, ad C D, ita K, ad H I. Dico esse, ut E, ad omnes illos simul, nempe ad A D, ita K, ad hos omnes simul, utpote ad F I. Cum enim sit, ut E, primus ad A B, secundum, ita K, tertius ad F G, quartum: Item ut E, primus ad B C, quintum, ita K, tertius ad G H, sextum; erit quoque, ut E, primus ad A C, secundum cum quinto, ita K, tertius ad F H, quartum cum sexto. Rursus quia est, ut E, primus ad A C, secundum, ita K, tertius ad F H, quartum: Item ut E, primus ad C D, quintum, ita K, tertius ad H I, sextum; erit etiam, ut E, primus ad A D, secundum cum quinto, ita K, tertius ad F I, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

THEOR. 21. PROPOS. 23. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quam ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minores quam ipsi A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita ut C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties unitas est in E. Itaq; cū unitas numerū E, & numerus C, numerū A, æque metiatur; metietur & uicissim æque unitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia unitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; metietur quoque uicissim æque unitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem nu-

A ..... B ....
C ..... D ....
E ....

21. *Septimi*

15. *Septimi*

merus E, utrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerū, præter unitatem, cōmuni mensura eos metiri. Si enim non sunt inter se primi, sed habeant numerum communem mensurā; sit numerus C, eorum mensura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties unitas est in numero D; At uero ipsum B, toties, quoties unitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt unitates, procreat ipsum A; & idem C, toties compositus, quot sunt unitates in E, producit ipsum B; fit, ut D, & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B. Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cū D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

A ..... B .....
C
D — E

9. pron. 18. septimi

SCHO-

SCHOLION.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.

SINT quotcunque numeri inter se primi A, B, C. Dico eos minimos esse in continuatione suarũ proportionum, ita ut in minoribus numeris continuari non possint, quamuis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim nõ sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, nempe D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi, sunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, æquè, per ea, quæ ad propos. 21. huius lib. demonstrauimus; atque adeo secundũ unum eundemq; numerũ, qui sit G; ita ut D, toties metiatur ipsum A, & E, ipsum B, & F, ipsum C, quoties unitas est in G. Quoniam igitur unitas numerum G, & numerus D, ipsum A, æque metitur; metietur quoque uicissim æque unitas numerum D, & numerus G, numerum A. Eademque ratione idem G, metietur & ipsum B, & ipsum C, æque atque unitas ipsos E, F; Atque adeo A, B, C, cum habeant numerum G, communem mensuram, non erunt inter se primi, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non sunt igitur alij numeri minores ipsis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; sed ipsi A, B, C, minimi sunt.

A — B — C
D — E — F
G

15. septimi

IAM uero sint A, B, C, in continuatione suarum proportionum minimi. Dico eos primos esse inter se. Si enim non sunt inter se primi, metiatur eos communi mensura numerus G, ita

vt G, toties metiatur ipsum A, quoties unitas est in D; & ipsum B, toties, quoties unitas est in E; & ipsum C, toties quoties vnitas est in F. Quoniã igitur G, toties compositus facit numeros A, B, C, quoties vnitas est in D,

A..... B..... C.....
D —— E —— F ——
G ——

9. pron. E, F sit ut D, E, F, ipsum G, multiplicantes producant ipsos A, B, C. Quare D, E, F, easdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores sint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione suarum proportionum. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim nõ sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D. Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipsum A; metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem, numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demõstrandum.

A..... B.....
11. pron. C.... D ——

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT uterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, uel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi, sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot unitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt unitates in F; fit ut F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D; & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autem idem D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quantum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; erit ut E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia uero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri, erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum sint inter se primi, in sua proportione minimi erunt. Aequè igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habentes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur uterunque B, & C; nõ erit B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....
B...
C.....
D.....
E---
F---

25.

9. *pron.*
16. *septimi*
19. *septimi*
25. *septimi*
23 *septimi*
21. *septimi*

THEOR. 25. PROPOS. 27.

26.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex uno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D_1 æquali ipsi A, erit & D_1 ad B, primus. Quoniam igitur A, & D_1 ad B, primi sunt, erit numerus ex A, in D_1, hoc est, ex A, in se genitus, nempe C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

26. septimi

A .... B .....
C .....
D ....

27. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrunque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT uterque A, & B, ad utrunque C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim uterque A, & B, primus sit ad C; erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum uterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ex ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur uterque C, & D, primus est ad E; erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, &c. Quod erat ostendendum

26. septimi

A ..... B ...
E .....
C ... D ..
F .....

26 septimi.

28. THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt:

Et

Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſus fiat

E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoq; eſſe inter ſe primos.

A . . .
C . . . . . .
E . . . . . .

B . .
D . . . .
F . . . . . .
G, 81.
H, 16.

Cum enim A, B, ſint inter ſe primi, erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus. 27. ſeptimi

RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, erit & C, factus ex A, in ſe, ad B, & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Erat autem & C, ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad utrunque B, D, primus erit; Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi ſint ad B, erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad utrunque B, F, primus eſt; erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps ſi plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi ſint ad B, erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus; necnon & H, ad A; Quare & genitus ex A, in G, ad genitum ex B, in H, primus erit: cum vterque A, G, ad utrunque B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat. 27. ſeptimi 28. ſeptimi 26. ſeptimi 28. ſeptimi 26. ſeptimi 28. ſeptimi

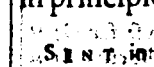
THEOR. 28. PROPOS. 30. 29.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint:

Etiam

Etiam uterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si uterque simul ad unum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi A B, B C. Dico & utrunque simul A C, primũ esse & ad A B, & ad B C. Si enim A C, A B, non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur



12. pron. D, metitur totum A C, & ablatum A B, metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt A B, B C, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare A C, ad A B, primus erit. Eodemq; modo ad B C, ostendemus eundem esse primum.

SED iam uterque A B, B C, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, uidelicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur A B, & B C; metietur quoque D, numerum A C, ex A B, B C, cõpositum; Ac proinde A C, A B, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur A B, B C, inter se primi. Eodemq; argumento ostendemus A B, B C, inter se primos esse, si A C, ad B C, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

10. prom.

COROLLARIVM.

HOC hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unũ illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim A C, ad A B, primus est, erunt A B, B C, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & A C, ad B C, primus erit, per primam partem eiusdem. quod est propositum.

32. THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem

nem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præter unitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quod A, primus non metitur ipsum B. Quia igitur numerus A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A ..... B .....
C .....

THEOR. 30. PROPOS. 32. 33.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiã unum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem unum ipsorum A, & B, si non utrunque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur uero ipsum C, toties, quot sũt unitates in numero E; ita ut C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quantum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tantum erit ut D, primus ad A, secundũ, ita B, tertius ad E, quartũ. Quia uero primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; erunt D, & A, in sua proportione minimi. Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum

A ..... B .....
C .....
D ..... E .....

19. *septimi*
31. *septimi*
23. *septimi*
21. *septimi*

sum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquē, &c Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

A

Eodem modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

Si duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipsum sit compositus: is ad unum eorum, qui in principio, compositus erit.

Nam ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compositus ad eum sit. Dico D, quoque ad unum ipsorum A, B, compositū esse. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit uterque A, & B, ad D, primus. Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur uel metiri ipsum C, uel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, uel ad B, cum non sit primus ad utrunque.

A
B
C
D

26. septim.

30.

PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

Sit numerus compositus A. Dico aliquem numerū primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si uero compositus, metiatur eum numerus C, qui uel primus erit, uel compositus; Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus

11. pron.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia uero numerus non diminuitur infinite,
ueniemus tandem ad aliquē A.....
numerum, quem nullus alius B..... C...
metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, metietur quoque compositum A. Omnem ergo compositum numerum, aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum. 11. *pron.*

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, uel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non
est primus, metiatur eum, si fieri
potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. 11. *pron.*

A
B ... C

THEOR. 32. PROPOS. 34. 31.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum uel esse primū, uel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus uel primus sit, uel compositus; si quidem A, primus est, habetur
propositum: Si uero compositus; metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum. 33. *septimi*

A .....

PROBL. 3. PROPOS. 35. 34.

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem

nem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes easdem quotcunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C. siue non; oporteatque eosdem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi. Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionũ minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si uero non sunt inter se primi, inuenta

A . . . . . B . . . . C . . . . . D . .

E . . . F . . G . . . . H ---- I ---- K ---- L ----

3. *septim.* sit maxima earum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorũ A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per

9. *pron.* E, F, G; fit, ut D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

QVOD uero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B C, metiuntur æque, ut ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito L, multiplicans numeros H, I, K, pro

9. *pron.* 8. *pron.* ducet numeros A, B, C; & uicissim L, ipsos A, B, C, metietur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertiũ

19. *septimi* facit eundem A; erit, ut E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H: Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C,

sed

sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

Hinc fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C; eademque esse in cæteris ratio.

SCHOLION.

Ex his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D, E, sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non, reperiemus

A, 16. B, 24. C, 36. D, 14. E, 81.
I, 8.
F, 2 G, 3.

duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F & G, minimos in proportione duorum A, & B, nempe illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

Caeterum aliquando contingit unum numerorum E, F, G, inuentorum esse unitatem, quando scilicet D, maxima mensura uni ipsorum A, B, C, æqualis est, ut ex his exemplis

A..... B..... C..... A.... B.. C.....
D... D..
E, F.. G.. E,. F. G...

apparet. Manifestum est autem, inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36.

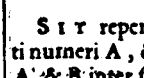
36.

DVOBVS numeris datis, reperire,

quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quē A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C, ex A, in B, uel ex B, in A; metietur A, ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus, omniū, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus. Si C, non

7. *prop.*

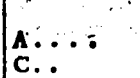


est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, tam ex A, in E, quam ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, & ob id, in sua proportione minimi sint) æque metientur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam uero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; erit C, ad D, ut B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, ut ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum minorem ipso C; atque adeo C, minimus est omnium, quos metiuntur.

9. *prop.*
19. *septimi*
23. *septimi*
21. *septimi*
17. *septimi*

SINT secundo dati numeri A, & B, non primi inter se. Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, ut sint quatuor numeri proportionales, nempe A, ad B, ut C, ad D. Quo posito, fiet idem numerus, ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. factus ergo sit E. Dico E, hac uia procreatū esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur

35. *septimi*



19. *septimi*

7. *prop.*

tiantur, manifestum est. Nam cum tã A, multiplicatus a D, quam B, multiplicatus a C, ipsum E, producat, metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod uero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, fiet F, tam ex A, in G, quam ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; erit, ut A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, uel H, ad G, metientur ipsos H, & G, æque; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia uero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; erit E, ad F, ut D, ad G; Ac propterea cũ D, metiatur ipsum G, ut ostensum est; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdũ. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

7. pron.

9. pron.

19. septimi

17. septimi

COROLLARIVM.

Hinc fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiantur.

SCHOLION.

Hoc autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiã me-

tiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum C D, sitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum C D, metiri. Si enim E, ipsum C D, non metitur; ablato E, ex C D, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidam minor, quam E.

A . . B . . .
C . . . . . F —— D
E . . . . .

Relinquat igitur E, ablatus ex C D, quoties potest, numerum si fieri potest, F D, minorem ipso, ita ut E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum C F; metietur quoque tam A, quam B, ipsum C F. Itaque A, & B, cum metiantur totum C D, & ablatum C F; metientur & reliquum F D. Est autem F D, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim; Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

11. *pron.* 12. *pron.*

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quē illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primo C, ipsum D, ita ut omnes tres A, B, C, ipsum D, metiantur. Dico numerum D; minimum inuentum, quem A, & B, metiantur, minimum quoque esse, quē tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur,

36. *septimi*

A . . . B . . . . C . . . . . .
D . . . . . .
E ——

tiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E, & D, sit minimus, quem idem A, & B, metiuntur; metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum. 37. septimi

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostenderur. Cum A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundē E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiantur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim, Immo cum C, & D, metiantur ipsum F; metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur idem C, & D, maior minorem. Quod est absurdū. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum. 36. septimi

A .. B .. C ....
D .....
E .....
F ——— 11. prom.

37. septimi

37. septimi

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLION.

Hoc corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiatur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, sitque F, minimus, quem idem A, B, C, metiantur. Dico

A.. B... C....
D.....G—E *metiri. Si enim*
F..... *non metitur, metiatur eius parte*

D G, relinquatque numerum G E, se minorem. Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum D G; metientur
II. *pron.* *quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cum & totum D F,*
12. *pron.* *ponantur metiri; metientur & reliquum G E, ipso F, minore. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum D E.*

Par ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragendu, ut de tribus numeris dictum est.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam a B, denominatam.

A..... Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot
B.... C... unitates sunt in numero G. Quia igitur unitas ipsum C, & B, ipsum A, æque me-
15. *septim.* titur; & vicissim unitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur; atque adeo eadem pars erit unitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autem unitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, ut ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars

eris

erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendū erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nā cū B, pars denominetur a C; ſit autē & unitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata; metietur unitas ipſum C, & B, ipſum A, æque. Viciſſim ergo & unitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandū erat.

A .....
B ... C .....

15. *ſeptimi*

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominan, hoc eſt, qui ipſas denominent, D, E, F; minimusque, quem D, E, F, metiantur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cū D, E, F, ipſum G, metiantur, habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod uero G, ſit minimus illas partes habens, perſpicuum eſt. Si enim non eſt minimus, habeat, ſi fieri poteſt, H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C; metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus

D .. A. Secunda
E ... B. Tertia
F .... C. Quarta
G .....
H ———

38. *ſeptimi*

39. *ſeptimi*

40. *ſeptimi*

bus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipsius G, denominatæ scilicet A. Secunda D.. I..... a D, E, F. B. Tertia ...E... K..... Cum enim D, E, F, ipsum C. Quarta F..... L..... G, metiantur per I, K, L; G. ..... metietur æque unitas ipsos I, K, L, & numeri D,

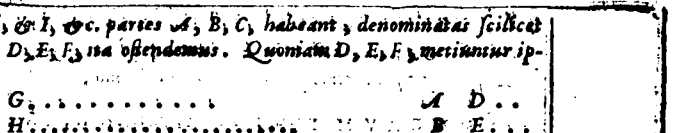
15. septimi E, F, ipsum G. Vicissim ergo metietur quoque æque unitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G; atque adeo unitas ipsorum D, E, F, eadem pars erit, quæ numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo unitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominata; erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominatæ a D, E, F.

EX his autem sequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H, triplus vero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita ut neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim

H, &

H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet a D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ip-



ſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius G; metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos multiplices ipſius G. Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. 11. pron. 39. ſeptimi

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus dictas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit; ſi fieri poteſt, alius K, L, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex K, L, relinquatur M, L, ipſo G, minor. Quoniam igitur K, L, partes habet A, B, C, metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus dictis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundē K, L. Metitur autem & G, ablatum K, M, ſibi æqualem: Igitur & reliquum M, L, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C, Ac proinde H, ſecundus eſt, huiuſmodi partes habens. 39. ſeptimi 11. pron. 12. pron.

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, nempe N, O, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autē H, duplo ex N, O, relinquatur P, O, minor ipſo G. Quia igitur N, O, partes habet A, B, C, metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Ac idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metuntur, eundem N, O, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum N, P, ablatum ipſi H, duplo æqualem. Igitur & reliquum P, O, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas, Ac propterea 40. ſeptimi 11. pron. 12. pron.

I, ter-

I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

Hvc quoque referri potest sequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cũ sit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars subsequentem partem contineat.

Sint datæ partes A, B, C; inueniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; fiatque G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cũ ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties unitas in D: Est autẽ unitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nempe numerum G, a D, denominatã. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nempe numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat unitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nempe unitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus dictas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab F, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, a D, denominata; erit K, toties in I,

A, Secunda.	*B, Tertia.*	*C, Quarta.*	
D..	*E....*	*F....*	
G.....			
H.....			
	Vnitas		
I			
K			
L			
M			

quoties

quoties vnitas in D; Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex K, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; erit, ut H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & I, fiant G, & K; erit, ut G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & ut G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit, per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autē H, numerus numero I, maior; vnitas igit maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quā H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod erat propositum.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

15. defin.
17. septimi
1

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda, ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam a 5. & hac denique partem a 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD, si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, nempe secundum, tertium, quartum, &c. qui eadem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VIII.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi uero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationẽ habentiũ.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunq; numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, quibus sumuntur, & in eadẽ ratione; erit, ex æ-

A.....
B.....
C.....
D.....
E---
F---
G---
H---

14. *septimi* qualitate, ut A, ad D, ita E, ad H: Sunt autem A, & D, in
13. *septimi* sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur.
21. *septimi* Igitur A, ipsum E, & D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri dein-

ri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandū.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, sint A, B, C, D, sint continue proportionales, ut

A .... E —
B ..... F —
C ..... G —
D ..... H —

vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersæ sunt, quemadmodum in priori eadem semper proportio reperitur.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatq; inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B; hoc est, esse ut C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiat C, & D; erit ut A, ad B, ita C, ad D.

A.. B..
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

17. septimi

Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, & E; erit quoque, ut A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod uero in eade ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi

mi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; Erunt & C, E, extremi, inter se primi. Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

24. *septimi*
29. *septimi*
1. *octaui.*

IAM uero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in ultimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; erit quoque, ut A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nempe F, ex A, in C, & I, ex B, in E; erunt & F, I, extremi, inter se primi. Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

A . . . B . . .
C . . . . D . . . . . E . . . . . .
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36 N, 54. O, 81.

18. *septimi*
24. *septimi*
29. *septimi*
1. *octaui.*

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in ultimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLION.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B, quod A, B, multiplicantes C, ipsos

18. *septimi*

sos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quod B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.

NON *aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in I, H, G, & ex A, in C.*

COROLLARIVM. I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, fit procreatus, ac propterea uterque sit æqualiter æqualis æqualiter; ipsi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, si fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et sic si fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij sub alijs denominationibus, quæ in Algebra solent explicari. Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 19. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROL-

COROLLARIVM. III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & F, uel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, uel ex B, in F, G, H; ut ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLION.

QVONIAM *vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorũ quidẽ proportiones a numero A, harũ vero a B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo uides C, & E, extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, nempe quæ ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi constituuntur. Nam vltimus illorum ab unitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi*

minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque in reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant. Sumantur tot numeri continue ab unitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oporset inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab unitate dupli, ut prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optenitur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinque numeri ab unitate quincupli 3 vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet, 625. 750 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non possunt inueniri plures numeri continuè proportionales, quam propositi sunt. Neque enim post 1296. alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 2187. alius potest reperiri, qui ad 2187. proportionem sesquialteram habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non possit esse ad alium quam primum numerum, ut primus ad secundum, vt propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

THEOR. 2. PROPOS. 3. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cũ eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter se primos esse. Inue-

niantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, uel B, ad C, uel C, ad D. Deinde iuxta uiam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis sit multitudini A, B, C, D.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18, N, 27.

Quoniam igitur A, B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Sunt autem per coroll. 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi: Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

Hanc propositio intelligenda est de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & uerbis Euclidis apparere potest. Nam si A, B, C, D, non essent proportionales continue, inuenirí non possent, ex præcedenti problemate K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersæ sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, continuati in suis proportionibus diuersis, quorum extremi non sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compositi sint inter se. Itaque hoc Theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunq; continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et reciprocum, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ut

ex

ex scholio propos. 1. huius lib. liquet; Tamen non semper e cõtrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, ut manifestum est in exemplo nuper adducto 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primùm datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. Quare erit ut A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G, erit ut C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione, ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nempe B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem.

36. *septimi*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I —— K —— L

9. *pron.*
18. *septimi*

21. *septimi*

cedentem. Quare cum B, & C, ipſum K, metiantur, me-
37. *ſeptimi* tietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, me
tiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum Non igitur
erunt alij numeri minores ipſis F, E, G, in ratiombus A, ad
B, & C, ad D; Ac propterea ipſi F, E, G, minimi ſunt in
datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A,
ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique ſint quatuor mi-
nimi deinceps proportionales in datis rationibus. Inuento
36. *ſeptimi* rurſum numero G, minimo, quem metiantur B, ſecundus,
& C, tertius; quoties B, ipſum G, metitur, toties metiatur
A, ipſum H; & quoties C, ipſum G, toties D, ipſum I, me
tiatur. Quibus peractis, aut E, ipſum I, metitur, aut non.

A, 6. B, 5 C, 4 D, 3. E, 5. F, 7. H, 24. G, 20 I, 15. K, 21. L — M — N — O —

Metiatur primũ; Et quoties E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur; erit ut prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, ut C, ad D, ita G ad I: & ut E, ad F, ita I, ad K; quod tam G, & D, ipſos G, & I, quam E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; ipſi
21. *ſeptimi* metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nempe B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N; nimirum C, antecedens, antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur
37. *ſeptimi* metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdũ. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

SED iam E, non metiatur ipſum I. Inuento ergo numero

mero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L, & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K, æque metiantur; erit ut ſupra, quēadmodum H, ad G, ita M, ad L; & ut G, ad I, ita L, ad K; Eſt autem eadem ratione, ut H, ad G, ita A, ad B; & ut G, ad I, ita C, ad D; quod & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur ut A, ad B, ita M, ad L; & ut C, ad D, ita L, ad K. Atqui ut E, ad F, ita quoque eſt K, ad N, cum E, F, æque ipſos K, N, metiantur: Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos eſſe in eiſdem rationibus. Si nāque non ſunt minimi, dentur ipſis minores in rationibus eiſdem O, P, Q, R, ſi fieri poteſt. Quoniam ergo A, B, in ſua proportione minimi ſunt, ipſi æque metientur O, P, in eadem ratione exiſtentes, nimirum B, conſequens conſequentem P. Eodem argumento C, D, ipſos P, Q, metientur æque, uidelicet antecedens C, antecedentem P; Atque adeo cum B, & C, ipſum P, metiantur, metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia uero oſtenſum eſt, eſſe ut G, ad I, ita L, ad K, hoc eſt, ita P, ad Q; erit permutando, ut G, ad P, ita I, ad Q; Atque idcirco, metiente G, ipſum P, metietur & I, ipſum Q. Metitur autem & E, eundem Q, (quod E, F, in ſua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiuſdem rationis, nempe antecedens E, antecedentem Q.) Ergo metientibus I, E, ipſum Q; metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipſi M, L, K, N, minimi ſunt.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O ---- P ---- Q ---- R ----

36. *ſeptimi*

21. *ſeptimi*

37. *ſeptimi*

21. *ſeptimi*

37. *ſeptimi*

QVOD ſi quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta poſteriori agendum, ut

nuper cum tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primũ M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F: Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si uero S, ipsum N, non metiatur; sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties uero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demõstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, uel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

36. *septimi*

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T, 2.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

SCHOLION.

Si omnes rationes, uel aliquæ datæ fuerint in numeris nõ minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestũ est.

DIFFERT *autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.*

PORRO *inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus*

libus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris uero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; uel ex proportionibus C, ad F; & D, ad E, ita ut latera unius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur
D, multiplicans C, & E, fecit A, 24. B, 48.
A, & G; erit A, ad G, ut C, ad G, 12. 17. septimi
E. Eodemque modo, quia E, C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.
multiplicans D, & F, fecit G, &
B; erit G, ad B, ut D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C ad E, & D, ad F, componitur. 27. defin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, cõpositã esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim
D, multiplicans C, & F, faciat A, 24. B, 48.
A, & G; erit A, ad G, ut C, ad G, 96. 17. septimi
F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B;
erit G, ad B, ut D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportioni

27. *defin.* portionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam ullum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquã illorũ ullum metiri. Quod enim nullus proxime insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, uero ipsum B, non metiatur; neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod uero nec alius quisquam illorum ullum metiatur, sic demonstrabimus. Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, ut A, ad C, ita F, ad H. Quia uero est ut A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non non erit unitas, alias F, ipsum G, metiretur, cum unitas omnem numerum metiatur. Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit unitas; non metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, ut F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demõstrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. F, 4. G, 6. H, 9.

2. *octani.*

3. *octani.*

SCHO-

SCHOLION.

Si maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propositio ad hunc modum.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex, neque alius quisquam ullius multiplex erit.

Sint enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non sit multiplex secundi B. Dico neque alium quenquam illorum ullius esse multiplicem. Quod enim nullus proxime insequẽtis multiplex sit, constat. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non sit autem A, ipsius B, multiplex; neque B, ipsius C; neque C, ipsius D; neque D, ipsius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quisquam illorum ullius sit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipsius E, non est multiplex: non metietur e contrario E, ipsum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. scripsimus. Quoniam igitur sunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum sit D, ad E, ut C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, ut D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus secundum D, non metitur; neque alius quisquam illorum ullum metietur. Quare e contrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum ullius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 6. lib. 7. docuimus. 6. octaui

Sed & ex his sequens theorema demonstrabimus.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus uero secundum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quæque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiatur, perspicuum est. Nam cum sit, ut A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metietur autem A, ipsum B; & B, ipsum C; & C, ipsum D; & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

11. pron. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D; metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur; metietur quoque

11. pron. B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex; erit & B, ipsius C; & C, ipsius D; & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex; metietur e contrario E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theorema, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, uel aliús quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel

A, vel alius quisque nullum a secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentiũ. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam ullum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 1. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secundo B, sit multiplex. Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secũdi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam ullius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremũ E, metiatur. Dico & A, primũ metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, non dicatur metiri; sine A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. que alius quisquam ullũ metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcirco, si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. 6. octaui.

SCHOLION.

VT theorema, quod secũdo loco in scholio precedẽtis ppos. demõstrauimus, conuertimus, amplificabimus hanc ppos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, uel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, uel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 6. & 1. theoremate scholij precedentis.

8. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; sitque ut A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A; & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, ut A, ad B, atque adeo ut E, ad F, ita G, ad K. Quare cum G, & K, inter se primi sint, nempe extremi minimorum numerorum, ac propterea

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H 9. I, 3. K, 1.
E, 108 L, 36. M, 12. F, 4.

3. octaui.

pterea in sua proportione minimi; æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita ut numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metianeur, singuli singulos. Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt, ex 9. pronunciato; in eisdem rationibus erunt E L, M, F, in quibus G, H, I, K, ut ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt; Atque id circo, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat. 23. & 21. septimi

SCHOLION.

NON *solum ex demonstratione cõstat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L; M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadẽ esse proportione, in qua G H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.*

EADEM *hæc propositio uera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur uel E, uel F, unitas. Item si uel A, uel B, fuerit unitas, existentibus E, & F, numeris; ut in exemplis apparet.*

CONSTAT *etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, uel superparticularis cuiusuis, uel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & unitatem; superparticularis uero inter numeros sola unitate differentes; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, uel superparticularis, uel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis*

inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdém cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam nec inter binarium & vnitatem, nec inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes intercidit ſolum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri A B, C D, binario, inter quos cadat numerus E F, minor vnitate quam A B, maior vero quam C D, vnitate quoque. Dico E F, non eſſe medium proportionalem inter A B, C D. Si enim dicatur eſſe

A . . . . . G . B
E . . . . . H . F
C . . . . . D

A B, ad E F, vt E F, ad C D; ablato ex A B, numero A G, ipſi E F, æquali, vt reliqua ſit vnitas G B; & ex E F, numero E H, ipſi C D, æquali, vt relinquatur etiam vnitas H F; erit quoque vt A B, totus ad E F, totum, ita A G, ablatus ad E H, ablatum, cum A G, E H, ipſis E F, C D, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus G B, ad reliquum H F, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus A B, ad totum E F, maior ad minorem: Quod eſt abſurdum. Non ergo E F, medius proportionalis eſt inter A B, & C D.

11. ſeptimi

Ex quibus fit, nec illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; nec illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu vulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit. Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuiſa eſſe dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo oſtenſum ſit, inter numeros duplæ proportionis, & ſuperparticularis, qualis eſt ſeſquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perſpicuum eſt, Diapaſon, & Tonum, bifariam ſecari non poſſe. Vnde

Diapaſon

Diapaſon prima ſui diuiſione in Diapente, & Diateſſaron, quorum interuallorum illud in proportione ſeſquialtera, hoc vero in ſeſquitertia conſiſtit, apud Muſicos ſecatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Eſt enim hic proportio dupla diuiſa in proportionem ſeſquialteram, & ſeſquitertiam, tanquam in maximas ſui partes inter ſe inæquales. Ita quoque Tonus in duo ſemitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, ſecari ſolet. Sed de his plura in Muſicis.

RVRSVM *ex his demonſtrari poteſt, proportionem diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiuſdem, numeris non poſſe exprimi, ſed eſſe irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonſtrauimus, quadratum diametri dupli ſit quadrati ex latere deſcripti; quadratorum uero proportio ſit duplicata proportionis laterum; ſit, vt proportio quadrati ex diametro deſcripti ad quadratum lateris duplicata ſit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata eſt proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam biſariam ſecet, vt oſtendimus; manifeſtum eſt, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi poſſe, ſed eſſe irrationalem, ſeu, quod idem eſt, diametrum eſſe lateri incommenſurabilem. qua de re plura ſcribemus in 9. & ultima propos. lib. 10.*

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter utrunque eorum, ac unitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere conti-

nue

nue proportionales inter unitatem, & A, nec non inter unitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, :: I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

2. octaui.

sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt, erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, ut K, ipsi A; & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia uero, ut constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans uero ipsum G, fecit K; metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: Metitur autem & unitas ipsum E, per E. Aequè igitur metietur unitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. Per defin. ergo 20. proportionales sunt deinceps, unitas & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit, ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans uero ipsum I, faciat N; metietur F, ipsum I, per F; & I, ipsum N, per eundem F: Metitur autem & unitas ipsum F, per F. Aequè igitur metietur unitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit unitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. Per definitionem igitur 20. proportionales sunt continue, unitas & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, una cum unitate æqualis sit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij continue proportionales numeri inter unitatem, & K, numerum; seu A, sibi æqualem; & inter unitatem, & numerū N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

1. octaui.
7. pron.
5. pron.
7. pron.
5. pron.

SCHO

SCHOLION.

PERSPICVVM autem est, numeros, qui continua proportione cadunt inter numeros A, & B, ac unitatem, habere proportiones denominatas a minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habent E, & F, numeri ad unitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. asseruimus.

CONSTAT quoque ex demonstratione hac, si numerus se ipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab unitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continua esse proportionales ab unitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & unitatē deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter utrunque numerorum A, B, & unitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales, inter A, quidem & unitatem, numeri C, D, E. At vero inter B, & unitatē, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter utrunque A, B, & unitatem. Multiplicantes se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idē C, multiplicans K, L, & H,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
Vnitas.

faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sunt inter utrunque A, B, & unitatem. Quoniam igitur est, ut unitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur unitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum

5. *prop.* A: Metitur autem unitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsũ

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296. E, & E, ipsum A,

E, 27. K, 54. L, 108. H, 216. per C, metietur.

D, 9. I, 18. G, 36. Quare C, seipsũ

9. *prop.* C, 3. F, 6. multiplicans fecit

Vnitas. D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G; & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, &

17. *septimi* I; erit, ut C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicãs C, & F, fecit I, & G, erit ut C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L, habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt

18. *septimi* L, & H, erit ut C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, N, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O; habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18 lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cũ

18. *septimi* C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, erit, ut C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, uel B, & unitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, uel F, G, H.

Quocirca si inter duos numeros, & unitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c.

Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLION.

EX his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri unitati propinquiores, quales sunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab unitate continue proportionales, secundum ab unitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hūc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, existentibus C, D, F, A, continue proportionalibus ab unitate D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad eos, quæ sequuntur, tum ad alia multa eorum milia, hinc initium sumentes.

SI sint ab unitate duo ordines numerorum continue proportionaliū, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab unitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab unitate; quarti uero eiusdē triplicatā; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius. I.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab unitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H: Dico proportionē B, tertij ab unitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam inter utrunque numerorum B, F, & unitatem cadit medius unus proportionalis; inter B, quidem & unitatem, numerus A:

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
Uni- tas

At inter F, & unitatem numerus E; cadet quoque inter B, & F, unus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem mo- 10. octaui.

do cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter utrunque C, G, & unitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniã igitur ex defin. B, ad F, proportionẽ habet duplicatam eius, quã habet B, ad I: Est autem ut B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est ut C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

D, 81. M, 108. N, 144 O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum æquimultiplicium proportionalium, ab aliqua numero eodem incipientes. Eodo hoc idem theorema ita proponemus.

II. SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti uero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps uno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, et ab eodem uel idem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis E, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K; & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus paratis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab unitate, ut constat ex scholio propos. 9. huius lib.

Eademq;

Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab unitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est, rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quæ quæ ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate, est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q. Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdem argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; & eiusdem triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, vt L, ad R, quod utraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R; sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Nō secus demōstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atqs ita deinceps.

Vnitas. E, 162. D, 54. C, 18. B, 6. A, 2. I, 512. H, 128. G, 32. F, 8. N, 36. K, 4. Q, 64. O, 216. L, 8. R, 512. P, 1296. M, 16. S, 4096.

Vnitas. E, 81. D, 54. C, 36. B, 24 A, 16. I, 1. H, 2. G, 4. F, 8. N, 576. K, 256. Q, 64. O, 13824. L, 4096. R, 512. P, 331776. M, 65536. S, 4096.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri minus ordinis definãt in unitatem, ut ex hac subiecta figura est manifestũ, in qua I, est unitas.

CAETERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab una & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illudin lineis. Ex his autem in hunc

modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III. Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrunque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT *inter utrunque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales;*

A, 162. *Q*, 216. *R*, 288. *S*, 384. *B*, 512.
F, 54. *O*, 72. *P*, 96. *I*, 128.
E, 18. *N*, 24. *H*, 32.
D, 6. *G*, 8.
C, 2.
K, 9. *L*, 12. *M*, 16.

inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot ter E, & C, & inter H, & C. Sumptis n. tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est D, ad G. Sed per theor. 2. huius scholij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdē rationis D, ad G. Igitur est ut K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L,
8. octani. *cadet quoque vnus medius, nempe N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, unus medius cadit. Similis modo ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicus & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt; si sumantur quatuor minimi numeri in ratione D, ad G. Eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.*

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nempe B, unitas assumatur, veluti perspicuum est in hac subiecta figura, in

in qua nu-
mer⁹ B, uni
tas est, ca-
dunque eã
inter A, et
C, quam in
ter B, & C,
tres numeri

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. T, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

cõtinue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt &c.

Ex his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, proinquiores.

THEOR. 9. PROPOS. 11. 11.

DVORVM quadratorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatã habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, unum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes se mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratũ, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicans fecit E, ex constructione; erit ut C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione; & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; erit quoque, ut C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia uero, existentibus A, E, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, duplicatam rationẽ habet

A, 9 E, 21. B, 49.
C, 3 D, 7.

17. septimi

habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus addatus D; cum haec proportio eadem sit, quae A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum unus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandū erat.

SCHOLION.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris addatus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quae lateris C, ad latus D, vt demonstratum est. A,9. E,12. B,49. C,3. D,7.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & quemlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, & de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A; Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt F, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

11. THEOR. 10. PROPOS. 12.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus

cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

Multiplicans C, seipsum faciat E, & D, seipsum multiplicãs faciat F; At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes uero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; erit, ut C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; erit quoque ut C, ad D, ita G, ad F; propterea q; E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H; erit ut E, ad G, hoc est, ut C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicãs uero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B; erit quoque, ut G, ad F, hoc est, ut C, ad D, ita I, ad B: Est autem & H, ad I, ut C, ad D; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam uero, existentibus A, H, I, B, continue proportionalibus, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus; cũ sit C, ad D, ut A, ad H. Quã ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

17. *septimi*

17. *septimi*

18. *septimi*

SCHOLION.

Hic quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros

numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, ut C, ad D.

EODEM modo conſtat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, H, I, B, oſtenſi ſint proportionales in ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo et ipſum H, quod H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem. Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habens D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum vero triū H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9 G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

12. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT

SINT continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicantes ipſos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue eſſe proportionales. Multiplicantes A, & B, ſe mutuo faciant N; & B, C, ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S. Simili

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. &, 2048. M, 4096.

modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, &. Quoniam igitur A, multiplicans ſeipſum, & B, fecit D, & N; erit ut A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & ſeipſum, fecit N, & E; erit etiam, ut A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rurſus, quia B, ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O; erit ut B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O, & F; erit, ut B, ad C, ita O, ad F; propterea que & E, O, F, continue proportionales ſunt in ratione B, ad C, ſeu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione ſint continue proportionales, in qua E, O, F, erit ex æquo D, ad E, ut E, ad F; atque adeo D, E, F, continue proportionales ſunt. 17. *ſeptimi* 17. *ſeptimi*

DEINDE, quia A, multiplicãs D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex iis, quæ ad propos. 18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc eſt in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; erit quoque, ut A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propos. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt B, ad C, ſeu A, ad B. Et eodem modo, cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; erit ut B, ad C, hoc eſt, ut A, ad B, ita S, ad I; propterea que & H, 17. *ſeptimi* 18. *ſeptimi*

& H, R, S, I, proportionales sunt in ratione A, ad B. Quo circa, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem con-

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. B, 2048. M, 4096.

tinuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, ut H, ad I; Ac proinde G, H, I, continuè sunt proportionales.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continuè proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

SVNT autem, ut ex demonstratione liquet, numeri primo producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplæ eam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri secundo geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio procreati, in quadruplicata, & sic deinceps semper uno amplius.

BREVIVS propositionem totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdem numeri G, H, I; & rursum ex eisdem in hos numeri K, L, M. Dico D, F, G; & G, H, I; & K, L, M, esse quoque continuè proportionales. Nam ex scholio propos. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continuè sunt ab unitate proportionales. Quare ex 1. theoremate scholij propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiusdem ratio nis F, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, continuè sunt proportionales in duplicata ratione A, ad

A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

Ex qua rursum demonstratione apparet, numeros primum productos esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo vero procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius elicitur ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib.

Quamvis autem in vtraque demonstratione huius propos. 12 ponatur sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quã tres A, B, C, D, continue proportionales, qui sese

A 2.	*B* 4.	*C* 8. *D* 16.
E 4.	*F* 16.	*G* 64. *H* 256.
I 8.	*K* 64.	*L* 512. *M* 4096.

multiplicantes faciat E, F, G, H; posteà vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonstratis, proportionales sunt in ratione A, ad B: Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc est, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in se ipsos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodẽ modo producti. 1

THEOR. 12. PROPOS. 14. 13.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si unius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

Manifestum. quadratus A, cuius latus C, quadratus B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicans enim semetipsum C, & D, faciant E. Quoniam igitur,

ut

vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; metietur quoque A, primus secundū E. Quare cum sicut A, ad B, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

7. octaui. A, 4. E, 12. B, 36. C, 2. D, 6.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, ut C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 8. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerū metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

14. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et si latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

3

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, ut apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, ut A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A. 8. H, 24. I, 72. B, 216. E, 4. G, 12. F, 36. C, 2. D, 6.

7. octaui

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubū metiri

metiri cubum B. Eodem enim argumento erit ut C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, ut ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter metiente C, latere latus D, metietur & A, ipsum H; ac idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propos. 6. huius lib demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 16. 15.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neq; latus unius metietur alterius latus. Et si latus unius quadrati non metiatur latus alterius: neq; quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur C, ipsum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; metietur & quadratus A, quadratum B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metietur latus D.

A, 16. B, 81.
C, 4. D, 9.

14. octaui

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipsum B; metietur quoque C, latus illius D, latus huius. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

14. octaui

THEOR.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et si latus cubi unius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, me
15. octaui. tietur. Si enim C, dicatur metiri D; metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cũ
A,8. B,27. ponatur non metiri. Non ergo latus C,
C,2. D,3. latus D, metietur.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si me
15. octaui. tiri dicatur; metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

PROXIMA antecedentes quatuor propositiones hoc etiã modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & unius latus lateris alterius multiplex erit. Et si unius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si uero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus

dratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit. 14. & 15. octaui.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex sit; metietur latus D, latus C. Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex. 14. & 15. octaui.

A, 36.	B, 9.	
C, 6.	D, 3.	
A, 64.	B, 8.	
C, 4.	D, 2.	

AT vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex; nõ metietur B, ipsum A, quadratus quadrati, neq; cubus cubi. Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex. 16. & 17. octaui.

A, 49.	B, 9.	
C, 7.	D, 3.	
A, 125.	B, 8.	
C, 5.	D, 2.	

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus lateris C. Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit. 16 & 17. octaui.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 16.

DVORVM similium planorum numerorum unus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius uero illis proportionalia E, F, ita ut C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque ut C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere unum numerum medium proportionalem, &

proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterum homologorum C, F, uel D, F. Multiplicantes se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, ut E, ad F; erit permutando C, ad E, ut D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit quoque G, ad B, ut D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, uel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27.
17. septimi C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

QVIA uero, existentibus A, G, B, continue proportionalibus, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, uel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, uel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, uel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, uel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, ut C, ad E, uel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, uel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, ut C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, ut C, ad E, uel D, ad F: metiantur autem C, D, latera summi plani A, antecedentes antecedentem; metiuntur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare

re cum & E, F, latera ſuum planum B, metiatur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F, ideoque eruntinter ſe compoſiti.

Ex quo demonſtratione etiã manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E; huius uero illis proportionalia F, G, H, ita ut ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, eſſe triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, uel D, G, uel E, H. Multiplicantes ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Item D, F, ſe mutuo multiplicantes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicantes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum ut C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam uero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; erit ut C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; erit quoque ut D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continuè proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3 E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

17. *ſeptimi*

terum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit ut E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus N, ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerint A, 30. M, 60. N, 120. B, 240. erit A, & ad 5 erit

17 *septimi* I, 6. L, 12. K, 24. A, ad M, ut I, ad L, C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10. hoc est, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerint N, & B, erit N, ad B, ut L, ad K, hoc est, ut C, ad F, uel D,

18. *septimi* ad G, uel E, ad N. Est autem & M, ad N, ut E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

QVONIAM uero, existentibus A, M, N, B, proportionalibus continue, proportio A, ad B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, ut C, ad E, uel D, ad G, uel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H, latus ad latus homologum. Quo circa, Duorum similium solidorum numerorum duo, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duas medias proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, uel D, G, uel E, H, assumptorum.

EX ijs, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duas medias proportionales M, N, & utrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, ut C, ad F, uel D, ad G, uel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera solidum B, consequentes

quemcunque consequentem; sit de proportionibus D, ad F, & C, ad E, vel D, ad G, vel E, ad H, sequantur; metientur quoque C, D, E, ipsum N, eumdem ex eadem consequentem, quod sit N, ad B, ut C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur; (cum enim M, factus sit, per constructionem, ex F, in L; manifestum est, E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt, ipse vero L, I, K; metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M.) Metiuntur autem & C, D, latera planum ipsum L. Rursus & C, D, E, numerum quoque metientur ipsum M; atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur. Verum & ipsum A, semper latera sua solidum E, D, A, D, N, habens communem mensuram cum C, quoque D, quam & E. Itaque compositi inter se sint. Rursus quia est A, ad M, ut C, ad B, vel D, ad G, vel F, ad H, metientur autem C, D, F, latera solidum suum A, antecedentes antecedentem; metientur quoque F, G, H, ipsum M, consequentem consequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipsum N, (cum enim N, factus sit ex H, in I; per constructionem, metietur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsi I, L, K, proportionales sunt: metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E; metietur & ipsum N, eumdem N. Cum ergo & E, G, latera metientur planum suum K, metientur quoque F, G, ipsum N, atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Nec non & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B, commensurabiles habent mensuram bam E, quam G, quam H. Quare sunt inter se compositi. In quibus liquido constat, primorum numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; M, vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum numerorum M, N, B.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 17.

SI inter duos numeros unus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ea

tione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C; metientur D, & F, ipsos A, & C, eosque metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B, metiantur per G.

21. *septimi* Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C, eosdem G, eosdem D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

9. *pron.* D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quare ergo E, multiplicans F, & G, fecit G, & B, erit, ut D, ad E, ita E, ad G. Vt autem C, ad B, ita A, ad D, ad B: igitur ut ut D, ad E, ita E, ad F, ad G, & permutando ut D, ad F, ita E, ad G. Quoniam uero E, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Similiter modo, quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, nempe D, ad F, ut E, ad G, erunt ex definitione A, & B, plani similes. Quare si inter duos numeros unus, &c. Quod demonstrandum erat.

17. *septimi*

19. THEOR. 19. PROPOS. 21.

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D. B. Quoniam igitur inter B, & G, medius cadit proportionalis F, erunt E, & G, plani similes. Sint ipsius E, latera H, I; ipsius uero G, latera illis proportionalia

20. *octaui*

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648. K, L. Et quia E, F, G, minimi in ratione A, C, D, existentes; æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis; metiantur per M. Eo demque modo, quia E, F, G, æque metiuntur C, D, B, eandē habentes

E, 1. F, 3. G, 9.

H, 1, I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

21. *septimi.* A, 8. C, 12. D, 18. B, 27. E, 4. F, 6. G, 9.

H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

habentes rationem cum illis, mutiantur per N; ita ut M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L; fiatur A, producta ex mutua multiplicatione H, & M, & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex definitione latera habens H, I, M; & B solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia uero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D; ut ostendimus; erit C, ad D, ut M, ad N. Sunt autem C, & D, in eadem ratione cum qua E, & F, quod N, multiplicans E, & F, fecerint ipsos C, & D. Nec non & E, F, eandem habent rationem quam H, K, uel I, L; Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll propos 19 huius libri in ratione laterum homologorum H, K, uel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L ut M, ad N; & permutando H, ad I, ut K, ad L; & I, ad M, ut L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quare ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

9. pron.

18. septimi
17. septimi

.12

SCHOLION.

Diximus exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, unitatem E, esse planum numerum, & unitates H, I, eius latera, licet improprie, ut in definitione numeri plani monuimus. Si enim unitatem a numeris planis excludemus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem contingit in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici eiusmodi sunt etiam A, B. Hoc autem est absurdum, cū Euclides propositionem generaliter proponat, demonstretque sine vlla exceptione.

THEOR. 21. PROPOS. 22.

20.

SI tres numeri deinceps sint proportio

nales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, 9. B, 24. C, 32. & A, & C, cadat medius proportionalis; erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, quadratus, quadratus. Si igitur tres quotcunque deinceps fuerint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

20. octavi

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cum enim inter A, & D, cadant duo medii proportionales B, C; erunt A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

21. octavi

A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLION.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quae ego vidi, vulgata demonstratio praecedentium duarum propositionum; quam qui diligenter examinare velit, inveniet sane mancam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamvis non quibuscunque lateribus unius exhiberi possint alia latera, alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus unius proportionalia sint quaedam alterius; Iure optimo

quis

quis inficiari poterit, si duorum planorum similium unus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse; & si duorum similium solidorum unus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quæ tamen in demonstratione pro conceſſo, atque omnibus perſpicuo aſſumebantur. Nam poſitis duobus numeris ſimilibus 9. & 6. 4. ſimilibus, ſatis eſt, ut duobus lateribus prioris, qualia ſunt 9. & 12. exhibeantur alia duo latera poſteriores, nempe 4. & 6. proportionalia. Unde etiamſi prior ſit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis poſſit, immo omnino negare, poſteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc eſt, inter ſe quoque æqualia, atque adeo eſſe quadratum; quemadmodum etiam manifeſtum eſt, hiſce lateribus priorum 4. & 9. vel 2. & 18 non poſſe inveniri alia latera in poſteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in poſteriori proportionalia, quamquam ipſi numeri ſint ſimiles; cur ſine demonſtratione ulla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. aſſignari poſſe in poſteriori alia duo proportionalia, nempe & inter ſe æqualia? Idem dicendum eſt de ſolidis ſimilibus. Quapropter veramque propoſitionem Euclidis aliter demonſtrabimus, adhuc, qui ſequitur modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium eſſe quadratum. Sumpta enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in ſe facias A; ducas B, & A, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. ab unitate continue proportionales; eritque convertendo A, ad D, ut D, ad unitatem: atque adeo tam inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam unitatem, cadant medij proportionales multitudine æquales, nempe unus; cadent quoque inter eos, ex theor. 3. ſcholij propoſ. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, minimum unus, qui ſit E. Quoniam igitur unitas & E, C, numeri ſunt continue proportionales; producetur C, ex E, in ſe ipſum, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. huius latus E.

A L I T E R. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipſum A, & F, ipſum

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
Unitas.

sum C, æqua ex iis, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Ex quo niam extremi D, F, minimorum ixium numerorum, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati : Est autem & A, quadratus, ex hypothesi ; cadet inter D, 9. E, 12. F, 16. A, et D, quadratus medius unus proportionalis, ut G. Quia vero est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nempe H. Cum ergo F, primus metiatur G, vltimum ; metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F ; metietur I ; toties numerii K, quoties F, ipsum H, ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplices. Sit quoque E, quadratus ipsius K. Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F : Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quod conuerse pdo sint proportionales etiam C, H, F ; erit L, ad F, vt C, ad F : Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

ALITER. Quoniam A, & C, similes plani sunt ; sint eorum latera proportionalia D, E, quidem ipsius A ; at F, G, ipsius C, ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G : assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in I ; erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit A, ad G, vt D, ad E, cadatque inter D, & E, medius proportionalis H ; cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales ; idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum : Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A ; fiat ex E, in seipsum

11. octaui.

8. octaui.
7. octaui.
11. octaui
20. octaui
20. septim.
8. octaui
20. septim.

sum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A,

continuè proportionales ab vnitate; atque

idcirca constituti pro-

portionales quoq; erũt.

	A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.	
	F, 16. H, 100.	
	E, 4. G, 10.	
	Vnit.	

numeri A, F, E, & vnitas. Itaque inter numerum D, & vnitatem, ac eosdem numerum A, cadant mediæ proportionales multitudine æquales, videlicet duæ; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem mediæ inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continuè sunt proportionales; fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G. 11. octani

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D; metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, aque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia

E, H, extremi quatuor minimorũ, cubi sunt,	A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.	
	K, 32. M, 500.	
ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem	I, 16. L, 250.	
	E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.	
& A, cubus, ex hypothesi; eadem inter se	P, 1000. Q, 10. N, 1.	

K, cubus duo mediæ proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & permutando, vt A, ad E, ita D, ad H, cadent quoque inter H, D, duo mediæ proportionales, quæ sint L, M. Cum ergo H, primum metiatur D, extremum; metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H, metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L; ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem nationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Atqui posuimus P, & D, æquales esse. Quare cum P, cubus 12. octani 8. octani 7. octani 12. octani

cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus: & secundus quadratus erit.

SIT A, ad B, ut C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratum. Cum enim sit A, ad P, ut C, ad D; cadat autem inter C, & D, quadratos unus medius proportionalis, nempe E; cadet quoque inter A, & B, medius unus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendum.

11. octavi A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.
8. octavi
22. octavi

COROLLARIUM.

LIQUET ex his, proportionem cuiusvis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, esset & ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cū primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vide numeri in dupla proportione, proportionem inter se habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8, 16, 32, 64, 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, esset & 8. quadratus; Igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum.

24. octavi

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum,

meruin, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

SIT A, ad B, ut C, cubus ad D, cubum: sitque A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, ut C, ad D; cadant autem
inter C, & D, cubos A,8. G,12. H,18. B,27.
duo medij proportio- C,64. E,96. F,144. D,216. 12. octavi
nales, nimirum E, F;
cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia 8. octavi
igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus; erit & B, quartus cubus: Quo 23. octavi
circa, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus. 25. octavi

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse ut A, ad B, ita alium numerum quadratum ad alium quendam quadratum.
A,20. C,30. B,45.
Cum enim A, & B, sint plani D,24. F,36. F,54.
similes, cadet inter eos unus me- 18. octavi
dius proportionalis, uidelicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis ratione continua A, C, B; erunt extremi

tremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, ut D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, ut est quadratus aliquis, nempe D, ad quadratum alium, ut ad F. Ergo similes plani numeri ratione inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A,20. C,30. B,45.
D,4. E,6. F,9.

SCHOLION.

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quã quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. Quoniam inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis; Et est, vt C, ad D, ita A, ad B; cadet quoque medius proportionalis inter A, & B. Quare A, & B, plani similes sunt.

11. octani
A,8. B,18.
8. octani
C,16. D,36.
20. octani

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratũ. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

25. **THEOR. 25. PROPOS. 27.**

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, ut A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia A, B, sunt solidi similes, cadent inter eos duo medij propor-

19. octani

proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erunt extremi E, H,

ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H, constat ita esse A, ad B, ut est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, nempe ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A,240. C,360. D,540. B,810.
E,8. F,12. G,18. H,27.

SCHOLION.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet,

NVMERI, qui proportionem habent, quã cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; cadant autem inter C, D, cubos duo media proportionales; cadent quoque inter A, B, duo media. Sunt ergo A, & B, solidi similes.

A,16. B,54.
C,64. D,216

12. octani
8. octani
27. octani

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel sesquialteram, vel superbipartiẽtem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri nõ posse iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadẽ ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo media proportionales; Nam alias caderent quoque duo media inter minimos eorundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in scholio praedicto traditum est; inter quos certum est non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

18. octani

8. octani

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus pri-

mus

mus, latera habet solummodo vnitatem, & seipsum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ constat non esse proportionalia. Quinis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas unitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua harum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est eatenus posse esse proportionalia.

VNDE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel sesquialteram, vel superbipartientem, vel certe duo numeri primi, erunt illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter vero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato, esset & 20. quadratus. quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.

26. octani
24. octani

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. 40. Si enim essent solidi similes, haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit, esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.

27. octani
25. octani

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTVM IX.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.



DVo numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C; Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes, unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter D, & C, unus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, ut sint continue proportionales D, E, C. Itaque cum tres D, E, C, continue sint proportionales, sitque primus D, quadratus, ex constructione; erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

A,6. B,54.
D,36. E,108. C,324.

1. 1
17. septimi
18. octavi
8. octavi
11
22. octavi

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt 2

11

Dvo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratū.

A,6. B,54. C,324. D,36.

17. *septimi* Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C; erit ut A, ad B, ita D, ad C. At inter D, & C, quadratos

11. *octavi* unus medius cadit proportionalis. Igitur & inter A, & B,

8. *octavi.* unus medius proportionalis cadet; Ac propterea A, & B,

20. *octavi* similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Ex hiis demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I. Si duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

Dvo quadrati A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nempe quadrate; erit C, ex eis productus, quadratus.

A,4. B,25. C,100.

1. *noni.*

II. Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

Dvo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus. Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; erunt A, & B, similes plani: atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis, nempe D. Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A,9. D,12. B,16. C,144.

2. *noni.*

18. *octavi*

22. *octavi*

III. Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant

ciant non quadratum; alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

Duo numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus. Dico *B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.*

A, 4. B, 20. C, 80.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit. IIII.

Duo numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico *C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.*

A, 9. B, 20. C, 180.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicãs procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, se ipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D; metietur C, ipsum D, per C: Metitur autem & unitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est unitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nempe denominata a C; Ac

A, 8. E, 16. D, 40. F, 32. C, 2. B, 64. Vni. tas. 7. *pron.* 5. *pron.*

20. *defin.* 7. *pron.* proinde ut unitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; metietur D, ipsum A, per C: Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars erit C, ipsius D, quæ

A, 8. D, 4.
E, 16. D, 4.
F, 32. C, 2.
B, 64. Vni-. tas.

20. *defin.* D, ipsius A; ideoque ut C, ad D, ita D, ad A: sed ut C, ad D, ita erat unitas ad C. Igitur ut unitas ad C, ita C, ad D; & D, ad A; Atq; adeo inter unitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. At quia A, ipsum B, metitur per A, 7. *pron.* quod A, se ipsum multiplicans fecerit B; metitur uero & unitas ipsum A, per A: Eadem erit pars unitas ipsius A, quæ 4. *pron.* A, ipsius B; Ac propterea erit ut unitas ad A, ita A, ad B. 20. *defin.* Quare cum inter unitatem & numerū A, cadant duo medij proportionales C, & D; cadent totidem inter A, & B, 8. *octaui* nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales; & A, primus sit cubus; erit 23. *octaui.* quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; eritq; 9. *noni.* D, cubus. Quoniam uero A, multi

A, 8. B, 27.
17. *septimi* D, 64. C, 216.

plicans A, & B, fecit D, & C; erit ut 12. *octaui.* A, ad B, ita D ad C. At inter A, & B, cubos duo medij proportionales ca- 8. *octaui* dunt. Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales 23. *octaui* cadent; Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quo circa si cubus numerus cubum numerum multiplicans, &c.

Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 15. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicatus enim A, se ipsum faciat D, qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D; 3. noni.
A, ad B, ita D, ad C; Atqui D, 64. C, 216. 17. septimi
inter D, & C, cubos duo cadunt media 12. octaui.
proportionales. Totidem igitur & inter A, & B, cadent. 8. octaui.
At prius inde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem 13. octaui
si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c.
Quod ostendendum erat.

SCHOLION.

Ex his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I. SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur. A, 8. B, 20. C, 160. 5. noni.

II. SI cubus numerus numerum quendã multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, nnumerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus; & factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim. A, 8. B, 17. C, 136. 4. noni.

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus se ipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS se ipsum numerus A, faciat B, cubum. Dico & A, cubum esse. Fiat ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur; atque adeo æqualis A, 8. B, 64. C, 512. sit æqualiter æqualis, ut per 5. noui. finitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: Ergo inter A, 8. B, 64. C, 512. B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt; 12. octaui 17. septimi Quoniam uero est ut B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; cadens quoque inter A, & B, duo medij proportionales; 8. octaui 23. octaui Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, ut perspicuum est.

7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit

A, sit compositus, metietur eum, præter unitatem, numerus aliquis: metiatur D ipsum A per E. Quo posito, multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B ipsum A, multiplicans fecerit C, procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2. E, 3.

13. defin.
9. pron.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus uero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcũque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate esse quadratum, & unũ intermittentes

Vnitas. A, 3 B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049, L, 177147. M, 531441.

omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum uero F, cubũ simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam est unitas ad A, ut A, ad B, æque metietur unitas numerum A, & numerus A, numerum B; Metitur autem unitas numerum A per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, qua-

5. pron.
9. pron.

quadratus est. Quia uero tres deinceps proportionales sunt
22. octaui B, C, D; & est B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem
ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F,
cum D, sit quadratus, & F, quadratus erit; Nec non & om-
nes unum intermittentes.

QUIA igitur unitas ad A, ut B, ad C; æque me-
tietur unitas numerum A, & numerus B, numerum C. Me

Vnitas. A, 2. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.
H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

5. pron. 9. pron. titur autem unitas ipsum A, per A. Igitur & B ipsum C,
per A, metietur; atque adeo B, ipsum A, multiplicans pro-
creabit numerum C. Quare cum A, se ipsum multiplicās
faciat B, multiplicans uero B, faciat C, ut est ostensum; erit
C, cubus. Quia uero quatuor deinceps proportionales
23. octaui sunt C, D, E, F, & est C, cubus; erit & F, cubus. Eodem ar
gumento assumptis quatuor deinceps proportionalibus F,
G, H, I, cum F sit cubus; & I, cubus erit; atque omnes
semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F, septimus ab unitate ostensus
est & quadratus, & cubus; ipse erit cubus simul & quadra-
tus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis ni-
mirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadra-
tus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur
ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fue
rint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLION.

Hoc theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunque numeri ab unitate con
tinue proportionales, omnes positi in locis im
paribus, nimirum in tertio, quinto, septimo,
nono, undecimo, &c. sunt quadrati. Omnes
autē, qui sequuntur proxime numeros positos
in locis, tertio, sexto, nono, duodecimo, deci-

mo-

moquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimus sextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes uero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimo octauo, uigesimo quarto, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, uigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM *primi ordinis numeri omnes semper unum intermittunt post tertium ab unitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab unitate. Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab unitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.*

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero post vnitatem sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab unitate cõtinue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus unita-

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

ti quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab unitate, & omnes unum intermittẽtes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, iam demonstratũ est. Quod 8. noni.

uero

8. noni. uero & reliqui intermedij C, & E, quadrati sint, ita perspicuū fiet. Cum tres continue proportionales sint A, B, C; sitque

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

22. octaui A quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, assumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cum C, sit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, E, F, quadrati sunt. Idem ostendemus, si plures numeri sint continue proportionales.

SIT iam A, proximus unitati cubus. Dico & reliquos cubos esse. Quod enim quartus ab unitate, & omnes duos

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768, F, 262144.

8. noni. intermittentes, cuiusmodi sunt C, & F, sint cubi, iam est demonstratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi sint, sic ostendemus. Cum sit unitas ad A, ut A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: Metitur autem vnitas numerum A, per ipsummet A. Igitur, & A, ipsum B, per seipsum metietur; Atque adeo duos A, se ipsum multiplicans numerum B, procreabit. Quare B, cubus est. Quoniam uero quatuor continue proportionales sunt A, B, C, D, estque A, cubus; & D, cubus erit. Eademq; ratione assumptis quatuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit, & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

5. pron.
9. pron.
3. noni.
23. octaui

SCHOLION.

NON *demonstrauit Geometra, si numerus, qui post unitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua uero parte est quadratus, ea ratione & reliqui*

reliqui omnes quadrati erunt, vt demonſtratum eſt. Omnes igitur erunt cubi ſimul, & quadrati.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui uero poſt unitatẽ, non ſit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatẽ, non ſit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I; & primum A, proximus unitati non ſit quadratus. Dico nec alium ullum eſſe quadratum, præter tertium ab unitate, & unum intermittentes omnes, nempe præter B, D, F, H. Si enim præter hos alius

Vnitas A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512.

eſt quadratus, ſit quadratus E. Cum ergo & D, ſit quadratus, ſitque ut D, ad E, uel E, ad F, ita A, ad B; & conuertendo ut E, ad D, uel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, uel quadratus F, ad quadratum E: ſed B, tertius ab unitate eſt quadratus. Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod eſt abſurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus eſt. Eadem ratione oſtendemus nullum alium, præter dictos, quadratum eſſe. 9. noni. 8. noni. 24. octaui

SED iam A, proximus unitati non ſit cubus. Dico nec alium ullum eſſe cubum, præter quartũ ab unitate, & duos intermittentes omnes, uidelicet præter C, F, I. Nam ſi præter hos alius poteſt eſſe cubus, ſit D, cubus. Cum ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo ut D, ad F, ita A, ad C, (quod tres 8. noni.

D, E,

D,E,F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo ut F,ad D,ita C,ad A; habebit C,ad A, rationem,quam cubus F, ad cubum D: Sed C, est cubus,nempe

8. noni.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16. E,32. F,64. G,128. H,256. I,512.

25. octaui

quartus ab unitate. Igitur & A, primus ab unitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D,cubus est.

8. noni.

Quod si E, credatur esse cubus; cum & C,cubus sit, sitque ex æquo, ut C,cubus ad E,cubum,ita A,ad C,& conuertendo ut cubus E,ad cubum C,ita C,ad A; existente C, cubo, erit, & A,cubus. quod non ponitur. Non ergo E,cubus est.

25 octaui

Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C,& F,cubos non esse; ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H,inter cubos F,& I,neque illos alios duos,inter duos cubos,esse cubos. Si igitur ab unitate quotcunque numeri,&c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

Non est autem necesse, si numeras, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab unitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab unitate cubo simul, & quadrato.

Sit enim primum A, qui post unitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus. Di-

Vnitas. A,8. B,64. co B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem,

9. noni. *quod primo existente cubo, omnes cubi sunt; quadratum uero,*

8. noni. *quod tertius sit ab unitate.*

Sit deinde A, post unitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Di-

Vnitas. A,4. B,16. C,64. co quartum C, esse cubum simul & quadratum; Cu-

8. noni. *bum quidem, quod quartus sit ab unitate; quadratum uero,*

9. noni. *quod primo existente quadrato, omnes sunt quadrati.*

Sit postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus.

dratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratū, praeter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

enim primo non existente quadrato, nullus alius quadratus sit, praeter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, undecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, nullus alius sit cubus praeter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, ut ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cateris. Nam in haec loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, ut liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit. 10. noni. 10. noni.

THEOR. 11. PROPOS. 11. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab unitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorē, ut

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

C, quemlibet maiorem, ut G, metiri per aliquem numerorū A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo ut C, ad G, ita unitas ad D; (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem cum unitate & numeris A, B, C, D,) æque metitur unitas numerum D, atque numerus C, numerum 11. 20. defi

5. pron. merum G: Sed unitas metitur numerum D, per ipſum met D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit ut E, ad F, ita unitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo ut A, ad G, ita unitas ad F, &c. At que ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat oſtendendum.

SCHOLION.

PERSPICVVM autem eſt ex his, *quantum abeſt maior numerus a minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, ut ex demonſtratio-*

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ne apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nempe per ſe ipſum, &c.

HINC *rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſe ipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab unitate. Si vero minor aliquis maiorem quempiã multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore diſtat, quantum minor ab ab vnitate; propterea quod ſi numerus numerum metiens mul*

9. pron. *tiplicet eum, per quem metitur, producatur ille, quem metitur. Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.*

11. ## THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum

morum numerorum ultimum metiuntur, ijdem & eum, qui unitati proximus est, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A,B,C,D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur ultimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A. Si namque non metitur ipsum A; erit E, cum primus sit, ad A, primus. 31. *septimi*

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000.
Metiat autem E, ipsum D, per E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

F, atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia uero & A, ipsum D, metitur per C, ac proinde A, multiplicans C, facit D, ut in scholio præcedentis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. Quare erit ut A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia uero & A, ex scholio eodem, metitur C, per B, atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. Erit igitur ut A, primus ad E, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cũ A, & E; sint inter se primi; metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H, ita ut E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, ac idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, ut ex eodem scholio apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex A, medio in se, & ex E, primo in H, tertium. Quare erit ut E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium; atque adeo, cũ E, & A, inter se primi sint, æque metietur E, ipsũ A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum

19. *pron.* 19. *septimi* 21. *septimi* 9. *pron.* 19. *septimi* 21. *septimi* 9. *pron.* 20. *septimi* 21. *septimi*

sum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus, quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes, metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, uel B, ultimus numerus statuatur. Si igitur ab unitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

ALITER. Metiatur E, numerus primus ultimum D. Dico, & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; erit
31. *septimi* E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, se ipsū multiplicans facit B, ut
Vaitas. A, 6. B, 36 C, 216. D, 1296. E, 3. apparet ex scholio propos. præceden-
27. *septimi* tis; erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi
sunt, fit autem C, ex A, in B, per idem scholion; erit C, ad
26. *septimi* E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt, & fit D, ex A, in C, per idem scholiō; erit D, ad
26. *septimi* E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est cō tra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A.

SCHOLION.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ex Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod uidetur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium uideatur afferre: Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturque se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse; Quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius uim huius demonstrationis expēdisset, uel certe, si expendit, eam in memoriam reuocasse; quā doquidem ipso longe prior Euclides usus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum.

CAETERVM ex demonstratis perspicuum est, quomcunque

cumque numerũ primũ, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes, quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris; manifestum est, quod & ille omnes metiatur. 12. noni 11. noni

THEOR. 13. PROPOS. 13. 13.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit; Maximũ nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab unitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum ergo est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; metietur quoque ipsum A, unitati proximum, qui primus ponitur. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625. E —— H —— G —— F ——

Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; metietur quoque ille alius primus eundem D, atque adeo & ipsum A, primum existentem, nimirum unitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur utique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; & uiciſſim aliquis ipsorum A, B, C, (nempe is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per

12. noni. 3 3. septimi 11. pron. 12. noni 8. pron.

per E. Cum ergo quilibet ipſorum A, B, C, metiatur D, per
11. noni aliquem ipſorum A, B, C; erit E, idem qui aliquis ipſorum
A, B, C, quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, nõ
idem, qui aliquis ipſorum A, B, C. Non igitur F, idem eſt,
qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniam uero
E, metitur D, per
8. pron. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625. F; metietur uiciſ-
E---- H--- G--- F---- ſim F, ipſum D,
per E. Non erit
autem F, primus. ſi enim ſit primus, & metiatur D, ultimũ;
12. noni metietur, & A, proximum unitati, qui primus eſt. quod
eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus;
33. ſeptimi atque adeo cum aliquis numerus primus metietur. quem
rurſus dico nullum alium eſſe poſſe præter primum A. Si
namque alius primus quam A, metiatur F; cum F, metia-
11. pron. tur D, extremum; metietur quoque ille alius primus eun-
12. noni dem D, atque adeo & ipſum A, proximum unitati, qui pri-
mus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quã
A, ipſum F, metitur. Iam uero quoniam E, metitur D, per
9. pron. F; fiet D, ex E, in F. Fit autem & D, ex A, in C, ut in ſchо-
lio propoſ. 1. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus
D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex B, ſecundo in F, ter
19. ſeptimi tium; Atq; proinde erit ut A, primus ad B, ſecundum, ita F,
tertius ad C, quartum. Metitur autem A, ipſum E, ut oſtẽ
ſum eſt. Ergo & F, ipſum C, metietur: Metiatur per G.
Quoniam igitur F, diuerſus ab A, B, metitur C, ultimum,
(relinquimus enim iam numerum D,) per G; oſtendemus
ſimiliter G, diuerſum eſſe ab A, B, & non primum, ſed com
poſitum, quem ſolus A, primus metiatur: quemadmodum
id oſtenſum eſt de numero F, per quem E, diuerſus ab A,
B, C, metiebatur D, ultimum.

Si enim G, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B; metia-
turq; F, ipſum C, per G; metietur utique F, ipſum C, per
8. pron. aliquẽ ipſorum A, B; & uiciſſim aliquis ipſorum A, B, (nem
11. noni pe is, per quem F, ipſum C, metitur) metietur C, per F. Cũ
ergo quilibet ipſorum A, B, metiatur C, per aliquem ipſorũ
A, B; erit F, idem qui aliquis ipſorum A, B. quod eſt ãb
ſurdum. oſtenſum eſt enim F, non eſſe eundem, qui ali-
quis ipſorum A, B. Non ergo G, eſt idem qui aliquis ipſo

rum

rum A, B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; metietur uicissim G, ipsum C, per F. Non erit autē G, primus. Si enim primus sit, metiaturque ultimum C; metietur quoque numerum primum A, unitati proximū. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur. quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quā A, metiatur G; cum G, metiatur C, ultimum; metietur quoque ille alius primus eundem C; atque adeo & ipsum A, unitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metitur. Iam uero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, ut docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. Quare erit ut A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, ut demonstratum est: Igitur & G, ipsum B, metietur: metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, ultimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

NAM si H, idem sit qui A; metiaturque G, ipsum B, per H; metietur utique G, ipsum B, per A; Et uicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, ut constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem qui A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. Iam uero quia B, fit ex G, in H, quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, ut in scholio dicto docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiū, & ex A, medio in seipsum. Quare erit ut H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium. At A, metitur ipsum G, ut est demonstratum: Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare existente A, primo, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C: Ac proinde si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

8. *pron.*
12. *noni*
33. *septimi*
11. *pron.*
12. *noni*
9. *pron.*
19. *septimi*
8. *pron.*
9. *pron.*
20. *septimi*

14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim, si fieri potest, primus numerus E, diuersus a B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; multiplicans E, ipsum F, faciet A. Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur; non quidem ipsum E, primum existentem, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . C . . . D . . . . .
E —— F ——

9. pron. 32. septimi

SCHOLION.

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, que sequuntur, non inutile. Videlicet.

15. SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, compositus erit ad alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D,

C, D, E, *in sua proportione minimi, in qua sumantur etiam duo minimi* F, G: *Metiatur autem primo* H, *primum eorum, nempe* A. *Dico* H, *compositum esse vel ad* F, *vel ad* G. *Sumantur enim in eadem proportione tres numeri minimi* I, K, L; *& quatuor* M, N, O, P; *& sic deinceps, donec habeantur tot vno minus, quot sunt ipsi* A, B, C, D, F. *Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in* 2. *propos. lib.* 8. A, *sit ex* F, *in* M; *metitur autem* H, *ipsum* A; *erit* H, *compositus, ex scholio propos.* 3. *lib.* 9. *ad* F, *vel ad* M. *Si ad* F, *habemus propositum; si vero ad* M, *qui quidem sit ex* F, *in* I, *vt constat ex demonstratione propos.* 2 *lib.* 8. *erit, ex scholio dicto, rursus* H, *compositus vel ad* F, *vel ad* I. *si ad* F, *habetur propositum; si vero ad* I, *cum* I, *gignatur ex* F, *in se ipsum; erit* H, *compositus ad* F, *ex dicto scholio.*

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. 2. octani
M, 8. N, 12. O, 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H —— F, 2. G, 3.

DEINDE *metiatur* H, *secundum* B. *Quia ergo* B, *fit ex* F, *in* N, *erit vt prius* H, *compositus vel ad* F, *vel ad* N. *si ad* F, *habetur propositum; si vero ad* N, *qui quidem sit ex* F, *in* K, *erit* H, *eodem modo compositus vel ad* F, *vel ad* K. *si ad* F, *habetur propositum; si vero ad* K, *cum* K, *gignatur ex* F, *in* G; *erit quoque* H, *compositus vel ad* F, *vel ad* G.

KVRSVS *metiatur* H, *tertium* C, *qui cum fiat ex* F, *in* O; *erit* H, *compositus vel ad* F, *vel ad* O. *Si ad* F, *habetur propositum; si vero ad* O, *qui quidem sit ex* F, *in* L; *erit* H, *compositus vel ad* F, *vel ad* L. *si ad* F, *habetur propositum; si vero ad* L, *cum* L, *gignatur ex* G, *in se; compositus quoque erit* H, *ad* G.

PRAETEREA *metiatur* H, *quartum* D, *qui cum fiat ex* F, *in* P; *erit* H, *compositus vel ad* F, *vel ad* P. *si ad* F, *habetur propositum; si vero ad* P, *qui quidem sit ex* G, *in* L; *erit etiam* H, *compositus vel ad* G, *vel ad* L. *si ad* G, *habetur propositum; si vero ad* L, *cum* L, *producatur ex* G, *in se; erit quoque* H, *ad* G, *compositus.*

EODEM *modo si* H, *metiatur vltimum* E, *ostendemus* H, *compositum esse ad* G; *atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.*

ITAQVE si H, metitur primum A; erit H, compositus ad F: Si vero secundum B, metitur; erit compositus vel ad F, vel ad G: Si denique metitur tertium C, vel quartum D, vel quē cunque alium insequentem; compositus erit H, ad G. Id quod perspicue ex demonstratione apparet.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM in theoremate sequente demōstrando theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, tanquam si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum feciſſe a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I. SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam C, multiplicans A B, fecit F;

A . . . D . . E . B C . .
F . . . . . .
G . . . . . H . . . . I . . K

7. pron. metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata a C. Eadem ratione A D, ipsius G H; nec non

DE

D E, ipſius H I; & E B, ipſius F K, pars erit a C, denominatæ, nempe eadem quæ A B, ipſius F. Quia uero, per ea quæ ad propos. 1. lib. 7. demonſtrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars eſt, quæ A D, ipſius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipſius F; Ac proinde inter ſe æquales erunt F, & G K. Quod eſt propoſitum. 4. pron.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani ſub toto, & ſingulis partibus comprehenſi æquales ſunt numero quadrato, qui a toto efficitur. II.

NVMERVS A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, ſimul æquales eſſe numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis ſit ipſi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc eſt, ex A B, in A B, nimirũ quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc eſt, ex A B, in A C, & in C B. quod eſt propoſitum.

D . . . . . .
A . . . . C . . B

IDEM demonſtrabitur, ſi A B, in plures partes, quam in duas ſecetur, vt ex appoſita ſecunda figura apparere poteſt. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc eſt, ex A B, in A B, nempe quadratus ipſius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc eſt, ex A B, in ſingulas partes A C, C D, D B.

E . . . . . .
A . . . . C . . . D . . B

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & una parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, & quadrato, qui a prædicta parte efficitur. III.

SIT numerus A B, diuiſus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C.

Sumpta enim numero D, qui dicta parti A C, æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex A C, in C B, & ex D, hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A G. Quod est propositum.

D . . . . . .
A . . . . . C . . . . . B

IIII. Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, una cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

Sit numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum quadratum ex A B, factum æqualem esse quadratis partium A C, C B, vna cum numero, qui fit bis ex parte A C, in partem C B. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius A B, æqualis est numeris, qui fiunt ex A B, in A C, & in C B. Est autem numerus, qui fit ex A B, in A C, per 3. theorema, æqualis numero genito ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius A C: Item numerus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipsius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod est propositum.

A . . . . . C . . . B

V. Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

Numerus A B, secetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerum sub partibus inæqualibus A D, D B, contentum, una cum quadrato numeri intermedi

medij C D, esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius C B, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, vna cum plano numero bis comprehenso sub C D, D B; numero vero comprehenso sub C D, D B, una cum quadrato ipsius D B, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; eris numerus quadratus ipsius C B, æqualis etiam reliquo quadrato ipsius C D, vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, & numero ex C B, hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numerus, qui fit ex A D, in D B. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius C D, vna cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc est, numerus factus ex A D, in D B, vna cum quadrato ipsius C D, æqualis est quadrato ipsius C B. Quod est propositum.

A . . . . C . . . D . . B

VI.

Si numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, una cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NUMERUS A B, secetur in partes æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, in adiectum B D, una cum quadrato dimidij numeri C B, æqualem esse quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno. Cum enim quadratus ipsius C D, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C B, B D, vna cum numero bis comprehenso sub C B, B D, hoc est, vna cum numeris sub C B, B D, & sub A C, B D, comprehensis; numeris autem contentis sub C B, B D, & sub A C, B D, & sub B D, B D, hoc est, quadrato ipsius B D, æqualis sit, ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; eris quadratus ipsius C D, æqualis reliquo quadrato ipsius C B, una cum numero facto ex A D, in B D; hoc est, numerus factus

A . . . . C . . . B . . D

ex

ex A D, *in* B D, *una cum quadrato ipsius* C B, *æqualis est quadrato ipsius* C D. *Quod est propositum.*

VII. Si numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.



DIVIDATVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico quadratum totius* A B, *una cum quadrato partis* C B, *æqualem esse numero bis, qui fit ex toto* A B, *in dictam partem* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C. *Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius* A B, *æqualis sit quadratis partium* A C, C B, *una cum numero, qui fit bis ex* A C, *in* C B; *si quadratus ipsius* C B, *addatur communis; erunt quadrati numerorum* A B, C B, *simul, æquales quadratis numerorum* A C, C B, C B, *una cum numero qui fit bis ex* A C, *in* C B. *Atqui ei, qui fit ex* A C, *in* C B, *una cum quadrato ipsius* C B, *æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex* A B, *in* C B; *Ac proinde ei, qui fit bis ex* A C, *in* C B, *una cum quadrato ipsius* C B, *bis, æqualis est, qui fit bis ex* A B *in* C B. *Igitur quadrati numerorum* A B, C B, *simul, æquales sunt numero, qui fit bis ex* A B, *in* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod est propositum.*

VIII. Si numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.



SECETVR *numerus* A B, *in partes* A C, C B. *Dico numerum, qui fit quater ex toto* A B, *in partem* C B, *una cum quadrato reliquæ partis* A C, *æqualem esse quadrato numeri, qui ex toto* A B, *& prædicta parte* C B, *componitur. Addito enim numero* B D, *qui æqualis sit dictæ*

Eæ parti C B ; *cum quadratus totius* A D, *compositi ex* A B, *&* B D, *siue dicta parte* C B, *sit æqualis per* 4. *theorema, quadratis numerorum* A B, B D, *vna cum numero qui fit bis ex* A B, *in* B D, *hoc est, quadratis numerorum* A B, C B, *una cum eo, qui fit bis ex* A B, *in* C B ; *Sint autem, ex* 7. *theorem. quadrati numerorum* A B, C B, *simul æquales numero his compræhenso sub* A B, C B, *vna cum quadrato numeri* A C ; *Erit quadratus factus ex* A D, *æqualis numero, qui fit quater ex* A B, *in* C B, *vna cum quadrato reliquæ partis* A C. *Quod est propositum.*

S I numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales : Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur. IX.

D I V I S V S *sit numerus* A B, *in partes æquales* A C, C B, *& non æquales* A D, D B. *Dico quadratos partium inæqualium* A D, D B, *duplos esse quadratorum, qui ex* A C, *dimidio, & ex* C D, *numero intermedio efficiuntur. Cum enim* A . . . . . C . . . D . . . B *quadratus numeri* A D, *æqualis sit, ex* 4. *theorem. quadratis numerorum* A C, C D, *una cum numero bis, qui fit ex* A C, *in* C D ; *Si communis apponatur quadratus partis* D B ; *erunt quadrati partium* A D, D B, *æquales quadratis partium* A C, C D, D B, *vna cum numero bis, qui fit ex* A C, *hoc est, ex* C B, *in* C D. *Atqui quadrato ipsius* D B, *vna cum numero bis, qui fit ex* C B, *in* C D, *æquales sunt, ex* 7. *theorem. quadrati, qui fiunt ex* C B, *hoc est, ex* A C, *&* C D. *Igitur quadrati partium* A D, D B, *æquales sunt quadratis partium* A C, C D, *bis ; Ac propterea quadrati partium* A D, D B, *dupli sunt quadratorum, qui ex partibus* A C, C D, *fiunt. Quod est propositum.*

S I numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus : Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli X.

pli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus A B, *diuiſus in partes duas æquales* A C, C B, *ſitque adiiciatur numerus* B D. *Dico quadratum numeri* A D, *compoſiti ex toto* A B, *& adiecto* B D, *& quadratũ adiecti numeri* B D, *vtroſque ſimul, duplos eſſe quadratorum, qui fiunt ex* A C, *dimidio, & ex* C D, *compoſito ex* C B, *dimidio, & adiecto* B D. *Cum enim quadratus ipſius* A D, *æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis partium* A C, C D, *una cum numero bis, qui fit ex* A C, *hoc eſt, ex* C B, *in* C D; *ſi communis addatur quadratus partis* B D; *erunt quadrati numerorum* A D, B D, *æquales quadratis partium* A C, C D, B D, *una cum numero bis, qui fit ex* C B, *in* C D. *Sed per 7. theorema, quadrato ipſius* B D, *una cum numero bis, qui fit ex* C B, *in* C D, *æquales ſunt quadrati numerorũ* C B, C D; *& quadrato ipſius* C B, *æqualis eſt quadratus ipſius* A C. *Igitur quadrati numerorum* A D, B D, *æquales ſunt quadratis numerorum* A C, C D, *bis*; *Ac propterea quadrati numerorum* A D, B D, *dupli ſunt quadratorum, qui ex* A C, C D, *efficiuntur. Quod eſt propoſitum.*

A . . . . C . . . . B . . D

21

IAM vero theorema 12. *lib.* 2. *non poſſe numeris accommodari, hoc eſt, nullo modo fieri poſſe, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, æqualis ſit quadrato reliquæ partis, vt ibi monuimus, ita demonſtrabimus.*

DIVIDATVR, ſi fieri poteſt, numerus A B, *in* C, *ita vt numerus factus ex toto* A B, *in partem* C B, *æqualis ſit quadrato reliquæ partis* A C. *Quia igitur numerus contentus ſub extremis* A B, C B, *æqualis eſt quadrato numeri medij* A C; *erit vt* A B, *ad* A C, *ita* A C, *ad* C B: *Eſt autem* A B, *maior quam* A C. *Igitur & A C, maior eſt quam* C B. *Ablato iã* C D, *qui ipſi* C B, *ſit æqualis, erit quoque vt* A B, *ad* A C, *ita* A C, *ad* C D. *Quoniam ergo totus* A B, *ad totum* A C, *eſt vt* A C, *ex toto* A B, *detractus ad* C D, *ex toto* A C, *detractum; erit quoque vt totus* A B, *ad totum* A C, *vel vt detractus* A C, *ad*

A D E C B

20. *ſeptimi*

11. *ſeptimi*

ad detractum C D, ita C B, ex A B, residuus, hoc est, C D, illi aequalis, ad A D, ex A C, residuum. Quia igitur est vt A C, ad C D, ita C D, ad A D; & est A C, maior quam C D; erit quoque C D, maior quam A D. Ablato ergo D E, qui ipsi A D, sit aequalis; erit etiam vt A C, ad C D, ita C D, ad D E. Itaque quia est, ut totus A C, ad totū C D, ita C D, ex toto A C, detractus ad D E, ex toto C D, detractum; erit quoque vt totus A C, ad totum C D, vel ut detractus C D, ad detractum D E, ita A D, ex A C, residuus, hoc est D E, illi aequalis, ad E C, ex C D, residuum. Quare cum sit vt C D, ad D E, ita D E, ad A C; sit autem C D, maior, quam D E; erit etiam D E, maior, quam E C; Ac proinde ex E D, auferri poterit numerus ipsi E C, aequalis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum; cum numerus non possit diuidi infinite. Non ergo numerus A B, diuidetur ita, ut planus numerus ex toto in vnam partium factus, aequalis sit quadrato reliquae partis. Quod est propositum. 11. septimi

ALITER. *Quoniam numerus A B, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex A B, in C B, aequalis sit quadrato reliquae partis A C; erit numerus, qui quater fit ex A B, in C B, quadruplus quadrati ipsius A C; Ac proinde numerus, qui fit quater ex A B,*



in C B, vna cum quadrato ipsius A C, quincuplus erit quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, vna cum quadrato ipsius A C, quadratus; quippe cum aequalis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (mirum is qui quater continetur sub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quā 5. ad 1 vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut conflat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, aequalis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum

ipsis

ipsis rationem habentium ; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habentium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirum A, B, simul ad C ; & B, C, simul ad A ; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsum multiplicantem facere A ; multiplicantem vero ipsum E, facere B ; atque E, se ipsum multiplicantem facere C. Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt ; erit & uterque D, E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam compositus ex D, E, quam ipse D, ad E, primus sit ; erit quoque numerus factus ex D, E, tanquam uno in D, ad eundem E, primus : Qui autem fit ex D, E, tanquam uno in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E ; Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

24. *septimi* 30. *septimi* 26. *septimi* 27. *septimi*

DEINDE quia, ut prius, uterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D, E ; efficitur (cum tam compositus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) numerum factum ex D, E, tanquam uno in E, primum esse ad D : Qui autem fit ex D, E, tanquam uno in E, æqualis est per 3. theorema scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E, igitur & B, C, simul compositi, ad D, primi sunt ; atque adeo ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

30. *septimi* 26. *septimi* 27. *septimi*

POSTREMO quia, ut prius, uterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est ; atque adeo e contrario, quilibet ipsorum D, E, primus est ad compositum ex D, E ; erit quoque qui fit ex D, in E, ad compositum ex D, E, primus ; Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D, E,

ex D, E, tanquã uno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam uno, in se, æqualis est, per 4. theorema antecedentis scholij, eis qui fiunt ex D, & F, in se ipsos, una cum eo qui ex D, in E, bis: Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis.

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

Quoniam ergo duo numeri simul, nempe compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorũ, ut ad eum, qui fit ex D, in E, ut ostensum est; Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E; atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, uidelicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, ut ad eum, qui fit ex D in E, primi sunt, ut ostensum est; erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erũt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

30. *septimi*

30. *septimi*

SCHOLION.

CAMPANVS *hoc theorema aliter demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.*

Si quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT *continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad*

ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si. fieri potest; sumanturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum nempe D; erit E, compositus ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14 huius lib. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib 8. metietur quoque H, medios B, C; ac propterea, & compositum ex B, C. Itaque cũ H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, ut demonstravimus; metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. Sed & primi inter se sunt, Quod fieri non potest, Non igitur cõpositus ex A, B, C, & numerus D. ergo inter se primi.

11. pron. 11. pron. 10. pron. 12. pron. 3. octaui

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D; metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C; metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositũ ex A, B, D, & detractum B; metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt conflat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi ad C, compositi

positi sunt. ergo primi. Quod est propositum.

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B; primos; nec non, & B, C, D, simul ad A.

THEOR. 16. PROPOS. 16. 17.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse ut A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit ut A, ad B, ita B, ad alium, nempe ad C. Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, atq; adeò in sua proportione minimi; ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C. Metitur autem & A, se ipsum: Igitur A, metitur ipsos A, B primos inter se existētes. Quod est absurdum. Non ergo est ut A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, ut B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A .....
B ..... 23. *septimi*
C ..... 21. *septimi*

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorū primi inter se sint: Non erit ut primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, ut A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E.....

ut A, ad B, ita D, ad alium, uidelicet ad E. Fiat igitur permutando ut A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum sint
23. *septimi* inter se primi, minimi in
A, 8. B, 12. C, 18. D, 27 E —— sua proportione. Igitur
21. *septimi* æque metientur ipsos B, & E; nempe A, ipsum B, & D, ipsum E. Atqui est ut A, ad B, ita B, ad C: Ergo cũ A, metiatur ipsum B; & B, ipsum C,
11. *pron.* metietur; atq; ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est ut B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipsum C; metietur &
11. *pron.* C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, metietur quoque ipsum D. Metitur uero & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos existentes. Quod est absurdum: Non ergo est ut A, ad B, ita D, ad alium numerũ E. Eodem quoque argumento non erit ut D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A. & B, oporteatque considerare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est,
1 an sit B, ad alium quempiam numerũ, ut
A, 4. B, 7. A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter se sunt, aut non. Si sunt inter se primi;
16. *noni* perspicuum est ex demonstratis, non posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si uero non sunt A, & B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C,
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. per D. Dico ipsis A, B, inueniri posse tertium proportionalem, immo ipsum D, esse tertiũ proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D; fiet C,
9. *pron.* ex A, in D: Fit autem ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A, D, æqua-

lis

lis est ei, qui ex medio B, describitur; Ac proinde erit ut A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B. 20. *septimi*

Sed D non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D; ita ut

sit A, ad B, quemadmodū A, 6. B, 4. D — C, 16.
B, ad D. Quoniam igitur

est, ut A, ad B, ita B, ad D; erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc 20. *septimi*
est ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem uia considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, ut B, ad A. Duobus ergo numeris datis consideraui mus, &c. Quod faciendum erat. 7. *pron.*

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

Sint dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, ut A, ad

B. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, imo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & ter- 9. *pron.*

A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.

19. septimi tio continetur; Ac propterea erit ut A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalē. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus ꝓportionalis E; ita ut sit quemadmodū A, ad B, ita C, ad E. Quare ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt; erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare cum D, fiat ex A in E; metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur nō metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus nō metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, ut C, ad B. Quibus ita tribus numeris datis cōsideratiuimus, an posset, &c. Quod erat faciendum.

A:4. B:6. C:9. E — D:54.
A:4. B:4. C:10. E — D:40.

19. septimi

7. prim.

SCHOLION.

Ex his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (inquit) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut nō deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati nō sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non

non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vbique proportio sit subdupla? Idē videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita ut sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & ut B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, ut A, ad C, ita C, ad E: sed sunt A, C, inter se primi, & ob id minimi. Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At uero & A, se ipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se existentes. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E.

23. & 12. *septimi*

HAEC *est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita A, ad alium quendam numerum, uidelicet ad E; quod quidem fieri posse nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus hic inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant; liquido constat, eos petere principium (vt cum dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus,*

sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquã concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione ulla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc verò non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, nõ tamen deinceps; sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipsi ostenderũt, metietur A, duos A, & C, primes inter se. Quod est absurdũ. Num ergo fieri potest, ut D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E ——

PRIMVM verò membrum perspicue & aperte ostenditur. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postremo tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.

17. noni.

21. THEOR. 18. PROPOS. 20.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorũ.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiantur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

38. septimi

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D ——— E . F

SED iam non sit primus D F. Metietur ergo eum aliquis

quis numerus primus, nempe G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idem, qui unus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E, & G, eundē D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, metietur quoque E F, reliquum, numerus unitatē. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui unus ipsorum A, B, C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, C. Eademq; uia plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 3. B, 5. C, 7.
105
D ---------- E. F
53
G ---------

33. *septimi*

SCHOLION.

Poterat idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

Primis numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

Nam si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inuenietur eodem modo alium primum ab illis diuersum, nempe D F, si primus est, uel certe G. Atque eodem modo quatuor primis alium quintū, & quinque primis alium sextum inuenietur, & sic deinceps primos numeros, quotcunqs quis uolet, inuenietur.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 22.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

Componantur quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cū

enim AB, BC, CD, sint pares; habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius AB; & F, ipsius BC; & G, ipsius CD. Quoniam igitur est ut AB, ad E, ita BC, ad F; & CD, ad G; (quod semper sit proportio dupla.) erit quoque ut AB, ad E, ita AD, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus AD, compositi ex E, F, G, duplus erit; Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . C . . . . . D
E . . . F . . G . . . . .

12. *septimi*

23. THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositum AE, parem esse. Cum enim AB, BC, CD, DE, sint impares; differet quilibet unitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab unoquoque unitate, quilibet reliquorum par erit. Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo unitatum detractarum par: Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . C . . . D . . . . . E

21. *noni.*

21. *noni.*

24. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOT-

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totũ A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat unitate a pari, ex definitione; ablata unitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par: Est autem & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A ..... B ... C ..... E . D

22. noni. 21. noni.

THEOR. 22. PROPOS. 24. 25.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quã dimidia pars, uel minor. Sit primum dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A ..... C ..... B

SED iam C B, par detractus maior sit, uel minor, dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit ut A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando ut A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidendo ut A C, ad C B, ita D E, ad E B; Rursusque permutando, ut A C, ad D E, ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detraha-

A ..... C .. D ... E ..... B

A ..... D ... C . E .. B

trahatur, &c. Quod erat oſtendendum.

26. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

Ex pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim unitate C D, ex C B, reliquus ſit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit & reliquus A D, par. Detracta ergo unitate C D, reliquus A C, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....C. D.... B

24. noni.

27. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

Ex impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem eſſe. Detracta enim D B, unitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; erit & reliquus A C, par. Quare ſi ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

A....C.....D.B

23. noni.

28. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

Ex impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim A D, unitate ex impare A B;

A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus D C, par quoque erit; Ac proinde addita unitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat. 24. noni.

A . D . . . . C . . . . . B

THEOR. 26. PROPOS. 28. 29.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt unitates. Quare cum B, sit par, coponetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A; Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat. 21 noni.

A . . . B . . . .
C . . . . . .

SCHOLION.

EADEM *demonstratione ostendemus & hoc.*

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM *rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.*

A . . . B . . . .
C . . . . . .

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparē numerū multiplicans fecerit aliquē. Factus impar erit.

Ex

Ex impari A, in imparē B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt unitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nempe æqualis multitudini unitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerū multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A ..... B .....
C .....

23. noni.

EX CAMPANO.

31.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

A ... C ....
B .....

29. noni.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; erit B, factus ex A, impari in C, impares impar. Quod est absurdum, cū ponatur par. Est ergo C, par.

32.

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

A .....
B .....

28. noni.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparē esse. Si enim sit par; erit B, factus ex A, impari in C, parē par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

33.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI impar numerus parem numerū metiatur; & dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiū quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex iis, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstra-

monſtrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A metiatur B, per C; metietur quoque C, ipſum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, ut ad 3. definitionem lib. 7. docuimus. Quoniam uero eſt ut C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando ut C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B. Eſt autē C, pars ipſius B, denominata ab A, ut oſtenſum eſt; erit & dimidiū ipſius C, dimidij ipſius B, pars ab eodē A, denominata; Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

A . . . C . . .
B . . . . . .

8. *prop.*

40. *ſeptimi*

THEOR. 29. PROPOS. 31. 34.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A, C, non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit D; qui neceſſario impar erit. Nam ſi ſit par, cū A . . . . . B . . . . . metiatur imparem A; erit C . . . . . D — A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar eſt. Quia igitur D, impar parem C, metitur; (eſt enim C. par, cum dimidiū habeat B,) metietur quoque numerum B, eius dimidium. Metitur autem & A: Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe exiſtentes metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt: Ergo primus.

Quapropter ſi impar numerus ad aliquē numerū primus ſit, &c. Quod erat oſtēdendum.

28. *noni.*

30. *noni.*

THEOR

35. THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM a binario duplorũ unusquisque pariter par est tantum.

Numeri a binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita unitate, quæ sit A, sit binarius B, C, D, E, a binario duplicentur A, B, C, D, E, ab unitate deinceps proportionales, ni mirum in proportione dupla. Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, utpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

11. noni.

Quod autem idem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab unitate deinceps proportionales, sitque A, proximus unitati numerus primus, nempe binarius; nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

13. noni

SCHOLION.

Hinc cum Arithmeticis facile colligamus artem, qua omnes numeros inveniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint A, B, C, D, A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128. E, F, a binario dupli, qui

I H G

ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur;

nentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars dimidia, metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si est impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia partis dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita ut sit I, binarius. Igitur H, G, sunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autem, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, praeter eos, qui a binario sunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33. 36.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter impar tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem; metietur binarius, numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem

9. pron. rem E. Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium,

19. septimi

A . . . . . C . . . .
B . . . . . D . . . .

Ac propterea erit ut C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius patem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLION.

ITAQVE *si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum. Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tantum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares; qui nec a binario sint dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, praeter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, praeter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed uel esse pariter parem tantum, uel certe pariter parem & pariter imparem.*

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neq; dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet. Nam cum dimidium habeat A ....., metietur parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nã si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cũ in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo uicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neq; a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat. 29. noni.

SCHOLION.

FACILE ex dictis inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

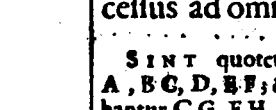
PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 5. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secun-

do, & ultimo æquales ipsi primo: Erit ut secundi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, ultimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse ut B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul.



Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniã igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia uero est ut A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque ut E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque ut E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur ut E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) ut I H, ad H F, hoc est, ut B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

12. *septimi*

SCHOLION.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum continue proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo detrahatur, fiatque vt reliquus

quus ſecundi ad primum, ita reliquus vltimi ad alium: Erit hic alius ſumma omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt.

Si igitur adiiciatur vltimus, habebitur tota ſumma. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, ſi primus multiplicetur in exceſſum vltimi, & productus diuidatur in exceſſum ſecundi. Id quod ex regula proportionum apud Arithmeticos manifeſtum eſt. Vt in exemplo appoſito, ſi primus numerus, nimirum unitas, detrahatur ex 3. ſecundo, & ex 2187. vltimo 3 erunt reliqui exceſſus 2. 2186. Quoniam igitur debet eſſe vt 2. ad 1, ita 2186. ad ſummam omnium, excepto vltimo; ſi 1. multiplicetur per 2186, fiet numerus 2186. qui ſi diuidatur in 2. exibit numerus 1093. Videlicet ſumma omnium, excluſo vltimo 2187. qui ſi addatur ſummæ inuentæ 1093. procreabitur ſumma omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in ultimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab unitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compoſitus ſit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, eſſe numerum perfectum. Quot enim ſunt numeri A, B, C, D, tot ſumantur ab E, dupli, nempe E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem

Vnitas. A, 1. B, 2. C, 4. D, 8.
E, 31. G —— 62. H, 124. I, 248. F. —— 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
Q —— P ——

dem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, ut A, ad D, ita E, ad I; Ac propterea numerus factus ex A, primo
19. *septimi* in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium:
Factus est autem F, ex D, in E: Igitur idem F, fiet ex A, in I;
7. *pron.* ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F,

Vnitas . A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ------ 62. H, 124. I, 248. F ------ 496
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ------ P ------

ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, ultimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. Erit
35. *noni.* igitur ut M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nempe numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex unitate, & A, B, C, D numeris; (qui compositus eidem E, est æqualis) erit compositus ex L, N, nimirum ipse F, æqualis unitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cũ unitas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (cum enim
7. *pron.* F, factus sit ex E, in D, metietur D, ipsum F; atque adeo
11. *pron.* eundem F, metietur unitas, & numeri A, B, C, ipsum D, metientes. Rursus cum I, ipsum F, metiatur, ut ostensum est; metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, ipsum I, propter proportionem duplam, metientes) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, ut mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

Q v o d autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F,
9. *pron.* per P; atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; ac propterea est

ut

ut B,ad P,ita O,ad D. Quoniam uero, cum A, B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A,proximus unitati, primus; ultimum D, nullus alius, præter A B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O,ad D,ita erat E, ad P; Neque igitur E, ipsum P, metietur. Existente ergo E,primo, erunt E, & P, inter se primi; ideoque in sua proportione minimi: Ac proinde æque metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. Nullus uero alius præter A,B, C, ipsum D,metitur: Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E,G, H. Erit igitur ex æquo, ut B, ad D, ita E, ad H; Ac proinde idem numerus fiet ex B,primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B,in H; atque adeo erit, ut P,ad B, ita H,ad O. Erat autem P,idem qui B: Igitur & H,idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O,diuersus ab omnibus A, B, C, D,E,G,H,I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A,B,C,D,E,G, H, I, metiuntur. Quâ ob rem, si ab unitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

19. *septimi*

13. *octaui*

21. *septimi*

23. & 21. *septimi*

19. *septimi*

19. *septimi*

SCHOLION.

Ex hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & eorum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in unam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in ultimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa unitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1.2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3 in 2. vltim

vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. *Item, quia compositus ex his* 1. 2. 4. *nimirum* 7. *primus est: idcirco* 18. *factus ex* 7. *in* 4. *est perfectus habens has partes aliquotas* 1. 2. 4. 7. 14. *At uero quia compositus ex his* 1. 2. 4. 8. *hoc est,* 15. *non est primus; non erit* 120. *factus ex* 15. *in* 8. *perfectus.*

DENIQVE *quia compositus ex his* 1. 2. 4. 8. 16. *nimirum* 31. *primus est; erit* 496. *factus ex* 31. *in* 16. *numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt* 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. *Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.*

FINIS ELEMENTI NONI.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE