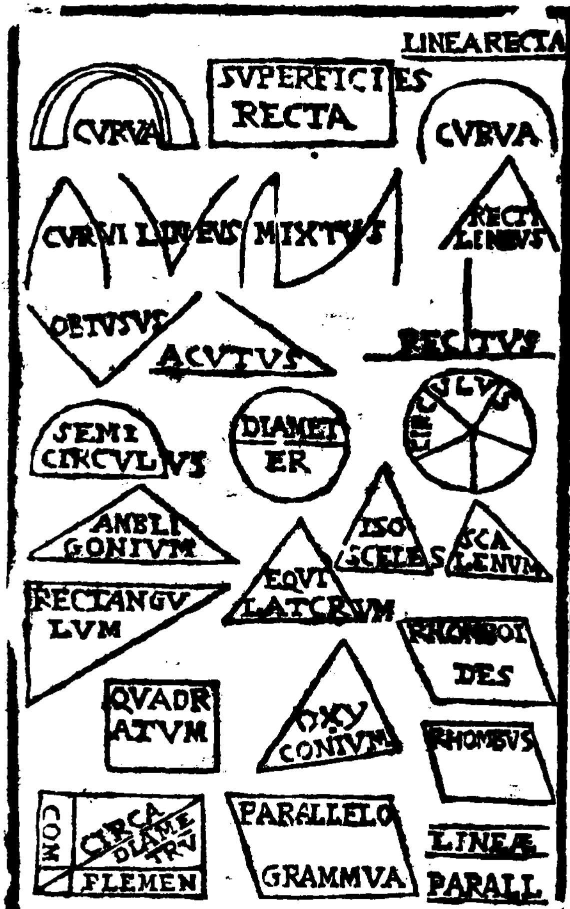


LINEA RECTA
SVPERFICIES RECTA
CVRVA
CVRVA
CVRVI LINEVS MIXTVS
RECTI LINEVS
OBTVSVS
ACVTVS
RECTVS
SEMI CIRCVLVS
DIAMETER
CIRCVLVS
ANBLIGONIVM
ISO SCELES
SCALENVM
EQVILATERVM
RECTANGVLVM
RHOMBOIDES
QVADRATVM
OXYGONIVM
RHOMBVS
COMPLEMEN
CIRCA DIAMETRV
PARALLELOGRAMMVA
LINEÆ PARALL.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI SEX.

Ex traditione Federici Commandini.

Nonnullis adjunctis notis accuratissimis.

NEAPOLI, MDCCXXXVI.
Ex Typographia Felicis Caroli Moscae.
Superiorum permissu.

Sumptibus Berardini Gessari.
In cujus Bibliotheca venduntur.

3.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM.
LIBER PRIMUS.
Ex traditione Federici Commandini.

DEFINITIONES.

1. Punctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.
2. Linea verò est longitudo latitudinis expers.
3. Lineæ fines sunt puncta.
4. Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantùm habet.

Ut vel clarissimè hæ definitiones intelligantur, operæ pretium est hic advertere, in Geometria de ea tantùm magnitudinis specie agi, quæ in extensione consistit; quæque non plures quam tres dimensiones, longitudinem nempe, latitudinem, & profunditatem, habet. Sed non semper omnes hæ ejus dimensiones considerantur, aliquando duæ tantùm earundem respiciuntur, aliquando tantùm una. Si igitur omnibus tribus dimensionibus prædita consideratur extensio, solidum dicitur, sive corpus: at si duæ tantùm earundem (longitudo nempe & latitudo) respiciantur, superficiei nomen sortitur: si verò ad unam tantùm attendatur (ad longitudinem nempe) vocatur linea: denique si terminus lineæ concipiatur, idea puncti habebitur. Punctum igitur, ut Euclides ait, nullam habet partem, sive magnitudinem, quia terminus est lineæ, illæ namque ex partibus, quæ versus lineam ferent, non essent extremum lineæ, adeoque ad punctum non pertinerent. Linea quoque omnis latitudinis est expers, quia extensionis unam tantùm dimensionem (longitudinem nempe) in suâ ideâ claudit. Tandem superficies

omni

omni profunditate caret, quia duas extensionis continet dimensiones, longitudinem scilicet, & latitudinem. Ex his liquet, quàm inanes, & ridiculæ sint Scepticorum argutiæ, qui Geometriæ certitudinem in dubium vocare audent ex eo, quod ipsa supponat lineas sine latitudine, & superficies omni profunditate carentes, quæ nusquam sunt. Falsum namque est hæc à Geometria supponi; id tantum ipsa postulat, ut longitudines, quæ in rebus extensis reverà sunt sine latitudine, & longitudines una cum latitudinibus absque verò profunditate concipiantur, quod fieri posse non est dubium; sic in dimetiendo intervallo, quo Urbs ab Urbe distat, ipsam tantum viarum longitudinem metimur, de earundem latitudine nihil prorsus solliciti.

5. Superficiei fines sunt lineæ.

6. Recta linea est, quæ ex æquali suis interjicitur punctis.

Hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, aut illuc deflectendo subsultat, in qua nihil est flexuosum. Definitur quoque recta linea, ut Archimedes, quod sit brevissima omnium, quæ duci possunt à puncto ad punctum. E contra linea non recta est, quæ non ex æquali suis interjicitur punctis, vel quæ non est brevissima omnium, quæ duci possunt à puncto ad punctum.

7. Plana superficies est, quæ ex æquali suis interjicitur lineis.

Hoc est, cujus mediæ partes ab extremis sursum deorsum subsultando non recedunt. Definitur quoque Plana superficies, ut Hero, quod sit illa, cujus omnibus partibus recta linea accomodari potest, vel quod sit brevissima omnium, quæ eadem habent extrema. Ex his facili negotio cognoscitur superficies non plana quid sit.

8. Planus angulus est duabus lineis in plano sese contingentibus, & non in directum jacentibus, alterius ad alteram inclinatio.

Angulus igitur non in occursu linearum, sed in earundem mutua inclinatione consistit. Occursus quippe linearum est punctum, cui angulorum proprietates non competunt, quod nempe dividi possint, augeri, aut minores reddi. Patet itaque ex hac definitione, angulum majorem, aut minorem non reddi, si ejus crura, sive lineæ, à quibus constituitur, longiores, aut breviores fiant, sed si earundem hiatus, ut ita dicam, major, aut minor reddatur. Porrò notandum est angulum vel unica litera ad verticem anguli posita denotari, vel

tribus

tribus, quarum media verticem anguli denotat: sic in figura prop. 4. angulus qui fit à lineis A B, A C designari potest vel unica litera A ad ejus verticem posita, vel tribus B A C.

9. Quando autem, quæ angulum continent, rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

10. Cum verò recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

Non requiritur ut duplex constituatur angulus adhoc, ut unus rectus angulus habeatur, sed suffi-it animadvertere, si producta alterutra ex lineis angulum constituentibus, alius à parte altera nascatur angulus priori æqualis.

11. Obtusus angulus est, qui major est recto.

12. Acutus autem, qui recto est minor.

13. Terminus est, qui alicujus est finis.

14. Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

15. Circulus est figura plana una linea contenta, quæ circumferentia appellatur, ad quam ab uno puncto intra figuram existente, omnes rectæ lineæ pertinentes sunt æquales.

16. Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

17. Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem & bifariam circulum secat.

18. Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea, quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

19. Portio circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.

Circulus ita generatur, si recta linea uno extremo suo manente fixo in orbem circumagatur, recta ipsa circulum, extremitas illius altera, quæ in orbem agitur circumferentiam producet. Circuli circumferentiam in 360 partes æquales dividunt Geometræ, quas gradus vocant, ob multas illius numeri commoditates; unumquemque porrò gradum in 60 minuta, & unumquodque horum in 60 secunda, & sic in infinitum. Circuli peripheria anguli quantitas determinatur; si namque facto centro in vertice anguli circulus describatur, circumferentiæ portio, quæ inter illius crura intercipitur, ejusdem quantitatem designabit, ita ut quot

 gra-

gradibus illa constabit, tot eorundem erit angulus.

20. Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

21. Trilateræ quidem, quæ tribus.

22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

23. Multilateræ verò, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

24. Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

25. Isosceles, sive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

26. Scalenum verò est, quod tria inæqualia habet latera.

27. Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.

28. Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

29. Acutangulum verò, quod tres acutos angulos habet.

Basis trianguli dicitur secundum opus unumquodque ejus latus.

30. Quadrilaterarum figurarum quadratum est, quod æquilaterum est, & rectangulum.

31. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, æquilatera verò non est.

32. Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

33. Rhomboides, quæ, & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.

34. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia vocentur.

35. Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ quum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.

Vel Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ in eodem plano existentes utrinque in infinitum protractæ æqualibus semper intervallis inter se distant. Habentur æqualia hæc intervalla penes perpendiculares, quæ intercipi inter parallelas concipiuntur, ita ut inter se omnes æquales sint. Ex quo patet Euclidæam parallelarum definitionem, hujus definitionis corollarium esse, nam satis superque est notum lineas, quæ semper æqualibus intervallis inter se distant nunquam concurrere.

36. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus bina opposita latera sunt parallela, sive æquidistantia.

Postulata, sive Petitiones.

1. POstuletur a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.
2. Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.
3. Quovis centro, & intervallo circulum describere.

Quæ à Geometris hic petuntur, fieri posse est manifestum, aut saltem concipi possunt ut possibilia, quod sufficit ad hoc ut admittantur. Geometrica enim exactitudo sola contemplatione est contenta; ac proinde quod clarè, & distinctè, concipitur, ipsa admittit. Ad praxim sufficit si exactissimis instrumentis perfici possint: quæ quidem instrumenta, quæ tum ad hæc, tum ad omnia, quæ in his elementi proponuntur problemata construenda, sunt necessaria, sunt circinus, & regula.

Axiomata, seu Communes Notiones.

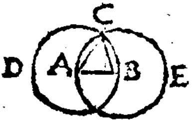
1. QUæ eidem sunt æqualia inter se sunt æqualia; & quod uno æqualium majus est, vel minus, majus quoque est, aut minus altero æqualium; & si unum æqualium majus vel minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine majus est aut minus.
2. Et si æqualibus æqualia adjiciantur tota sunt æqualia.
3. Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.
4. Et si inæqualibus inæqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.
5. Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.
6. Quæ ejusdem sunt dupla, tripla, quadrupla, &c. inter se sunt æqualia.
7. Et quæ ejusdem sunt dimidia, tertia, quarta pars, &c. inter se sunt æqualia.
8. Et quæ sibi ipsis congruunt, inter se sunt æqualia.
9. Totum est sua parte majus.
10. Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.
11. Duæ rectæ lineæ non habent segmentum commune, & si invicem se secent in unico puncto se secant.
12. Omnes anguli recti inter se sunt æquales.

Problema dicitur propositio, in qua aliquid faciendum propon-

ponitur, ut est prima hujus libri. Theorema dicitur propositio, in qua veritas aliqua ostenditur, ut quarta hujus libri.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.



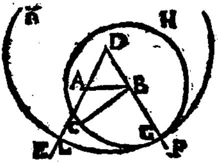
SIt data recta linea terminata AB, oportet in ipsa AB triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem AB circulus describatur BCD. Et rursus centro B, intervalloq; BA describatur circulus ACE, & à puncto C, in quo circuli se invicem secant, ad A, B ducantur rectæ lineæ CA, CB. Quoniam igitur A centrum est circuli CBD, erit AC ipsi AB æqualis. (1) Rursus quoniam B circuli CAE est centrum, erit BC æqualis BA. Ostensa est autem & CA æqualis AB; utraque igitur ipsarum CA, CB ipsi AB est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. (2) Ergo CA ipsi CB est æqualis; tres igitur CA, AB, BC inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est ABC, & constitutum est in data recta linea terminata AB, quod fecisse oportebat.

(1) def. 15. (2) Com. not. 1.

PRO-

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

Ad datum punctum data recta linea æqualem rectam lineam ponere.



Sit datum quidem punctum A, data verò recta linea B C; oportet ad A punctum ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad B recta linea AB.(1)& in ipsa constituatur triangulum æquilaterum D A B, (2) producanturque in directum ipsis D A, D B rectæ lineæ A E, B F: (3) & centro quidem B, intervallo autem B C circulus C G H describatur: rursusque centro D, & intervallo D G describatur circulus GLK. Quoniam igitur punctum B centrum est C G H circuli, erit B C ipsi B G æqualis. (4) Et rursus quoniam D centrum est circuli G L K, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D B; reliqua igitur A L reliquæ G B est æqualis. (5) Ostensa autem est BC æqualis BG; quare utraq; ipsarum AL, BC æqualis ipsi BG. Quæ autem eidem æqualia sunt, & inter se sunt æqualia (6) Ergo, & A L est æqualis BC. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL. Quod facere oportebat.

Aliter. Accipe circino intervallum B C; & centro A intervallo B C describatur circulus, ad cujus circumferentiam omnes ductæ à dato puncto A datæ B C sunt æquales. Hæc constructio geometrica est per tertium postulatum, & ad praxim magis accommodata.

(1) Postul.1. (2) Prima hujus. (3) Postul.2. (4) Defin.15. (5) Com.no.3. (6) Com.n.1.

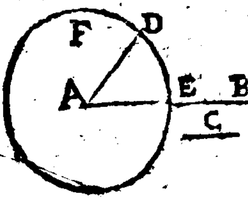
PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majori minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales A B, C, quarũ major sit A B; oportet à majori AB minori C æqualẽ rectam lineã abscindere. Ponatur ad A punctũ ipsi C æqualis recta linea AD; (1)& centro quidem A, intervallo autem

A 4 AD

(1) Ex antecedente.



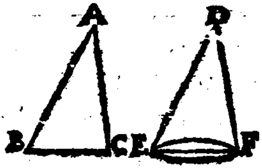
A D circulus describatur DEF. (2) Et quoniam A centrum est D E F circuli erit AE ipsi AD equalis. Sed & C equalis AD; utraq; igitur ipsarum AE, C ipsi AD æqualis erit. (3) Quare & AE ipsi C æqualis. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB, C, à majori A B minori C æqualis abscissa est AE. Quod fecisse oportebat.

Aliter. accipe circino intervallum minoris data C, & in majorem transfer ex A in E. Hac constructio eadem ratione, qua antecedens est geometrica.

(2) post. 3. (3) Com. no. 1.

THEOREMA I. PROPOSITIO IV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aqualia habeant, alterum alteri, habeant autem, & angulum angulo aqualem, qui aqualibus rectis lineis continetur, & basim basi aqualem habebunt; & triangulum triangulo aquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis aquales, alter alteri, quibus aqualia latera subtenduntur.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus DE, DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus verò AC ipsi DF; & angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico, & basim B C basi E F æqualem esse; & triangulum A B C æquale triangulo DEF; & reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; nempè angulum A B C angulo D E F, & angulum A C B angulo D F E. Triangulo enim ABC superimposito ipsi D E F, & puncto quidem A posito in D, recta verò linea A B in ipsa DE, & punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem A B ipsi D E; congruet, & AC recta linea, rectæ lineæ DF, quum angulus B A C sit æqualis angulo EDF: quare, & C congruet ipsi F; est

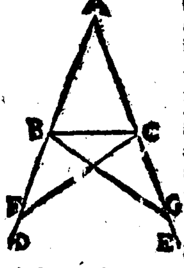
enim

enim rursus recta linea A C æqualis rectæ DF. Sed, & punctum B congruebat puncto E: Ergo, & basis B C basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C verò ipsi F, basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendunt: quod fieri non potest. (1) Congruet igitur BC basis basi EF, & ipsi æqualis erit. Quare, & totum ABC triangulum congruet toti triangulo D E F, & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipsis æquales erunt; videlicet angulus ABC angulo DEF, & angulus ACB angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

(1) Com. no. 10.

THEOREMA II. PROPOSITIO V.

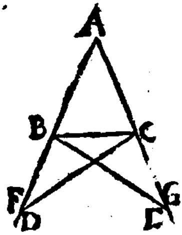
Æquicrurium triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui sunt sub basi inter se æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C, habens A B latus, lateri A C æquale, & producantur in directum ipsis A B, A C rectæ lineæ BD, CE; Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum verò C B D angulo B C E æqualem esse. Sumatur enim in linea B D, quodvis punctum F: atquè à majori A E minori A F æqualis auferatur A G: (1) junganturque F C, G B. Quoniam igitur A F quidem est æqualis A G; A B verò ipsi A C; duæ FA, AC, duabus G A, A B æquales sunt, altera alteri; & angulum F A G communem continent; Basis igitur F C basis G B est æqualis; & triangulum A F C æquale triangulo A G B & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur (2). Videlicet angulus quidem ACF æqua-

 lis

(1) Tert. Hujus. (2) Ex præcedente.



lis angulo ABG ; angulus verò AFC angulo AGB . Et quoniam tota AF, toti AG est æqualis, quarum AB est æqualis AC ; erit & reliqua BF reliquæ CG æqualis. (3) Ostensa est autem FC æqualis GB ; duæ igitur BF, FC duabus CG, GB æquales sunt, altera alteri ; & angulus BFC æqualis angulo CGB ; estque basis ipsorum BC communis; ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit ; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. (4) Angulus igitur FBC est æqualis angulo GCB ; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis ostensus est, quorum angulus CBG est æqualis ipsi BCF : erit reliquus ABC reliquo ACB æqualis. (5) & sunt ad basim ABC trianguli : ostensus autem est, & FBC angulus æqualis angulo GCB, qui sunt sub basi. Æquicrurium igitur triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui sunt sub basi, inter se æquales erunt. Quod ostendisse oportebat.

COROLLARIUM.

Æquilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum est; quo umque enim ex ejus lateribus pro basi supposito, considerari potest ut triangulum æquicrure, cujus anguli ad basim inter se sunt æquales.

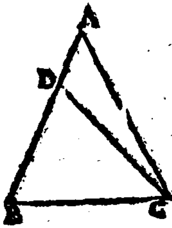
(3) Axioma. 3. (4) Ex præcedente. (5) Axioma. 3.

THEOREMA III. PROPOSITIO VI.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale esse. Si enim inæqualis est AB ipsi AC, altera ipsarum est major : sit major AB ; atque à majori AB, minori AC æqualis auferatur DB (1), & DC jungatur. Quo-

(1) Tert. hujus.



Quoniam igitur D B est æqualis ipsi AC; communis autem B C; erunt duæ DB, BC duabus AC, CB æquales, altera alteri; & angulus D B C æqualis angulo A C B. Basis igitur DC basi AB est æqualis, & triangulum D B C æquale triangulo A C B (2) minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualis est AB ipsi AC: ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt: quod demonstrasse oportuit.

COROLLARIUM.

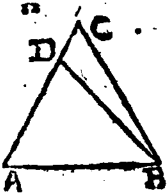
Æquiangulum ergo triangulum, æquilaterum quoque est.

(2) quart. hujus.

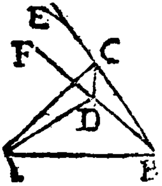
THEOREMA IV. PROPOSITIO VII.

In eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non constituuntur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos prima rectæ lineæ, terminos habentes.

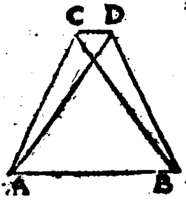
SUper recta A B constituantur ad punctum quodlibet C, duæ rectæ lineæ AC, BC. Dico super eandem rectam AB, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis AC, BC, altera nempe alteri, eosdemque habentes terminos, ac illæ. Sint, si fieri potest, rectæ AC, AD eundem terminum A habentes inter se æquales, & rectæ BC, BD, eundem terminum B habentes, inter se quoque æquales, & concurrentibus A C, B C ad punctum C, reliquæ duæ A D, B D ad aliud punctum, nempe D, conveniant. Aut igitur punctum D erit in alterutra rectarum AC, BC, aut intra triangulum ABC, aut extra.



1 Sit punctum D in altera ipsarum AC, BC nempe in CA: ergo ex hypothesi A D ipsi A C erit æqualis, hoc est pars æqualis toti, quod est absurdum (1). Non igitur punctum D est in alterutra ipsarum AC, BC.



2 Sit punctum D intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, BD versus E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D latera A C, A D, sunt æqualia, erunt anguli ad Basim ADC, ACD inter se æquales (2). Est autem angulus A C D minor angulo D C F, nempe pars toto; igitur, & angulus A D C, minor erit eodem angulo DCE: quare angulus CDF pars ipsius ADC multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus quia in triangulo B C D, latera BD, BC sunt æqualia, erunt anguli CDF, D C E sub basi CD æquales. (3) Ostensum autem fuit, quod idem angulus C D F multo minor sit angulo D C E. Idem igitur angulus C D F, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non igitur punctum D est intra triangulum.



3 Denique sit extra triangulum punctum D: Ducta C D, quum in triangulo A C D latera A C, AD sint æqualia, anguli, A C D A D C ad basim erunt æquales; sed angulus B D C major est angulo ADC; ergo major quoq; erit angulo ACD; quare multo major erit ipso B C D, qui minor est angulo ACD. Rursus quoniam in triangulo BDC, latera BC, BD sunt æqualia anguli ad basim BDC, BCD erunt æquales: idem igitur angulus BDC, major, & æqualis est angulo BCD quod est absur-

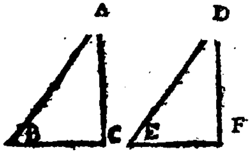
(1) ax.9. (2) 5.hujus (3) 5.hujus.

surdum ; non igitur punctum D esse potest extra triangulum : sed ostensum quoque est, quod neque in alterutra ipsarum AC, BC ; neque intra triangulum esse potest; ergo non ad aliud atque aliud punctum conveniunt rectæ AD, BD, quam in ipsum punctum C, quod erat &c.

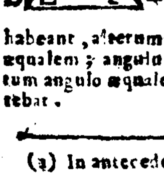
THEOREMA V. PROPOSITIO VIII.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri: habeant autem, & basim basi æqualem: angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

SInt duo triangula A B C, DEF, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E, D F æqualia habeant, alterum alteri; ut sit A B quidem æquale D E, A C verò ipsi DF : habeant autem, & basim BC basi EF æqualem. Dico angulum quoque B A C angulo E D F æqualem esse. Triangulo enim A B C superimposito D E F



triangulo, & puncto quidem B posito in E, recta verò linea BC in EF: congruet & C punctum puncto F, quoniam B C ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruet & BA, AC ipsis ED, DF; si enim basis quidem BC basi EF congruit, latera autem BA, AC lateribus ED, DF non congruunt, sed permutantur; ut EG, GF : constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem habentes terminos : non constituuntur autem, ut demonstratum est, (a) non igitur, si basis BC congruit basi EF, non congruent & BA AC latera lateribus ED, DF;



congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo E D F congruet, & ipsi est æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & basim basi æqualem; angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt; quod demonstrare oportebat.

CO-

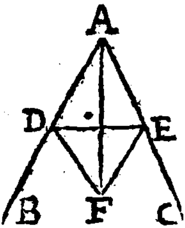
(a) In antecedente.

COROLLARIUM.

Ex ipsa demonstratione hujus propositionis colligitur, reliquos angulos ad basim inter se æquales, alterum nempe, alteri; Et totum triangulum toti triangulo æquale.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO IX.

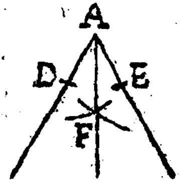
Datum angulum rectilineum bifariam secare.



SIt datus angulus recti lineus BAC, itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea A B quodvis punctum D; & à linea A C, ipsi AD æqualis auferatur AE; (1.) junctaque D E, constituatur in ea triangulum æquilaterum DFE; (2) & A F jungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE; communis autem AF: duæ DA, AF duabus EA, AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF æqualis basi EF, angulus igitur DAF angulo EAF est æqualis. (3) Quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est: quod facere oportebat.

COROLLARIUM.

Hinc patet quomodo angulus secari possit in æquales angulos, 4, 8, 16, &c. singulas nimirum partes iterum bisecando.



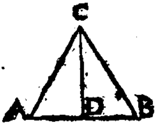
Praxis. Centro A, quocumque intervallo abscindantur æquales A D, A E; Et circino non variato, ex centris D, & E duo describantur arcus se se secantes in F; recta igitur ducta A F angulum datum DAE bisecabit.

PRO-

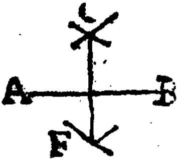
(1) tert. hujus. (2) pr. hujus. (3) Ex antecedente.

PROBLEMA V. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.



Sit data recta linea terminata AB, oportet ipsam bifariam secare. Constituatur in ea triangulum æquilaterum ABC; (1) & secetur ACB angulus bifariam recta linea CD. (2) Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB, communis autem CD; duæ AC, CD duabus BC, CD æquales sunt; altera alteri: & angulus ACD æqualis angulo BCD, basis igitur AD basi BD est æqualis. (3) Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.



Praxis. Ex centro A ad quodvis intervallum, quod tamen dimidium lineæ excedat describantur duo arcus, unus superne, alter inferne; & ex centro B ad idem intervallum alii duo arcus delineentur, qui priores secent in C & F. Recta igitur ducta C E propositam A B bifariam secabit.

(1) pri.hujus. (2) Ex antecedente. (3) quart.hujus.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XI.

Data recta linea & puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, & datum in ipsa punctum C, oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D, ipsique CD æqualis ponatur CE, (1) & in DE constituatur triangulum æquilaterum FDE, (2) & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC. Quoniam enim CD est æqualis CE, & FC communis; erunt duæ DC

(1) sec.hujus. (2) pr. hujus.

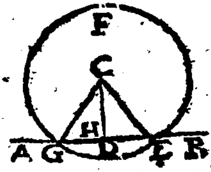
DC, CF duabus EC, CF æquales altera alteri; & basis D F est æqualis basi F E; angulus igitur D C F angulo ECF est æqualis, (3) & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. (4) ergo uterque ipsorum DCF, FCE est rectus. Data igitur rectæ lineæ A B à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est F C recta linea. Quod fecisse oportuit.

Praxis. Ex puncto C abscindantur utrinque lineæ æquales C D, C E; & ex centris D, & E ad quodcumque intervallum describantur duo arcus, secantes se se in F. Recta namque ducta FC erit perpendicularis quæsita.

(3) 13. hujus. (4) Def. 10.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO XII.

Super datam rectam lineam infinitam à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

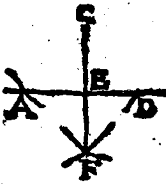


Sit data quidem recta linea infinita A B, datum vero punctum C, quod in ea non est. Oportet super datam rectam lineam infinitam A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem C D, circulus describatur EFG: (1) & EG in H bifariam secetur; (2) junganturque CG, CH, CE. Dico super datam rectam lineam infinitam AB, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duæ GH, HC, duabus EH, HC æquales sunt, altera alteri; & basis C G est æqualis basi C E. Angulus igitur G HC angulo EHC est æqualis, (3) & sunt deinceps; cum autem

(1) Postul. 3. (2) 10. hujus. (3) 13. hujus.

autem recta linea super rectam lineam insistens, eos, qui deinceps sunt, angulos, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum, & quæ insistit recta linea, perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit; (4) ergo super datam rectam lineam infinitam A B à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. Quod facere oportebat.

Probe apposuit Euclides hanc particulam, infinitam: si enim finita esset linea, non semper ad eam perpendicularis duci posset ex puncto dato, quod in ea non est; ut si data sit linea finita BE, non potest à puncto C ad eam perpendicularis duci, nisi indefinitè producatur in directum versus A, ad hoc ut circulus possit describi, qui eam secet in G & E.



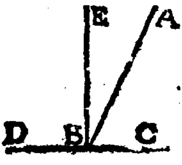
Praxis. Centro facto in C, & intervallo quovis, describantur duo arcus datam secantes in A, & D. Tum centris A, D eodem intervallo, aut alio si placuerit, alii duo arcus describantur sese secantes in F. Recta ducta à puncto C ad punctum F erit perpendicularis quæsita, ut patet ex demonstratione prop.

(4) Def. 10.

THEOREMA VI. PROBLEMA XIII.

Quum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

RECta enim linea quædam A B super rectam CD consistens angulos faciat CBA, ABD. Dico CBA ABD angulos, vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales. Si enim CBA est æqualis ipsi ABD, duo recti sunt; (1) sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos angulos BE; (2) anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. Et quoniam CBE, duobus CBA, A B E est æqualis, communis apponatur EBD: ergo anguli CBE, EBD tribus angulis CBA, ABE, EBD sunt æquales. Rursus quoniam D B A angulus est



(1) Def. 10. (2) pr. 12.

est æqualis duobus DBE, EBA, communis apponatur ABC; anguli igitur DBA, ABC tribus DBE, EBA, ABC æquales sunt. At ostensum est angulos quoq; CBE, CBD eisdem tribus æquales esse: quæ verò eisdem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt ;(a) ergo, & anguli CBE, EBD ipsis DBA, ABC sunt æquales: suntq; CBE, EBD duo recti anguli; igitur DBA, ABC duobus rectis æquales erunt; ergo quum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIA.

1 *Si plures rectæ, quam una, eidem rectæ insistant, anguli qui fiunt, sunt omnes duobus rectis æquales. Patet ex demonstratione.*

2 *Duorum angulorum, qui fiunt ab una recta, quæ alteri insistit, uno cognito, cognoscitur, & alius; æquantur enim simul duobus rectis, quare unius quantitate cognita, alterius quantitas erit residuum ad duos rectos. Duorum autem angulorum rectorum quantitas est 180 graduum, quia eos metitur semiperipheria, ut patet si facto centro in B & quotumque intervallo circulus describatur. Quare si anguli ABD quantitas est gr. 110 angulus ABC erit 70. gr.*

3 *Si duæ rectæ se mutuò secuerint, quatuor anguli, quos constituunt, quatuor rectis sunt æquales, duo enim sunt ex superiori parte, duo ex inferiori.*

4 *Omnes anguli circa unum punctum constituti quatuor rectis sunt æquales; quia æquantur quatuor angulis rectis, qui fiunt à duabus rectis lineis se mutuò secantibus.*

(a) Axioma. 1.

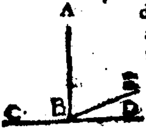
THEOREMA VII. PROPOSITIO XIV.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

AD aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC, BD non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, ABC, ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi

CB

CB in directum esse. Si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi BC in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit, anguli ABC, ABE duobus rectis sunt æquales. (1) Sed & anguli ABC, ABD sunt æquales duobus rectis; anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD: ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

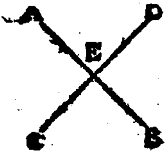


(1) Ex antecedente.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VII.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

DUæ enim rectæ lineæ AB, CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB, angulum verò CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit CEA, AED; erunt hi duobus rectis æquales. (1) Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED, DEB, erunt AED, DEB anguli æquales duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA, AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA, AED angulis AED, DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus CEA reliquo BED est æqualis, (2) Simili ratione, & anguli CEB, DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat.



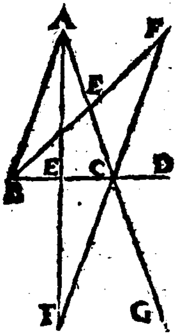
THEO-

(1) 13. hujus. (2) 3. com. not.

THEOREMA IX. PROPOSITIO XVI.

Omnis trianguli, uno latere producto, exterior angulus utroque interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utroque interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam in E, (1) & juncta BE producatur ad F, ponaturque ipsi BE æqualis EF, jungatur præterea FC, & ducta AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE verò ipsi EF, duæ AE, EB duabus CE, EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis, ad verticem enim sunt; basis igitur AB æqualis est basi FC; & ABE triangulum, triangulo FEC; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. (2) Ergo angulus BAC est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter secta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulo ABC major. Omnis igitur trianguli, uno latere producto, exterior angulus utroque interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.



(1) 10. hujus. (2) 4. hujus.

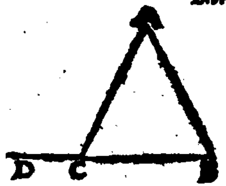
THEOREMA X. PROPOSITIO XVII.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumti.

Sit triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocumque sumtos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major est interiore, & opposito ABC: (1) communis apponatur ACB: Anguli igitur ACD, ACB, angulis ABC, BCA majores

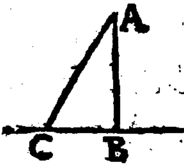
jores

(1) 16. hujus.



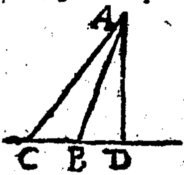
jores sunt. Sed ACD, ACB sunt æquales duobus rectis. (2) Ergo ABC, BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus, angulos quoq; BAC, ACB, itemque CAB, ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocumque sumti; quod demonstrare oportebat.

COROLLARIA.



1 Unica tantum linea perpendicularis à dato puncto ad rectam lineam duci potest. Nam secus, si ex puncto A ad rectam BC duæ perpendiculares AB, AC duci possent, essent in triangulo ABC duo anguli B, C, duobus rectis æquales; quod est absurdum.

2 Si in aliquo triangulo unus angulus erit rectus, vel obtusus, reliqui duo necessariò erunt acuti; secus enim erunt in triangulo duo anguli aut æquales, aut majores duobus rectis.



3 Si ab aliquo puncto A recta linea AB obliquè incidentis in CD, perpendicularis AD in ipsam CD incidat, ea ad partes anguli acuti ABD cadet. Nam si caderet ad partes anguli ABC obtusi; essent in triangulo ABC duo anguli ACB, ABC majores duobus rectis; quod est contra propositionem.

4 Omnes anguli trianguli æquilateri, & duo anguli trianguli æquicruris, qui sunt ad basim, sunt acuti: nam omnes anguli trianguli æquilateri, & duo anguli ad basim trianguli æquicruris sunt inter se æquales, quare acuti omnes esse debent, secus enim essent duo anguli trianguli majores, aut æquales duobus rectis.

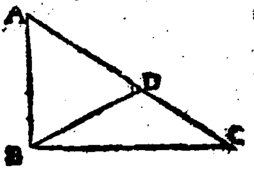
THEO-

(2) 13. hujus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XVIII.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

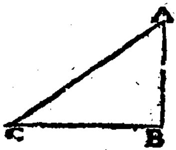
SIt triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC majus est, quam AB, ponatur ipsi AB æqualis AD, & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major interiore, & opposito DCB: (1) sed ADB æqualis est ipsi ABD, quòd & latus AB lateri AD sit æquale; (2) major igitur est & ABD angulus angulo ACB; quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.



(1) 16. hujus. (2) 5. hujus.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

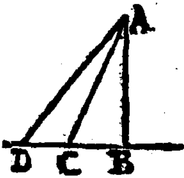


SIt triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. Dico, & latus AC latere AB majus esse. Si enim non est majus, vel AC est æquale ipsi AB, vel ipso minus. Æquale igitur non est: nam & angulus ABC angulo ACB æqualis esset; non est autem: non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus; esset enim & angulus ABC angulo ACB minor: atqui non est: non igitur AC minus, est ipso AB: ostensum autem est neque æquale. Ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit, quod oportebat demonstrare.

COROLLARIUM.

Colligitur ex hac propositione omnium rectarum AD, AC, AB quæ à puncto A ad D B rectam duci possunt, minimam esse perpendicularem AB. Quam enim angulus ABC sit

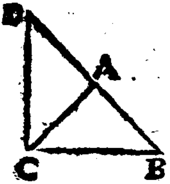
rectus



rectus, quilibet alius A C B, A D B, erit acutus: quare latus AB, angulum acutum ACB, vel ADB subtendens minus est quolibet AC, AD, quod opponitur angulo recto B. Et hinc patet, & ex eo, quod unica sit perpendicularis, quæ duci potest à puncto quopiam ad aliquam rectam, perpendicularem esse mensuram intervalli, quod est inter punctum quodpiam, & aliquam rectam.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocumque sumta.



SIt enim triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocumque sumta; videlicet latera quidem AB, AC majora latere BC; latera verò AB, BC majora latere AC: & latera BC, CA majora ipso AB. Producatur enim B A ad punctum D; ponaturque ipsi CA æqualis AD; & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AC, erit & angulus ADC angulo ACD æqualis. (1) Sed BCD angulus major est angulo A C D: angulus igitur B C D angulo A D C est major. Et quoniam triangulum est D C B habens B C D angulum majorem angulo B D C; majorem autem angulum majus latus subtendit: (2) erit latus D B latere B C majus; Sed D B est æquale ipsis BA, AC, quare latera quidem A B, A C majora sunt latere C B: similiter ostendemus, & latera quidem AB, BC majora esse latere CA: latera verò B C, C A ipso A B majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocumque sumta; quod ostendere oportebat.

Immediatè patet hæc propositio ex idea rectæ lineæ, quam attulimus ex Archimede.

THEO-

(1) 5 hujus. (2) Ex antecedente.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XXI.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt.

TRianguli enim A B C in uno latere B C à terminis B, C duæ rectæ lineæ intra constituantur B D DC. Dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus B A, A C minores quidem esse; majorem verò continere angulum B D C angulo BAC. Producatur enim BD ad E. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora (1) erunt trianguli A B E duo latera BA, AE majora latere BE; communis apponatur E C; ergo B A, A C ipsis BE E C majora sunt. Rursus quoniam C E D trianguli duo latera C E, E D sunt majora latere CD, communis apponatur DB, quare CE, EB ipsis CD, DB sunt majora. Sed ostensum est BA, AC majora esse BE, EC. Multo igitur BA, AC ipsis BD, DC majora sunt. Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major: (2) erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione, & trianguli ABE exterior angulus C E B ipso B A C est major. Sed angulus B D C ostensus est major angulo C E B. Multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.

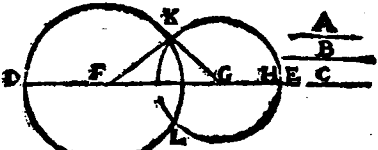
(1) Ex antecedente. (2) 16. hujus.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocumque sumtas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocumque sumta.

SInt tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duæ reliqua majores sint, quomodocumque sumtæ, ut scilicet

cet A, B, quidem ſint majores quam C; A, C verò majores quàm B; & prætereà B, C majores quàm A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipſis A, B, C triangu-



lum conſtituere. Exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita verò ad E, & ponatur ipſi quidem A æqualis DF, ipſi verò B æqualis FG, & ipſi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus deſcribatur DKL: (1) rurſuſque centro G, & intervallo GH, alius circulus KLH deſcribatur, & jungantur KF, KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipſis A, B, C, triangulum KFG conſtitutum eſſe. Quoniam enim punctum F centrum eſt DKL circuli, erit FD æqualis FK. Sed FD eſt æqualis A; ergo, & FK ipſi A eſt æqualis. Rurſus quoniam punctum G centrum eſt circuli LKH, erit GH æqualis GK. Sed GH eſt æqualis C: ergo, & GK ipſi C æqualis erit. Eſt autem, & FG æqualis B; tres igitur rectæ lineæ KF, FG, GK tribus A, B, C æquales ſunt. Quare ex tribus rectis lineis KF, FG, GK, quæ ſunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum conſtitutum eſt KFG. Quod facere oportebat.

Habetur ex hac propoſitione modus deſcribendi triangulum quod ſit æquilaterum, dato alteri triangulo.

Praxis. Non requiritur, ut integri circuli deſcribantur, ſed ſufficit ſi duo arcus in K ſeſe ſecantes deſignentur, & reliqua fiant, ut in propoſitione.

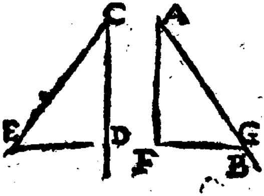
---

(1) tert. poſtul.

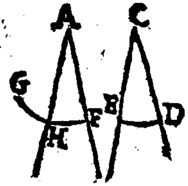
PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIII.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum verò in ipſa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum constituere. Sumantur in utraque ipsarum CD, CE quævis puncta D, E, jungaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD, DE, EC triangulum constituatur AFG, ex præcedenti; ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi GF. Itaque quoniam duæ DC, CE duabus FA, AG æquales sunt, altera alteri; & basis DE est æqualis basi FG: erit, & angulus DCE angulo FAG æqualis. (1) Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG, quod facere oportebat.



Praxis. Centro in C ad quodcumque intervallum CD arcus describatur DE; Et centro in A ad idem intervallum arcus describatur FG, ex quo FH pars abscindatur æqualis arcui ED, & ab A ad H recta ducatur AH.

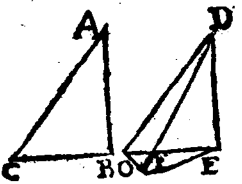


(1) oct. hujus.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXIV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur, & basim basi majorem habebunt.

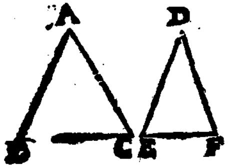
Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE, latus verò AC æquale DF, & angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. Quoniam enim angulus BAC major est angulo EDF; constituatur ad rectam lineam D E, & ad punctum in ea D, angulo BAC equalis angulus EDO, (1) ponaturque alterutri ipsarum AC, DF equalis DO, & OE, FO jungantur. Itaque quoniam AB quidem est equalis DE, AC verò ipsi DO; duæ BA, AC duabus ED, DO equales sunt, altera alteri; & angulus BAC est equalis angulo EDO: ergo basis BC basi EO est equalis. (2) Rursus quoniam equalis est DO ipsi DF; & angulus DFO angulo DOF equalis erit: (3) sed angulus DOF major est angulo EOF; ergo angulus DFO eodem major erit: angulus autem EFO angulo DFO est major; ergo multò major ipso EOF. Et quoniam triangulum est EFO, angulum EFO majorem habens angulo EOF: majori autem angulo majus latus subtenditur, (4) erit & latus EO latere EF majus. Sed EO latus est equale lateri B C: ergo, & B C ipso E F majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus equalia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui equalibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.



(1) Ex antecedente. (2) quart. hujus. (3) 5. hujus. (4) 19. hujus.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXV.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, basim verò basi majorem; & angulum angulo, qui aequalibus lateribus continetur, majorem habebunt.



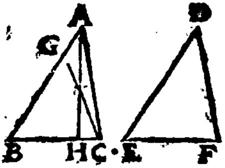
Sint duo triangula ABC, DEF, que duo latera AB, A C duobus lateribus DE, DF equalia habeant alterum alteri, videlicet latus AB equale lateri DE, & latus AC lateri DF: basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel ęqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF ęqualis. (1) Non est autem: non igitur ęqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor: minor enim esset, & basis BC basi EF. (2) Atqui non est: non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. Ostensum autem est, neque esse ęqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessariò major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim verò basi majorem; & angulum angulo, qui ęqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.

---

(1) quart. hujus. (2) Ex antecedente.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXVI.

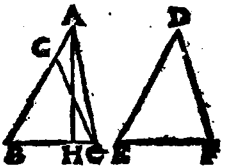
Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ duos angulos ABC, BCA duobus angulis DEF, EFD ęquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC ęqualẽ angulo DEF, angulum verò BCA angulo EFD: habeant autem, & unum latus uni lateri ęquale, & primum, quod æqualibus adjacet angulis, nempè latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus ęqualia habere, alterum alteri, latus scilicet AB lateri DE, & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF ęqualem. Si enim inęqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturq; GB ęqualis DE, & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est ęqualis DE, BC verò ipsi EF, duæ GB, BC duabus DE, EF ęquales sunt, altera alteri: & angulus GBC ęqualis angulo DEF: Basis igitur GC basi DF est ęqualis: & GBC

trian-

triangulum triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis angulis ęquales, alter alteri, quibus ęqualia latera subtenduntur. (1) Ergo GCB angulus est ęqualis angulo DFE. Sed angulus DFE angulo BCA ęqualis ponitur: quare, & BCG angulus angulo BCA est ęqualis, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur inęqualis est AB ipsi DE: ergo ęqualis erit. Est autem & BC ęqualis EF. Itaque duæ AB, BC duabus DE, EF ęquales sunt, altera alteri, & angulus ABC ęqualis angulo DEF: basis igitur AC basi DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est ęqualis.(2) Sed rursus sint latera, quæ ęqualibus angulis subtendũtur, ęqualia, ut AB ipsi DE. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC verò ipsi EF: & adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF ęqualem. Si enim inęqualis est BC ipsi EF, una ipsarum major est, sit major BC, si fieri potest; ponaturque BH ęqualis EF, & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est ęqualis EF, AB verò ipsi DE; duæ AB, BH duabus DE, EF ęquales sunt, altera alteri, & angulos ęquales continent. Ergo basis AH basi DF est ęqualis, & ABH triangulum triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis angulis ęquales erunt, alter alteri, quibus ęqualia latera subtenduntur. (3) Æqualis igitur est angulus BHA angulo EFD. Sed EFD est ęqualis angulo BCA: ergo, & BHA angulus angulo BCA est ęqualis. Trianguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori, & opposito BCA, quod fieri non potest. Quare non inæqualis est BC ipsi EF: æqualis igitur. Est autem, & AB ęqualis DE: duæ igitur AB, BC duabus DE, EF ęquales sunt, altera alteri, angulosq; ęquales cõtinent. Quare basis AC ęqualis est basi DF, & ABC triangulum ęquale triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est ęqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis ęquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri ęquale, vel quod ęqualibus adjacet angulis, vel quod uni ęqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus ęqualia, alterum alte-



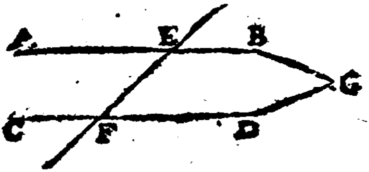
(1) quart. hujus. (2) quart. hujus. (3) quart. hujus.

alteri, & reliquum angulum reliquo angulo çqualem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXVII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

IN duas enim rectas lineas AB, CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD çquales inter se faciat. Dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B, C D vel ad partes B, D convenient, vel ad partes A, C. Producantur, conveniantque ad partes B, D in puncto G. Itaque G E F trianguli exterior angulus A E F major est interiore, & opposito E F G. (1) Sed & çqualis, quod fieri non potest: non igitur A B, C D productæ



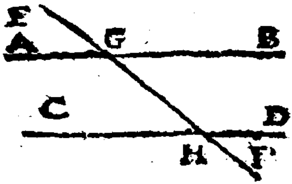
ad partes B, D convenient. Similiter demonstrabitur neque convenire ad partes A, C. Quæ verò in neutras partes conveniunt, parallelæ inter se sunt. (2) Parallela igitur est AB ipsi CD. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se çquales fecerit parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.

(1) 16. hujus. (2) Def. 35.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVIII.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit; vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

IN duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & opposito fito G H D equalem faciat; vel interiores, & ad easdem partes B G H, G H D, duobus rectis equales. Dico rectam lineam AB recta CD parallelam esse. Quoniam.n. E G B angulus equalis est angulo GHD, angulus autem EGB angulo A G H; (1) erit, & angulus AGH angulo G H D aequalis; & sunt alternis paralle-la igitur est AB ipsi CD. (2) Rursus quoniam anguli BGH, GHD duobus rectis sunt equales, & sunt A G H, B G H



equales duobus rectis (3) erunt anguli AGH, BGH angulis BGH, GHD equales. Communis auferatur BGH. Reliquus igitur A G H est equalis reliquo G H D: & sunt alterni. Ergo A B ipsi C D parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes equalem fecerit; vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis equales; parallelae erunt inter se rectae lineae. Quod demonstrare oportebat.

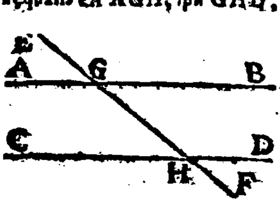
Si supponamus rectam A B circa punctum G extremitate sua B vel tantillum inclinari versus lineam CD, patet, angulum B G H minorem fieri, ac proinde angulos B G H, D H G hoc casu duobus rectis esse minores; adeoque lineas AB, CD non amplius esse parallelas, & si producantur versus B, D, tandem concurrere. Quae de re possumus tanquam firmum, & certum hic admittere, si in duas rectas lineas incidat altera recta, quae efficiat duos angulos internos, & ad easdem partes constitutos minores duobus rectis, eas rectas lineas parallelas non esse, & concurrere versus eam partem, versus quam anguli duobus rectis minores reperiuntur; quod quamvis Euclides inter propositiones per se notas recensuerit, omnes tamen Geometrae non sine demonstratione admittunt.

(1) 15 hujus. (2) Ex antecedente. (3) 13. hujus

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXIX.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se aequales; & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes aequalem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis aequales efficiet.

IN parallelas enim rectas lineas AB, CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH, GHD inter se equales efficere; & exteriorem EGB, interiori, & ad easdem partes GHD equalem; & interiores, & ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis equales. Si enim inequalis est AGH, ipsi GHD, unus ipsorum major est. Sit major AGH. Et quoniam AGH angulus major est angulo GHD; communis apponatur BGH: anguli igitur AGH, BGH angulis BGH, GHD majores sunt. Sed anguli AGH, BGH sunt equales duobus rectis.



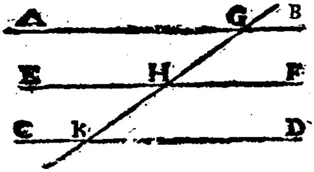
(1) Ergo BGH, GHD anguli sunt duobus rectis minores. Quae verò à minoribus, quam sint duo recti, in infinitum producuntur rectae lineae inter se conveniunt. (2) Ergo rectae lineae AB, CD in infinitum productae convenient inter se: atqui non conveniunt, cum parallelae ponantur. Non igitur inequalis est AGH angulus angulo GHD. Quare necessario est equalis. Angulus autem AGH equalis est angulo EGB: (3) Ergo, & EGB ipsi GHD equalis erit. Communis apponatur BGH. Anguli igitur EGB, BGH sunt equales angulis BGH, GHD. Sed EGB, BGH equales sunt duobus rectis. Ergo, & BGH, GHD duobus rectis equales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se equales; & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes equalem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis equales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

THEO-

(1) 13. hujus. (2) sch. ant. (3) 15. hujus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

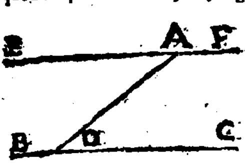


SIt utraque ipsarum AB, CD ipsi EF parallela. Dico, & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. Et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis. Rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF, CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD. Ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis; ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit; & sunt alterni: parallela igitur est AB ipsi CD. Ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt, quod oportebat demonstrare.

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXXI.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

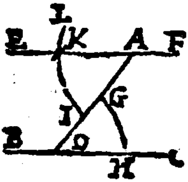
SIt datum quidem punctum A, data verò recta linea BC. Oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC, quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturque ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE. (1) & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. Quoniam igitur in duas rectas lineas BC, EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD, ADC inter se æquales efficiet, EF ipsi BC parallela erit. (2) Per da-



B 5 tum

(1) 23. hujus. (2) 27. hujus.

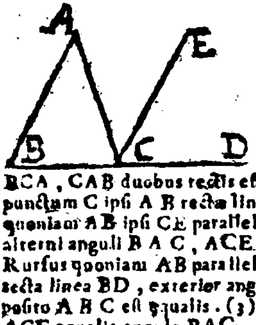
tum igitur punctum A, datæ rectæ lineæ B C parallela ducta est recta linea EAF; quod facere oportebat.



Praxis. Ab A ad D ducatur AD. Centro D quocunque intervallo DG describatur arcus HG. Rursus centro A ad idem intervallum describatur alius arcus IL, à quo abscindatur pars IK æqualis arcui GH, & ab A per K ducatur AKE, quæ erit parallela quæsita.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.



SIt triangulum ABC, & unum ipsius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB, ABC, æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse æquales. Ducatur .n. per punctum C ipsi A B recta linea, parallela C E. (1) Et quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli B A C, ACE inter se æquales sunt. (2) Rursus quoniam AB parallela est CE, & in ipsas incidit *recta linea* BD, *exterior angulus* ECD interiori, & opposito A B C est æqualis. (3) Ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. Quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC, ABC. Communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD, ACB tribus ABC, BCA, CAB æquales sunt. Sed anguli ACD, ACB sunt æquales duobus rectis. (4) Ergo & ABC, BCA, CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod *demonstrare* oportebat.

CO-

COROLLARIA.

1 *Tres anguli cujuscumque trianguli simul sumti tribus angulis alterius trianguli simul sumtis sunt aequales. Quare si duo anguli in uno triangulo duobus angulis in altero triangulo, aut singuli singulis, aut simul aequales fuerint, etiam tertius tertio aequalis erit.*

2 *Si in triangulo unus angulus est rectus, reliqui sunt acuti. Et in triangulo aequicrure si angulus aequalibus lateribus comprehensus fuerit rectus, reliqui ad basim sunt semirecti, quia aequales sunt inter se, & unicum conficiunt rectum.*

3 *In triangulo si unus angulus duobus angulis fuerit aequalis, is erit rectus, quia dimidium duorum rectorum continet.*

4 *In triangulo cognitis duobus angulis, cognoscitur quoque tertius, quia residuum est ad duos rectos.*

5 *Trianguli aequilateri quilibet angulus tertiam partem duorum rectorum, sive duas tertias unius recti continet; quia omnes anguli aequilateri trianguli inter se sunt aequales.*

Hujus propositionis beneficio cujuslibet figurae planae rectilineae sive interni, sive externi anguli (ii nempe qui fiunt productis figurae lateribus ex una tantum parte) quot rectos conficiant, praeclare innotescit. Regula pro angulis internis est haec: Omnes simul anguli cujuscumque figurae bis tot rectos faciunt, quot latera, demtis quatuor. Nam si à puncto quopiam intra figuram ad omnes angulos figurae ducantur rectae lineae, hae figuram secabunt in tot triangula, quot sunt latera, quorum singula faciunt duos rectos: quare bis tot anguli recti habentur, quot latera, à quibus si auferantur quatuor recti, ii nempe qui sunt circa punctum, à quo ductae sunt rectae, quique ad angulos figurae non pertinent, reliqui bis tot recti erunt demtis quatuor, quot latera. Regula pro angulis externis est haec. Anguli externi cujuscumque figurae quatuor efficiunt rectos. Nam quilibet externus cum interno sibi adjacente efficit duos rectos; ergo omnes externi cum internis bis tot rectos faciunt quot latera: sed omnes interni sunt, ex demonstratis, bis tot recti, quot latera demtis quatuor; ergo externi omnes quatuor efficiunt rectos.

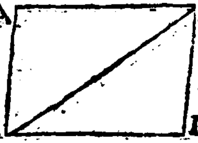
(1) Ex antecedente. (2) 29. hujus. (3) 29. hujus. (4) 13. hujus.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ AB, CD, & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC, BD. Dico AC, BD æquales, & parallelas esse. Jungatur enim BC. Et quoniam AB parallela est CD, in ipsasq; incidit BC, alterni anguli ABC, BCD æquales sunt. (1) Rursus quoniam AB est æqualis CD, communis autem BC, duæ AB, BC duabus BC, CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD. Basis igitur AC basi BD est æqualis; triangulumque ABC triangulo BCD, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. (2) Ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas AC, BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB, CBD æquales inter se efficit, parallela est AC ipsi BD. (3) Ostensa autem est, & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

A B



C D

(1) 29. hujus. (2) 4. hujus. (3) 27. hujus.

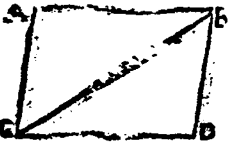
THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt, & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ACDB, cujus diameter BC. Dico AC, DB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam n. parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC, BCD inter se æquales sunt. Rursus quo-

niam

niam AC ipsi BD parallela est., & in ipsas incidit B C; alterni anguli ACB, CBD æquales sunt inter se. Duo igitur triangula sunt ABC, CBD, quæ duos angulos ABC, BCA duobus angulis BCD, CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos utriq; commune B C. Ergo, & reliqua latera reliquis lateribus



æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus verò AC ipsi BD, & angulus BAC angulo B D C æqualis. Et quoniam angulus A B C est æqualis angulo B C D; & angulus C B D angulo ACB, erit totus angulus A B D æqualis toti ACD. Ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. Parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. Dico etiam diametrum ea bifariam secare. Quoniam.n. æqualis est AB ipsi CD, communis autem BC, duæ AB, BC duabus D C, CB: æquales sunt, altera alteri; & angulus ABC æqualis est angulo BCD: basis igitur AC basi DB æqualis. Quare, & triangulum A B C triangulo BCD æquale erit. Ergo diameter B C parallelogrammum A C D B bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

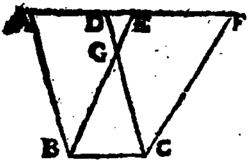
Si angulorum parallelogrammi unus est rectus, reliqui quoque erunt recti, quia anguli qui sunt super eodem latere duobus rectis sunt æquales, ideoque uno recto, reliquus rectus erit, & anguli oppositi sunt inter se æquales.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXXV.

Parallelogramma in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogrammum ABCD, EBCF in eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF, BC constituta. Dico ABCD parallelogrammum parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD æqualis est AD ipsi BC. Eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC; quare & AD ipsi EF æqualis erit; & cum

& communis DE: tota igitur AE toti DF est ęqualis; est autem, & AB ęqualis DC. Ergo duę EA, AB duabus FD, DC ęquales sunt, altera alteri; & angulus FDC ęqualis angulo EAB, exterior interiori; basis igitur EB basi FC est ęqualis, & EAB triangulum ęquale triangulo FDC (1) commune auferatur DGE. Reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF

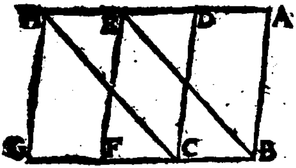


est ęquale. Commune apponatur GBC triangulum. Ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF ęquale erit. Parallelogramma igitur in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se ęqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

(1) 4. hujus.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXXVI.

Parallelogramma in ęqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se ęqualia sunt.



Sint parallelogramma ABCD, EFGH in ęqualibus basibus BC, FG & in eisdem parallelis AH, BG constituta. Dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH ęquale esse. Conjungantur enim BE, CH. Et quoniam ęqualis est BC ipsi FG, & FG ipsi EH; erit & BC ipsi EH ęqualis; suntque parallelę, & ipsas conjungunt BE, CH: quę autem ęquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt ęquales, & parallelę sunt: (1) ergo EB, CH & ęquales sunt, & parallelę: quare EBCH parallelogrammum est, & ęquale parallelogrammo ABCD; basim enim eandem habet BC, & in eisdem parallelis BC, AH constitui.

(1) 33. hujus.

tuitur (2) Simili ratione, & EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH est æquale. Ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

(2) Ex antecedente.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXVII.

Triangula in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

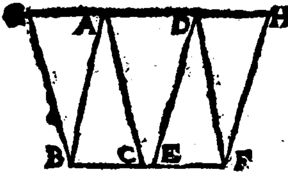
Sint triangula ABC, DCB in eadem basi BC & in eisdem parallelis AD, BC constituta Dico ABC triangulum triangulo DCB æquale esse. Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur FE; per C verò ipsi BD parallela CF (1): parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum EBCA, DBCF, & parallelogrammum EBCA est æquale parallelogrammo DBCF; etenim in eadem sunt basi BC, & in eisdem parallelis BC, EF; (2) estque parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum; cum diameter AB ipsum bifariam secet: (3) parallelogrammi verò DBCF dimidium triangulum DBC; diameter .n. DC ipsum bifariam secat. Quæ autem æqualium dimidia, inter se æqualia sunt (4). Ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur in eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

THEO-

(1) 31 hujus. (2) 35 hujus. (3) 34 hujus.
(4) 7. com. not.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula in basibus æqualibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.



Sint triangula ABC, DEF in æqualibus basibus, BC, EF, & in eisdem parallelis BF, AD constituta. Dico ABC triangulum triangulo DEF æquale esse. Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG, (1) per F verò ducatur FH parallela ipsi DE. Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum GBCA, DEFH. Atque est parallelogrammum GBCA æquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus n. sunt basibus BC, EF, & in eisdem BF, GH parallelis: (2) Parallelogrammi verò GBCA dimidium est ABC triangulum; nam diameter AB ipsum bifariam secat (3). Et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF; diameter enim DF ipsum secat bifariam: quæ autem æqualium dimidia, inter se æqualia sunt. (4) Ergo ABC triangulum triangulo DEF est æquale. Triangula igitur in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

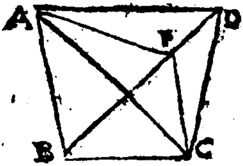
(1) 31. hujus. (2) 36. hujus. (3) 34. hujus.
(4) 7. com. not.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Triangula æqualia in eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC, DBC in eadem basi BC constituta, & ad easdem partes. Dico, & in eisdem parallelis esse. Jungatur enim AD. Dico AD parallelam esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE, & EC jungatur; æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC;

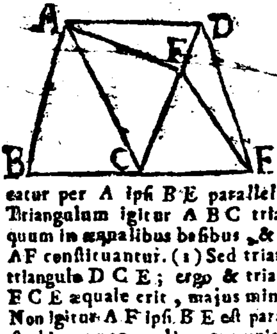
in



in eadem enim est basi B C, & in eisdem B C, A E, parallelis. Sed A B C triangulum triangulo DBC est æquale. Ergo, & triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non potest. Non igitur A E ipsi BC parallela est. Similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam AD. Ergo AD ipsi BC est parallela. Triangula igitur æqualia in eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia in basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.



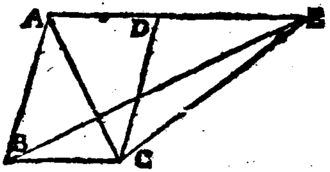
Sint æqualia triangula ABC, CDE in æqualibus basib. BC, CE constituta. Dico etiam in eisdem esse parallelis. Conjungatur enim AD. Dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi BE parallela A F, & F E jungatur. Triangulum igitur A B C triangulo F C E est æquale, quum in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis B E, AF constituantur. (1) Sed triangulum A B C æquale est triangulo D C E; ergo & triangulum D C E triangulo F C E æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. Non igitur A F ipsi B E est parallela. Similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter A D. Ergo A D ipsi B E parallela erit. Æqualia igitur triangula in basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.

THEO-

(1) 38. hujus.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XLI.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.



Parallelogrammum enim ABCD, et triangulum EBC, basim habeãt eandem B C, & in eisdem sint parallelis BC, AE. Dico parallelogrammum A B C D trianguli EBC duplum esse. Jungatur.n. AC. Triangulum igitur ABC triangulo E B C est æquale; namque in eadem basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis constituitur. (1) Sed A B C D parallelogrammum duplum est trianguli A B C, quum diameter A C ipsum bifariam secet. (2) Quare, & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli, quod demonstrare oportebat.

Idem erit si parallelogrammum, & triangulum super bases æquales sint constituta.

(1) 37. hujus. (2) 34. hujus.

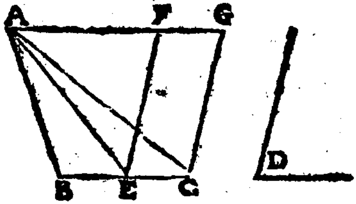
PROBLEMA XI. PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum A B C, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet dato triangulo A BC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo, ipsi D æquali. Secetur B C bifariam in E, (1) & juncta A E, ad rectam lineam E C, atque ad punctum in ea E, con-

(1) 10. hujus.

constituatur angulus C E F æqualis ipsi D: (2) & per A quidem ipsi B C parallela ducatur A G: (3) per C verò ipsi F E ducatur parallela CG: parallelogrammum igitur est F E C G. Et quoniam B E est æqualis E C, erit, & ABE triangulum triangulo A E C æquale: in æqualibus .n. sunt basibus BE, EC, & in eisdem BC, AG parallo-



lis (4) Ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplum. Est autem, & parallelogrammum FECG duplum trianguli AEC; basim.n. eandem habet, & in eisdem est parallelis: (5) æquale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC, habetq; CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo A B C æquale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat.

COROLLARIUM.

Colligitur ex hac propositione, Parallelogrammum super medietatem basis trianguli constitutum, ipsi triangulo esse æquale.

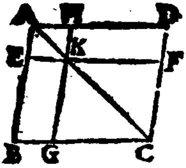
---

(2) 23. hujus. (3) 31. hujus. (4) 38. hujus.
(5) 41. hujus

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XLIII.

Omnis parallelogrammi spatii, eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia.

SIt parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, & circà ipsam A C parallelogramma quidem sint E H, FG; quæ verò supplementa dicuntur B K, K D. Dieo B K supplementum supplemento K D æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est A B C D, & ejus



diameter AC, æquale est ABC triangulum triangulo ADC (1) Rursus quoniam EKHA parallelogrammum est, cujus diameter AK, triangulū A E K triangulo AHK æquale erit. Eadem ratione, & triangulum K G C triangulo KFC est æquale. Cum igitur triangulum quidem AEK æquale sit triangulo A H K: triangulum vero K G C ipsi KFG; erit triangulum AEK una cum triangulo KGC æquale triangulo AHK una cum KFC triangulo. Est autem, & totum triangulum ABC æquale toti ADC. Reliquum igitur B K supplementum reliquo supplemento KD est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii, eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum supplementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

(1) 34. hujus.

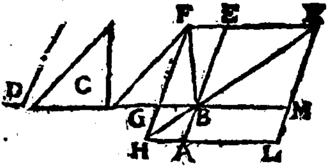
PROBLEMA XII. PROPOSITIO XLIV.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C; & datus angulus rectilineus D: oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur triangulo C æquale parallelogrammum BEFG, in angulo EBG, (1) qui est æqualis D, & ponatur BE in directum ipsi A B, producaturq; FG, ad H: & per A alterutri ipsarum B G, E F parallela ducatur AH, (2) & HB jungatur. Quoniam igitur in parallelas AH, EF recta linea HF incidit, anguli AHF, HFE duobus rectis æquales sunt. (3) Quare BHE, HFE duobus rectis sunt minores, quæ vero à minoribus, quàm sint duo recti, in infinitum producuntur, conveniunt inter se. (4) Ergo HB, FE productæ convenient. Producantur, & con-

(1) 42. hujus. (2) 31. hujus. (3) 29. hujus. (4) sch. pr. 28.

& conveniant in K; perque K alterutri ipsarum EA, FH parallela ducatur KL, (5) & HA, GB ad L, M puncta producantur. Parallelogrammum igitur est HLKF, cujus diameter HK, & circa HK parallelogramma

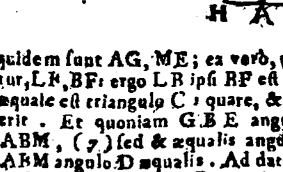


quidem sunt AG, ME; ea verò, quæ supplementa dicuntur, LB, BF: ergo LB ipsi BF est æquale. (6) Sed, & BF æquale est triangulo C: quare, & LB triangulo C æquale erit. Et quoniam GBE angulus æqualis est angulo ABM, (7) sed & æqualis angulo D; erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est LB, in angulo ABM, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat.

(5) 31.hujus. (6) Ex antecedente. (7) 15.hujus.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XLV.

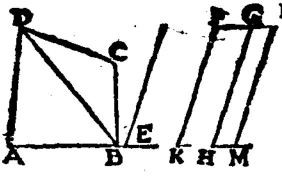
Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.



Sit datum rectilineũ ABCD, datus verò angulus rectilineus E. Itaque oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammũ constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungatur enim DB, & constituatur trianguli ADB æquale parallelogrammum FH, in angulo HKF, (1) qui est æqualis angulo E. Deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM, (2) qui angulo E est æqualis. Et quoniam angulus E æqualis est utrique ipso

(1) 42.hujus. (2) Ex antecedente.

ipsorum HKF, GHM, erit, & HKF angulo GHM æqualis, communis apponatur KHG: anguli igitur FKH, KHG angulis KHG, GHM æquales sunt. Sed FKH, KHG sunt æquales duobus rectis (3) Ergo, & KHG, GHM duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H, duæ rectæ lineæ KH, HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt; in directum igitur est KH ipsi HM. (4) Et quoniam in parallelas KM, FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG, HGF æquales sunt. (5) Communis apponatur HGL. Anguli igitur MHG, HGL angulis HGF, HGL sunt æquales. At anguli MHG, HGL æquales sunt duobus rectis (6) Quare, & anguli HGF, HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur est FG ipsi GL. Et quoniam KF ipsi HG, & æqualis est, & parallela; sed, & HG ipsi ML: erit KF ipsi ML, & æqualis, & parallela; (7) ipsasque conjungunt rectæ lineæ KM, FL. Ergo, & KM, FL æquales, & parallelæ sunt. (8) Parallelogrammum igitur est KFLM. Quòd cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum verò DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.



Si igitur angulus datus E fuerit rectus, parallelogrammum FM erit rectangulum.

(3) 29 hujus. (4) 14. hujus. (5) 29. hujus.
(6) 34. hujus. (7) 30. hujus. (8) 33. hujus.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIO XLVI.

A data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB, oportet ab ipsa AB quadratum describere. Ducatur rectæ lineæ AB à puncto in ea ea dato A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis ponatur AD; perque punctum D ducatur DE ipsi AB parallela, & per B ipsi AD parallela ducatur BE. Parallelogrammum

igitur est ADEB: & AB quidem est æqualis DE: AD verò ipsi BE. Sed, & BA ipsi AD est æqualis: quatuor igitur BA, AD, DE, EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum esse. Quoniam enim in parallelas AB, DE recta linea incidit AD, anguli BAD, ADE duobus rectis sunt æquales (1) Rectus autem est BAD. Ergo, & ADE rectus erit. Parallelogrammorum verò spatiorum, quæ ex opposito sunt latera, & anguli inter se æqualia sunt (2) Rectus igitur est uterque oppositorum ABE, BED angulorum: & ob id rectangulum est ADEB. Ostensum autem est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atq; est à recta linea AB descriptum, quod ipsum facere oportebat.

COROLLARIA.

1 Omne igitur parallelogrammum, quod circa unum angulum rectum duo latera habet æqualia, quadratum est.

2 Si duæ lineæ sunt æquales, earundem quadrata erunt æqualia: & è contra si quadrata sunt æqualia, lineæ, à quibus describuntur, erunt æquales, quia congruunt si unum alteri super ponatur.

---

(1) 29 hujus. (2) 34 hujus.

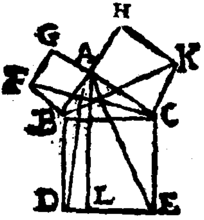
THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XLVII.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. Dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis AB, AC describuntur. Describatur enim à BC quidem quadra-

tum

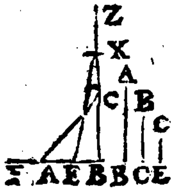
tum BDEC, ab ipsis verò BA, AC quadrata GB, HC, perque A alterutri ipsarum BD, CE parallela ducatur AL; & AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC, BAG rectus est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC, AG non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt duobus rectis æquales efficiunt; in directum igitur est CA ipsi AG. (1) Eadem ratione, & AB ipsi AH est in directum. Et quoniam angulus DBC est æqualis angulo FBA; rectus .n. uterque est, & communis apponatur ABC: totus igitur DBA angulus toti FBC est æqualis.



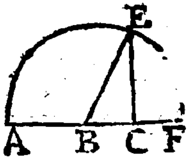
Quod cum duæ AB, BD duabus FB, BC æquales sunt, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit, & basis AD basi FC æqualis, & ABD triangulum triangulo FBC æquale; (2) estque trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim .n. eandem habent BD, & in iisdem BD, AL sunt parallelis: (3) trianguli verò FBC duplum est GB quadratum; rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB, GC. Quæ autem æqualium dupla, inter se æqualia sunt. Ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. Similiter junctis AE, BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. Totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB, HC est æquale. Et describitur quidem BDEC quadratum à recta linea BC; quadrata verò GB, HC ab ipsis BA, AC: quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA, AC. Ergo in rectangulis triangulis quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

Hujus

(1) 14. hujus. (2) 4 hujus. (3) 41. hujus.



Hujus propositionis beneficio datis quotcumq; quadratis unum æquale inveniri potest. Sint E. g. tria quadrata, quorum latera sint AB, BC, CE, quibus æquale unum quadratum est inveniendum. Fiat angulus rectus FBZ, cujus latera BF, BZ, sint indefinita. Tum in ea transferantur AB, BC, & conjungatur AC, erit quadratum ipsius AC æquale duobus ex datis, nempe quadratis ex AB, & BC: transferantur rursus AC in BX, & CE in BE, & jungatur XE erit quadratum ex XE æquale quadratis ex XB, & BE, hoc est tribus quadratis datis AB, BC, CE.



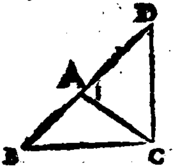
Potest quoque inveniri quadratum, quo quadratum majus minus quadratum excedit. Sit E. g. recta AB major, BC minor; invenire oportet quadratum, quo quadratum rectæ A B majoris excedat quadratum rectæ BC minoris. Centro in B, intervallo BA circulus describatur AEF, & à puncto C perpendicularis erigatur CE, & conjugatur BE: quadratum ex BE, hoc est ex BA æquale est quadratis ex BC, & ex CE; ergo quadratum ex B E ex hoc est A B superat quadratum ex BC quadrato ex CE, quod erat, &c.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XLVIII.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

TRianguli enim A B C, quod ab uno latere B C describitur quadratum, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus B A, A C describuntur. Dico angulum B A C rectum esse. Ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD, (1) ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit, & quadratum, quod describi-

(1) 11. hujus.



tur ex D A, æquale quadrato, quod ex A B; commune apponatur quadratum, quod ex AC; ergo quadrata, quæ ex D A, A C æqualia sunt quadratis, quæ ex B A, A C describuntur. Sed quadratis quidem quæ ex D A, A C, æquale est, quod ex DC quadratum; rectus.n. angulus est DAC: quadratis verò, quæ ex BA, AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC: quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. Ergo, & latus D C lateri C B est æquale. Et quoniam DA est æqualis A B; communis autem A C, duæ D A, A C duabus B A, A C æquales sunt, & basis D C est æqualis basi C B; angulus igitur D A C angulo B A C est æqualis. (2) Rectus autem est D A C. Ergo, & B A C rectus erit. Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

(2) 8. hujus.

FINIS LIBRI PRIMI.

EUCLIDIS ELEMENTORUM:

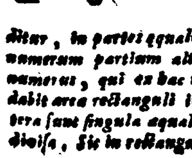
LIBER SECUNDUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DEFINITIONES.

1 Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum constituunt.

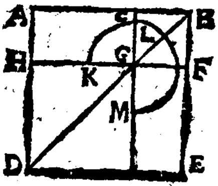
E.g. Parallelogrammum rectangulum H E F G *(quod rectangulum simpliciter etiam solet appellari) contineri dicitur duabus rectis* H E, E F *angulum rectum* H E F *constituentibus, tum quia altera earum* H E *latitudinem determinat, altera* E F *longitudinem ejusdem; tum etiam quia ex his lineis ipsum generatur rectangulum. Nam si intelligatur earum altera, nempe* H E, *super alteram* E F *perpendiculariter, & sibi semper parallela moveri, producitur hoc motu ipsum rectangulum.*



Hinc habetur dimensio cujuscumque rectanguli; nam si dividantur duo ejus latera, quibus comprehenditur, in partes æquales, & numerus partium unius per numerum partium alterius ducatur; productum, hoc est numerus, qui ex hac multiplicatione nascitur, quantitatem dabit area rectanguli in quadratis quibusdam, quorum latera sunt singula æqualia partibus, in quas ejus latera sunt divisa. Sit in rectangulo H E F G *diviso latere* H E *in tres* *partes æquales, & latere EF in sex, ejus area continebit 18 quadrata, quorum latera erunt singula æqualia partibus, in quas duæ HE, EF sunt divisæ, qui numerus quadratorum ex multiplicatione nascitur ex 3 per 6. Quum enim recta HE super rectam EF movetur, ejus puncta, in quæ cadunt divisiones, parallelas ipsi EF describunt: & quum ipsa primam partem ejusdem EF absolvit, tria describit quadrata, in quæ resolvitur area rectanguli: quum secundam partem percurrit, alia tria describit eorundem quadratorum, Et sic deinceps: quæ de re tot terna describit quadrata, quot sunt partes in EF, hoc est sex terna, sive 18 quadrata, quorum numerus producitur ex 3 multiplicatis per 6. Ex his facili negotio omnes quascunque figuras planas rectilineas dimetiri possumus, si nempe eas reducamus ad rectangula, quod fieri posse demonstratum est in prop. 42. & 45.*

Ex dictis satis patet haberi totum rectangulum, si latera, quibus comprehenditur, habeantur; quamobrem satis erit ad designandum aliquod rectangulum, si ejus latera tantum, quibus comprehenditur, denotentur, quod ferè semper à Geometris fit, & præsertim ab Euclide in hoc libro.

2. Omnis parallelogrammi spatii unumquodque eorum, quæ circa diametrum ipsius sunt, parallelogrammorum, cum duobus supplementis Gnomon vocetur.



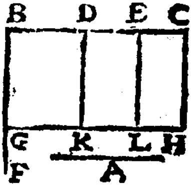
Sic in parallelogrammo AE figura constans duobus supplementis AG, GE, Et parallelogrammo CH, quæ designantur circulo KLM Gnomon vocatur.

THEO-

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis, quæ recta linea insecta, & singulis partibus secta continentur.

Sint duæ rectæ lineæ A, BC; & secta sit BC utcumque in punctis D, E. Dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum æquale esse rectangulo, quod continetur A, BD, & rectangulo, quod A, DE, & ei, quod A, EC continetur. Ducatur .n. à puncto B, ipsi BC ad rectos angulos BF, (1) atque ipsi A ponatur æqualis BG, & per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH; (3) per D, E, C verò ducantur DK, EL, CH parallelæ ipsi BG; rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK, DL, EH. Atque est BH quidem quod A, BC continetur;



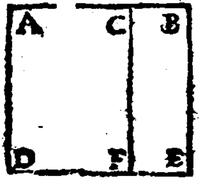
etenim continetur GB, BC, & BG ipsi A est æqualis: rectangulum autem BK est, quod continetur ipsis A, BD; continetur .n. GB, BD, quarum GB est æqualis A: & rectangulum DL est, quod continetur A, DE; quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est, quod A, EC continetur. Ergo rectangulum contentum A, BC est æquale rectangulum contento A, BD, & contento A, DE, & adhuc contento A, EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum est æquale eis, quæ recta linea insecta, & singulis partibus continentur. Quod oportebat demonstrare.

Propositiones decem primæ hujus libri sunt veræ etiam in numeris. Exemplum exhibemus in hac prima tantum. Sint igitur duo numeri 10, & 6, dividaturque numerus 10 in partes quascumque 5, 3, 2, productum ex 10 multiplicatis per 6 est 60. Productum vero ex 5 in 6 est 30; productum ex 3 in 6 est 18; & productum denique ex 2 in 6 est 12. quæ tria producta si invicem addantur efficiunt quoque 60.

(1) 11.primi. (2) 3.primi. (3) 31.primi.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si recta linea secta fuerit utcumque; rectangula, quæ tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

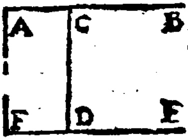


Recta enim linea A B secta sit utcumque in puncto C. Dico rectangulum, quod AB, BC continetur, una cum contento BA, AC, æquale esse quadrato, quod fit ex AB. Describatur.n.ex AB quadratum ADEB, (1) & per C ducatur alterutri ipsarum AD, BE parallela CF. (2) Æquale igitur est AE rectangulis AF, CE: atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum BA, AC; etenim DA, AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis; & rectangulum C E continetur AB, BC, quum BE sit æqualis AB. Ergo rectangulum BAC una cum rectangulo ABC æquale est quadrato ex A B. Si igitur recta linea utcumque secta fuerit, rectangula, quæ tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato. Quod demonstrare oportebat.

(1) 46.primi. (2) 31.primi.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum tota, & una ejus parte contentum æquale est, & rectangulo, quod partibus continetur, & ei, quod à prædicta parte fit, quadrato.



Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. Dico ABC rectangulum æquale esse rectangulo A C B unà cum quadrato, quod fit ex B C. Describatur .n. ex BC quadratum CDEB, (1) producaturque ED in F; & per A alterutri ipsarum C D, BE parallela ducatur A F. (2) Æquale utique erit rectangulum AE ipsis A D, CE: & est

(1) 46.primi. (2) 31.primi.

& est AE quidem rectangulum contentum AB, BC; etenim AB, BE continetur, quarum BE est æqualis BC: rectangulum verò AD est, quod continetur AC, CB, quum DC ipsi BC sit æqualis: & DB est quadratum, quod fit ex BC. Ergo rectangulum ABC est æquale rectangulo ACB una cum quadrato, quod ex BC. Si igitur recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum tota, & una ejus parte contentum, æquale est rectangulo, quod partibus continetur, & ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Si recta linea secta fuerit utcumque, quadratum, quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt; & ei, quod bis partibus continetur, rectangulo.

Recta.n. linea AB secta sit utcumque in C. Dico quadratum, quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC, CB, & ei rectangulo, quod bis AC, CB, continetur. Describatur.n. ex AB quadratum ADEB, (1) jungaturque BD, & per C quidem alterutri ipsarum AD, BE parallela ducatur CGF; (2) per G vero alterutri ipsarum AB, DE ducatur parallela HK. Et quoniam CF est parallela ipsi AD, & in ipsas incidit BD: erit exterior angulus BGC interiori, & opposito ADB æqualis: (3) angulus autem ADB est æqualis angulo ABD, quod, & latus BA æquale est lateri AD (4) quare CGB angulus angulo GBC est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale. (5) Sed, & latus CB æquale est lateri GK, & CG ipsi BK. (6) Ergo & GK est æquale KB, & CGKB æquilaterum est. Dico insuper etiam rectangulum esse. Quoniam.n. CG est parallela ipsi BK, & in ipsas incidit CB; anguli KBC, GCB duobus rectis sunt æquales: (7) rectus autem est KBC angulus: ergo, & rectus GCB, & anguli oppositi CGK, GKB recti erunt. (8) Rectangulum igitur est CGKB. Sed ostensum fuit, & æquilaterum esse. Quadratum igitur

C 4 est

(1) 46. primi. (2) 31. primi. (3) 29. primi.
(4) 5. primi. (5) 6. primi. (6) 34. primi.
(7) 29. primi. (8) 34. primi.

est C G K B, quod quidem fit ex B C. Eadem ratione, & H F est quadratum, quod fit ex H G, hoc est ex A C. Ergo H F, C K ex ipsis A C, C B quadrata sunt. Et quoniam rectangulum A G est æquale rectangulo G E; (9) atque est A G, quod A C, C B continetur, est.n. G C ipsi C B æqualis: erit & G E æquale ei, quod continetur A C, C B, quare rectangula A G, G E æqualia sunt ei, quod bis A C, C B continetur. Sunt autem, & H F, C K quadrata ex A C, C B. Quatuor igitur H F, C K, A G, G E, & quadratis ex A C, C B, & ei quod bis A C, C B continetur rectangulo sunt æqualia: sed H F, C K, A G, G E sunt totum A D E B quadratum, quod fit ex A B. Quadratum igitur ex A B æquale est, & quadratis ex A C, C B, & ei, quod bis A C, C B continetur rectangulo. Quare si recta linea utcumque secta fuerit, quadratum, quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo, quod bis partibus continetur; atque illud est, quod demonstrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex A B æquale esse, & quadratis ex A C, C B, & ei rectangulo, quod bis A C, C B continetur. Quoniam .n. in eadem figura æqualis est B A ipsi A D; & angulus A B D angulo A D B æqualis erit: (10) & cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis sint æquales; (11) erunt trianguli A B D tres anguli A B D, A D B, B A D æquales duobus rectis: rectus autem est angulus B A D, ergo reliqui A B D, A D B sunt uni recto æquales, & sunt æquales inter se se: uterque igitur ipsorum A B D, A D B est recti dimidius. Sed rectus est B C G, æqualis namque est angulo opposito, qui ad A: (12) reliquus igitur C G B dimidius est recti: ac propterea C G B angulus angulo C B G est æqualis, & latus B C æquale lateri C G. (13) Sed C B est æqualis G K, & C G ipsi B K; (14) æquilaterum igitur est C K; & quum habeat rectum angulum C B K, etiam est quadratum; quod quidem fit ex C B. Eadem ratione, & H F quadratum est, & æquale quadrato, quod ex A C. Quadrata igitur sunt C K, & H F, & quadratis ex B C, C A æqualia. Rursus quoniam rectangulum A G est æquale ipsi G E; (15) atque est A G id

(9) 43.primi. (10) 5.primi. (11) 32.primi.
(12) 29.primi. (13) 6.primi. (14) 34.primi.
(15) 43.primi.

lo, quod AC, CB continetur, est enim CG ipsi CB æquális: erit & GE æquale contento AC, CB: quare AG, GE æqualia sunt ei, quod bis AC, CB continetur. Sunt autem, & CK, HF æqualia quadratis ex CB, AC; ergo CK, HF, AG, GE æqualia sunt, & quadratis ex AC, CB, & ei quod bis AC, CB continetur. Sed CK, HF, & AG, GE sunt totum A E, quod fit ex A B quadratum. Quadratum igitur ex A B æquale est, quadratis, quæ ex A C, CB, & ei, quod bis AC, CB continetur rectangulo: Quod ostendere oportebat.

COROLLARIUM.

Ex hoc perspicue constat in quadratis spatiis parallelogramma, quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum, una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato.

Recta n. linea quædam AB secta sit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum A D, D B una cum quadrato, quod fit ex C D æquale esse ei, quod ex CB, quadrato. Describatur n. ex BC quadratum CEFB: (1) jungaturque BE, & per D quidem alterutri ipsarum C E, B F parallela ducatur DHG; (2) per H verò ducatur KLO parallela alterutri ipsarum CB, EF: & rursus per A ducatur alterutri CL, BO parallela AK. Et quoniam CH supplementum æquale est supplemento HF, (3) commune apponatur DO; totum igitur C O toti DF est æquale: sed C O est æquale

(1) 46. primi. (2) 31. primi. (3) 43. primi.

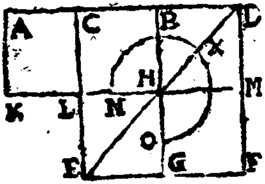
AL; quoniam & AC ipsi BC: (4) ergo & AL æquale est DF: commune apponatur CH; totum igitur AH ipsis FD, DL æquale erit. Sed AH quidem est, quod AD, DB continetur; etenim DH ipsi DB est æqualis: FD, DL verò est gnomon MNX: gnomon igitur MNX æqualis est ei, quod AD, DB continetur: commune apponatur LG, æquale scilicet quadrato, quod ex CD: ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur AD, DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. Sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB: ergo rectangulum ADB una cum quadrato, quod ex CD æquale est ei, quod ex CB quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum, una cum quadrato lineæ, quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei, quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

(4) 36 primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in rectum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adjecta, & adjecta contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea quædam AB secetur bifariam in puncto C, adjiciaturque ipsi in rectum BD. Dico rectangulum ADB unàcum quadrato ex BC æquale esse ei, quod fit ex CD quadrato. Describatur.n.ex CD quadratum CEFD, (1) & jungatur DE; perque B alterutri ipsarum CE, DF parallela ducatur BHG, (2) & per H ducatur NLM parallela alterutri ipsarum AD, EF; & adhuc per A alterutri CL, DM parallela AK. Itaque quoniam AC est æqualis CB;



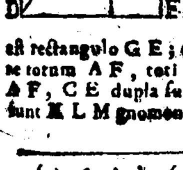
(1) 46. primi. (2) 31. primi.

C B; erit & rectangulum A L rectangulo C H æquale. (3) Sed CH æquale est H F: (4) ergo, & A L ipsi H F æquale erit. Commune apponatur C M: totum igitur A M, gnomoni N X O est æquale; atque est A M, quod A D, D B continetur; etenim D M est æqualis D B. Ergo & gnomon N X O æqualis est rectangulo A D B. Rursus commune apponatur L G, æquale scilicet quadrato, quod ex C B: rectangulum igitur A D B unà cum quadrato, quod ex B C æquale est gnomoni N X O, & ipsi L G. Sed gnomon N X O, & L G totum sunt C E F D quadratum, quod quidem fit ex C D. Ergo rectangulum A D B una cum quadrato ex BC æquale est ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adiiciaturque ipsi in rectum quædam recta linea; rectangulum tota cum adjecta, & adjecta contentum, unà cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tamquam ab una linea describitur. Q. O. D.

(3) 36. primi. (4) 43. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si recta linea utcumque secta fuerit, quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit quadrato.



Recta enim linea quædam A B secta sit utcumque in puncto C. Dico quadrata ex A B, B C æqualia esse, & rectangulo, quod bis A B, B C continetur, & ei quod fit ex A C quadrato. Describatur enim ex A B quadratum A D E B (1) & figura construatur. Itaque quoniam A G rectangulum æquale est rectangulo G E; (2) commune apponatur C F: quare totum A F, toti C E est æquale; rectangula igitur A F, C E dupla sunt rectanguli A F. Sed A F, C E sunt K L M gnomon, & quadratum C F; ergo K L M gno-

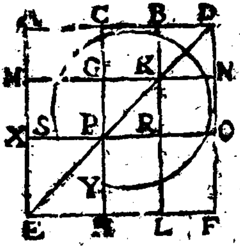
(1) 46. primi. (2) 43. primi.

gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. Est autem id, quod bis AB, BC continetur, duplum ipsius AF; etenim BF est æqualis BC; gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt ei, quod bis AB, BC continetur: commune apponatur DG, quod est ex AC quadratum: ergo gnomon KLM, & quadrata BG, GD æqualia sunt ei, quod bis AB, BC continetur, & quadrato ex AC. At gnomon KLM, & quadrata BG, GD totum sunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB, BC quadrata; quadrata igitur ex AB, BC æqualia sunt rectangulo, quod bis AB, BC continetur, unà cum eo, quod fit ex AC quadrato. Ergo si recta linea utcumque secta fuerit, quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod ostendere oportebat.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si recta linea utcumque secta fuerit; quod quater tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota, & dicta parte, tamquam ex una linea, describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcumque in C. Dico rectangulum quater AB, BC contentum, una cum quadrato, quod ex AC, æquale esse quadrato, quod ex AB, BC, tamquam ex una linea describitur. Producatur recta linea AB in D, & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. Quoniam igitur CB ipsi GK æqualis; BD verò ipsi KN: erit, & GK æqualis KN: (1) eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis. Et quoniam CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum quidem CK rectangulo KD; (2) rectangulum verò GR ipsi RN æquale. Sed CK



(1) 34. primi. (2) 36. primi.

CK est æquale RN, (3) supplementa enim sunt parallelogrammi CO. Ergo & KD æquale est GR, & quatuor rectangula DK, KC, GR, RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. Rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB verò ipsi GK, hoc est GP; erit & CG æqualis GP: est autem & PR ipsi RO æqualis: rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi RF æquale erit. Sed MP est æquale PL; (4) supplementa enim sunt ML parallelogrammi: quare, & AG ipsi RF est æquale; quatuor igitur AG, MP, PL, RF inter se æqualia sunt; ac propterea ipsius AG quadrupla. Ostensum autem est, & quatuor CK, KD, GR, RN quadrupla esse CK: quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. Et quoniam AK est, quod AB, BC continetur, etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater AB, BC ipsius AK quadruplum. At demonstratus est gnomon STY quadruplus AK; quod igitur quater AB, BC continetur æquale est gnomoni STY. Commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est æquale. Ergo quod quater AB, BC continetur unà cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. Sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. Rectangulum igitur quater AB, BC contentum, unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB, BC tamquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcumque secta fuerit, quod quater tota, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato, quod ex tota, & dicta parte tamquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.

COROLLARIUM.

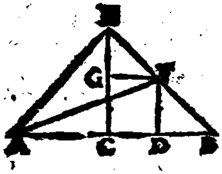
Patet ex demonstratione hujus propositionis, quadratum, cujus latus duplum est lateris alterius quadrati, esse quadruplum ejusdem quadrati. Nam ex demonstratis quadratum CO, cujus latus GD duplum est rectæ BD, quæ latus est quadrati BN, quadruplum est ipsius BN.

THEO-

(3) 43. primi. (4) 43. primi.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus, quæ inter sectiones interjicitur.



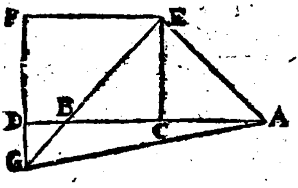
Recta .n. linea quædam A B secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex A D, D B, quadratorum ex A C, C D dupla esse. Ducatur .n. à puncto C ipsi A B ad rectos angulos C E, (1) & utrique ipsarum A C, C B æqualis ponatur, junganturque E A, E B; ac per D quidem ipsi C E parallela ducatur D F; (2) per F verò ipsi A B parallela F G, & A F jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis C E, erit & angulus E A C angulo A E C æqualis. (3) Et quum rectus sit angulus ad C, reliqui A E C, E A C uni recto æquales erunt; (4) & sunt æquales inter se se, uterque igitur ipsorum A E C, E A C recti est dimidius: eadem ratione, & recti dimidius est uterque ipsorum C E B, E B C; ergo totus angulus A E B rectus est. Et quoniam angulus C E F dimidius est recti, rectus autem E G F; equalis .n. est interiori, & opposito E C B, (5) erit, & reliquus E F G recti dimidius: æqualis igitur est G E F angulus ipsi E F G: quare, & latus F G lateri G E est æquale. (6) Rursus quoniam angulus ad B dimidius est recti, rectus autem F D E, quòd sit æqualis interiori, & opposito E C B; reliquus B F D recti erit dimidius; angulus igitur ad B æqualis est angulo D F B, ideoque latus D F lateri D B æquale. Et quoniam A C est æqualis C E, erit, & ex A C quadratum æquale quadrato ex C E: quadrata igitur ex A C, C E dupla sunt quadrati ex A C; quadratis autem ex A C, C E æquale est quadratum ex E A, siquidem rectus est angulus A C E; (7) ergo quadratum ex E A quadrati ex A C est du-

(1) 11. primi. (2) 31. primi. (3) 5. primi. (4) 32. primi. (5) 29. primi. (6) 6. primi. (7) 47. primi.

duplum. Rursus quoniam E G æqualis est G F; & quadratum ex E G quadrato ex G F est æquale; quadrata igitur ex EG, GF dupla sunt quadrati ex GF: at quadratis ex E G, G F æquale est, quod ex E F quadratum. Ergo quadratum ex E F quadrati ex G F duplum erit. Æqualis autem est G F ipsi C D, quadratum igitur ex E F duplum est quadrati ex C D. Sed & quadratum ex A E quadrati ex A C est duplum. Ergo quadrata ex A E, E F dupla sunt quadratorum ex A C, C D. Quadratis verò ex A E, E F æquale est ex A F quadratum, quoniam angulus A E F rectus est: quadratum igitur ex A F quadratorum ex A C, C D est duplum. Sed quadrato ex A F æqualia sunt ex A D, D F quadrata, rectus enim est angulus, qui ad D: ergo ex A D, D F quadrata dupla sunt quadratorum ex A C, C D: est autem D F ipsi D B æqualis: quadrata igitur ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus, quæ inter sectiones interjicitur. Quod ostendere oportebat.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

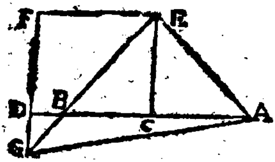
Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in rectum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat, tamquam ab una linea describitur.



Recta enim linea A B secetur bifariam in C, & ipsi in rectum adjiciatur quædam recta linea B D. Dico quadrata ex A D, D B quadratorum ex A C, C D dupla esse. Ducatur enim à puncto C ipsi A B ad rectos angulos C E, (1) & utrique ipsarum A C, C B æqualis ponatur; junganturque A E, E B, & per E quidem ipsi

(1) 11. primi.

AD parallela ducatur E F; (2) per D verò ducatur DF parallela ipsi C E. Et quoniam in parallelas E C, F D recta quaedam linea E F incidit, anguli C E F, E F D aequales sunt duobus rectis: (3) anguli igitur FEB, EFD duobus rectis sunt minores: quae autem à minoribus, quam sint duo recti in infinitum producuntur, conveniunt inter sese. (4) Ergo EB, F D productae ad partes B, D convenient; producantur, & conveniant in puncto G, & A G



jungatur. Itaque quoniam A C est aequalis C E, & angulus AEC angulo EAC aequalis erit: (5) atque est rectus, qui ad C; uterque igitur ipsorum EAC, A E C est recti dimidius: eadem ratione, & recti dimidius est utrque CEB, EBC: ergo AEB est rectus. Et quoniam EBC est dimidius recti, erit, & recti dimidius DBG, (6) quum sit ad verticem: Sed, & CDG rectus est; etenim est aequalis ipsi DCE alterno. (7) Reliquus igitur DGB dimidius est recti, & ob id ipsi DBG aequalis; ergo & latus B D aequale lateri D G, (8) Rursus quoniam E G F est dimidius recti, rectus autem, qui ad F; est enim angulo opposito, qui ad C aequalis; erit, & reliquus FEG recti dimidius, & aequalis ipsi E G F; quare & latus G F lateri EF est aequale. Et quum E C sit aequalis CA, & quadratum ex E C aequale est et, quod ex C A, quadrato; ergo quadrata ex EC, CA dupla sunt quadrati ex CA. Quadratis autem ex EC, CA aequale est quadratum ex E A: quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum. Rursus quoniam GF est aequalis FE, aequale est & ex G F quadratum quadrato ex F E; quadrata igitur ex G F, F E quadrati ex EF sunt dupla: At quadratis ex GF, FE, aequale est, quod ex EG quadratum; ergo quadratum ex E G duplum est quadrati ex E F: aequalis autem est EF ipsi CD: quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed ostensum est, quadratum ex EA duplum quadrati ex AC; ergo ex A E, E G quadrata quadratorum ex AC, CD sunt dupla. Quadra-

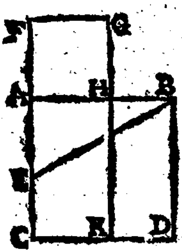
tis

(2) 31.primi. (3) 29 primi. (4) schol.prop.28 primi. (5) 5.primi. (6) 15.primi. (7) 29.primi. (8) 6.primi.

tis verò ex AE, EG æquale est, quod ex AG quadratum: quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC, CD. At quadrato ex AG æqualia sunt ex AD, DG quadrata. Ergo quadrata ex AD, DG sunt dupla quadratorum ex AC, CD. Sed DG est æqualis DB. Quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in rectum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraq; quadrata, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta constat tamquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam secare, ita ut, quod tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ii, quod à reliqua parte fit quadrato.



Sit data recta linea AB, oportet ipsam AB ita secare, ut quod tota; & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur .n. ex AB quadratum ABDC, seceturque AC bifariam in E, & BE jungatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturq; ex AF quadratum FGHA; & GH ad K producatur. Dico AB sectam esse in H, ita ut ABH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam .n. recta linea AC bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in rectum AF, rectangulum CFA una cum quadrato ex AE æquale erit quadrato ex EF. (1) Sed EF est æqualis EB; rectangulum igitur CFA una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato: quadrato autem ex EB æqualia sunt quadrata ex BA, AE, (2) etenim angulus ad A rectus est; ergo rectangulum CFA una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex BA, AE: commune auferatur, quod ex AE quadratum; reliquum igitur rectangulum CFA æquale est

(1) 4.hujus. (2) 47.Primi.

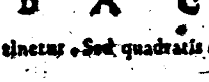
est quadrato ex AB: est autem CFA quidem rectangulum FK, si quidem AF est æqualis FG: quadratum autem ex AB est ipsum AD; rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD: commune auferatur AK; ergo reliquum FH reliquo HD est æquale: atque est HD rectangulum ABH, quum AB sit æqualis BD; & FH est quadratum ex AH. Rectangulum igitur ABH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut ABH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

Hæc propositio nullo pacto numeris explicari potest. Nullus enim est numerus, qui ita dividi possit, ut productum, quod ex toto in partem alteram fit, æquale sit quadrato partis reliquæ.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum, majus est, quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum habens BAC: & ducatur à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. (1) Dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA, AC, rectangulo, quod bis CA, AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcumque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale, & quadratis ex CA, AD, & ei quod bis CA, AD continetur rectangulo: (2) Commune apponatur ex DB quadratum. Quadrata igitur ex CD, DB æqualia sunt, & quadratis ex CA, AD, DB, & rectangulo, quod bis CA, AD continetur. Sed quadratis ex CD, DB æquale est quadratum



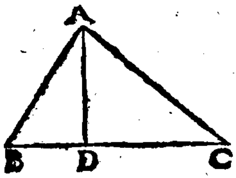
(1) 12. primi. (2) 4. hujus.

tum ex CB: (3) rectus enim est angulus ad D, quum sit BD perpendicularis. Quadratis verò AD, DB æquale est quadratum ex A B. Quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA, AB, & rectangulo bis CA, AD contento. Ergo quadratum ex CB majus est, quàm quadrata ex CA, AB, rectangulo quod bis CA, AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtusum angulum subtendente fit, majus est quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

(3) 47 primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum, minus est, quam quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumta ad angulum acutum.



Sit acutangulum triangulum A BC acutum habens angulum ad B: & ducatur à puncto A, ad BC perpendicularis AD. (1) Dico, quadratum, quod fit ex AC minus esse, quam quadrata, quæ ex CB, BA, rectangulo, quod bis CB, BD continetur. Quoniam enim secta linea CB secta est utcumque in D, erunt quadrata ex CB, BD æqualia & rectangulo, quod bis CB, BD continetur, & quadrato ex DC: (2) commune apponatur, quod ex AD quadratum. Quadrata igitur ex CB, BD, DA æqualia sunt, & rectangulo bis CB, BD contento, & quadratis ex AD, DC. Sed quadratis ex BD, DA est æquale quod ex AB quadratum; (3) rectus enim angulus est, qui ad D

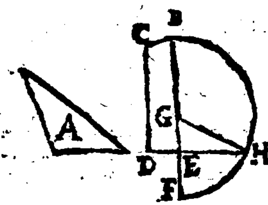
qua-

(1) 12 primi. (2) 7 hujus. (3) 47 primi.

quadratis verò ex AD, DC æquale est quadratum ex AC. Quadrata igitur ex CB, BA sunt æqualia quadrato ex AC, & ei, quod bis CB, BD continentur, rectangulo. Quare solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB, BA rectangulo, quod bis BC, BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est, quam quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus rectangulo contento bis uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

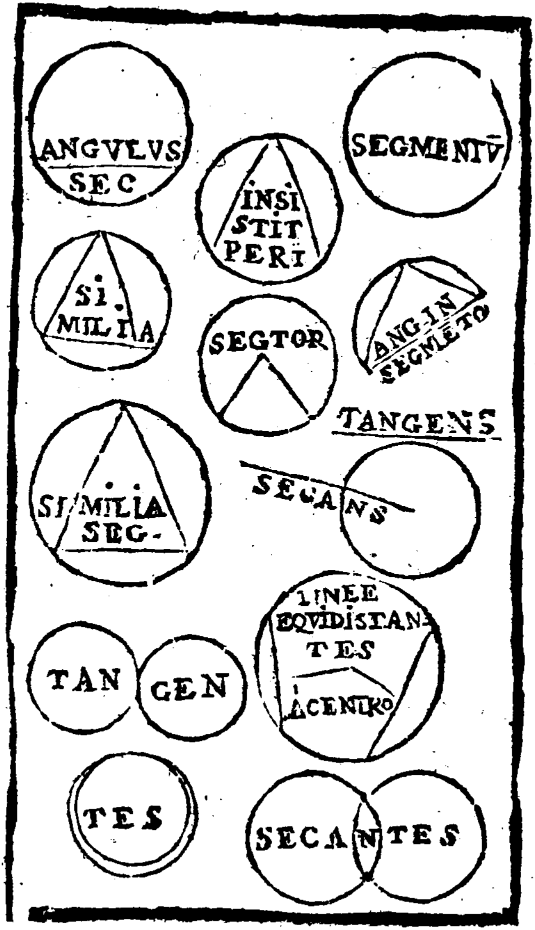


Sit datum rectilineum A. Oportet ipsi A rectilineo æquale quadratum cõstituere. Constituatur rectilineo A æquale parallelogrammũ rectangulũ BCDE. (1) Si igitur BE est æqualis ED factum jam erit, quod proponebatur; etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin minus, una ipsarum BE, ED major est; sit BE major, & producatur ad F, ponaturque ipsi ED æqualis EF, deinde secta FB bifariam in G, centro quidem G, intervallo autem una ipsarum GB, GF semicirculus describatur BHF; producaturque DE in H, & GH jungatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, & inæquales ad E, erit rectangulum BEF unà cum quadrato, quod fit ex E G æquale quadrato ex GF: (2) est autem GF æqualis GH: rectangulum igitur BEF una cum quadrato ex GE æquale est quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH æqualia sunt ex HE, EG quadrata. Ergo rectangulum BEF una cum quadrato est EG æquale est quadratis ex HE, EG. Commune auferatur ex EG quadratum. Reliquum igitur rectangulum BEF est æquale

(1) 45. primi. (2) 5. hujus.

æquale quadrato ex EH. Sed rectangulum BEF est ipsum B D parallelogrammum, quoniam E F est æqualis E D. Ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est æquale. Parallelogrammum autem B D est æquale rectilineo A. Rectilineum igitur A quadrato ex E H descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod facere oportebat.

FINIS LIBRI SECUNDI.



ANGVLVS SEC
SEGMENTV
INSI STIT PERI
SI MILIA
SEGTOR
ANG IN SEGMETO
TANGENS
SECANS
SI MILIA SEG-
LINEE EQVIDISTAN TES
A CENTRO
TAN GEN
TES
SECANTES

EUCLIDIS ELEMENTORUM,

LIBER TERTIUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DEFINITIONES.

1. Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum, quæ ex centris sunt æquales.

Circulus namque generatur ex circumvolutione semidiametri circa alterum extremum fixum: quare si circulorum semidiametri, seu diametri sunt æquales, ipsi circuli inter se necessariò erunt æquales.

2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta ipsum non secat.

3. Circuli contingere sese dicuntur, qui contingentes se ipsos non secant.

4. In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales.

Quia perpendicularis recta linea, quæ ducitur à puncto quopiam ad lineam quamdam, est mensura intervalli, sive distantiæ, quæ est inter hoc punctum, & dictam lineam, ut patet ex corol. prop. 19. lib. 1.

5. Magis autem distare à centro dicitur ea, ad quam major perpendicularis cadit.

6. Pro-

6. Portio circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.
7. Portionis autem angulus est, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.
8. In portione angulus est, quando in circumferentia portionis sumitur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ ejus, quæ basis est portionis, rectæ lineæ ducuntur, angulus vero ductis lineis sit contentus.
9. Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa insistere angulus dicitur.
10. Sector circuli est, quando angulus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipsis assumta.

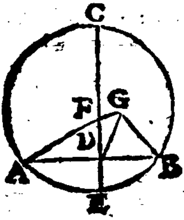
Debent radii angulum ad centrum constituere, ut sector habeatur, secus enim haberetur semicirculus; sector igitur, aut major, aut minor est semicirculo.

11. Similes circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus A B C; oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcumque, & in puncto D bifariam secetur; (1) à puncto autem D ipsi A B ad rectos angulos ducta D C (2) in E producatur; & secetur C E bifariam in F. Dico punctum F circuli ABC centrum esse. Non. n. sed si fieri potest, sit G, & GA, GD, GB jungantur. Itaque quoniam A D est æqualis DB, communis autem GD, erunt duæ A D, D G duabus G D DB, æquales altera alteri: & basis GA æqualis est basi GB, (3) sunt. n. ex centro G; angulus igitur ADG angulo GDB est æqualis. (4) Quum autem recta linea super rectam lineam insistens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. (5) Ergo angulus GDB est

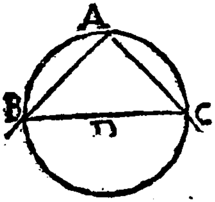


(1) 10. primi. (2) 11. primi. (3) Def. 15. primi.
(4) 16. primi. (5) Def. 10. primi.

est rectus. Sed & rectus FDB: æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non potest: quare G non est circuli A B C centrum. Similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F; ergo F centrum est circuli ABC, quod facere oportebat.

COROLLARIUM.

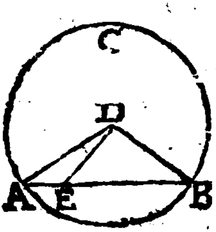
Ex hoc perspicuum est, si in circulo quædam recta linea rectam lineam quandam bifariam, & ad angulos rectos secat, in secante circuli centrum inesse.



Praxis hujus propositionis ex ejusdem constructione patet: facillimè verò per normam inveniri potest centrum dati circuli. Norma enim vertice A ad circumferentiam applicato, dividatur bifariam in D recta BC, puncta B, & C jungens, in quibus norma peripheriam secat, & ipsum punctum D erit centrum circuli DAC. Patet ex propositione 31. hujus.

THEOREMA I. PROPOSITIO II.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadit.



Sit circulus ACB, & in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A, B. Dico rectam lineam, quæ à puncto A ad punctum B ducitur intra circulum cadere. Accipiatur in recta AB quodvis punctum E, & sumto circuli A B C centro D, jungantur DA, DB, DE. Et quoniam DA, DB sunt æquales, erunt anguli A, B inter se quoque æquales. (1) Sed in triangulo

(1) 5. lib. pr.

gulo DAE productum est latus AE; angulus igitur exterior D E B major est interno, & opposito A. (2) ideoque major quoque ipso angulo B, qui angulo A est æqualis: ergo in triangulo DEB angulus DEB major est angulo B. Sed majori angulo majus opponitur latus. (3) Ergo latus DB, quod opponitur majori angulo DEB majus est latere D E, quod minori angulo B opponitur. At D B pertingit ex centro ad circumferentiam. Ergo D E eousque non pertingit. Ergo punctum E est intra circulum. Idemque ostendetur de quovis alio puncto rectæ AB; tota igitur recta linea intra circulum cadit. Si igitur in circumferentia circuli duo puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadit. Quod demonstrare oportebat.

Patet quoque hæc propositio ex ideis lineæ rectæ, & lineæ circularis.

COROLLARIUM.

Deducitur ex hac propositione, tangentem circuli in unico tantum puncto eum tangere: si enim in pluribus punctis eum tangeret, caderet ipsa intra circulum, adeoque non esset tangens.

(2) 16. lib. pr. (3) 19. lib. pri.

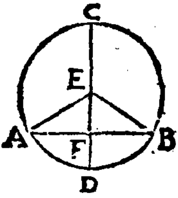
THEOREMA II. PROPOSITIO III.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit: quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

SIt circulus A B C, & in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. Dico, & ad angulos rectos ipsam secare. Sumatur.n. circuli ABC centrum, (1) quod sit E, & AE, EB jungantur. Quoniam igitur A F est æqualis F B, communis F E, duæ duabus æquales sunt, & basis E A basi E B est æqualis; ergo & angulus A F E angulo BFE æqualis erit. Quum an-

(1) 1. hujus.

autem recta linea super rectam insistens, angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: (2) Uterque igitur AFE, BFE est rectus: quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Sed CD secet AB ad rectos angulos. Dico, & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. Iisdem .n. constructis, quoniam EA, quæ ex centro, est æqualis EB, & angulus EAF angulo EBF æqualis erit: (3) est autem, & AFE rectus æqualis recto BFE; duo igitur triangula EAF, EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale, EF commune scilicet utrisque, quod uni angulorum æqualium subtenditur; ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. (4) Atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit: quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.



COROLLARIUM.

Hinc in triangulo quovis æquilatero, vel æquicrure linea ab angulo verticis bisecans basim, perpendicularis est basi; & contra perpendicularis ab angulo verticis bisecat basim. Patet ex demonstratione.

---

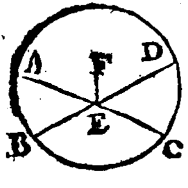
(2) Def.10.primi. (3) 5.primi. (4) 26.primi.

THEOREMA III. PROPOSITIO IV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD, & in ipso duæ rectæ AC, BD se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum. Dico eas se se bifariam non secare. Si .n. fieri potest, secent se se bifariam, ita ut AE sit æqualis EC, & BE

 ipsi

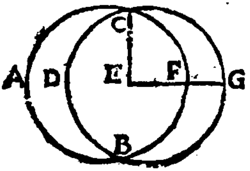


ipsi E D: sumaturque centrum ABCD circuli, (1) quod sit F, & FE jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrũ ducta rectam lineam quadnam A C non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit: quare rectus est F E A angulus. Rursus quoniam recta linea F E rectam lineam quandam B D non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam secabit. (2) Rectus igitur angulus est F.E B. Ostensus autem est rectus, & FEA. Ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur AC, BD se se bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent, non ductæ per centrum, se se bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.

(1) 1.hujus. (2) Ex antecedente.

THEOREMA IV. PROPOSITIO V.

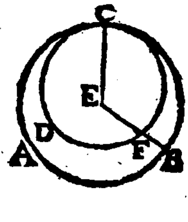
Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.



DUo enim circuli se invicem secent ABC, CDG in punctis B, C. Dico ipsorum idem centrum non esse. Si .n. fieri potest, sit centrum E; jungaturq; E C, & E F G utcumque ducatur. Et quoniam E centrum est circuli A B C erit C E ipsi E F æqualis. Rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. Sed ostensa est CE æqualis EF. Ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur punctum E centrum est circulorum A B C, CDG. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

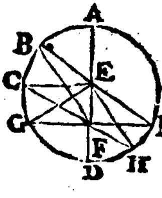
Si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.



DUo .n. circuli A B C, C D F contingant se se intra in puncto C. Dico ipsorum non idem centrum. Si enim fieri potest, sit E, jungaturque EC, & EFB utcumque ducatur. Quoniam igitur E centrum est circuli ABC, æqualis est C E ipsi E B. Rursus quoniam E centrum est circuli C D F, erit CE æqualis FE. Ostensa autem est CE æqualis E B. Ergo, & E F ipsi E B est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur E punctum centrum est circulorum A B C, CDF. Quare si duo circuli se se intra contingant, ipsorum idem centrũ non erit. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quædam rectæ lineæ, maxima quidem erit, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, semper remotiore major est: at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.



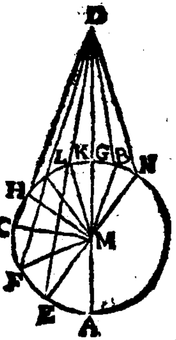
SIt circulus ABCD, cujus diameter A D, & in ipsa A D sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli: sit autem circuli centrum E: & à puncto F intra circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ F B, F C, F G. Dico F A, maximam esse, & F D minimam, aliarum verò F B quidem majorem, quam F C, & F C majorem, quam FG. Junganteur .n. BE, CE, GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora; (1) erunt BE, EF majores quàm BF: est autem AE æqualis EB. Ergo BE, EF ipsi AF sunt æquales; major igitur est AF, quàm FB. Rursus quoniam BE, est æqualis EC, communis autem FE, duæ BE, EF duabus CE, EF æquales sunt. Sed BEF angulus major est angulo CEF. Basis igitur BF basi FC est major. (2) Eadem ratione, & CF major est, quam FG. Rursus quoniam GF, FE majores sunt, quàm EG; æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF, FE majores quam ED: communis auferatur EF. Ergo reliqua GF major est, quam reliqua FD. Maxima igitur est FA, & FD minima: major verò BF quàm FC, & CF quàm FG major. Dico, & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. Constituatur, n. ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEK, (3) & FK jungatur. Quoniam igitur GE est æqualis EK, communis autem EF, duæ GE, EF duabus KE, EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo KEF: basis igitur FG basi FK æqualis erit. (4) Dico & à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. Si enim fieri potest, cadat FH: & quoniam FH est æqualis FG, estque ipsi FG æqualis FK; erit, & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Vel hoc modo: jungatur EH, & quoniam GE ipsi EH est æqualis, communis autem FE, & basis GF æqualis basi FH; erit, & angulus GEF æqualis angulo HEF. Sed angulus GEF angulo KEF est æqualis; angulus igitur HEF ipsi KEF æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. Quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipsi GF. Ergo una tantum cadet. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & reliqua, quæ sequuntur. Quod demonstrare oportebat.

THEO-

(1) 20. primi. (2) 24. primi. (3) 23. primi. (4) 4. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quadam recta linea, quarum una per centrum transeat, alia verò utcumque: earum quidem, qua in concavam circumferentiam cadunt, maxima est, qua per centrum transit; aliarum autem propinquior ei, qua per centrum, semper remotiore major est: at earum, qua in convexam circumferentiam cadunt minima est, qua inter punctum, & diametrum interjicitur; aliarum verò, qua propinquior minima, semper remotiore est minore: dua autem tantum aquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minima.



Sit circulus A B C, & extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA, DE, DF, DC: sitque DA per centrum. Dico earum quidem, quæ in concavam A E F C circumferentiam cadunt, maximam esse D A, quæ per centrum transit; & minimam, quæ inter punctum D, & diametrum A G interjicitur, videlicèt D G: majorem autem D E, quam DF, & DF majorem, quam DC: earum verò, quæ in convexam circumferentiam H L K G cadunt, quæ propinquior minimæ D G semper remotiore esse minorem, hoc est D K minorem, quam D L, & D L minorem quam DH. Sumatur.n. centrum circuli AFC, quod sit M, & jungantur ME, MF, MC, MH, ML, MK. Et quoniam A M est æqualis ME, & communis apponatur MD: ergo AD est æqualis ipsis EM, MD. Sed EM, MD sunt majores, quàm ED: (1) ergo & AC quam ED est major. Rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF communis apponatur MD, erunt EM, MD ipsis MF, MD æquales; & angulus EMD major est angulo FMD: basis igitur ED basi FD major erit. (2) Similiter demonstrabimus,

D 4

(1) 20. primi. (2) 24. primi.

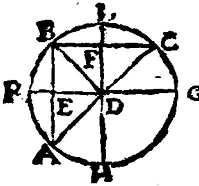
bimus, & FD majorem esse, quam CD. Ergo earum, quæ cadunt in concavam circumferentiam maxima est DA, major autem DE, quàm DF, & DF quàm DC major. Præterea quoniam MK, KD sunt majores quam MD, & MG est æqualis MK; erit reliqua KD, quàm reliqua GD major: quare GD minor quam KD, & idcircò GD, minima est. Et quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK, KD, intra constituuntur, erunt MK, KD minores ipsis ML, LD, (3) quarum MK est æqualis ML; reliqua igitur DK minor est, quàm reliqua DL. Similiter ostendemus & DL, quàm DH minorem esse. Ergo earum, quæ in convexam peripheriam incidunt DG minima est; minor verò DK quam DL, & DL minor, quàm DH. Dico etiam duas tantum æquales à puncto D, in circulum cadere ad utrasque minimæ partes. Constituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea punctum M, angulo KMD æqualis angulus DMB, (4) & DB jungatur. Itaque quoniam MK est æqualis MB, communis autem MD, duæ KM, MD duabus BM, MD æquales sunt, altera alteri, & angulus KMD, æqualis angulo BMD, basis igitur DK basi DB est æqualis. (5) Dico à puncto D, nullam aliam ipsi DK æqualem in circulum cadere. Si enim fieri potest, cadat DN. Et quoniam DK est æqualis DN, & DK ipsi DB est æqualis; erit, & DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Vel & aliter. Jungatur MN, & quoniam æqualis est KL ipsi MN, communis autem MD; & basis DK basi DN æqualis, erit & propterea angulus KMD æqualis angulo DMN. Sed KMD angulus est æqualis angulo BMD; angulus igitur BMD angulo NMD æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. Quare non plures quàm duæ rectæ lineæ à puncto D in circulum ABC ad utrasque partes minimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, & reliqua deinceps: quod ostendere oportebat.

THEO-

(3) 21.primi. (4) 23.primi. (5) 4.primi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadunt plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales, punctum, quod sumitur, circuli centrum erit.

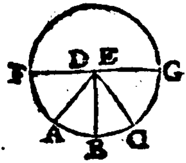


SIt circulus ABC, & intra ipsum sumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, videlicet DA, DB, DC. Dico punctum D, circuli ABC centrum esse. Jungantur enim AB, BC, seceturq; bifariam in punctis E, F: & junctæ ED, DF, ad puncta G, R, H, L producantur. Quoniam igitur AE est æqualis EB, communis autem ED, erunt duæ AE, ED, duabus BE, ED, æquales: & basis DA, est æqualis basi DB; angulus igitur AED, angulo BED æqualis erit, (1) & idcircò uterque angulorum AED, BED est rectus. (2) Ergo GR bifariam secans AB, & angulos rectos secat. Et quoniam si in circulo quædam recta linea, rectam lineam quandam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante est circuli centrum; (3) erit in GR centrum circuli ABC. Eadem ratione, & in HL centrum est ABC circuli, & nullum aliud commune habent rectæ lineæ GR, HL, nisi punctum D. Ergo D circuli ABC est centrum. Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod sumitur circuli centrum erit.

(1) 8. primi. (2) def. 10. lib. 1. (3) Coroll. 1. hujus.

ALITER.

SUmatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D, atque à puncto D, in circulum ABC cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales DA, DB, DC. Dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. Non enim, sed si fieri potest, sit E, & juncta DE

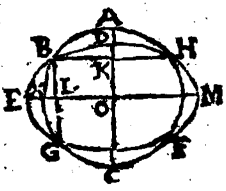


in F, G producatur, ergo F G diameter est A B C circuli. Itaque quoniam in F G diametro circuli A B C sumtum est aliquod punctum D, quod non est centrum circuli; maxima quidem erit D G, major autem D C, quàm D B, & D B, quàm D A major. (1) Sed, & æquales, quod fieri non potest. Non igitur E centrum est circuli A B C. Similiter ostendemus, neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. Ergo D circuli A B C, centrum erit, quod oportebat demonstrare.

(1) 7. hujus.

THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.



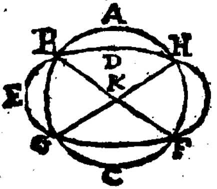
SI enim fieri potest, circulus ABC circulum D E F secet in pluribus punctis, quam duobus, videlicet in B, G, H, F; & junctæ BG, BH bifariam secentur in L, K, atque à punctis L, K ipsis BG, B H ad rectos angulos ductæ LM, KC in puncta E, A producantur. Quoniam igitur in circulo A B C quædam recta linea A C rectam lineam quandam BH bifariam, & ad angulos rectos secat, in ipsa A C circuli A B C erit centrum. (1) Rurfus quoniam in eodem circulo A B C, quædam recta linea M X rectam lineam quandam B G bifariam secat, & ad rectos angulos; in ipsa MX centrum erit circuli: ostensum autem est, & in ipsa A C centrum esse, & in nullo alio puncto conveniunt inter se rectæ lineæ AC, MX, præter quam in O; ergo O circuli ABC est centrum. Similiter ostendemus, punctum O centrum esse circuli D E F. Ergo

(1) Coroll 1. hujus.

Ergo duorum circulorum se se secantium A B C, DEF, idem erit centrum O, quod fieri non potest. (2) Non igitur circulus circulum secat in pluribus punctis, quàm duobus.

(2) 5. hujus.

A L I T E R.



Circulus enim A B C rursus circulum D E F secet in pluribus punctis, quàm duobus; nempe in B, G, F, H, & circuli A B C centrum sumatur, quod sit K & KB, KG, KF, jungantur, quæ æquales sunt inter se. (1) Quoniam igitur intra circulū D E F sumtum est aliquod punctum K, à quo in circulum D E F, incidunt plures, quàm duæ rectæ lineæ KB, KG, KF inter se æquales, erit punctum K, circuli D E F centrum: est autem, & circuli A B C centrum K, duorum igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K, centrum, quod fieri non potest: (2) quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat, quod oportebat demonstrare.

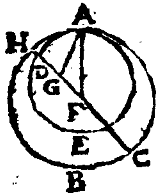
(1) Def. 15. lib. pr. (2) 5. hujus.

THEOREMA X. PROPOSITIO XI.

Si duo circuli se se intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens, & producta in circulorum contactum cadat.

DUo enim circuli ABC, A D E se se intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem A B C centrum, quod sit F, circuli verò A D E centrum G Dico rectam lineam à puncto G, ad F ductam, si producatur in punctum A, cadere. Non enim, sed si fieri potest, cadat ut FGDH, & AF, AG, jungantur. Itaque quoniam A G, G F, majores sunt, quàm FA, (1) hoc est quam FH; communis auferatur FG, reliqua igitur A G major est, quàm reliqua G H. Sed AG est æqualis GD: ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F, ad G ducta recta linea extra contactum A cadet, quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producatur in contactum circulorum cadet, quod oportebat demonstrare.

ALITER.



SEd cadat, ut GFC, & producatur in directum C F G ad punctum H, junganturque A G, AF. Quoniam igitur AG, GF, majores sunt, quàm AF, (2) & AF, est æqualis F C, hoc est ipsi F H, communis auferatur F G, reliqua igitur AG, reliqua GH est major, hoc est DG major ipsa GH, minor majore, quod fieri non potest. Similiter, & si extra circulum parvum sit centrum majoris circuli, idem sequi absurdum ostendemus.

---

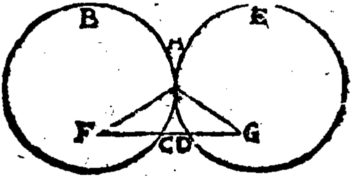
(1) 20. primi. (2) 20. primi.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

DUo enim circuli ACB, ADE, sese extra contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem ABC centrum, quod sit F: circuli verò A D E centrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A, transire. Non enim, sed si fieri potest, cadat ut FCDG, & FA, AG, jungantur. Quoniam

niam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rursus quoniam G centrum est ADE circuli,

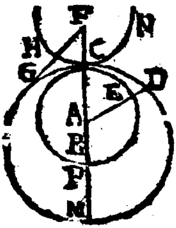


erit AG, ipsi GD æqualis: ostensa est autem & AF æqualis FC; sunt igitur FA, AG, ipsis FC, DG, æquales. Ergo tota FG major est, quàm FA, AG. Sed & minor, quia triangulum est AFG, cujus duo latera AF, AG tertio FG sunt majora. (1) Eadem igitur FG major, & minor est ipsis AF, AG, quod fieri non potest. Non igitur à puncto F, ad G, ducta recta linea per contactum A, non transibit, quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit, quod oportebat demonstrare.

(1) 20. primi.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis, quàm uno, sive intus, sive extra contingat.



Circulus PEC circulum MDC tangat primò intus. Dico in unico puncto tantum illum contingere. Sit circuli PEC centrum A, & circuli MDC sit centrum B, per quæ ducatur MBA, quæ producta versus C per contactum C transibit; (1) ducatur quoque utcumque recta AED secans peripherias in E, & D. Quoniam in circulo MDC est punctum A, quod non est ipsius cen-

(1) 11. hujus.

centrum, & ab eo ad peripheriam cadunt plures rectæ lineæ AD, AC, quarum AC est complementum diametri, sive ejus lineæ, quæ transit per centrum B, erit ipsa AC minor recta AD; (2) sed recta AC æqualis est rectæ AE: (semidiametri enim ambæ sunt ejusdem circuli) Recta igitur AE minor quoque est ipsa AD: ideoq; punctum D ultra punctum E est constitutum, & propterea punctum D peripheriæ MDC extra circulum PEC cadit. Simili modo quodlibet aliud punctum peripheriæ MDC ultra circumferentiam PEC, præter punctum C, cadere ostenditur. Ergo si circulus PEC circulum MDC intus contingit, in pluribus, quam uno puncto eum non tangit, quod erat primum.

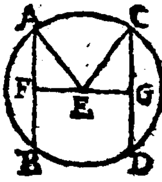
Tangat secundò circulus NCH circulum MDC extra. Dico & in unico puncto tantum ipsam tangere. A centro F circuli NCH ad centrum B circuli MDC ducatur FBM, quæ quidem per contactum C transibit; (3) ducatur quoque utcumque recta FHG, secans utramque peripheriam in H, & G. Et quoniam sumtum est punctum F extra circulum MDC, à quo ad peripheriam ejusdem plures cadunt rectæ lineæ FCM, FHC, erit FC, quæ inter punctum F, & diametrum CM intercipitur, minor recta FG. Sed FC est æqualis ipsi FH; (utraque enim à centro F ad circumferentiam HCN est ducta.) Ergo FH minor est ipsa FG: ideoque punctum G est ultra punctum H: ac proinde punctum G peripheriæ DCG est extra peripheriam HGN. Simili modo ostenditur de quolibet alio puncto peripheriæ DCG, præter quam de puncto C, quod fit extra peripheriam circuli HCN; Ergo si circulus NCH circulum MDC extra contingat, in unico puncto illum contingit. Ostensum autem est, quod & si intus se contingant circuli, in unico tantum puncto se tangant. Ergo circulus circulum non contingit in pluribus, quam uno puncto, sive intus, sive extra tangat; quod oportebat demonstrare.

THEO.

(2) 7. hujus. (3) Ex antecedenti. (4) 8 hujus.

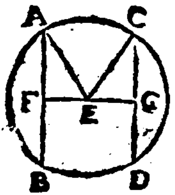
THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant; & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales.



Sit circulus ABDC; & in ipso æquales rectæ lineæ AB, CD. Dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod sit E, & ab ipso ad AB, CD, perpendiculares ducantur EF, EG, & AE, EC, jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF, rectam lineam quandam AB, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit. (1) Quare AF est æqualis FB, ideoque AB ipsius AF dupla. Eadem ratione, & CD dupla est CG: atque est AB ipsi CD æqualis; æqualis igitur, & AF ipsi CG. Et quoniam AE est æqualis EC, erit & quadratum ex AE, quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidem ex AE, æqualia sunt ex AF, FE, quadrata; (2) rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG, GC, quum angulus ad G sit rectus; quadrata igitur ex AF, FE æqualia sunt quadratis ex CG, GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG est æquale, etenim æqualis est AF ipsi CG; reliquum igitur, quod fit ex FE quadratum, æquale est reliquo, quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis: in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales sunt; ergo AB, CD, à centro æqualiter distant. Sed AB, CD, æqualiter distent à centro, hoc est æqualis sit FE ipsi EG, dico AB, ipsi CD, æqualem esse. Iisdem enim constructis, similiter ostendemus, AB duplam esse ipsius AF, & CD, duplam ipsius CG. Et quoniam æqualis est AE, ipsi EC, erit & ex AE quadratum quadrato

(1) 3. hujus. (2) 47. primi.



drato ex EC æquale. Sed quadrato quidem ex AE, æqualia sunt quadrata ex EF, FA: quadrato autem ex EC, æqualia quadrata ex EG, GC; quadrata igitur ex EF, FA quadratis ex EG, GC æqualia sunt: quorum quadratum ex EG æquale est quadrato ex EF, est enim EG ipsi EF æqualis; reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG; ergo AF ipsi CG est æqualis; atque est AB ipsius AF dupla, & CD dupla ipsius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XV.

In circulo maxima quidem est diameter; aliarum verò semper propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E, & propinquior quidem diametro AD, sit BC, remotior verò FG. Dico AD maximam esse, & BC majorem, quàm FG. Ducantur enim à centro E ad BC, FG, perpendiculares EH, EK: & quoniam BC propinquior est ei, quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK, quàm EH major: ponatur ipsi EH, æqualis EL, & per L, ipsi EK, ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & jungantur EM, EN, EF, EG. Quoniam igitur EH, est æqualis EL, erit, & BC ipsi MN æqualis. (1) Rursus quoniam æqualis est AE, ipsi EM, & DE, ipsi EN, erit & AD, ipsis ME, EN, æqualis. Sed ME, EN, majores sunt, quàm MN. Ergo & AD major est, quàm MN; & MN

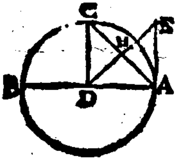
(1) Ex antecedente.

& MN est æqualis BC. Est igitur AD, quam BC, major. Quòd cum duæ EM, EN, duabus FE, EG, æquales sint, angulusque MEN, major angulo FEG, & basis MN, basi FG major erit. (2) Ostensa autem est MN æqualis BC. Ergo, & BC, quàm FG, est major. Maxima igitur est AD diameter, & BC major, quàm FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum verò semper propinquior ei, quæ per centrum transit remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.

(2) 24.primi.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum, qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.



SIt circulus ACB, cujus centrum D, & diameter BA. Dico rectam lineam AE, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. Sumatur in ipsa AE, quodvis punctum E, & à centro D ad punctum E ducatur recta DE. Quoniam in triangulo DAE angulus DAE est rectus, erit DEA angulus acutus; (1) ac proinde minor ipso angulo DAE. Sed majori angulo majus latus opponitur. (2) Ergo latus DE, quod opponitur majori angulo DAE, majus est latere DA, quod opponitur minori angulo DEA. Recta autem DA ad circumferentiam pertingit. Ergo DE ulterius porrigitur; adeoque punctum E, & eadem ratione quodvis aliud punctum rectæ AE extra circulum situm erit. Tota igitur AE extra circulum cadit, quod erat primum.

Dico secundo, in locum, qui est inter rectam lineam AE, & circumferentiam CHA, alteram lineam non cadere,

(1) 32.primi. (2) 19.primi.

dere, sed intra circulum necessariò ipsam esse debere. Ducatur igitur recta AC. Dico eam non extra, sed intra circulum BCA cadere. Ex puncto D ducatur DH perpendicularis ad ipsam AC. Quoniam enim angulus DHA est rectus, erit DAH acutus: (3) ac proinde DHA angulus major erit angulo DAH: sed majori angulo opponitur majus latus: (4) major igitur est recta DA, quam recta DH. Sed DA ad circumferentiam pertingit; ergo recta DH non eousque porrigitur, ac proinde punctum H intra circulum cadit. Similiter omne aliud punctum rectæ AC intra circulum cadere demonstratur. Ergo tota AC intra circulum cadit. Quod erat secundum.

Dico tertiò angulum semicirculi, qui recta linea BA & circumferentia AHC continetur omni acuto angulo rectilineo majorem esse; reliquum verò contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo acuto rectilineo esse minorem. Quoniam nulla recta linea inter AE & circumferentiam CHA cadere potest, sed omnis alia intra circulum cadit; perspicuum est acutum quemlibet angulum minorem esse angulo semicirculi, qui nempe continetur diametro BA, & circumferentia AHC, majorem verò reliquo, qui continetur recta AE, & circumferentia AHC. Si igitur ab extremitate diametri, &c. quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

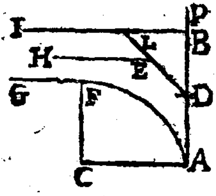
Recta igitur, quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducitur, ipsum circulum tangit. Ostensum enim est ipsam cadere extra circulum, quare in extremo illo puncto diametri circulum tangit. Hinc si à dato in circumferentia puncto tangens ducenda erit; ab eo puncto ducatur diameter, & ad ipsam ab eodem puncto perpendicularis excitetur; & habebitur tangens quæsita.

Cave, ne existimes, id quod vulgò angulus contactus dicitur, quodque jacet inter tangentem AE, & circumferentiam AHC, verè angulum esse; angulumque semicirculi qui comprehenditur diametro AB, & circumferentia AHC, esse acutum, & angulo recto rectilineo minorem. Hæc enim tamquam vera à nonnullis interpretibus admissa, illos in manifestissima compulerunt absurda; quod qui viderint

(3) 32. primi. (4) 19. primi.

derint plerique, ista Euclidis non esse dixere, sed ab aliena manu inserta. Quisquis sit auctor, putamus non esse angulum id, quod vulgò angulus contactus dicitur, angulumque semicirculi rectum esse, & æqualem angulo recto rectilineo. Quæ quidem, quamvis pluribus ostendi possint modis, ex omnibus illum hic adducemus, qui Tyronum intelligentiæ sit maximè accommodatus.

Sit recta A C perpendicularis rectæ lineæ AP: hæc autem sive ita frangatur ut in D, E, sive inflectatur, ut A F, à situ perpendiculari ad situm parallelum, quoad sui partem E H, vel F G pervenire potest. Si hæc mutatio fiat fractionibus; quantitas declinationis, qua recta A P sive ejus pars discedit à situ perpendiculari, habetur ab angulis externis, qui fiunt in singulis fractionibus. Sic angulus E D B quantitatem determinat inclinationis, qua pars D E discedit à perpendiculo A P; & angulus H E L quantitatem determinat inclinationis, qua pars H E à situ partis D E discedit. Quare omnes hi anguli externi simul sumti (unus, pluresvè, pauci, multive, æquales, aut inæquales) sunt mensura totius declinationis à situ primo, quæ in casu proposito est unus angulus rectus, quippe tantundem declinat parallela à perpendiculari.



Sin hæc mutatio flexione fiat, ubi nulla est fractio, sed continua incurvatio, quamobrem creatur linea curva A F: hæc flexio quantum ad declinationem æquivalet tot, tantisque fractionibus, quæ talem effecissent declinationem: ac proinde omnes anguli D, & E externi, plures paucioresve, aut etiam unicus B est mensura declinationis, quam obtinet in F recta à situ primo ope flexionis, sive incurvationis curvæ lineæ A F.

Porrò si declinationem hanc à situ perpendiculari A P ad parallelum fractionibus fieri supponamus, & quidem angulis inter se æqualibus; patet, quemlibet externorum angulorum, quibus quantitas hujus declinationis determinatur, eam partem esse anguli recti, quæ determinatur à numero fractionum, quibus frangitur in partes recta A P, ut ad situm parallelum perveniat. Sic si quatuor fuerint fractiones, angulique sint inter se æquales, quilibet externus angulus erit quarta pars anguli recti, & si octo erunt hujus-

hujusmodi fractiones, quilibet eorum octava pars erit anguli recti, & sic deinceps. Ex quo patet, quò plura sunt latera, in qua dividitur recta AP, eo minores angulos istos evadere.

Quod de re si ita incurvari supponatur recta A P, ut fecans fiat infinitis lineis parvis, sitque is quadrantalis, sive circuli quadranti aequalis, aequipollens uni anguli recto, & curvatura sit uniformis; quelibet ex his angulis externis erit infinitesima pars anguli recti, hoc est nullius quantitatis, sive non angulus. Atqui hic esset angulus contactus hujus polygoni infinitorum laterum, cum is nulla linea recta secari posset, quia nullius est quantitatis. Et sic inflexa recta A P convertitur in lineam curvam, & quidem circularem. Ergo angulus contactus nullius est quantitatis, sive non angulus.

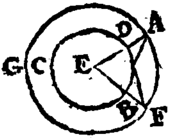
At si quis scrupulosius agere velit, arcumque A F circularem non concipiat, ut ex lineis rectis, quamvis infinitè multis conflatum, sed ut continuam curvam lineam absque ulla fractione, vel angulo, cujus nulla pars utcumque minuta, sit recta: non ideo angulus contactus evadit ullius quantitatis; imò ex hoc clarius erit nullam ipsum habere quantitatem, angulumque non esse. Nam cum ex iis, quae in propositione demonstrata sunt, is omni acuto angulo rectilineo minor sit, minor quoque erit, unoquoque ex angulis externis polygoni infinitorum laterum; sed quilibet horum angulorum est nullius quantitatis, ut ostensum est. Ergo eò magis angulus hic, qui perperam angulus dicitur, nullius est quantitatis, ac proinde non angulus.

Ex his liquet, angulum semicirculi esse rectum, quia cum id, quod angulus contactus vulgò dicitur, non sit angulus, angulus semicirculi ab angulo recto, qui nempe constituitur à tangente, & diametro non deficit, ac proinde est ipsi aequalis. Sed quare mutuò non congruunt? Respondeo, ob inflexionem circumferentiae, quae congruere non patest cum recta linea. Quae inflexio quamvis sit ejusdem quantitatis in majoribus, atque in minoribus circumferentiis, quia tamen in minoribus circumferentiis est in minori longitudine, citius minores circumferentiae recedunt à tangente; atque ideo fit, ut anguli semicirculorum, quorum nempe eadem diameter constituit unum latus, at non eadem, aut aequales circumferentiae faciunt aliud, quamvis inter se aequales sint, utpote qui omnes recti sunt, non invicem congruunt; unde hujusmodi anguli, & quilibet etiam

etiam segmenti angulus, sive is sit majoris, sive minoris segmenti, imo etiam omnes quicumque anguli, qui à recta linea, & qualibet linea curva constituuntur, ad angulos reducuntur, qui constituuntur prædicta recta linea, & tangente ejusdem curvæ, ducta nempe à puncto, in quo mutuo intersecantur recta, & curva linea. Et hæc dixisse sufficiat de angulo contactus, quæ quidem Tyronum intelligentiæ sufficere mihi persuadeo.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XVII.

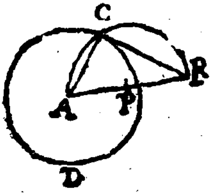
A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.



Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus B C D, oportet à puncto A, rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; & juncta A E, centro quidem E, intervallo autem EA, circulus AFG, describatur: & à puncto D, ipsi E A, ad rectos angulos ducatur D F: junganturque EBF, A B. Dico à puncto A, ductam esse AB, quæ circulum B C D, contingit. Quoniam enim E centrum est circulorum BCD, AFG, erit EA, æqualis EF, & ED, ipsi EB. Duæ igitur AE, EB, duabus F E, E D, æquales sunt; & angulum communem continent, qui est ad E; ergo basis DF, basi AB, est æqualis; triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli, reliquis angulis: (1) æqualis igitur est angulus EBA, angulo EDF: & EDF rectus est, quare & rectus EBA: atque est E B ex centro; quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulum contingit; (2) ergo A B contingit circulum. A dato igitur puncto A, ducta est recta linea A B, quæ circulum B C D contingit; quod facere oportebat.

Ma-

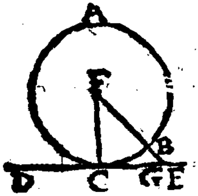
(1) 4 primi. (2) Ex antecedente.



Magis expeditè ex dato puncto ad datum circulum tangens duci potest hoc modo. Sit ducenda tangens ex dato puncto B ad datum circulum CD. A dato puncto B ad A centrum circuli ducatur recta AB, quæ bifariam dividatur in P; & facto centro in P intervallo P B describatur semicirculus BCA, ducaturque à puncto B ad punctum C, in quo nempe circulorum circumferentiæ se se secant, recta B C, quæ erit tangens quæsita, quia angulus ACB rectus est, ut demonstrabitur in prop. 31. hujus libri.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVIII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.



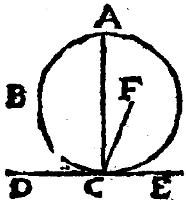
Circulum enim ABC, contingat quædam recta linea D E, in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur F C. Dico F C ad ipsam DE, perpendicularem esse. Si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad D E perpendicularis F G. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus, (1) ac propterea F G C angulus major angulo F C G; majorem autem angulum majus latus subtendit: (2) major igitur est F C, quàm F G: æqualis autem F C, ipsi F B: ergo F B ipsa FG, est major, minor majore, quod fieri non potest: non igitur F G, est perpendicularis ad D E. Similiter ostendemus, neque aliam quampiam esse præter ipsam F C: ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum

(1) 32. primi. (2) 19. primi.

ctum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit, quod oportebat demonstrare.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XIX.

Si circulum contingat quaedam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur, in ea circuli centrum erit.



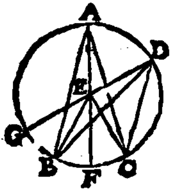
Circulum enim A B C contingat quadam recta linea D E in C, & à puncto C ipsi D E ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipsa AC, circuli centrum esse. Non enim, sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur C F. Quoniam igitur circulum A B C, contingit quędam recta linea DE, & à centro ad contactum, ducta est F C, erit F C ad ipsam D E, perpendicularis; rectus igitur angulus est FCE; est autem, & A C E rectus; ergo FCE angulus est æqualis angulo A C E, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur F centrum est ABC circuli. Similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquàm in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur, in ea ciculi erit centrum; quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XX.

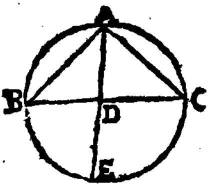
In circulo angulus, qui ad centrum, duplus est ejus, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC, ad cujus centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam verò BAC, & eandem circumferentiam BC, pro basi habeant, Dico BEC angulum, anguli B A C duplum esse. Jungatur enim A E, & ad F producatur. Itaque quoniam E A, est æqualis EB, erit & angulus EAB angulo EBA æqualis;

lis; (1) anguli igitur E A B, E B A, dupli sunt ipsius anguli E A B: sed angulus B E F est æqualis angulis E A B, E B A; (2) ergo B E F angulus, anguli E A B est duplus. Eadem ratione, & angulus F E C duplus est ipsius E A C; totus igitur B E C, totius B A C duplus erit. Rursus inflectatur, & sit alter angulus B D C, junctaque D E, ad G producatur. Similiter ostendemus angulum G E C, anguli E D C, duplum esse; quorum G E B duplus est ipsius E D B: ergo reliquus B E C, reliqui B D C est duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus est ejus, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habeant, quod oportebat demonstrare.



(1) 5. primi. (2) 32. primi.

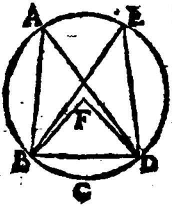


Vera est hac propositio etiam si nullus ad centrum angulus fiat; quod tunc demum fit, quando segmentum, in quo est angulus ad peripheriam, semicirculo non est majus, sed aut æquale, aut minus. Sic si segmentum B A C sit semicirculus, aut semicirculo minus, in quo sit angulus B A C. Dico angulum B A C dimidium esse spatii ex angulis B D E, C D E compositi, sive potius angulorum omnium, qui in centro D fieri possunt. Ducta enim recta A E per centrum D, erit tàm angulus B D E ad centrum duplus anguli B A E ad circumferentiam, quàm angulus C D E etiam ad centrum duplus ipsius C A E ad circumferentiam; ut patet ex hac propositione. Ergo totum spatium ex angulis B D E, C D E compositum, sive potius ipsi anguli B D E, C D E, qui fiunt ad centrum D dupli sunt anguli B A C ad peripheriam.

THEO-

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt.



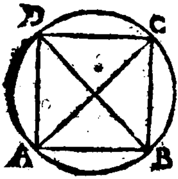
SIt circulus ABCDE, & in eadem portione BAED sint anguli BAD, BED. Dico eos inter se æquales esse. Sumatur enim circuli ABCDE centrum, quod sit F: junganturque BF, FD. Et quoniam angulus quidem BFD, est ad centrum, angulus verò BAD ad circumferentiam, & circumferentiam eandem pro basi habent BCD; erit BFD angulus, anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. Ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. in circulo igitur qui in eadem portione sunt anguli, inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

Quamquam demonstratio hujus propositionis ad eos angulos applicetur, qui sunt in segmento circuli semicirculo majori, generalis tamen est, docetque de quibuscumque angulis, qui sunt in eodem segmento, sive majori, sive minori, aut æquali semicirculo, eos inter se æquales esse; adeo ut non ad alias sit recurrendum demonstrationes, ut veritas hujus propositionis pateat etiam in angulis, qui sunt in segmento circuli minori, quàm semicirculus, ut à nonnullis interpretibus factum video. Quum enim omnis angulus ad peripheriam (sit is in segmento majori, aut minori, quam semicirculus) semper dimidius sit anguli, sive angulorum ad centrum, ut in antecedente demonstratum est, liquet si plures sint anguli ad peripheriam in eodem segmento, eos esse inter se æquales.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXII.

Quadrilaterorum, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

SIt circulus ABCD, & in ipso quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur AC, BD. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, (1) erunt trianguli ABC, tres anguli CAB, ABC, BCA, æquales duobus rectis. Sed angulus CAB est æqualis angulo



BDC, in eadem enim sunt portione BADC; & angulus ACB æqualis ipsi ADB, quod sint in eadem ADCB portione; totus igitur angulus ADC angulis BAC, ACB est æqualis; communis apponatur ABC angulus, duobus angulis, qui sunt ad A, & C, & seorsum uni angulo, qui est ad D; erunt anguli ABC, BAC, ACB angulis ABC, ADC æquales. Sed ABC, BAC, ACB, sunt æquales duobus rectis; ergo, & anguli ABC, ADC duobus rectis æquales erunt. Similiter ostendemus, angulos quoq; BAD, DCB, duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

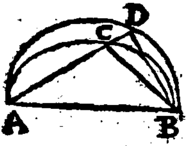
COROLLARIUM.

Circa figuras ergo quadrilateras, quarum anguli, qui ex adverso, duobus rectis majores, vel minores sunt, circulus describi nequit, inter quas est Rhombus, &c.

(1) 32. primi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXIII.

In eadem recta linea duæ circulorum portiones similes, & inæquales ex eadem parte non constituentur.



Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB, duæ circulorum portiones similes, & inæquales constituantur ex eadem parte ACB, ADB, ducaturq; ACD, & CB, BD jungantur. Itaque quoniam portio ACB similis est portioni ADB; similes autem circulorum portiones sunt, quæ angulos suscipiunt æquales; (1) erit ACB angu-

(1) Def. 11. hujus.

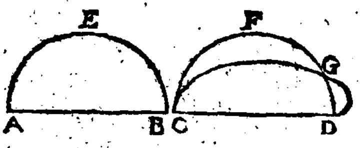
gulus æqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales ex eadem parte conſtituentur. Quod demonſtrare oportebat.

Si quis ſupponeret, duas portiones ACB, ADB non ita conſtitui, ut una intra aliam cadat (ut eſt expreſſum in figura huius propoſitionis) ſed earum alteram partim intra, partim extra eſſe, (ut in figura propoſitionis ſequentis) etiam ſequeretur idem abſurdum: nam ducta ACD, quæ ſecat utramque peripheriam, & ductis à C, D punctis ad punctum B rectis CB, DB, demonſtrabimus angulum ACB æqualem eſſe angulo ADB.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIV.

In æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones inter ſe æquales ſunt.

Sint enim in æqualibus rectis lineis AB, CD, ſimiles circulorum portiones AEB, CFD. Dico portionem AEB portioni CFD æqualem eſſe. Superimpoſita enim AEB portione portioni CFD, & poſito puncto quidem



A in C, recta verò linea AB in CD, congruet & B punctum puncto D, proptereà quod AB ipſi CD ſit æqualis; congruente autem recta linea AB rectæ CD, congruet & AEB portio portioni CFD. Si enim AB congruet ipſi CD, portio autem AEB portioni CFD non congruet, ſed permutabitur, ut CGD, circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis ſecabit: etenim circulus CGD circulum CFD ſecat in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in punctis C, G, D, quod rurſus fieri non poteſt. Non igitur congruente recta linea AB rectæ CD, non congruet, & AEB portio, portioni CFD; quare congruet, & ipſi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis

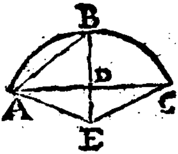
E 2 lineis

lineis similes circulorum portiones inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

Si quis hic opponeret, fieri posse, ut portionibus una alteri superimpositis non ita cadant, ut una earum partim intra, partim extra incidat, sed tota aut extra, aut intra sit: (ut in figura praecedentis propositionis) Respondetur ex hac hypothesi sequi, duas esse posse super eandem rectam, & ad easdem partes similes circulorum portiones, inaequales tamen inter se; quod est contra praecedentem propositionem.

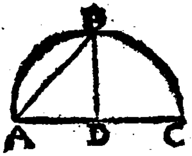
PROBLEMA III. PROPOSITIO XXV.

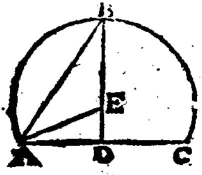
Circuli portione data describere circulum, cujus ea portio est.



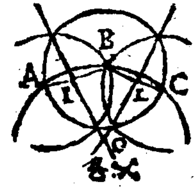
Sit data circuli portio ABC, itaque oportet portionis ABC describere circulum, cujus est portio. Secetur AC, bifariam in D: & à puncto D, ipsi AC, ad rectos angulos ducatur DB, & AB, jungatur; vel igitur angulus ABD, major est angulo BAD, vel minor, vel ipsi æqualis. Sit primum major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A, constituatur angulus BAE, æqualis angulo ABD: (1) & BD, ad E producatur, jungaturque EC. Quoniam igitur angulus ABE est æqualis angulo BAE, erit & BE recta lineæ ipsi EA æqualis; (2) & quoniam AD est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD, DE, duabus CD, DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE, æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est; ergo & basis AE basi EC est æqualis. Sed ostensa est AE, æqualis EB; quare & BE ipsi EC, est æqualis, ac proptereà tres rectæ lineæ AE, EB, EC, inter se æquales sunt; centro igitur E, intervallo autem una ipsarum AE, EB, EC, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & circulus descriptus erit. Quare circuli portione data descriptus est circulus, cujus ea portio est. Sed & illud constat, portionem ABC, semicirculo minorem esse; proptereà quod centrum ipsius extra cadit. Similiter & si

(1) 23. primi. (2) 6. primi.





& si angulus ABD sit æqualis angulo B A D, erit recta AD rectæ BD æqualis. (1) Sed recta AD est æqualis ipsi D C; bifariam enim divisa est ipsa AC. Tres ergo DA, DB, DC inter se æquales sunt; ac proinde D erit centrum circuli, & portio A B C semicirculus. Si verò angulus A B D minor sit angulo B A D, constituatur ad rectam lineam B A, & ad punctum in ea datum A, angulo A B D æqualis angulus BAE; Et intra portionem ABC erit centrum, & quidem in puncto E, ut patet si ducatur à puncto E ad punctum C recta EC, quia ostendetur, ut in prima parte, tres rectas EA, EB, EC, inter se esse æquales; & erit portio ABC semicirculo major. Circuli igitur portione data, descriptus est circulus, cujus portio est; quod facere oportebat.



Expeditiùs perfici potest circulus, cujus portio A B C data est hoc modo. Sumantur in portionis circumferentia quæcumque tria puncta A, B, C, quæ connectantur rectis A B, B C; & hæ bifariam dividantur in punctis I, & L; ex quibus ad rectos angulos ipsis AB, BC erigantur duæ IX, IZ, quæ quidem se se secabunt in puncto O, quod erit centrum circuli, cujus est portio ABC. Nam quum anguli ad I, & L sint recti, si à puncto I, ad punctum L intelligatur ducta recta I L, erunt anguli OIL, OLI minores duobus rectis, ac proinde duæ IX, IZ in aliquo puncto O convenire debent, quod quidem punctum O centrum erit circuli; cujus est portio ABC, quia ex coroll. prop. primæ hujus libri centrum esse debet in utraque ipsarum IX, IZ, quare in puncto ipsis commune O, & centro invento non est difficile circulum perficere.

Praxis. Ex hac constructione perfacilis habetur praxis ad

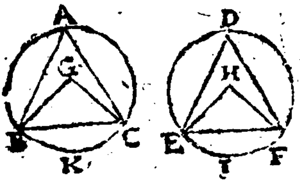
E 3

(1) 6. lib. primi.

ad inveniendum centrum circuli, cujus portio data est, quo invento, ipse circulus perficitur. Centro B sumto in arcu describe circulum, eodem intervallo, aliis in arcu centris describe duos alios circulos, qui singuli priorem bis secant. Per intersectiones ductæ rectæ sibi mutuò occurrentes in O dabunt centrum.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sivè ad centra, sivè ad circumferentias insistant.



Sint equales circuli ABC, DEF, & in ipsis equales anguli ad centra quidē BGC, EHF, ad circumferentias verò BAC, EDF. Dico B K C circumferentiam, circumferentiæ ELF, æqualem esse. Jungantur enim BC, EF. Et quoniam æquales sunt ABC, DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales; duæ igitur BG, GC, duabus EH, HF, æquales sunt; & angulus ad G, æqualis angulo ad H; ergo & basis BC basi EF est æqualis. (1) Rursus quoniam æqualis est angulus ad A, angulo ad D, portio BAC similis erit portioni EDF: (2) & sunt in æqualibus rectis lineis BC, EF; quæ autem in æqualibus rectis lineis similes sunt circulorum portiones, inter se æquales sunt; (3) portio igitur BAC portioni EDF est æqualis. Sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF; ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis sivè ad centra, sivè ad circumferentias insistant; quod oportebat demonstrare.

Eadem prorsus est demonstratio si supponantur anguli, A, D, ad circumferentias æquales inter se: iis enim æqualibus, sunt æquales quoque anguli ad centra, ut colligitur ex prop. 20. hujus libri.

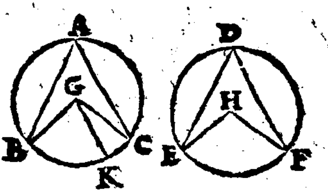
THEO-

(1) 4. primi. (2) Def. 11. hujus. (3) 24. hujus.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXVII.

In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis, inter se æquales sunt, sivè ad centra, sivè ad circumferentias insistunt.

IN æqualibus enim circulis A B C, DEF, æqualibus circumferentiis BC, EF, insistant anguli ad centra quidem B G C, E H F, ad circumferentias verò BAC, EDF. Dico angulum BGC angulo EHF, & angulum



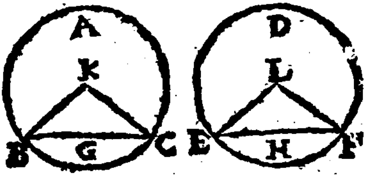
B A C angulo E D F, æqualem esse. Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF; manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem. Sin minus, unus ipsorum est major; sit major BGC, & constituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipsa G, angulo EHF, æqualis angulus BGK; (1) æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint. (2) Ergo circumferentia BK, æqualis est circumferentiæ EF. Sed circumferentia EF, æqualis est ipsi BC; ergo, & BK, ipsi BC, est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur inæqualis est angulus BGC, angulo EHF; ergo est æqualis. Atque est anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A: anguli verò EHF, dimidius qui ad D; angulus igitur qui ad A, angulo qui ad D, est æqualis. In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sivè ad centra, sivè ad circumferentias insistant; quod oportebat demonstrare.

(1) 23.primi. (2) Ex antecedente.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVIII.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori.

Sint æquales circuli ABC, DEF; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC, EF, quæ circumferentias quidem BAC, EDF majores auferant, circumferentias verò BGC, EHF minores. Dico circumferentiam BAC



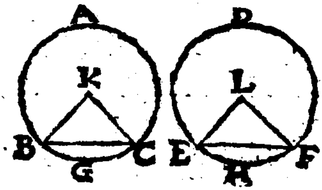
majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. Sumantur enim centra circulorum K, L, (1) junganturque BK, KC, EL, LF. Et quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales: (2) duæ igitur BK, KC sunt æquales duabus EL, LF: & basis BC æqualis est basi EF; ergo angulus BKC angulo ELF est æqualis. (3) Æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, (4) quando ad centra fuerint; quare circumferentia BGC, æqualis est circumferentiæ EHF. Sed, & totus ABC circulus, toti DEF est æqualis; reliqua igitur circumferentia BAC, reliquæ EDF, æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori; quod demonstrare oportebat.

THEO-

(1) 1.hujus. (2) Def.1.hujus. (3) 8.primi.
(4) 26.hujus.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXIX.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

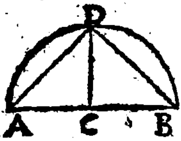


Sint æquales circuli ABC, DEF, & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC, EHF, & BC, EF, jungantur. Dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. Sumantur enim centra circulorum K, L, (1) & junguntur BK, KC, EL, LF. Quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit & angulus BKC angulo ELF æqualis (2) Et quoniam circuli ABC, DEF sunt æquales, & quæ ex centris erunt æquales; duæ igitur BK, KC sunt æquales duabus EL, LF, & æquales angulos continent; quare basis BC basi EF, est æqualis. (4) In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

(1) pri. hujus. (2) 27. hujus. (3) Def. 1. huj. (4) 4 primi.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO XXX.

Datam circumferentiam bifariam secare.



Sit data circumferentia ADB: oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Jungatur AB, & in C bifariam secetur: (1) à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD; & junganeur AD, DB. Quoniam igitur AC est æqualis CB, communis autem CD, duæ AC, CD duabus BC, CD æquales sunt: & angulus ACD æqualis angulo BCD, se-

(1) 10. primi.

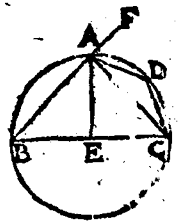
ctus enim uterque est: ergo basis AD basi DB est æqualis: (2) æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori; (3) & est utraque ipsarum AD, DB, circumferentiarum semicirculo minor; quare circumferentia AD, circumferentiæ DB æqualis erit; data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.

Praxis. Eadem prorsus hic sunt facienda, quæ docuimus in prop 10. libri primi pro divisione lineæ rectæ bifariam.

(2) 4. primi. (3) 28. hujus.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXXI.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui verò in majori portione, minor est recto, & qui in minori, major recto; & insuper majoris quidem portionis angulus recto major est, minoris verò portionis angulus recto minor.



SIt circulus ABCD, cujus diameter BC, centrum autem E; & jungantur BA, AC, AD, DC. Dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAC, rectum esse, qui verò in portione ABC, majore semicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, & qui in portione ADC, minore semicirculo, hoc est angulum ADC, recto majorem. Jungatur AE, & BA ad F producatur. Itaq; quoniam BE est æqualis EA, erit & angulus EAB, angulo EBA, æqualis. (1) Rursus quoniam AE est æqualis EC, & angulus ACE, angulo CAE, æqualis erit; totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC, ACB, angulis; est autem & angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC, ACB æqualis; (2) angulus igitur BAC est æqualis angulo FAC; ac propterea uterque ipsorum rectus. (3) Quare in semicirculo BAC angulus BAC, rectus est. Et quoniam trianguli ABC duo anguli

(1) 5. primi. (2) 32. primi. (3) Def. 10. primi.

li ABC, BAC duobus rectis sunt minores, (4) rectus autem BAC: erit ABC angulus recto minor, atque est in portione ABC majore semicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum sit ABCD: quadrilaterorum verò, qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sunt æquales: (5) erunt ABC, ADC anguli æquales duobus rectis; & angulus ABC minor est recto; reliquus igitur ADC recto major erit, atque est in portione ADC, minore semicirculo. Dico prætereà majoris portionis angulum, qui continetur ABC circumferentiâ, & recta linea AC recto majorem esse; angulum verò minoris portionis, contentum circumferentia ADC, & recta linea AC recto minorem; quod quidem perspicuè apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis BA, AC, continetur, rectus est, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC, recto major: Kursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA, AF rectus est, erit, qui continetur recta linea CA, & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo rectus est, qui verò in majori portione minor est recto, & qui in minori major recto; & insuper majoris quidem portionis angulus recto major est: minoris verò recto minor. Quod demonstrare oportebat.

(4) 17. primi. (5) 22. hujus.

ALITER.

Demonstrabitur angulum BAC rectum esse. Quoniam enim angulus AEC, duplus est anguli BAE, etenim duobus interioribus, & oppositis est æqualis: est autem & AEB duplus ipsius EAC: anguli AEB, AEC anguli BAC dupli erunt. Sed & AEB, AEC anguli duobus rectis sunt æquales; ergo angulus BAC rectus est; quod demonstrare oportebat.

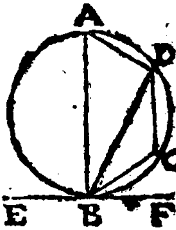
Clariùs, quàm hic, ex iis, quæ docuimus in scholio prop. 16. hujus libri, deducitur, angulum majoris segmenti recto majorem, & angulum minoris segmenti eodem esse minorem. Si enim ex puncto A tangens ad circulum ABCD ducatur, producaturque ex utraque parte, vel clarissimè cognoscitur, angulum factum à recta AC, & à tangente in puncto A ad partes B, ad quem reducitur angulus majoris segmenti, contentus nempe recta AC, & peripheria AB,

obtu-

obtusum esse, quippe qui angulo recto facto à radio E A, & à tangente, major. Et è contra cognoscitur quoque, angulum factum ab eadem recta C A, & eadem tangente, ad partes autem D, ad quem reducitur angulus minoris segmenti, contentus scilicet recta C A, & peripheria A D C, acutum esse, quippe qui angulo recto facto à radio E A, & eadem tangente ad partes D, minor est.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXXII.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans: anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt.



Circulum enim ABCD, contingat quædam recta linea E F, in B, & à puncto B, ad circulum ABCD, ducatur recta linea B D, ipsum utcumque secans. Dico angulos, quos BD cum EF contingente facit, æquales esse iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt, hoc est angulum FBD, esse æqualem angulo, qui constituitur in D A B portione, videlicet ipsi DAB; angulum verò EBD, æqualem angulo DCB, qui in portione DCB, constituitur. Ducatur enim à puncto B, ipsi EF, ad rectos angulos BA: (1) & in circumferentia BD, sumatur quodvis punctum C; junganturque AD, DC, CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA; erit in ipsa BA centrum ABCD circuli: (2) quare BA ejusdem circuli diameter est, & angulus ADB in semicirculo est rectus; (3) reliqui igitur anguli BAD, ABD, uni recto æquales sunt. (4) Sed & ABF est rectus; ergo angulus ABF æqualis est angulis BAD, ABD; communis auferatur ABD; reliquus igitur DBF et, qui in alterna circuli portione consistit,

(1) 11. primi. (2) 19. huj. (3) Ex antecedente. (4) 32. primi.

sistit, videlicet angulo BAD, est æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli ejus oppositi æquales sunt duobus rectis; (5) erunt DBF, DBE anguli angulis BAD, BCD æquales; quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF; ergo reliquus DBE, qui in alterna circuli portione DCB constituitur, videlicet ipsi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu verò in circulum ducatur recta linea ipsum secans, anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus consistunt. Quod oportebat demonstrare.

Omittit quidem Euclides casum, in quo secans A B transit per centrum, sed is est manifestissimus, nam anguli, quos secans A B facit ad tangentem, sunt ambo recti, ac proinde æquales angulis, qui sunt in alternis segmentis, hoc est in semicirculis.

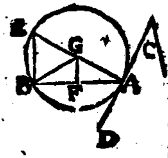
(5) 22. hujus.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XXXIII.

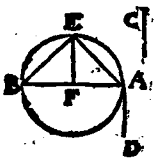
In data recta linea describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus, qui ad C; itaque oportet in data recta linea AB, describere portionem circuli, quæ suscipiat angulum æqualem angulo, qui est ad C. Vel igitur angulus ad C, acutus est, vel rectus, vel obtusus. Sit primum acutus, ut in prima figura, & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD, angulo, qui est ad C, æqualis: (1) acutus igitur angulus est BAD: & à puncto A, ipsi AD, ad rectos angulos ducatur AE; (2) secetur autem AB bifariam in F, (3) atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos

(1) 23 primi. (2) 10 primi. (3) 11 primi.

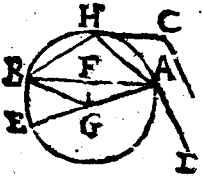


los ipsi AB; & GB jungatur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FG, duæ AF, FG, duabus BF, FG, æquales sunt: & angulus AFG, æqualis angulo GFB: ergo basis AG, basi GB, est æqualis. (4) Itaque centro G, intervallo autem AG, circulus descriptus transibit etiam per B: describatur, & sit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AE, & à puncto A, ipsi AE, ad rectos angulos ducta est AD: ipsa AD circulum continget. (5) Et quoniam circulum ABE, contingit quædam recta linea AD, & à contactu, qui est ad A in circulum ABE, ducta est recta linea AB: erit angulus DAB æqualis angulo, qui in alterna circuli portione construitur, (6) videlicet ipsi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C, est æqualis; ergo, & angulus ad C, angulo AEB, æqualis erit. In data igitur recta linea AB, portio circuli descripta est AEB, suscipiens angulum AEB, dato angulo, qui ad C, æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C, rectus, &



oporteat rursus in recta linea AB describere circuli portionem, quæ suscipiat angulum æqualem recto angulo, qui est ad C. Constituatur enim rursus angulo recto, qui ad C, æqualis angulus BAD, (7) ut in secunda figura, seceturque AB, bifariam in G, & centro F, intervallo autem alterutra ipsarum AF, FB, circulus describatur AEB; ergo AD recta linea circulum ABE contingit, (8) propterea quod rectus est, qui ad A, angulus, & angulus BAD, æqualis angulo, qui est in portione AEB: rectus enim & ipse est, in semicirculo consistens; sed BAD, æqualis est ei, qui ad C. Ergo & quod in portione AEB est, qui ad C, est æqualis; descripta igitur est rursus in AB recta linea portio circuli AEB, suscipiens angulum angulo recto, qui ad C, æqualem. Denique sit angulus ad C; obtusus, & ad rectam lineam AB, & ad punctum A, constituatur ipsi æqualis angulus BAD, ut habetur in ter-

(4) 4. primi. (5) Corol. 16 hujus. (6) Ex antecedente. (7) 23. primi. (8) Corol. 16 hujus.

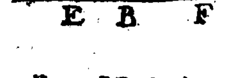


tertia figura, & ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos ducatur AE, seceturque rursus AB, bifariam in F; ipsi verò AB, ducatur ad rectos angulos FG, & GB jungatur. Et quoniam AF est æqualis FB; communis autem FG; duæ AF, FG, duabus, BF, FG, æquales sunt; & angulus AFG, angulo BFG æqualis; basis igitur AG, est æqualis basi GB. (9) Quare centro G intervallo autem AG, circulus descriptus etiam per B transibit; transeat, ut AEB. Et quoniam diametro AE, ab extremitate ad rectos angulos ducta est AD; ipsa AD circulum AEB continget: (10) & à contactu, qui ad A, ducta est AB; quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB, constituitur, est æqualis. Sed BAD angulus æqualis est angulo, qui ad C; angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C, æqualis erit. Ergo in data recta linea AB, descripta est AHB circuli portio, suscipiens angulum æqualem ei, qui est ad C. Quod facere oportebat.

(9) 4 primi. (10) Corol. 15 hujus.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo portionem abscindere, quæ suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



SIt datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus, qui ad D; oportet à circulo ABC portionem abscindere, quæ suscipiat angulum angulo, qui ad D, æqualem. Ducatur recta linea EF, circulum ABC in puncto B contingens: (1) & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, constituatur angu-

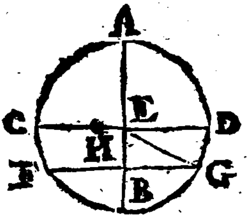
(1) 17 hujus.

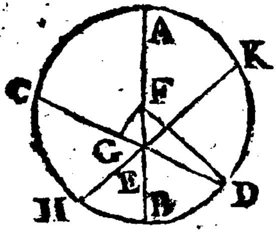
angulus FBC angulo, qui est ad D, æqualis. (2) Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, & à contactu B ducta est BC, erit angulus FBC, æqualis ei, qui in alterna circuli portione constituitur. Sed FBC angulus, angulo, qui ad D, est æqualis; ergo & angulus, qui in portione BAC, angulo, qui ad D, æqualis erit. A dato igitur circulo BAC, abscissa est portio quædam BAC, suscipiens angulum dato angulo rectilineo, qui est ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

(2) 32 primi.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuò secent, rectangulum partionibus unius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur.





IN circulo ACBD duæ rectæ lineæ AB, CD se se mutuo secent in puncto E. Dico rectangulum contentum partibus unius AE, EB rectangulo contento partibus alterius CE, ED æquale esse. Aut enim utraque linea transit per centrũ, aut una tantum, aut neutra. Transeat primò utraque recta AB, CD per centrum E. (ut in prima figura.) Quoniam igitur quatuor segmenta omnia inter se sunt æqualia, perspicuũ est rectangulũ AE, EB partibus unius contentum esse æquale rectangulo CE, CE, ED, quod partibus alterius comprehenditur.

Transeat deinde una tantum earum AB per centrum; dividatque primum aliam FG quæ non transit per centrum, bifariam, ac proinde ad angulos rectos, (ut in eadem prima figura) (1) & conjungatur EG. Quoniam igitur recta AB in partes æquales dividitur in E, & in partes inæquales in H, erit rectangulum partibus inæqualibus AH, HB, contentum, una cum quadrato rectæ EH, æquale quadrato rectæ EB; (2) ideoque quadrato rectæ EG, æquales enim sunt rectæ EB, EG. Sed quadratum rectæ EG æquale est quadratis rectarum EH, HG, quia angulus EHG est rectus. (3) Ergo rectangulum quod AH, HB comprehenditur una cum quadrato rectæ EH æquale est quadratis rectarum EH, HG. Commune auferatur quadratum rectæ EH. Rectangulum igitur AH, HB partibus unius AB contentum æquale est quadrato rectæ HG, hoc est rectangulo FH, HG, contento nempe ex partibus alterius FG.

Dividat jam recta AB transiens per centrum F rectam CD non transeuntem per centrum non bifariam in puncto E: (ut in secunda figura) secetur itaque ipsa CD bifariam in puncto G (4), & conjungantur FG, FD, eritque FG perpendicularis ipsi CD. (5) Quoniam rectangulum AE, EB una cum quadrato FE æquale est quadrato ex FB (6) hoc est quadrato ex FD. Est autem quadratum ex FE æquale quadratis ex rectis FG, GE; & quadratum ex FD quadratis ex rectis FG, GD. (7) Rectangulum igitur quod continetur ipsis AE, EB una cum quadratis ex rectis FG, GE æquale erit quadratis rectarum FG, GD. Commune auferatur quadratum ex FG; erit rectangulum ex ipsis AE, EB una cum quadrato ex GE æquale quadrato ex GD. Atqui etiam rectangulum, quod continetur rectis CE, ED una cum eodem quadrato rectæ GE æquale est eidem quadrato GD (8) Ergo rectangulum AE, EB una cum quadrato rectæ GE æquale est rectangulo CE, ED una cum eodem quadrato rectæ GE. Quare demto communi quadrato rectæ GE; erit rectangulum, quod AE, EB partibus nempe unius AB comprehenditur, æquale rectangulo, quod continetur ipsis CE, ED partibus scilicet alterius.

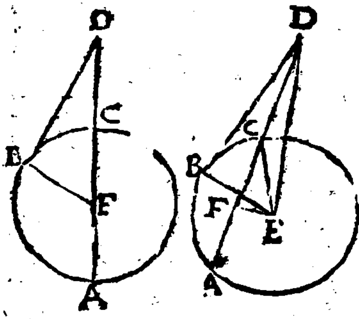
De-

(1) 3. hujus. (2) 5. lib. secundi. (3) 47. primi. (4) 10. lib. primi. (5) 3. hujus. (6) 5. lib. secundi. (7) 47. primi. (8) 5. lib. secundi.

Denique neutra earum CD, HK (ut in secunda figura) per centrum transeat: ducatur per centrum F, & punctum sectionis E recta AB. Quoniam itaque ostensum est rectangulum contentum CE, ED rectangulo contento AE, EB æquale esse; itemque rectangulum, quod comprehenditur ipsis HE, EK eidem rectangulo contento AE, EB, esse æquale, quum recta linea HK non bifariam dividatur à recta AB, quæ transit per centrum; Erit rectangulum, quod CE, ED partibus unius CD continetur, æquale rectangulo, quod HE, EK partibus alterius HK comprehenditur. Si igitur in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuò secent, rectangulum portionibus unius contentum æquale est ei, quod alterius portionibus continetur, id, quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXVI.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò contingat; rectangulum, quod tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei, quod à contingente fit, quadrato.



Extra circulum enim ABC, sumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB: & DCA, quidem circulum ABC secet; DB verò contingat. Dico rectangulum ADC, quadrato, quod fit ex DB, æquale esse. Vel igitur DCA, per centrum transit, vel non. Transeat primum per centrum circuli ABC, quod sit F, & FB jungatur; erit

erit angulus FBD, rectus. (1) Itaque quoniam recta linea AC, bifariam secta est in F, & ipsi adjicitur CD, rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex FC, æquale erit ei, quod fit ex FD, quadrato: (2) æqualis autem est CF, ipsi FB: ergo rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex FB, æquale est quadrato ex FD. Sed quadratum ex FD, est æquale quadratis ipsarum FB, BD, rectus enim angulus est FBD; rectangulum igitur ADC, una cum quadrato ex FB, æquale est ipsarum FB, BD, quadratis. Commune auferatur quadratum, quod ex FB; ergo reliquum ADC rectangulum quadrato, quod fit à contingente DB, æquale erit. Sed DCA, non transeat per centrum ABC circuli sumaturque centrum E, & ab ipso E, ad AC, perpendicularis agatur EF, & jungantur EB, EC, ED, rectus igitur est EFD angulus. Et quoniam recta linea quædam EF, per centrum ducta, rectam lineam quandam AC, non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit; (3) quare AF, ipsi FC, est æqualis. Rursus quoniam recta linea AC, bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum ADC, una cum quadrato ex FC, æquale quadrato, quod ex FD; (4) commune apponatur, quod ex FE quadratum; rectangulum igitur ADC, una cum quadratis ex CF, FE, est æquale quadratis ex DF, FE; sed quadratis quidem ex DF, FE, æquale est, quod ex DE quadratum, etenim rectus est angulus EFD: quadratis verò ex CF, FE æquale est quadratum ex CE; ergo rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex CE, est æquale quadrato ex ED: æqualis autem est CE, ipsi EB; rectangulum igitur ADC, una cum quadrato ex EB, æquale est ei, quod ex ED quadrato; sed quadrato ex ED, æqualia sunt quadrata ex EB, BD: si quidem rectus est angulus EBD; ergo rectangulum ADC, una cum quadrato ex EB; æquale est eis, quæ ex EB, BD, quadratis; commune auferatur quadratum ex EB; reliquum igitur ADC rectangulum, quadrato, quod fit ex DB, æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, & quæ deinceps sunt. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIA.

1. *Si igitur à puncto quopiam extra circulum plures rectæ lineæ circulum secantes ducantur, rectangula, quæ totis lineis,*

(1) 18. hujus. (2) 6. secundi. (3) 3. hujus. (4) 6. secundi.

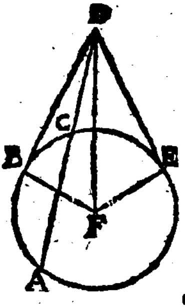
neis, & earundem partibus, quæ inter assumtum punctum, & circulum intercipiuntur, continentur, æqualia erunt inter se. Singula enim æqualia sunt quadrato tangentis, quæ à prædicto puncto, ad circulum ducitur.

2 *Duæ rectæ ab eodem puncto ductæ circulum tangentes æquales sunt inter se. Earundem enim quadrata singula æqualia sunt rectangulo, quod continetur ex tota secante ab eodem puncto ducta, & ejusdem parte inter dictum punctum, & circulum intercepta.*

3 *Ab eodem puncto ad eundem circulum non plures, quam duæ tangentes duci possunt. Si enim plures quam duæ tangentes, exempli gratia, tres ab eodem puncto ad eundem circulum duci possent, omnes ex vi hujus propositionis inter se essent æquales; ac proinde ex puncto extra circulum plures, quàm duæ rectæ in circuli peripheriam cadere possent inter se æquales, quod est contra propositionem 8. hujus libri.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXVII.

Si extra circulum sumatur, aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò incidat, sit autem quod tota secante, & exterius assumta inter punctum, & curvam circumferentiam, continetur rectangulum æquale ei, quod ab incidente fit quadrato, incidens linea circulum continget.



Extra circulum enim ABC, sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ DCA, DB; DCA, quidem circulum secet, DB verò incidat, sitque rectangulum ADC æquale quadrato, quod fit ex DB. Dico ipsam DB, circulum ABC, contingere. Ducatur enim recta linea DE, contingens circulum ABC, & sumatur circuli ABC centrum, quod sit F, junganturque FE, FB, FD; ergo angulus FED, rectus est. (1) Et quoniam DE, circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum ADC, æquale erit quadrato, quod ex DE; sed re-

(1) 18. hujus.

rectangulum ADC, ponitur æquale quadrato, quod ex DB; quadratum igitur, quod ex DE, quadrato ex DB, æquale erit; ac propterea linea DE, ipsi DB æqualis; est autem, & FE, æqualis FB; duæ igitur DE, EF, duabus DB, BF, æquales sunt; & basis ipsarum communis FD; angulus igitur DEF, est æqualis angulo DBF; (2) rectus autem DEF; ergo, & DBF est rectus; atque est FB, producta diameter; quæ verò ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit; ergo DB circulum ABC contingat necesse est. Similiter demonstrabitur, & si centrum sit in ipsa AC. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, & reliqua; quod demonstrare oportebat.

COROLLARIUM.

Si igitur duæ rectæ inter se æquales ex puncto quopiam extra circulum in circuli circumferentiam cadant, quarum una sit tangens, & reliqua quoque erit tangens; patet ex demonstratione hujus prop.

---

(2) 8.primi.

FINIS LIBRI TERTII.

EU-

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER QUARTUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DEFINITIONES.

1 Figura rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ deſcriptæ angulus unumquodque latus ejus, in qua deſcribitur, contingit.

2 Figura ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ unumquemque *angulum ejus*, circa quam deſcribitur, contingit.

3 Figura *rectilinea* in *circulo* deſcribi dicitur, quando unuſquiſque deſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

4 Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcriptæ circuli circumferentiam contingit.

5 Circulus ſimiliter in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus, ejus, in qua deſcribitur contingit.

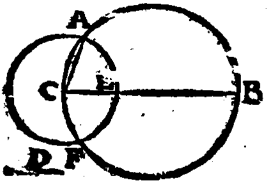
6 Circulus circa figuram rectilineam *deſcribi dicitur*, quando circuli circumferentia unumquemque angulum *ejus*, circa quam *deſcribitur, contingit*.

7 Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema ad circuli circumferentiam ſe applicant.

PRO-

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In dato circulo data recta linea, quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.



SIt datus circulus ABC, data autem recta linea non major circuli diametro D; oportet in circulo ABC, rectæ lineæ D, æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC, diameter BC. Si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D, factum jam erit, quod proponebatur; etenim in circulo ABC, aptata est BC, rectæ lineæ D, æqualis. Sin minus, major est BC, quam D, ponaturque ipsi D, æqualis CE: & centro quidem C, intervallo autem CE, circulus describatur AEF: & CA jungatur. Itaq; quoniam punctum C centrum est AEF circuli, erit CA, ipsi CE æqualis. Sed D est æqualis CE, ergo, & D, ipsi AC, æqualis erit. In dato igitur circulo ABC, datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata est AC; quod facere oportebat.

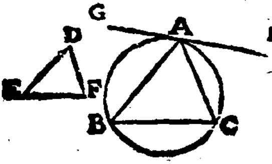
Recta D, cui æqualis in dato circulo ABC applicari debet, major ejusdem circuli diametro esse non potest, quia omnium linearum, quæ in circulo applicari possunt, maxima est, quæ transit per centrum, sive diameter, ut patet ex prop. 15. lib. 3.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

SIt datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet in ABC circulo describere triangulum triangulo DEF, æquiangulum. Ducatur recta linea GAH, contingens circulum ABC, in puncto A: (1) & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo

(1) 17. tertii.

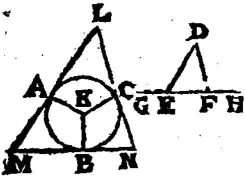


lo DEF, æqualis angulus constituatur HAC. (2) Rursus ad rectam lineam AG, & ad punctum in ipsa A, angulo DFE, æqualis constituatur angulus GAB; & BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta est AC: erit HAC, angulus *æqualis ei*, qui in alterna circuli portione consistit, (3) videlicet ipsi ABC. Sed HAC, angulus æqualis est angulo DEF. Ergo, & angulus ABC, angulo DEF, est æqualis. Eadem ratione, & angulus ACB, est æqualis angulo DFE; reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF, æqualis erit. Ergo *triangulum* ABC, *triangulo* DEF est æquiangulum; & descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum *triangulum descriptum est*; quod facere oportebat.

(2) 23. primi. (3) 32. tertii.

PROBLEMA III. PROPOSITIO III.

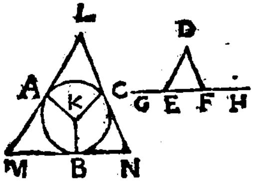
Circa datum circulum, triangulo dato æquiangulum triangulum describere.



SIt *datus circulus* ABC: datum autem triangulum DEF: Oportet circa circulum ABC, describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta H, G, & sumatur circuli ABC, centrum K: & recta linea KB utcumque ducatur: constituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG, æqualis angulus BKA: (1) angulo autem DFH, æqualis angulus BKC, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ LAM, MBN,

(1) 23. primi.

MBN, NCL, circulum ABC, contingentes. (2) Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM, MN, NL, in punctis A, B, C, à centro autem K, ad A, B, C, puncta ducuntur KA, KB, KC; erunt anguli ad puncta A, B, C recti. (3) Et quoniam quadrilateri A M B K anguli quatuor, quatuor rectis æquales sunt, etenim in duo triangula dividitur, quoniam anguli KAM, KBM sunt recti; erunt reliqui A K B, AMB, duob. rectis æquales. Sūt autem & DEG, DEF æquales duobus rectis; anguli igitur AKB, AMB, angulis D E G, DEF, æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG, est æqualis; ergo reliquus A M B reliquo D E F æqualis erit. Similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis; ergo & reliquus MLN est æqualis reliquo EDF. Æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF, & descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum, triangulo dato, æquiangulum triangulum descriptum est; quod facere oportebat.



(2) Cor.pr.15.17.tertii. (3) 18.tertii.

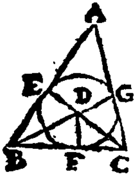
Omittit Euclides hic ostendere, tangentes NL, LM, MN concurrere in punctis L, M, N. At facillimè ostenditur hoc pacto. Quoniam anguli DEG, DEF, DFH, DFE sunt æquales quatuor rectis, (1) quorum duo DEF, DFE sunt duobus rectis minores, (2) Erunt reliqui DEG, DFH, duobus rectis majores. At DEG est æqualis BKA, & DFH angulo BKC; Ergo duo anguli BKA, BKC duobus rectis sunt majores. Ergo AKC duobus rectis est minor, quia omnes anguli circa punctum K sunt æquales quatuor rectis: (3) ac proinde si à puncto A ad punctum C intelligatur ducta recta linea AC, bacendet inter K, & L. Et quoniam anguli ad A, & C sunt recti, erunt ii, qui ab LC, & recta CA, atque ab LA, & eadem recta CA constituuntur duobus rectis minores; ac proinde dua CL, AL concurrunt ad partes L. (4) Similiter ostenditur concurrere & reliquas.

F PRO-

(1) 13.primi. (2) 17.primi. (3) coroll.4.prop.13.primi. (4) sch.prop.28.lib.primi.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO IV.

In dato triangulo circulum describere.



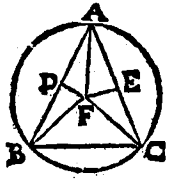
Sit datum triangulum ABC, oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur anguli A B C, BCA bifariam rectis lineis BD, CD, (1) quæ conveniant inter se in D puncto, & à puncto D, ad rectas lineas AB BC, CA, perpendiculares ducantur DE, DF, DG. (2) Et quoniam angulus A B D est æqualis angulo CBD, est autem & rectus FED recto B F D æqualis: erunt duo triangula E B D, DBF duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, & utrique commune BD, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur; ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, (3) atque erit D E æqualis D F; & eadem ratione D G, æqualis DF; ergo & DE, ipsi DG, est æqualis; tres igitur rectæ lineæ DE, DF, DG inter se æquales sunt; quare centro D, intervallo autem una ipsarum DE, DF, DG, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CA continget, propterea quòd recti sunt ad E, F, G anguli. Si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod est absurdum; (4) non igitur centro D, intervallo autem una ipsarum DE, DF, DG, circulus descriptus secabit rectas lineas AB, BC, CA, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC, circulus EFG, descriptus est; quod facere oportebat.

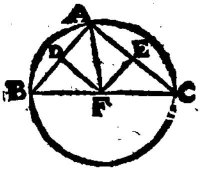
PRO-

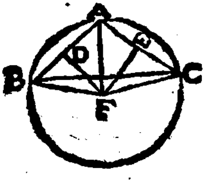
(1) 9. primi. (2) 12. primi. (3) 26. primi. (4) 16. tertii.

PROBLEMA V. PROPOSITIO V.

Circa datum triangulum circulum describere.







SIt datum triangulum A B C; oportet circa datum triangulum ABC, circulum describere. Secentur A B, A C bifariam in D, E punctis: (1) & à punctis D, E, ipsis AB, AC, ad rectos angulos ducantur DF, EF; (2) quæ quidem vel intra triangulum A B C convenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. Conveniant primum intra triangulum in puncto F: & BF, FC, FA, jungantur. Quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem, & ad rectos angulos DF; erit basis AF basi FB æqualis. (3) Similiter ostendetur & CF, æqualis F A; ergo & B F est æqualis FC; tres igitur FA, FB, FC, inter se æquales sunt; quare centro F, intervallo autem una ipsarum FA, FB, FC, circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum A B C; & describatur, ut ABC. Sed DF, E F conveniant in recta linea BC, in puncto F, ut habetur in secunda figura, & AF jungatur. Similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. Postremo DF, EF, conveniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF, FB, FC. Et quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem, & ad rectos angulos DF, basis AF, basi FB, æqualis erit. Similiter demonstrabimus, & CF, ipsi FA, æqualem esse; quare, & BF est æqualis F C. Rursus igitur centro F, intervallo autem una

F 2 ipsa-

(1) 10. primi. (2) 11. primi. (3) 4. primi.

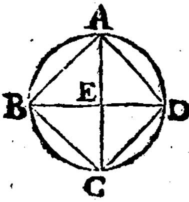
ipsarum FA, FB, FC, circulus descriptus, & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus; & describatur, ut ABG. Circa datũ igitur triangulum circulus descriptus est; quod facere oportebat.

Et manifestum est, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC, existentem in portione semicirculo majore minorem esse recto, quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quod fit in semicirculo, rectum esse, & quando extra BC, quòd sit in portione minore semicirculo, recto esse majorem. Quare, & quando datus angulus minor sit recto, DF, EF intra triangulum convenient; quando autem rectus in ipsa BC, & quando major recto, extra BC; quod ostendere oportebat.

Expeditissimè perficitur hoc problema, si ea fiant, quæ docuimus in prop. 25. lib. 3.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO VI.

In dato circulo quadratum describere.



SIt datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quadratũ describere. Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC, BD: & AB, BC, CD, DA, jungantur. Quoniam igitur BE est æqualis ED, etenim centrum est E, communis autem, & ad rectos angulos EA; erit basis BA æqualis basi AD. Et eadem ratione utraq; ipsarum BC, CD, utrique BA, AD, æqualis; æquilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico, & rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD, diameter est ABCD circuli, erit BAD semicirculus; quare angulus BAD rectus est. (1) Et eadem ratione unusquisq; ipsorum ABC, BCD, CDA est rectus; rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum; ostensum autem est, & æquilaterum esse; ergo quadratum necessariò erit, & descriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD, descriptum est; quod facere oportebat.

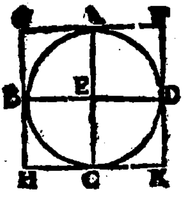
PRO-

---

(1) 31. tertii.

PROBLEMA VII. PROPOSITIO VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

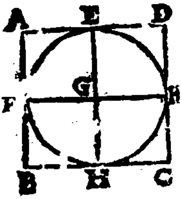


SIt datus circulus ABCD, oportet circa ABCD circulum quadratum describere. Ducantur circuli ABCD, duæ diametri AC, BD ad rectos inter se angulos, & per puncta A, B, C, D, ducantur circulum ABCD, contingentes FG, GH, HK, KF. (1) Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, à centro autem E, ad contactum, qui est ad A, ducitur EA: erunt anguli ad A recti. (2) Eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D, recti sunt. Et quoniam angulus AEB rectus est, est autem & rectus EBG; erit GH ipsi AC parallela. (3) Eadem ratione, & AC, parallela est FK; Similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum GF, HK ipsi BED parallelam esse; quare, & GF, est parallela HK; parallelogramma igitur sunt GK, GC, AK, FB, BK, ac propterea GF quidem est æqualis HK; GH verò ipsi FK. (4) Et quoniam AC, æqualis est BD: Sed AC quidem utrique ipsarum GH, FK est æqualis; BD verò æqualis utrique GF, HK, & utraque GH, FK, utrique GF, HK, æqualis erit. Æquilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico, & rectangulum esse. Quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, & ipse AGB rectus erit. Similiter demonstrabimus angulos etiam, qui ad puncta H, K, F. rectos esse; rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK: demonstratum autem est, & æquilaterum, ergo quadratum sit necesse est; & descriptum est circa circulum ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est; quod facere oportebat.

(1) Cor. pr. 16. 17. tertii. (2) 18. tertii. (3) 28. primi. (4) 34. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO VIII.

In dato quadrato circulum describere.



Sit datum quadratum A B C D; oportet in quadrato A B C D, circulum describere. Secetur utraque ipsarum AB, AD bifariam in punctis F, E; (1) & per E quidem alterutri ipsarum AB, CD parallela ducatur EH; (2) per F verò ducatur FK, parallela alterutri AD, BC; parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD; & latera ipsorum, quæ ex opposito sunt, æqualia. (4) Et quoniam DA est æqualis AB; & ipsius quidem AD dimidia est AE, ipsius verò AB dimidia AF; erit AE ipsi AF æqualis; quare & opposita latera æqualia sunt; ergo FG, est æqualis GE. Similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum GH, GK, utrique FG, GE, æqualem esse; quatuor igitur GE, GF, GH, GK, inter se sunt æquales. Itaque centro quidem G, intervallo autem una ipsarum GE, GF, GH, GK, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DA continget; proptereà quòd anguli ad E, F, H, K recti sunt. Si enim circulus secabit rectas lineas AB, BC, CD, DA, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod est absurdum; (4) non igitur centro quidem G, intervello autem una ipsarum GE, GF, GH, GK circulus descriptus rectas lineas AB, BC, CD, DA secabit; quare ipsas necessariò continget: atque erit descriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus descriptus est; quod facere oportebat.

PRO-

(1) 10.primi. (2) 31.primi. (3) 34.primi.
(4) 16.tertii.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO IX.

Circa datum quadratum circulum describere.

SIt datum quadratum A B C D; oportet circa ABCD, quadratum circulum describere. Jungantur enim AC, BD, quæ se invicem in puncto E, secent. Et quoniam DA est æqualis A B, communis autem AC; duæ DA, AC, duabus BA, AC æquales sunt; & basis DC, æqualis basi CB; erit angulus DAC, angulo BAC, æqualis; angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. Similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA, rectis lineis AC, DB bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus DAB, angulo ABC est æqualis; atque est anguli quidem DAB dimidius angulus EAB, anguli verò A B C dimidius EBA; & EAB angulus angulo EBA, æqualis erit; quare & latus EA lateri EB, est æquale. Similiter demonstrabimus, & utramque rectarum linearum EC, ED, utrique EA, EB æqualem esse; ergo quatuor rectæ lineæ EA, EB, EC, ED, inter se sunt æquales. Centro igitur E, intervallo autem una ipsarum EA, EB, EC, ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus, ut ABCD; circa datum igitur quadratum circulus descriptus est; quod facere oportebat.

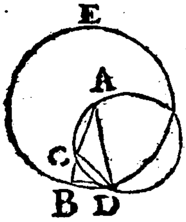
PROBLEMA X. PROPOSITIO X.

Æquicrure triangulum constituere, habens utrumque angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui.

EXponatur recta quædam linea AB, & seçetur in C, puncto, ita ut rectangulum contentum A B, B C, æquale sit ei, quod ex CA describitur, quadrato (1) & centro quidem A, intervallo autem A B, circulus describatur BDE; apteturque BDE circulo recta linea BD,

(1) 11. secundi.

æqualis ipsi A C, quæ non sit major diametro circuli BDE: (2) & junctis DA, DC, circa ADC triangulum circulus ACD describatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato, quod sit ex AC; æqualis autem est AC ipsi BD; erit ABC rectangulum quadrato, quod ex BD æquale. Et quoniam extra circulum ACD, sumtum est aliquod punctum B, & à puncto B, in circulum ACD, cadunt duæ rectæ lineæ BCA, BD, quarum altera quidem secat, altera verò incidit, atque est rectangulum ABC æquale quadrato, quod ex BD, recta linea BD circulum ACD continget. (3) Quoniam igitur BD contingit, & à contactu, qui ad D, ducta est DC; erit BDC angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione constituitur, (4) videlicet angulo DAC. Quod quum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA: totus igitur BDA, est æqualis duobus angulis CDA, DAC. Sed ipsis CDA, DAC, exterior angulus BCD, est æqualis; (5) ergo & BDA æqualis est ipsi BCD. Sed BDA angulus est æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB æquale; ergo, & DBA, ipsi BCD, æqualis erit. Tres igitur anguli BDA, DBA, BCD, inter se æquales sunt. Et quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, & latus BD, lateri DC est æquale: (6) sed BD ponitur æqualis ipsi CA, ergo, & AC est æqualis CD; quare & angulus CDA æqualis est angulo DAC; anguli igitur CDA, DAC, ipsius anguli DAC dupli sunt; est autem & BCD, angulus angulis CDA, DAC æqualis, ergo & BCD duplus est ipsius DAC. Sed BCD, est æqualis utrique ipsorum BDA, DBA; quare & uterque BDA, DBA, ipsius DAB est duplus. Æquicrure igitur triangulum constitutum est ADB, habens utrumque eorum angulorum, qui sunt ad basim, duplum reliqui; quod facere oportebat.

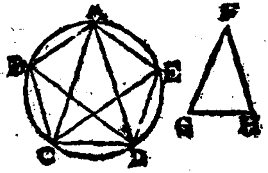


PRO-

(2) 1. hujus. (3) ult. tertii. (4) 32. tertii.
(5) 32. primi. (6) 6. primi.

PROBLEMA XI. PROPOSITIO XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



Sit datus circulus ABCDE, oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. Exponatur triangulum æquicrure FGH, habens utrumque eorum, qui sunt ad G, H, angulorum duplum anguli, qui est ad F: (1) & describatur in circulo ABCDE, triangulo FGH, æquiangulum triangulum ACD, (2) ita ut angulo quidem, qui est ad F, æqualis sit angulus CAD; utrique verò ipsorum, qui ad G, H, sit æqualis uterque ACD, CDA; & uterque igitur ACD, CDA anguli CAD est duplus; secetur uterque ipsorum ACD, CDA bifariam rectis lineis CE, DB: (3) & AB, BC, CD, DE, EA, jungantur. Quoniam igitur uterque ipsorum ACD, CDA, duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariam rectis lineis CE, DB, quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA inter se sunt æquales; æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insistunt; (4) quinque igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales sunt inter se. Sed æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt: (5) ergo & quinque rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EA inter se æquales sunt; æquilaterum igitur est ABCDE, pentagonum. Dico, & æquiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AB, æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD; tota igitur ABCD circumferentia, toti circumferentiæ EDCB, est æqualis; & in circumferentia quidem ABCD, insistit angulus AED, in circumferentia verò EDCB insistit BAE. Ergo & BAE angulus est æqualis angulo AED; Eadem ratione & unusquisque angulorum ABC, BCD, CDE, unicuique ipsorum BAE, AED est æqualis; æquiangulum igitur est ABCDE

F 5 pen-

(1) Ex antecedente. (2) 2.hujus. (3) 9.primi. (4) 26.tertii. (5) 29.tertii.

pentagonum: ostensum autem est, & æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est; quod facere oportebat.

PROBLEMA XII. PROPOSITIO XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. Intelligantur pentagoni in circulo descripti angulorum puncta A, B, C, D, E; (1) ita ut circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA, sint æquales; & per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes GH, HK, KL, LM, MG, (2) & sumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB, FK, FC, FL, FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE, in puncto C, & à centro F ad contactum, qui est ad C, ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis. (3) Rectus igitur est uterque angulorum, qui sunt ad C; eadem ratione & anguli, qui ad puncta B, D recti sunt. Et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum, quod fit ex FK, æquale est quadratis, quæ ex FC, CK; & ob eandem causam quadratis ex FB, BK, æquale est, quod ex FK, quadratum. Quadrata igitur ex FC, CK, quadratis ex FB, BK æqualia sunt, quorum, quod ex FC, ei, quod ex FB, est æquale. Ergo reliquum, quod ex CK, reliquo, quod ex BK æquale erit; æqualis igitur est BK, ipsi CK. Et quoniam FB, est æqualis FC, communis autem FK duæ BF, FK, duabus CF, FK æquales sunt: & basis BK, est æqualis basi KC; erit angulus quidem BFK angulo KFC æqualis, (4) angulus verò BKF, angulo FKC; duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipsius FKC. Eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL est duplus, angulus verò CLD duplus anguli CLF. Et quoniam circumferentia

(1) Ex antecedente. (2) Cor. pr. 16. tertii. (3) 18. tertii.
(4) 8. primi.

tia B C circumferentiæ C D est æqualis, & angulus BFC angulo CFD æqualis erit; (5) atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus; angulus verò DFC duplus ipsius LFC: æqualis igitur est angulus KFC, angulo CFL. Itaque duo triangula sunt FKC, FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod ipsis commune est FC. Ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: (6) recta igitur linea KC, est æqualis rectæ CL, & angulus FKC angulo FLC. Et quoniam K C est æqualis C L, erit KL ipsius KC dupla: eadem ratione, & HK ipsius BK dupla ostendetur. Rursus quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC, atque est KL, quidem dupla KC, HK verò ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL æqualis. Similiter & unaquæque ipsarum GH, GM, ML ostendetur æqualis utrique HK, KL. Æquilaterum igitur est GHKLM, pentagonum. Dico etiam æquiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC, & ostensus est ipsius quidem FKC duplus angulus HKL ipsius verò FLC duplus KLM: erit & H K L angulus angulo KLM æqualis. Simili ratione ostendetur, & unusquisque ipsorum KHG, HGM, GML, utrique HKL, KLM æqualis. Quinque igitur anguli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH, inter se æquales sunt; ergo æquiangulum erit GHKLM pentagonum; ostensum autem est etiam æquilaterum esse; & descriptum est circa ABC DE circulum; quod facere oportebat.

Eodem prorsus artificio, quæcumque figura ordinata, sive quæ sit æquiangula, & æquilatera, circulo circumscribitur; hoc est si priùs illi similis figura ordinata inscribatur, ac deinde per singula puncta circumferentiæ, in qua cadunt anguli figuræ inscriptæ, tangentes ad circulum ducantur.

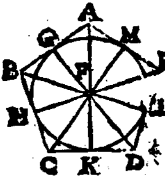
(5) 27. tertij. (6) 26. primi.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIO XIII.

In dato pentagono, quod æquilaterum, & æquiangulum sit, circulum describere.

SIt datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE: oportet in ABCDE pentagono circulum

lum describere. Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam (1) rectis lineis CF, DF; & à puncto F, in quo conveniunt inter se CF, DF ducantur rectæ lineæ FB, FA, FE. Quoniam igitur BC est equalis CD, communis autem CF, duæ BC, CF duabus DC, CF equales sunt, & angulus BCF est equalis angulo DCF: basis igitur BF, basi FD est equalis, & BFC triangulum equale triangulo DFC, & reliqui anguli reliquis angulis equales, quibus equalia latera subtenduntur; (2) angulus igitur CBF angulo CDF equalis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus; & angulus quidem CDE angulo ABC; angulus verò CDF, angulo CBF equalis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC equalis; angulus igitur ABC, bifariam sectus est recta linea BF. Similiter demonstrabitur, & unumquemque angulorum BAE, AED rectis lineis AF, FE bifariam sectum esse. Itaque à puncto F ad rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA ducantur perpendiculares FG, FH, FK, FL, FM. Et quoniam angulus HCF est equalis angulo KCF; est autem, & rectus FHC, recto FKC equalis; erunt duo triangula FHC, FKC duos angulos duobus angulis equales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrique FC, quod uni æqualium angulorum subtenditur; ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt; (3) atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK equalis. Similiter ostendetur, & unaquæque ipsarum FL, FM; FG equalis utrique FH, FK: quinque igitur rectæ lineæ FG, FH, FK, FL, FM inter se equales sunt; quare centro F, intervallo autem una ipsarum FG, FH, FK, FL, FM circulus descriptus, etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA continget, propterea quòd anguli ad G, H, K, L, M recti sunt. Si enim non continget, sed ipsas secabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod absurdum esse, ostensum est; (4) non igitur centro F, & intervallo uno



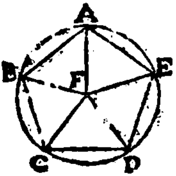
(1) 9.primi. (2) 4.primi. (3) 26.primi.
(4) 16.tertii.

uno ipsorum punctorum G, H, K, L, M circulus descriptus rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA secabit, quare ipsas contingat necesse est; describatur, ut GHKLM. In dato igitur pentagono, quod est æquilaterum, & æquiangulum, circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Eadem methodo in qualibet figura æquiangula, & æquilatera circulus inscribetur.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Circa datum pentagonum, quod æquilaterum, & æquiangulum sit, circulum describere.

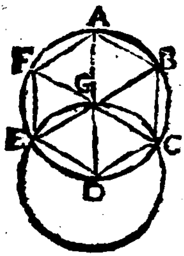


SIt datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE: oportet circa pentagonum ABCDE, circulum describere. Secetur uterque ipsorum BCD, CDE angulorum bifariam rectis lineis CF, ED: & à puncto F, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B, A, E, ducantur FB, FA, FE. Similiter, ut in antecedenti, demonstrabitur, unumquemque angulorum CBA, BAE, AED rectis lineis BF, FA, FE bifariam sectum esse. Et quoniam angulus BCD angulo CDE, est æqualis; atque est anguli quidem BCD dimidius angulus FCD; anguli verò CDE dimidius CDF; erit & FCD angulus æqualis angulo FDC: quare & latus CF lateri FD, est æquale. Similiter demonstrabitur, & unaquæque ipsarum FB, FA, FE æqualis unicuique FC, FD; quinque igitur rectæ lineæ FA, FB, FC, FD, FE inter se æquales sunt; ergo centro F, & intervallo una ipsarum FA, FB, FC, FD, FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atq; erit descriptus circa pentagonum ABCDE, quod æquilaterum est, & æquiangulum; describatur, & sit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Eadem arte circa quamlibet figuram æquiangulam, & æquilateram circulus describitur.

PROBLEMA XV. PROPOSITIO XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



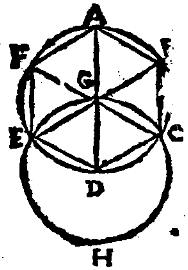
ii

SIt datus circulus ABCDEF; oportet in circulo ABCDEF hexagonum ęquilaterum, & ęquiangulum describere. Ducatur circuli ABCDEF diameter AD, sumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG, circulus describatur EGCH; junctæ EG, CG, ad puncta B, F producantur, & jungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico hexagonum ABCDEF, ęquilaterum, & ęquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est ABCDEF circuli, erit GE ipsi GD ęqualis. Rursus quoniam D centrum est circuli EGH, erit DE ęqualis DG: sed GE ipsi GD ęqualis ostensa est; ergo GE ipsi ED est ęqualis; ęquilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD, GDE, DEG inter se ęquales sunt, quoniam ęquicrurium triangulorum anguli ad basim inter se sunt ęquales: (1) & sunt trianguli tres anguli ęquales duobus rectis; (2) angulus igitur EGD, duorum rectorum tertia pars est. Similiter ostendetur, & DGC duorum rectorum tertia; Et quoniam recta linea CG super rectam EB insistens angulos, qui deinceps sunt EGC, CGB duobus rectis ęquales efficit; (3) erit & reliquus CGB, tertia duorum rectorum: anguli igitur EGD, DGC, CGB, inter se sunt ęquales; ergo & qui ipsis ad verticem sunt anguli BGA, AGF, FGE, ęquales sunt angulis EGD, DGC, CGB; quare sex anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE inter se ęquales sunt; sed ęquales anguli ęqualibus circumferentiis insistunt. (4) Sex igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inter se sunt ęquales;

ęqua-

(1) 5 primi. (2) 32. primi. (3) 13. primi.
(4) 26. tertii.

equales autem circumferentias aequales rectae lineae subtendunt; (5) ergo, & sex rectae lineae inter se aequales sint necesse est, ac propterea equilaterum est ABCDEF, hexagonum. Dico, & equiangulum esse. Quoniam enim circumferentia AF circumferentiae ED est aequalis, communis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD circumferentia equalis est toti circumferentiae EDCBA: & circumferentiae quidem FABCD angulus FED insistit, circumferentiae verò EDCBA insistit angulus AFE; angulus igitur AFE, angulo DEF, est equalis. Similiter ostendentur, & reliqui anguli hexagoni ABCDEF sigillatim equales utrique ipsorum AFE, FED; ergo equiangulum est ABCDEF hexagonum; ostensum autem est, & equilaterum esse; & descriptum est in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum equilaterum, & equiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



COROLLARIUM.

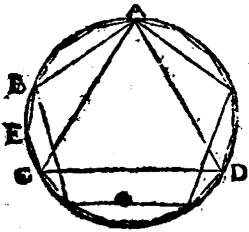
Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei, quae est ex centro circuli, aequale esse. Et si per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexagonum aequilaterum, & aequiangulum, consequenter iis, quae in pentagono dicta sunt; & praeterea similia in dato hexagono circulum describemus, & circumscribemus; quod facere oportebat.

PRO-

(5) -g. tertii.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIO XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.



SIt datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. Describatur in circulo ABCD, trianguli quidem æquilateri in ipso descripti latus AC; pentagoni verò æquilateri latus AB. Quarum igitur partium est ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia verò AB, quæ quinta est circuli, erit trium; ergo reliqua BC est duarum; secetur BC bifariam in puncto E; quare utraque ipsarum BE, EC circumferentiarum, quintadecima pars est ABCD circuli. Si igitur jungentes BE, EC, æquales ipsis in continuum rectas lineas, in circulo ABCD aptabimus, in ipso quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum erit; quod facere oportebat.

Similiter autem iis, quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones contingentes circulum ducamus, circà ipsum describetur quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Et insuper dato quindecagono æquilatero, & æquiangulo circulo describemus, & circumscribemus.

Si dividantur bifariam anguli omnes ad centrum figurarum in circulo inscriptarum rectis lineis, quæ usque ad circumferentiam producantur, & harum extrema in circumferentia rectis lineis conjungantur, inscripta erunt figuræ in circulo, quarum numerus laterum erit duplus numeri laterum, earum figurarum, quæ in circulo priùs erant inscriptæ. Sic si quadratum erit in circulo inscriptum, & anguli ad centrum bifariam dividantur rectis lineis, quæ ad peripheriam usque perveniant, & harum extrema in peripheria.

pheria rectis lineis conjungantur, erit figura inscripta in circulo, quæ octo constat lateribus: Quod si rursus bifariam dividantur anguli ad centrum, & eadem fiant, quæ diximus, erunt figuræ in circulo inscriptæ, quarum numerus laterum erit quadruplus numeri laterum figurarum, quæ prius erant in circulo inscriptæ; & sic deinceps. Cæterum non docet Euclides hic, quo pacto quamplures figuræ possint in circulo inscribi, uti sunt figuræ æquilateræ, & æquiangulæ septem, novem, undecim &c. laterum, quia postulatis, quæ in libro primo præmisit, hoc est circino, & regula, absolvi non possunt.

FINIS LIBRI QUARTI.

EU-

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER QUINTUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DEFINITIONES.

PArs est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

Quamquam partis nomen genericum sit, omnemque denotet magnitudinem, quę ad aliam relata, eadem minor sit: tamen ab Euclide ea quantitas pars hic dicitur, quæ totum, sive quantitatem, ad quam refertur, exactè metitur. Metiri autem magnitudo magnitudinem dicitur, quum aliquoties sumta efficit totum, sive magnitudinem illam, ad quam refertur. Sic numerus 2 dicitur pars numeri 10, quia si numerus 2 quinquies sumatur efficit 10. Hinc solet dici pars aliquota magnitudinis ejus, quam metitur, & particulare nomen sortitur à numero partium sibi æqualium, quæ sunt in toto, sivè in magnitudine, quam metitur; sic idem numerus 2 dicitur quinta pars numeri 10, quia quinque partes ipsi æquales, sivè quinquies est is in numero 10. Similes partes aliquotæ dicuntur, quæ æquè sua tota metiuntur. E. g. 2 est similis pars aliquota numeri 12, quæ 4 est numeri 24: quia sicuti 2 est sexies in 12, ita quoque 4 est sexies in 24. Dicitur denique pars communis, sive communis mensura duarum magnitudinem ea magnitudo, quæ utramque metitur. Sic 3 est pars aliquota communis duorum numerorum 12, & 18, quia numerus 3 quater sumtus efficit 12, & sexies sumtus efficit 18; & magni-

tudo

tudines, quę communem mensuram habent, dicuntur commensurabiles.

2. Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

Magnitudo illa, qua ab alia metitur ejusdem multiplex dicitur. E. g. numerus 10 multiplex dicitur numeri 2, quia ab eo metitur. Obtinet verò particulare nomen à numero partium, quas continet, ęquales magnitudini ei, à qua metitur. Sic numerus 10 dicitur quintuplus numeri 2, quia quinque partes ęquales numero 2; sive quinquies ipsum numerum 2 continet. Similes multiplices, sive ęque multiplices dicuntur ea magnitudines, quæ ęquè continent suas partes; sic 10, & 15 sunt ęquè multiplices numerorum 2, & 3, quia sicuti 10 quinquies continet 2, ita & 15 quinquies 3 continet.

3. Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.

Docet in hac definitione Euclides, quid sit ratio, atque, eam esse habitudinem, hoc est respectum, sive relationem, quam inter se habent duæ magnitudines ejusdem generis, hoc est, quam habet linea ad lineam, superficies ad superficiem, corpus ad corpus, &c. quatenus ad quantitatem pertinet, hoc est quatenus una est major, quàm altera, vel minor, vel ęqualis.

Quamvis hęc rationis Euclidæa definitio à ferè omnibus Euclidis interpretibus admittatur, vitio tamen non caret. Duplici enim modo magnitudines ejusdem generis inter se secundum quantitatem referri possunt; aut enim animadvertitur, quantus sit excessus, quo una alteram superat, aut quanta earum una sit respectu alterius, seù quomodo alteram contineat, aut ab illa contineatur. Sic si duo numeri 6, & 4 inter se conferantur, potest investigari quantus sit excessus, quo numerus 6 excedit numerum 4, inveniturque quod sit 2; & potest quoque inspici, quantus sit numerus 6 respectu numeri 4, sive quomodo numerus 6 continet 4, vel contineatur à 4; & invenitur 6 continere 4 semel, & insuper ejus dimidium, vel 4 continere duas tertias partes ipsius numeri. Quare in definitione hæc addere debuerat Euclides, de qua harum habitudinum, quas inter se magnitudines secundum quantitatem habere possunt, ipse loqueretur, quum diversissima inter se ea sint, diversissimasque habeant proprietates.

Quum igitur duplex sit respectus, sive habitudo, quam ma-

magnitudo ad magnitudinem secundum quantitatem habere possit, duplex est ratio; & ea, in qua consideratur excessus, vel defectus unius magnitudinis respectu alterius, dicitur Ratio Arithmetica, *vocaturque excessus, vel defectus ille* Differentia: *ea verò, in qua animadvertitur quomodo una alteram contineat, aut ab altera contineatur, dicitur* Ratio Geometrica; *de qua agit Euclides in hoc libro, quaeque rationis nomine praecipuè intelligitur. Rationem igitur Geometricam, de qua hic loquitur Euclides sic definiendam putamus, quod nempe sit* quantitas relativa unius magnitudinis respectu alterius ejusdem generis magnitudinis, *sive quod sit* modus, quo magnitudo magnitudinem continet, vel continetur ab illa.

Quantitates ipsae, quae invicem conferuntur, dicuntur termini rationis; & ea quidem, quae refertur ad alteram dicitur antecedens rationis, ea vero, ad quam alia refertur, dicitur consequens rationis.

Dividitur ratio in rationem aequalitatis, & rationem inaequalitatis. Prima habetur, quando antecedens est aequalis consequenti. Secunda quando antecedens est major, vel minor consequente: & quidem quando antecedens major est consequente, dicitur ratio majoris inaequalitatis; quando autem antecedens est minor consequente, dicitur ratio minoris inaequalitatis.

Dividitur porrò ratio inaequalitatis in rationem rationalem, & rationem irrationalem, sive surdam.

Rationalis ratio est, quae est inter magnitudines inter se commensurabiles, sive quae communem habent mensuram, & numeris exprimi potest, quomodo antecedens contineat consequentem, aut à consequente contineatur; diciturque ideo ratio numeri ad numerum. Sic ratio, quam habet linea sex pedum ad lineam quatuor pedum, est rationalis, quia linea sex pedum semel continet eam quatuor pedum, & insuper ejus dimidium; ac proinde ad illam se habet, uti 3 ad 2. Sic quoque rationalis est ratio, quae est inter lineam quatuor pedum, & lineam duodecim pedum, quia linea quatuor pedum ter est in linea duodecim pedum; quare inter se sunt, ut 1 ad 3.

Ratio irrationalis, vel surda dicitur illa, quae est inter magnitudines inter se incommensurabiles, sive quae nullam habent communem mensuram; ideoque nullo pacto numeris exprimi potest; ut est ratio, quam habet latus quadrati ad diagonalem ejusdem quadrati, quae quidem est surda, nullisque numeris exprimi potest, quia latus quadrati, &

ejus-

ejusdem diagonalis, lineæ sunt inter se prorsus incommensurabiles, nullamque habent communem mensuram.

Rationalem inæqualitatis rationem in decem species dividunt Auctores, quarum quinque rationi majoris inæqualitatis tribuunt, reliquas rationi minoris inæqualitatis. Species, in quas dividitur ratio rationalis majoris inæqualitatis, sunt multiplex, super particularis, super partiens, multiplex super particularis, & multiplex super partiens.

Ratio muliplex est, quando major majorem aliquoties exactè continet, puta bis, ter, quater, &c. diciturque dupla, tripla, quadrupla, &c.

Ratio super particularis est, quando major minorem semel continet, & insuper ejus unam partem aliquotam, ut ratio 3 ad 2, est super particularis; & dicitur sesquialtera, quia, 3 continet 2, semel, & insuper ejus dimidium. Sic quoque ratio 4 ad 3 est super particularis, diciturque sesquitertia, quia 4 continet 3 semel, & adhuc ejus tertiam partem.

Ratio superpatiens est, quando major minorem continet semel, & insuper aliquot ejus partes aliquotas, non efficientes unam aliquotam; talis est ratio 8 ad 5, quia 8 continet semel 5, & tres ejus quinta partes, quare dicitur proprio nomine super ter partiens quintas. Requiritur tamen, ut partes aliquotæ minoris magnitudinis, quæ sunt in majori, unam non efficiant aliquotam ejusdem minoris magnitudinis; quia si efficerent, non super partiens ratio esset, sed super particularis.

Ratio multiplex super particularis est, quando major quantitas minorem aliquoties continet, & insuper unam ejus partem; ut est ratio 10 ad 3, qui 10 ter continet 3, & insuper ejus tertiam partem.

Ratio denique multiplex superpartiens est, quando major quantitas minorem continet aliquoties, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, uti est ratio 8 ad 3, quia 8 bis continet 3, & duas ejus tertias partes unam aliquotam non conficientes.

Species rationis rationalis minoris inæqualitatis sunt eadem, quæ rationis rationalis majoris inæqualitatis, addita tamen propositione (sub). unde sunt sub multiplex, sub super particularis, &c.

Cæterum cum unaquæque magnitudo certo quodam modo magnitudinem contineat, aut ab illa contineatur; sequitur, unamquamque rationem quantitatem habere determinatam; sive certam determinatamque quantitatem esse,

& si

& si relativam; quæ quidem quantitas habetur si antecedens per consequentem dimidiatur. Fit autem hæc divisio, si rationes instar fractionum numericarum scribantur, hoc est si antecedens scribatur super consequentem interjecta lineola.

Sic quantitas rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$ *Fractiones enim numerorum nil aliud denotant, quam divisionem unius numeri per alium, ostenduntque, quot partes sit superior numerus numeri inferioris, sive quænam ratio inter eos sit. Non aliter est faciendum si ratio sit surda, cujus quantitas quæritur: scribendum enim est antecedens super consequente, lineola interjecta; ut si sit ratio A ad B,*

ejus quantitas erit $\frac{A}{B}$ *; quæ quidem si non ita est nota,*

ut quantitas rationis 2 ad 3, quæ est $\frac{2}{3}$ *id ideo evenit,*

quia ratio A ad B est surda, hoc est, quæ nullis numeris exprimi potest.

4. Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

Criterium tradit Euclides in hac definitione, quo cognoscere possimus, quas magnitudines rationem inter se habere in antecedente definitione ipse dixit, ejusdemque generis esse inter se; & docet eas magnitudines inter se rationem habere, ejusdemque generis esse, quarum alterutra multiplicata, hoc est ter, quater, decies, &c. sumta alteram possit superare. Quare lineæ inter se rationem habebunt, & ejusdem generis sunt, quia quæcumque linea finita propositam quamcumque lineam finitam excedere potest, si toties accipiatur, quoties requiritur. Eadem ratione superficies inter se, & corpora inter se, numerique, &c. rationem habebunt, ejusdemque generis erunt. Contra, quia linea finita quantumvis multiplicetur numquam excedere potest lineam infinitam, neque superficiem; nec superficies quantumvis multiplicata excedere corpora, nulla linea finita ad lineam infinitam, nec ad superficiem; neque superficies ad corpora rationem habebunt, aut ejusdem generis erunt.

5. Proportio verò est rationum similitudo.

Quoniam rationes quantitates sunt, iis competunt omnia, quæ ad quantitatem pertinent: quamobrem earum aliæ aliis erunt æquales, vel majores, aut minores. Est ratio alteri

ratio-

rationi æqualis, cùm unius antecedens quantitas æquè, sivè eodem modo, hoc est nec magis, nec minus continet consequentem, quo alterius antecedens continet suam consequentem, vel quando unius antecedens eodem modo continetur in sua consequente, quo antecedens alterius in sua. Erit verò una ratio major altera, quando unius antecedens magis continet suam consequentem, quàm alterius antecedens continet suam consequentem, vel quando unius antecedens minus continetur in consequente, quam alterius antecedens in sua. Quando igitur æquales, sive similes inter se erunt duæ rationes, æqualitas hæc, sive similitudo rationum dicitur Proportio, quæ dicitur Geometrica, quia rationes æquales sunt geometricæ.

Quod si arithmeticæ erunt rationes, & inter se æquales, hoc est si unius antecedens ita superat consequentem, aut ab hac superatur, si uti alterius antecedens superat suam consequentem, aut superatur ab illa, Proportio erit Arithmetica.

Est & alias species proportionis, quæ dicitur Harmonica, quæque habetur quoties tres numeri ita ordinantur, ut ratio maximi ad minimum sit æqualis rationi differentiæ, quæ est inter maximum, & medium, ad differentiam, quæ est inter medium, & minimum. E.g. tres numeri 6, 4, 3 sunt in proportione harmonica, quia maximus numerus 6 ita se habet ad minimum 3, ut differentia 2, maximi 6, & medii 4, ad differentiam 1, medii 4 & minimi 3; utraque enim ratio est dupla.

6. Magnitudines, quæ eandem rationem habent, proportionales vocentur.

7. Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit.

Si nempe eorum medius bis sumatur, sitque consequens respectu primi termini, & antecedens respectu tertii termini. Dicitur autem proportio, quæ in tribus terminis consistit Proportio continua; & est duplex Geometrica nempe, quando rationes sunt geometricæ, & Arithmetica, quando rationes sunt arithmeticæ. Quod si continua proportio in pluribus quàm tribus terminis consistit, dicitur Progressio, estque Geometrica, quando rationes sunt geometricæ, & Arithmetica, quando rationes sunt arithmeticæ.

8. Homologæ vel similes ratione magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

9. Permutata ratio est sumtio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Hæc

Hoc est si A ad B sit, ut C ad D; permutando A ad C erit ut B, ad D per prop. 16. hujus. Quatuor autem quantitates, quæ sunt in proportione ejusdem generis omnes esse debent. Secus cum permutaretur ratio, magnitudines diversi generis inter se compararentur, quæ nullam inter se rationem habent.

20. Inversa ratio est sumtio consequentis ut antecedentis ad antecedentem, ut ad consequentem.

Hoc est si A est ad B, ut C ad D, invertendo B ad A erit ut D ad C. Demonstrabitur in corol. prop. 4. hujus.

21. Compositio rationis est sumtio antecedentis una cum consequente tamquam unius ad ipsam consequentem.

Hoc est si A ad B sit uti C ad D; componendo A & B simul ad B, ut C & D simul ad D. Ostendetur in prop. 18. hujus. Melius verò diceretur additio rationis.

22. Divisio rationis est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem ad ipsam consequentem.

Hoc est si A ad B sit, ut C ad D, dividendo erit Excessus, quo A superat B ad B, uti excessus C supra D ad D, ut ostenderetur in prop. 17. huj. Melius subtractio rationis diceretur.

23. Conversio rationis est sumtio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

Hoc est si ad A ad B sit ut C ad D, per conversionem rationis erit A ad excessum, quo superat B, ut C ad excessum quo superat D. Ostendentur in corol. prop. 18. hujus.

24. Æque ratio, sive ex æquali est, cum plures duabus magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione, cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam se habuerit. Vel aliter est sumtio extremorum per subtractionem mediorum.

Duplex est, ut in sequentibus definitionibus.

25. Ordinata Proportio est, quando fuerit, ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem, ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

Hoc est si ex una parte sint magnitudines A, B, C; & ex altera parte sint aliæ magnitudines in D E F primis numero æquales; sitque ut prima A ad secundam B in primis magnitudinibus, ita prima D ad secundam E in secundis magnitudinibus; & ut secunda B ad tertiam C in primis, sit quoque secunda E ad tertiam F in secundis, erit ex æquali

& qui

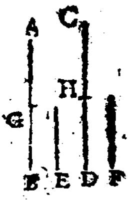
& quidem ordinatè, prima ad tertiam in primis magnitudinibus, ut prima ad tertiam in secundis. Demonstrabitur in prop. 22. hujus.

26. Perturbata autem proportio est, quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, fuerit, ut in primis quidem magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.

Hoc est si sint tres magnitudines A, B, C ex una parte, & aliæ tres D, E, F ex altera parte; sitque ut A ad B in primis magnitudinibus, ita E ad F in secundis, & uti B ad C in primis, ita D ad E in secundis; erit ex æquali perturbatè A ad C, uti D ad F. Demonstrabitur in prop. 23. hujus.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

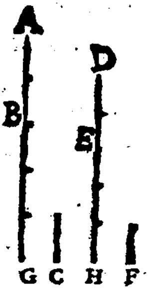
Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.



Sint quotcumque magnitudines AB, CD, quotcumque magnitudinum E, F æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices. Dico quotuplex est AB, ipsius E, totuplices esse & AB, CD, ipsarum E, F. Quoniam enim AB, æque multiplex est ipsius E, & CD ipsius F, quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erunt in CD æquales ipsi F: dividatur AB, quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AG, GB: CD verò dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet CH, HD; erit igitur multitudo partium CH, HD æqualis multitudini ipsarum AG, GB. Et quoniam AG est æqualis E, CH æqualis F, erunt & AG, CH æquales ipsis E, F: eadem ratione quoniam GB est æqualis E, & HD ipsi F erunt, & GB, HD æquales ipsis E, F; quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt, & in AB, CD æquales ipsis E, F; ergo quotuplex est AB ipsius F, totuplices erunt & AB, CD ipsarum E, F. Si igitur fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt, & omnes omnium; quod demonstrare oportebat.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si prima secunda æque multiplex fuerit, ac tertia quarta, fuerit autem, & quinta secunda æque multiplex, ac sexta quarta; erit etiam composita prima, & quinta secunda æque multiplex, ac tertia, & sexta quarta.



PRima enim AB, secundæ C æque multiplex sit; ac tertia DE, quartæ F: sit autem, & quinta BG, secundæ C, æque multiplex, ac sexta DE, quartæ F. Dico, & compositam primam, & quintam AG, secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam, & sextam DH, quartæ F. Quoniam enim AB, æque multiplex est C, ac DE, ipsius F, quot magnitudines sunt in AB æquales C, tot erunt in DE æquales F. Eadem ratione, & quot sunt in BG, æquales C, tot & in EH erunt æquales F. Quot igitur sunt in tota AG, æquales C, tot erunt, & in tota DH, æquales F. Ergo quotuplex est AG, ipsius C, totuplex est, & DH ipsius F; composita igitur prima, & quinta AG, secundæ C æque multiplex erit, ac tertia, & sexta DH, quartæ F. Quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ; fuerit autem, & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ: erit composita quoque prima, & quinta æque multiplex secundæ, ac tertia, & sexta quartæ; quod oportebat demonstrare.

THEO.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

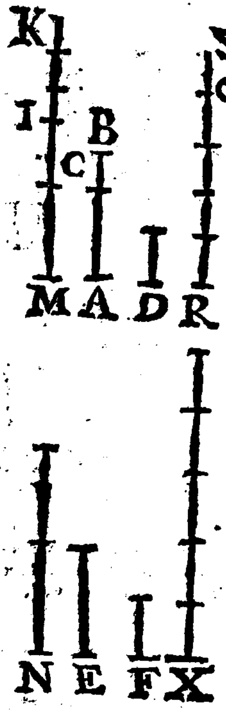
Si prima secunda aque multiplex fuerit, ac tertia quarta; sumantur autem aque multiplices prima, & tertia, erit, & ex aquali sumptarum utraque utriusque aque multiplex, altera quidem secunda, altera verò quarta.

PRima enim A; secundæ B æque multiplex sit, ac tertia C, quartæ D, & sumantur ipsarum A, C, æque multiplices EF, GH. Dico EF, æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF, æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C, quot magnitudines sunt in FE, æquales A, tot erunt, & in GH æquales C. Dividatur EF, quidem in magnitudines ipsi A, æquales EK, KF; GK verò dividatur in magnitudines æquales C, vz. GL, LH; erit igitur ipsarum EK, KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL, LH. Et quoniam æquè multiplex est A ipsius B, ac C ipsius D; æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D; eadem ratione aque multiplex erit KF ipsius B, & LH ipsius D. Quoniam igitur prima EK, secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL, quartæ D; est autem, & quinta KF, secundæ B æque multiplex, ac sexta LH, quartæ D: erit & composita prima, & quinta EF, secundæ B æque multiplex, ac tertia, & sexta GH quartæ D. (1) Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ, sumantur autem primæ, & tertiæ æque multiplices; erit & ex æquali sumtarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera verò quartæ; quod ostendisse oportuit.

(1) Ex antecedente.

LEMMA.

Si prima quantitas ad secundam rationem habeat majorem, quàm tertia ad quartam, tales æque multiplices primæ, ac tertiæ sumi possunt, ac alia æquè multiplices secundæ, & quartæ, ut si multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, multiplex verò tertiæ non excedat multiplicem quartæ.



PRima quantitas AB majorem rationem habeat ad secundam D, quàm tertia E ad quartam F. Dico sumi posse æquè multiplices ipsarum AB primæ, & E tertiæ, & alias æquimultiplices ipsarum D secundæ, & F quartæ, ita ut si multiplex primæ A excedat multiplicem secundæ D, multiplex verò tertiæ E non excedat multiplicem quartæ F. Quoniam enim AB majorem rationem habet ad D, quàm E ad F; Ergo AB magis continet ipsam D, quàm E continet F: qua de re si ex AB aliquid auferretur, fieri posset, ut id, quod remaneret ipsa ita contineret D, ut E continet F. Auferri igitur intelligatur ex ea portio CB, fiatque, ut AC eodem modo contineat ipsam D, quo E ipsam F continet. Sumantur dein-

de ipsarum BC, CA, F æquemultiplices KI, MI, N, hac tamen lege, ut KI multiplex ipsius BC superet ipsam D. Sumantur quoq; ipsarum D, & F aliæ æquè multiplices RZ, X, hac rursus lege, ut RZ sit proximè excedens ipsam MI, hoc est, ut superet ipsam MI, aut una tantum sui parte ZO, quæ sit æqualis ipsi D, aut portioni ipsa ZO minore. Et quoniam KI multiplex est ipsius CB, uti MI est multiplex ipsius AC, erit tota MK ita multiplex totius AB, sicuti MI est multiplex ipsius AC. (1) Sed MI ita multiplex est ipsius AC, ut N est multiplex ipsius E; æquè multiplices igitur sunt MK, N ipsarum AB, E. Præterea, quia KI major est, quàm D, hoc est, quàm ZO; erit MK ipsa RZ major, & MI eadem RZ minor est ex constructione. Dico non superare N ipsam X, sicuti MI non superat RZ. Si negas, superet, si possibile est, N ipsam X, vel ei sit æqualis, & MI non superet RZ. Quoniã igitur N excedit ipsam X, vel ei est æqualis, & MI non excedit ipsam RZ, & eadem est minor; magis continet N ipsam X, quam MI continet RZ. Sed X, et RZ sunt æquè multiplices ipsarũ F, & D, hoc est, X bis, aut ter, aut quater, &c. continet F. Ergo N magis, quàm bis, aut ter, aut quater continet F; vel bis, aut ter, aut quater, si ipsi F est æqualis: MI verò minùs, quàm bis, aut ter, aut quater &c. continet D. Rursus quoniam AC eandem rationem habet ad D, quam E ad F, ita continet AC ipsam D, quomodo E continet ipsam F. Sed MI, & N ipsarum AC, & E sunt æquè multiplices, hoc est MI dupla est, aut tripla, &c. ipsius AC, sicuti N dupla, aut tripla ipsius E; Ergo MI hoc est dupla, aut tripla, &c. ipsius AC, ita continet ipsam D,

 sicuti

(1) pri. huius

sicuti N, hoc est dupla, aut tripla, &c. ipsius E continet F. Ostensum autem est, MI continere minus D, quàm N continet F. Ergo duplici modo MI continet D, magis nempe, & minus, quod est absurdum. Non igitur si MI non superat RZ, potest ipsa N superare X, aut ipsi esse ęqualis: ac proinde si MI non excedit RZ, neque N excedit ipsam X. Sed MK excedit ipsam RZ, & MI eadem RZ non excedit, ut est ostensum. Ergo MK excedit RZ, N verò ipsam X non excedit. At MK, & N sunt ęquemultiplices ipsarum D secundę, & F quartę. Ergo si prima quantitas ad secundam rationem habeat majorem, quàm tertia ad quartam, tales ęquè multiplices sumi possunt primę, & tertię, & alię ęque multiplices secundę, & quartę, ut si multiplex primę excedat multiplicem secundę, multiplex verò tertię non excedat multiplicem quartę, quod demonstrare oportebat.

COROLLARIA.

1. Si sunt quatuor quantitates, et sumtis ęquè multiplicibus primę, ac tertię, itemque aliis ęquè multiplicibus secundę, & quartę: et erunt ęquè multiplices primę, & tertię, simul majores, vel ęquales, vel minores ęquè multiplicibus secundę, & quartę, & hoc verum sit in omni multiplicatione; Prima ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia ad quartam. Nam si prima ad secundam majorem haberet rationem, quam tertia ad quartam, sumi possent ęquè multiplices primę, & tertię, ac ęquè multiplices secundę, & quartę, quarum multiplex primę superet multiplicem secundę, multiplex

verò

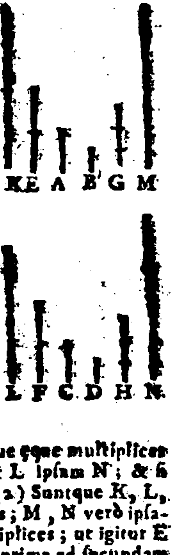
verò tertiæ non superet multiplicem quartæ, ut patet ex hoc lemmate; quod est contra hypotesim.

2. Et si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; si sumantur æquè multiplices primæ, & tertiæ, juxta quamcumque multiplicationem, atque aliæ æquè multiplices secundæ, & quartæ; multiplices primæ, & tertiæ simul erunt majores, aut æquales, aut minores æquè multiplicibus secundæ, & quartæ. Patet ex demonstratione hujus lemmatis. Ostensum enim est, quod si AG ad D eandem habeat rationem, quam E ad F, sumtis æquè multiplicibus MI, & N secundum quamcumque multiplicationem ipsarum AC, E, & aliis æquè multiplicibus RZ, & X ipsarum D, & F; si MI non excedit RZ, neque N excedit X. Eodem modo ostenditur, quod si MI excedit RZ, ut N excedit X, & si MI æquatur ipsi RZ, & N æquatur ipsi X.

3. Si sunt quatuor quantitates, & sumtis æque multiplicibus secundæ, & quartæ, evenit, (etsi semel tantum) ut multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, multiplex verò tertiæ non excedat multiplicem quartæ; prima ad secundam majorem habebit rationem, quàm tertia ad quartam. Nam si essent in proportione nunquam multiplex primæ superabit multiplicem secundæ, & multiplex tertiæ non superabit multiplicem quartæ, ut patet ex antecedenti corollario, & ex hoc lemmate.

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam, & æque multiplices primæ, & tertiæ ad æque multiplices secundæ, & quartæ, juxtà quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter se comparatæ.



PRima enim A, ad secundam B eandem rationem habeat, quàm tertia C, ad quartam D: & sumantur ipsarum quidem A, C aliæ utcumque æque multiplices E, F; ipsarum verò B, D aliæ utcumque æque multiplices G, H. Dico E ad G ita esse, ut F, ad H. Sumantur enim rursus ipsarum E, F æque multiplices K, L, & ipsarum G, H æque multiplices K, L, & ipsarum G, H æque multiplices M, N. Quoniam igitur E, æque multiplex est ipsius A, atque F ipsius C: sumuntur autem ipsarum E, F æque multiplices K, L; erit K æque multiplex ipsius A, atque L, ipsius C; (1) eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. Et quoniam est ut A ad B, ita C ad D; sumtæ autem sunt ipsarum A, C æque multiplices K, L, & ipsarum B, D aliæ utcumque æque multiplices M, N: si K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqualis æqualis; & si minor minor. (2) Suntque K, L, quidem ipsarum E, F æquè multiplices; M, N verò ipsarum G, H aliæ utcumque æquè multiplices; ut igitur E ad G, ita erit F ad H. (3) Quare si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam, & æquè multiplices primæ, ac tertiæ ad æque multiplices secundæ, ac quartæ juxtà quamvis multiplicationem eandem rationem habebunt inter se comparatæ; quod demonstrare oportebat.

eo

(1) Ex antecedente. (2) coroll. 2. lem. (3) coroll. 1. lem.

COROLLARIUM.

Hinc patet inversa ratio. Nam cum A ad B sit ut C ad D; & sumtis æquè multiplicibus K, & L primæ A, & tertiæ C, atque æquè multiplicibus M, & N secundæ B, & quartæ D, demonstratum sit, si K superat M, L superare N: & si æqualis, æqualem esse; & si minor minorem, hocque in quocumque multiplicatione: constat etiam si M superat K, N superare L; & si æqualis, æqualem esse, & si minor minorem esse, ac propterea B ad A erit, ut D ad C, ut patet ex corol. 1. lem.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

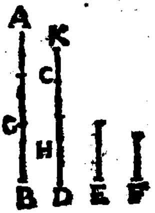
Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æquè multiplex erit, atque tota totius.

MAgnitudo enim AB magnitudinis CD, æque multiplex sit, atque ablata AE, ablatæ CF. Dico, & reliquam EB reliquæ FD æquè multiplicem esse, atque totam AB totius CD. Quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat & EB ipsius CG. Et quoniam AE æque multiplex est CF, atque EB ipsius CG; erit AE æquè multiplex CF, & AB ipsius GF: (1) ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, & AB ipsius CD; æque multiplex igitur est AB, utriusque GF, CD; ac propterea GF ipsi CD est æqualis; communis auferatur CF, reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF. (2) Itaque quoniam AE æque multiplex est CF, & EB ipsius CG, estque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, & EB ipsius FD; æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, & AB ipsius CD; ergo EB est æque multiplex FD, & AB ipsius CD; & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atque tota AB totius CD; quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque erit multiplex, atque tota totius. Quod oportebat demonstrare.

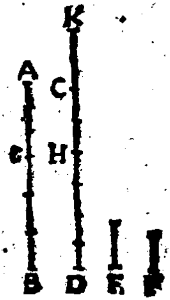
(1) 1. hujus. (2) 3. com. not.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æquè multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices, erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.



DUæ enim magnitudines AB, CD, duarum magnitudinum E, F ęque multiplices sint, & ablatæ AG, CH earundem sint ęque multiplices. Dico, & reliquas GB, HD, vel ipsis E, F ęquales esse, vel ipsarum ęque multiplices. Sit enim primũ GB ęqualis E; dico, & HD ipsi F esse ęqualem; ponatur ipsi F ęqualis CK. Et quoniam AG ęque multiplex est E, & CH ipsius F: estque GB, quidem ęqualis E; CK verò ęqualis F: erit AB ęque multiplex E, & KH ipsius F: (1) ęque autem multiplex ponitur AB ipsius E, & CD ipsius F; ergo KH ęque multiplex est F, & CD ipsius F; quoniam igitur utraque ipsarum KD, CD est ęque multiplex F, erit KH ęqualis CD; communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquæ HD est ęqualis. (2) Sed KC est ęqualis F, & HD igitur ipsi F est ęqualis; ideoque GB ipsi E, & HD ipsi F ęqualis erit. Similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E, & HD ipsius F ęque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum ęque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem ęque multiplices, erunt & reliquæ vel eisdem ęquales, vel ipsarum ęque multiplices. Quod demonstrare oportebat.



THEO-

(1) 1. hujus (2) 1. com. not.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.

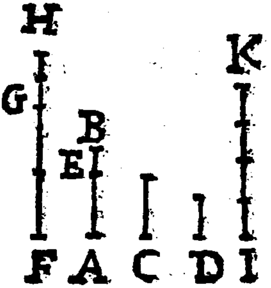
SInt ęquales magnitudines A, B, alia autem quævis magnitudo C. Dico utramque ipsarum A, B, ad C, eandem rationem habere: & C ad utramque A, B similiter eandem habere rationem. Sumantur enim ipsarum A, B æque multiplices D, E, & ipsius C, alia utcumque multiplex F. Quoniam igitur ęquè multiplex est D ipsius A, & E ipsius B, estque A ipsi B ęqualis, erit & D ęqualis E: (1) alia autem utcumque est F; ergò si D superat F, & E ipsam F superabit, & si ęqualis, æqualis, & si minor, minor; & sunt D, E quidem ipsarum A, B ęquè multiplices: F verò alia utcumque multiplex ipsius C; erit igitur, ut A ad C, ita B ad C. (2) Dico insuper C ad utramque ipsarum A, B eandem habere rationem. Iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E ęqualem esse, aliam verò quandam F; si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si ęqualis, ęqualis; & si minor, minor; atque est F, quidem ipsius C multiplex; D, E verò aliæ utcumque ęque multiplices ipsarum A, B; ergo ut C ad A, ita erit C ad B; (3) æquales igitur ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

Eodem modo ostendetur, æquales ad æquales eandem habere rationem, dummodo si loco multiplicis F ipsius C, sumantur duæ æquè multiplices.

(1) 6. com. not. (2) corol. 1. com. (3) corol. 1. lem.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Inæqualium magnitudinum major ad eamdem majorem habet rationem, quàm minor; & eadem ad minorem majorem habet rationem, quam ad majorem.



Sint inæquales magnitudines AB, & C, & sit major AB; alia verò utcunque D. Dico AB ad D majorem habere rationem, quam C ad D; & D ad C majorem habere, quàm ad AB. Quoniam enim AB major est, quàm C, ponatur ipsi C æqualis AE; & ipsarum BE, EA æquè multiplices sumantur HG, GF, hac lege, ut HG multiplex ipsius EB superet ipsam D; GF verò multiplex ipsius EA eadem D minor non sit, sed vel major, vel æqualis. Accipiatur quoque ipsius D multiplex IK, hac rursus lege, ut IK sit proximè major, quàm GF, hoc est, ut vel una sui parte æquali ipsi D excedat ipsam GF, vel portione ipsa D minore. Quoniam igitur HG ita multiplex est ipsius BE, uti GF est multiplex ipsius EA, erit tota HF ita multiplex totius BA, ut una GF est multiplex unius EA, sive C. (1) Et quoniam HG major est, quam D hoc est, quàm pars una, quæ est in IK, æqualis ipsi D, IK verò superat ipsam GF portione vel æquali, vel minori eadem D; erit HF major quidem ipsa IK: at GF eadem minor est ex constructione. Considerentur itaque quatuor quantitates AB prima, D secunda, C tertia, & eadem D quarta; & primæ quidem AB, & tertiæ C sunt æque multiplices HF, GF: secundæ verò & quartæ D est æquè multiplex IK; & multiplex HF primæ AB superat multiplicem IK secundæ D, at multiplex GF tertiæ C non superat multiplicem IK quartæ D. Ergo prima AB, ad secundam D majorem habebit rationem.

(1) 1. huius.

nem, quam tertia C ad quartam D. (2) Dico præterea & D ad C majorem habere rationem; quam D ad AB. Consideretur eadem D ut prima, & tertia; C ut secunda; & AB ut quarta. Quoniam IK multiplex primæ, & tertiæ D major est, quam GF multiplex secundæ C; at minor quam HF multiplex quartæ AB; prima D majorem habebit rationem ad secundam C, quam eadem D tertia, ad quartam BA. (3.) Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem, quam minor; & eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem, quod ostendere oportebat.

(2) corol.3.lem. (3) corol.3.lem.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem, eandem rationem habent, inter se æquales sunt; & ad quas eadem eandem habet rationem ipsæ inter se sunt æquales.

Habeat enim utraque ipsarum A, B ad C eandem rationem. Dico A, ipsi B, æqualem esse. Nam si non esset æqualis, non haberet utraque ipsarum A, B ad C eandem rationem; (1.) habet autem; æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad utramque ipsarum A, B eandem rationem. Dico A æqualem esse ipsi B. Nisi enim ita sit, non habebit C ad utramque A, B eandem rationem; (2) habet autem; ergo A ipsi B necessario est æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem rationem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eadem eandem habet rationem; ipsæ inter se sunt æquales; quod demonstrare oportebat.

THEO.

(1) Ex antecedente. (2) Ex antecedente.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Ad eandem rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est, ad quam verò eadem majorem habet rationem illa minor est.

HAbeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C. Dico A, quam B majorem esse; si enim non est major, vel æqualis est, vel minor; æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad C eandem haberet rationem; (1) atqui eandem non habet: non igitur A ipsi B est æqualis. Sed neque minor est A quam B; haberet enim A ad C minorem rationem, quam B; (2) atqui non habet minorem, non igitur A minor est, quam B; ostensum autem est neque esse æqualem; ergo A, quam B major erit. Habeat rursus C ad B majorem rationem, quam C ad A. Dico B minorem esse, quam A; si enim non est minor, vel æqualis est, vel major; æqualis utique non est B ipsi A; etenim C ad utramque ipsarum A, B eandem rationem haberet; (3) non habet autem; ergo A ipsi B non est æqualis. Sed neque major est B, quam A; haberet enim C ad B minorem rationem, quam ad A; (4) atqui non habet; non igitur B quam A est major. Ostensum autem est neque æqualem esse; ergo B minor erit, quam A. Ad eandem igitur rationem habentium, quæ majorem rationem habet, illa major est: & ad quam eadem majorem habet rationem, illa minor est; quod demonstrare oportebat.

THEO-

(1) 7. hujus. (2) 8. hujus. (3) 7. hujus.
(4) 8. hujus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Quæ eidem eadem sunt rationes, & inter se eadem sunt.

SIt enim, ut A ad B, ita C ad D: ut autem C ad D, ita E ad F. Dico, ut A ad B, ita esse E ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A, C, E æquè multiplices G, H, K; ipsarum verò B, D, F aliæ utcumque æque multiplices L, M, N. Quoniam igitur est, ut A ad B, ita C ad D, & sumtæ sunt ipsarum A, C æque multiplices G, H, & ipsarum B, D aliæ utcumque æque multiplices L, M; si G superat L, & H ipsam M superabit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. (1) Rursus quoniam est, ut C ad D, ita E ad F, & sumtæ sunt ipsarum C, E æque multiplices H, K; ipsarum verò D, F aliæ utcumque æque multiplices M, N si H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; sed si H superat M, & G superabit L; & si æqualis, æqualis; & si minor minor; quare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; & sunt G, K quidem ipsarum A, E æque multiplices; L, N verò ipsarum B, F aliæ utcumque æque multiplices; ergo ut A ad B, ita erit E ad F. (2) Quæ igitur eidem eædem sunt rationes, & inter se eædem sunt, quod ostendere oportebat.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus rationibus sunt eadem, inter se sunt eadem.

THEO-

(1) corol. 2. lem. (2) corol. 1. lem.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

Si quotcumque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcumque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F, & ut A ad B, ita sit C ad D, & E ad F. Dico, ut A ad B, ita esse A, C, E ad B, D, F. Sumantur enim ipsarum A, C, E æquè multiplices G, H, K; & ipsarum B, D, F aliæ utcumque æque multiplices L, M, N. Quoniam igitur, ut A ad B, ita est C ad D, & E ad F & sumtæ sunt ipsarum, quidem A, C, E æque multiplices G, H, K; ipsarum verò B, D, F aliæ utcumque æque multiplices L, M, N; si G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor; (1) quare, & si G superat L superabunt, & G, H, K ipsas L, M, N, & si æqualis, æquales; & si minor, minores; suntque G, & G, H, K ipsarum A, & A, C, E æque multiplices: quoniam si fuerint quotcumque magnitudines quotcumq; magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt, & omnes omnium: (2) eadem ratione, & L & L, M, N ipsarum B, & B, D, F sunt æque multiplices; est igitur, ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. (3) Quare si quotcumque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes; quod demonstrare oportebat.

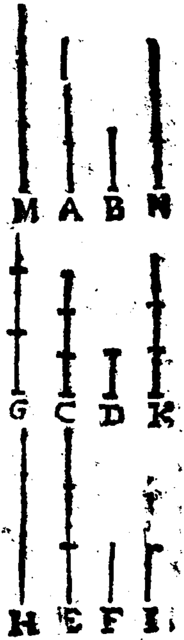
THEO

(1) coroll. 2. lem. (2) 1. hujus. (3) corol. 2. lem.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem rationem habeat, quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit rationem, quam quinta ad sextam.

PRima enim A ad secundam B eandem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D; tertia autem C ad quartam D majorem habeat rationem, quam quinta E ad sextam F. Dico, & primam A ad secundam B, majorem rationem habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem rationem habet, quam E ad F, sunt quædam ipsarum C, E æquemultiplices, & ipsarum D, F aliæ utcumque æque multiplices: & multiplex quidem C superat multiplicem D; multiplex verò E non superat multiplicem F. (1) Sumantur, & sint ipsarum C, E æque multiplices G, H & ipsarum D, F aliæ utcumque æque multiplices K, L, ita ut G quidem superet K, H verò ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit, & N ipsius B. Et quoniam est, ut A, ad B, ita C ad D, & sumtæ sunt ipsarum A, C æquemultiplices M, G, & ipsarum B, D aliæ utcumque æque multiplices N, K: si M superat N & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si



minor,

(1) lem. hujus

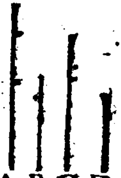
minor, minor. (2) Sed G superat K; ergo & M ipsam N superabit: H verò non superat L, suntque M, H ipsarum A, E æque multiplices, & N, L ipsarum B, F aliæ utcumque æque multiplices; ergo A ad B majorem rationem habebit, quàm E ad F. (3) Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam majorem rationem habeat, quam quinta ad sextam, & prima ad secundam majorem habebit rationem, quam quinta ad sextam; quod ostendere oportebat.

Quod si ratio A ad B sit æqualis rationi C ad D; ratio autem C ad D sit minor ratione E ad F; erit & ratio A ad B minor ratione E ad F. Et si ratio A ad B sit major ratione C ad D, ratio autem C ad D major ratione E ad F; erit ratio A ad B major ratione E ad F. Et si ratio A ad B sit minor ratione C ad D, ratio autem C ad D minor ratione E ad F; erit & ratio A ad B minor ratione E ad F.

(2) corol. 2. lem. (3) corol. 3. lem.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem, quàm tertia ad quartam; prima autem major sit, quam tertia & secunda quam quarta major erit, & si æqualis æqualis, & si minor, minor.



PRima enim A ad secundam B eandem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D; major autem sit A quàm C. Dico & B, quàm D majorem esse. Quoniam enim A major est, quam C, & alia utcumque magnitudo B, habebit A ad B majorem rationem, quàm C ad B. (1) Sed, ut A ad B, ita C ad D; ergo & C ad D majorem habebit rationem, quàm C ad B; (2) ad quam verò eadem majorem rationem habet, illa minor est. (3) Quare D est minor, quàm B, ac propterea B, quam D major erit. Similiter demonstrabimus, & si A æqualis sit ipsi C; & B ipsi D esse æqualem, & si A sit minor, quam C, & B quàm D minorem esse. Si igitur prima

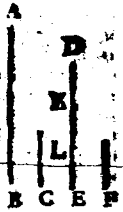
(1) 8. hujus. (2) Ex antecedente. (3) 10. hujus.

prima ad secundam eandem habeat rationem, quàm tertia ad quartam, prima autem major sit, quàm tertia, & secunda, quàm quarta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor; quod demonstrare oportebat.

Quod si secunda major, vel æqualis, vel minor, quàm quarta, eadem methodo ostenditur, primam majorem, vel æqualem, vel minorem quarta esse.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

Partes eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent rationem.



Sit enim AB æque multiplex C, & DE ipsius F. Dico, ut C ad F, ita esse AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius C, & DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt, & in DE æquales F; dividatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG, GH, HB; & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK, KL, LE; erit igitur ipsarum AG, GH, HB multitudo æqualis multitudini DK, KL, LE; & quoniam æquales sunt AG, GH, HB, suntque DK, KL, LE inter se æquales; ut AG ad DK, ita erit GH ad KL, & HB ad LE; atque erit, ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. (1) Est igitur, ut AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipsi C est æqualis, & DK ipsi F; ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent rationem; quod ostendendum fuit.

(1) 12. hujus.

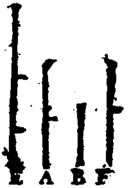
THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, sitque, ut A ad B, ita C ad D. Dico, & permutatas proportionales esse, videlicet, ut A ad C, ita esse B ad

D. Su-

D. Sumantur enim ipsarum quidem A, B æque multiplices E, F; ipsarum verò C, D aliæ utcumque æque multiplices G, H. Et quoniam æque multiplex est E ipsius A, & F ipsius B; partes autem eodem modo multiplicium inter se comparatæ eandem habent rationem; (1) erit, ut A ad B, ita E ad F; ut autem A ad B ita C ad D; ergo & ut C ad D, ita E ad F. Rursus quoniam G, H sunt ipsarum C, D æque multiplices: partes autem eodem modo multiplicium eandem rationem habent inter se comparatæ, erit, ut C ad D, ita G ad H; sed, ut C ad D, ita E ad F; ergo & ut E ad F, ita G ad H (2). Quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit, quàm tertia; & secunda, quam quarta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. (3) Si igitur E superat G, & G ipsam H superabit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor: suntque E, F ipsarum A, B æque multiplices; & G, H ipsarum C, D aliæ utcumque æque multiplices. Ergo, ut A ad C, ita erit B ad D. (4) Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostenre oportebat.



(1) Ex antecedente. (2) 11. hujus. (3) 14. hujus. (4) corol. eadem.

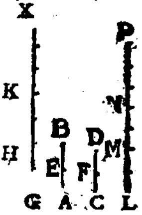
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales AB, BE, CD, DF; sitque ut AB ad BE, ita CD ad DF. Dico etiam divisas proportionales esse, videlicet, ut AE ad EB, ita esse CF ad FD. Sumantur enim ipsarum quidem AE, EB, CF, FD æque multiplices GH, HK, LM, MN; ipsarum verò EB, FD aliæ utcumque æque multiplices KX, NP. Et quoniam æque multiplex est GH ipsius AE, & HK ipsius EB; erit GH ipsius AE æque

mul-

multiplex, & GK ipsius AB; (1) æque autem multiplex est GH ipsius AE, & LM ipsius CF; (2) ergo GK æque multiplex est AB, & LM ipsius CF. Rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, & MN ipsius ED; erit LM æque multiplex CF, & LN ipsius CD. (3) Sed æque multiplex erat LM ipsius CF, & GK ipsius AB; æque igitur multiplex est GK ipsius AB, & LN ipsius CD; (4) quare GK, LN ipsarum AB, CD æque multiplices erunt. Rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, & MN ipsius FD: est autem, & KX ipsius EB æque multiplex, & NP ipsius FD; & composita HX ipsius EB æque multiplex est, & MP ipsius ad FD. (5)



Quod quũ sit, ut AB ad BE, ita CD ad DF, & sumtæ sint ipsarum, quidem AB, CD æque multiplices GK, LN; ipsarum verò EB, FD aliæ utcumque æque multiplices HX, MP; si GK superat HX & LN superabit MP, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. (6) Superet igitur GK, ipsam HX, communique ablata HK, & GH ipsam KX superabit; sed si GK superat HX, & LN superat MP; itaque superet LM ipsam MP, communique MN ablata, & LM superabit NP; quare GH superat KX, & LM ipsam NP. Similiter demonstrabimus, & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem, & si minor minorem; sunt autem GH, LM ipsarum AE, CF æque multiplices, & ipsarum EB, ED aliæ utcumque æque multiplices KX, NP; ergo ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. (7) Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.

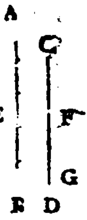
(1) 1.hujus. (2) 12.hujus (3) 1.hujus (4) 11.hujus. (5) 2.hujus. (6) corol. 2.lem. (7) corol. 1.lem.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

Si divisæ magnitudines sint proportionales; & compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales AE, EB, CF, FD: & ut AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est, ut AB ad BE, ita CD ad DF;

DF; erit, ut AB ad BE, ita CD vel ad minorem, quàm DF, vel ad majorem. Sit primum ad minorem, nempè ad DG. Et quoniam est, ut AB ad BE, ita CD ad DG: compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales erunt; (1) erit igitur, ut AE ad EB, ita CG ad GD; ponitur autem, & ut AE ad EB, ita CF ad FD; quare & ut CG ad GD, ita CF ad FD; (2) at CG prima major est, quàm tertia CF; ergo, & secunda DG, quàm quarta DF major erit; (3) sed, & minor, quod fieri non potest; non igitur est ut AB ad BE, ita CD ad DG. Similiter ostendemus, neque esse ad majorem, quàm DF; ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

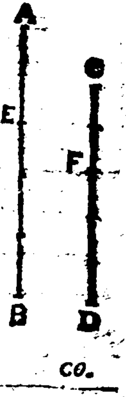


(1) Ex antecedente. (2) 11. hujus. (3) 14. hujus.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

Si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam.

Sit enim, ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF; dico, & reliquam EB ad reliquam FD ita esse, ut tota AB ad totam CD. Quoniam enim est, ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF, & permutando erit, ut BA ad AE, ita DC ad CF; (1) quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ proportionales erunt; (2) ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC: rursusque permutando, ut BE ad DF, ita EA ad FC. Sed ut AE ad CF, ita posita est AB ad CD; & reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD; (3) quare si fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.



CO-

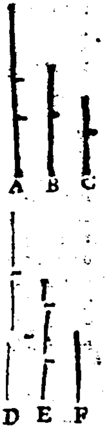
(1) 16. hujus. (2) 17. hujus. (3) 11. hujus.

COROLLARIUM.

Hinc facile ostenditur modus ille argumentandi in proportionibus, quæ dicitur conversio rationis juxta def. 15. hujus libri. Sit enim ut AB ad AE, ita CD ad CF, & per conversionem rationis AB ad BE erit, ut CD ad DF. Nam quum sit AB ad AE, uti CD ad CF, dividendo BE ad EA erit, ut DF ad FC, & invertendo AE ad EB, ut CF ad FD; & componendo denique AB ad BE, ita CD ad DF, quod est propositum.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ bina sumantur, & in eadem ratione, ex æquali autem prima major sit, quam tertia, & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.



SInt tres magnitudines A, B, C & aliæ ipsis numero æquales D,E,F binæ sumtæ,& in eadem ratione, sitque ut A,ad B, ita D ad E,& ut B ad C, ita E ad F, ex æquali autem major sit A,quod C.Dico,& D quam F majorem esse, & si æqualis, æqualem, & si minor, minorem. Quoniam enim A major est quam C alia verò utcumque B, & major ad eandem majorem habet rationem, quàm minor, (1) habebit A ad B majorem rationem, quam C ad B. Sed, ut A ad B, ita D ad E; & convertendo, ut C ad B, ita F ad E; ergo, & D ad E majorem habet rationem quàm F ad E. Ad eandem verò rationem habentium, quæ majorem habet rationem, illa major est; (2) major igitur est D quam F. Similiter ostendemus, & si A sit æqualis C, & D ipsi F æqualem esse,& si minor,minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint & aliæ ipsis numero æquales,quæ binæ sumantur, & in eadem ratione, ex æquali autem prima major sit, quam tertia, & quarta quam sexta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor,minor. Quod ostendere oportebat.

THEO-

(1) 8.hujus. (2) 10.hujus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, & ex æquali prima major sit quam tertia, & quarta, quam sexta major erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C & aliæ ipsis numero æquales D, E, F binæ sumtæ, & in eadem ratione; Si autem perturbata earum proportio, videlicet ut A quidem ad B; ita E ad F; ut verò B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit, quam C. Dico, & D quam F majorem esse, & si æqualis, æqualem, & si minor, minorem. Quoniam enim major est A, quam C, alia verò B; habebit A ad B majorem rationem, quam C ad B. (1) Sed, ut A ad B, ita E ad F, & convertendo, ut C ad B, ita E ad D. Quare, & E ad F majorem habebit rationem, quam E ad D. Ad quam verò eadem majorem rationem habe[illegible]lla minor est; (2) minor igitur est F, [illegible] D; ac propterea D quam F major [illegible] Similiter ostendemus, & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, & ex æquali prima major sit quam tertia: & quarta, quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; quod demonstrare oportebat.

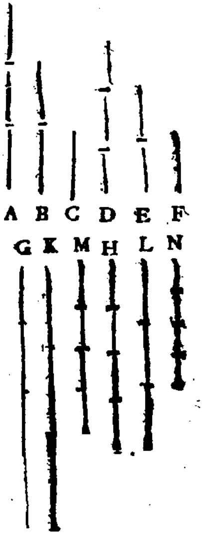
THEO-

---

(1) 8. hujus. (2) 10. hujus.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione; & ex æquali in eadem ratione erunt.



Sint quotcumque magnitudines A, B, C & aliæ ipsis numero æquales D, E, F binæ sumtæ in eadem ratione, sitque ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico, & ex æquali in eadem ratione esse ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipsarum quidem A, D æque multiplices G, H; ipsarum vero B, E aliæ utcumque æque multiplices, K, L, & ipsarum C, F aliæ utcumque æque multiplices M, N. Quoniam igitur est, ut A ad B, ita D ad E, & sumtæ sunt ipsarum A, D æque multiplices G, H, & ipsarum B, E aliæ utcumque æque multiplices K, L; erit, ut G ad K, ita H ad L. (1) Eadem quoque ratione erit, ut K ad M, ita L ad N. Et quum sint tres magnitudines G, K, M, & aliæ ipsis numero æquales H, L, N binæ sumtæ, & in eadem ratione, ex æquali si G superat M, & H ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; (2) suntque G, H ipsarum A, D æque multiplices, & M, N ipsarum C, F aliæ utcumque æque multiplices. Ut igitur A ad C, ita erit D ad F. (3) Quare si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, in eadem ratione, & ex æquali in eadem ratione erunt. Quod demonstrare oportebat.

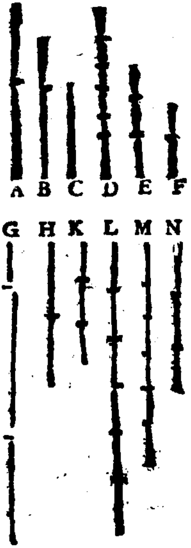
Quod si plures, quàm quatuor quantitates utrinque fuerint, eodem prorsus ratiocinio ostendetur, primam esse

(1) 4. hujus. (2) 20. hujus. (3) coroll. lem.

ad quartam ex una parte, uti prima est ad quartam ex altera parte. Si enim, post quam ostensum erit, primam esse ad tertiam ex una parte, sicuti prima ad tertiam ex altera parte, rursus considerentur tres magnitudines ex una parte, hoc est prima, tertia, & quarta, & tres aliæ ex altera parte, hoc est prima, tertia, & quarta, quæ bina sumuntur in eadem ratione; similiter ostendetur, primam esse ad quartam ex una parte, uti prima ad quartam ex altera parte.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ bina sumantur in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio, & ex æquali in eadem ratione erunt.



Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ ipsis numero æquales binæ sumtæ in eadem ratione D, E, F; sit autem perturbata earum proportio, & sit, ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. Dico, ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A, B, D æque multiplices G, H, L ipsarum verò C, E, F aliæ utcumque æque multiplices K, M, N. Et quoniam G, H æque multiplices sunt ipsarum A, B: partes autem eodem modo multiplicium eandem habent rationem; (1) erit, ut A ad B; ita G ad H: & simili ratione, ut E ad F, ita M ad N; atque est, ut A ad B, ita E ad F; ut igitur G ad H, ita M ad N. (2) Rursus quoniam est, ut B ad C, ita D ad E; & sumtæ sunt ipsarum B, D æque multiplices H, L; ipsarum verò C, E aliæ utcumque æque multiplices K, M: erit, ut H ad K, ita L ad M; (3) ostensum autem est, & ut G ad H, ita esse M ad N. Quo-

niam

(1) 17 hujus. (2) 11 hujus. (3) 4 hujus.

niam igitur tres magnitudines proportionales sunt G, H, K, & aliæ ipsis numero æquales L, M, N binæ sumtæ in eadem ratione, estque ipsarum perturbata proportio; ex æquali si G superat K, & L ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor; (4) sunt autem G, L ipsarum A, D æque multiplices, & K, N æque multiplices ipsarum C, F; ut igitur A ad C, ita erit D ad F. (5) Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio; & ex æquali in eadem ratione erunt; quod demonstrare oportebat.

Eodem ratiocinio demonstrabitur, si plures magnitudines utrimque fuerint, quam tres, quæ bina sumantur in eadem ratione, sitque perturbata earum proportio, ex æque proportionales esse, si namque postquam erit ostensa in tribus æqua ratio, rursus tres ex una parte considerentur magnitudines, & tres ex altera parte, quæ bina sumantur in eadem ratione, quarum proportio est perturbata.

(4) 22. hujus. (5) corol. 4. ejusdem.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXIV.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habeat autem, & quinta ad secundam rationem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima, & quinta ad secundam eandem rationem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam.

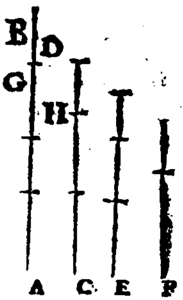
PRima enim AB, ad secundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem, & quinta BG ad secundam C rationem eandem, quam sexta EH ad quartam F. Dico, & compositam primam, & quintam AG ad secundam C eandem rationem habere, quam tertia, & sexta DH ad quartam F. Quoniam enim est, ut BG ad C, ita EH ad F; erit convertendo, ut C ad BG, ita F ad EH. Et quoniam, ut AB ad C, ita est DE ad F; ut autem C ad BG, ita F ad EH: erit ex æquali, ut AB ad BG, ita DE ad EH: (1) quod quum divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt: ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE: sed & ut GB ad C, ita EH ad F: ergo ex æquali, ut AG ad C, ita erit DH ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habeat autem, & quinta ad secundam rationem eandem, quam sexta ad quartam; & composita prima, & quinta ad secundam eandem rationem habebit, quam tertia, & sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.

THEO-

(1) 22. hujus.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis majores erunt.



SInt quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F: & sit ut AB ad CD, ita E ad F: sit autem maxima ipsarum AB, & F minima. Dico AB, F ipsis CD, E majores esse. Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG, ipsi verò F æqualis CH. Quoniam igitur est, ut AB ad CD, ita E ad F; estque AG æqualis E, & CH æqualis F, erit ut AB ad DC, ita E ad F. Et quoniam ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH: & reliqua GB ad reliquam HD erit, ut tota AB ad CD totam: (1) major autem est AB, quàm CD: ergo, & GB, quàm HD major. Quod quum AG sit æqualis ipsi E, & CH ipsi F: erunt AG, F ipsis CH, E æquales: si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt: ergo GB, HD inæqualibus existentibus, quippè quum GB sit major, si ipsi quidem GB addantur AG, F; ipsi verò HD addantur GH, E, fient AB, F ipsis CD, E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum, & minima duabus reliquis majores erunt. Quod demonstrare oportebat.

Quæ sequuntur propositiones Euclidis non sunt, sed ab aliis desumta; ob frequentem verò usum ab interpretibus Euclideis subjunguntur.

(1) 19. hujus.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

Si prima ad secundam majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam, & convertendo secunda ad primam minorem rationem habebit, quam quarta ad tertiam.

HAbeat AB ad BC majorem rationem, quam DE ad EF. Dico CB ad BA minorem rationem habere, quam FE ad ED. Ut enim AB ad BC, ita fit DE ad aliam aliquam, ut ad G; ergo DE ad G majorem habebit rationem, quam DE ad EF, ac propterea G minor erit, quam EF; (1) ponatur ipsi G æqualis EH. Quoniam igitur est, ut AB ad BC, ita DE ad EH; erit convertendo, ut CB ad BA, ita HE ad ED. Sed HE ad ED minorem rationem habet, quam FE ad ED; ergo & CB ad BA minorem habebit rationem, quam FE ad ED; quod demonstrare oportebat.

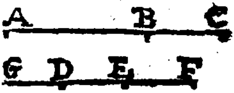
Similiter autem, & si AB ad BC minorem rationem habeat, quam DE ad EG, demonstrabimus convertendo CB ad BA majorem habere rationem, quam GE ad ED. Sed, ut AB ad BC, ita fit DE ad aliam, ut ad EF, quæ major erit, quàm EG; quare convertendo, ut CB ad BA, ita FE ad ED; at FE ad ED majorem habet rationem, quam GE ad ED; ergo CB ad BA majorem rationem habebit, quam GE ad ED.

THEO-

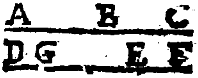
(1) 10. hujus.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

Si prima ad secundam majorem rationem habeat, quam tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam majorem habebit rationem, quam secunda ad quartam.



HAbeat AB ad BC majorem rationem, quam DE ad EF; dico AB ad DE majorem rationem habere, quam BC ad EF. Ut enim AB, ad BC, ita alia quædam GE sit ad EF; manifestum est eam majorem esse, quàm DE; (1) quare permutando, ut AB ad GE, ita est BC ad EF; habet autem AB ad DE majorem rationem, quam AB ad GE, hoc est quam BC ad EF; ergo AB ad DE majorem rationem habebit, quam BC ad EF; quod oportebat demonstrare.



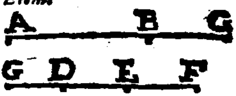
Eadem ratione, & si AB ad BC minorem habeat rationem, quam DE ad EF; sequetur permutando AB ad DE minorem rationem habere, quam BC ad EF. Erit enim, ut AB ad BC, ita alia quædam GE ad EF; quæ minor sit, quàm DE: sed AB, ad DE minorem habet rationem, quam AB ad GE, videlicet, quam BC ad EF: habebit igitur AB ad DE minorem rationem, quam BC ad EF.

(1) 10. hujus.

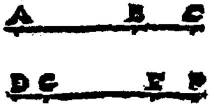
THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si prima ad secundam majorem rationem habent, quam tertia ad quartam: etiam componendo prima, & secunda ad secundam majorem rationem habet, quam tertia, & quarta ad quartam.

HAbeat AB ad BC majorem rationem, quam DE ad EF. Dico AC ad CB majorem habere rationem, quam DF ad FE. Ut enim AB ad BC, ita sit alia quædam GE ad EF; erit GE major, quàm DE. (1) Quoniam igitur est, ut AB ad BC, ita GE ad EF; erit componendo, ut AC ad CB, ita GF ad FE. (2) Sed GF ad FE majorem rationem habet, quam DF ad FE; (3) & AC ad CB majorem habebit rationem, quam DF ad FE. Quod demonstrare oportebat.



Quòd si AB ad BC minorem rationem habeat, quàm DE ad EF; habebit etiam componendo AC ad CB minorem rationem, quam DF ad FE. Rursus enim, quoniam AB ad BC minorem rationem habet, quam DE ad EF; si ut AB ad BC, ita fit alia quædam ad FE, velut GE, erit ea minor quàm DE, (4) & ut AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet rationem, quàm DF ad FE; ergo, & AC ad CB minorem rationem habebit, quàm DF ad FE.



(1) 10. hujus. (2) 18. hujus. (3) 13. hujus. (4) 10. hujus

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

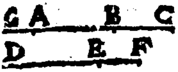
Si prima, & secunda, ad secundam majorem habeat rationem, quam tertia, & quarta, ad quartam, & dividendo prima ad secundam majorem rationem habebit, quam tertia ad quartam.

Habeat AC ad CB majorem rationem, quam DF ad FE. Dico AB ad BC majorem rationem habere, quam DE ad EF. Ut enim DF ad FE, ita sit alia quædam GC ad CB; erit utique GC minor, quàm AC; (1) & dividendo GB ad BC, ut DE, ad EF: (2) at AB ad BC majorem rationem habet, quam GB ad BC; ergo, & AB ad BC majorem habebit rationem, quàm DE ad EF.

Si verò AC ad CB minorem habeat rationem, quam DF ad FE; & dividendo AB ad BC minorem rationem habe-

(1) 10. hujus. (2) 17. hujus. (3) 13 hujus.

habebit, quam DE ad EF; si enim rursus sit, ut DF ad FE, ita alia quædam GC ad CB; erit GC, quàm AC major: (4) atque erit dividendo GB ad BC, ut DE ad



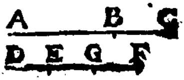
EF; (5) habet autem AB ad BC minorem rationem, quàm GB ad BC; ergo & minorem rationem habebit, quàm DE ad EF.

(4) 10. hujus. (5) 17. hujus.

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

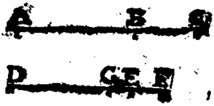
Si prima, & secunda, ad secundam majorem rationem habeat, quam tertia, & quarta, ad quartam; per conversionem rationis prima, & secunda, ad primam minorem habebit rationem, quam tertia, & quarta ad tertiam.

HAbeat AC ad CB majorem rationem, quàm DF ad FE. Dico CA ad AB minorem habere rationem, quàm FD ad DE. Sit enim, ut AC ad CB, ita DF ad



aliam quandam, erit utique ad minorem, quam FE, velut ad FG; quare per conversionem rationis, ut CA ad AB, ita erit FD ad DG, (1) sed FD ad DG minorem rationem habet, quam FD ad DE; ergo & CA ad AB minorem habebit rationem, quàm FD ad DE.

Similiter autem, & si AC ad CB minorem rationem habeat, quam DF ad FE; habebit per conversionem rationis CA ad AB majorem rationem, quam FD ad DE. Erit enim, ut AC ad CB, ita DF ad FG majorem, quàm FE; reliqua verò manifesta erunt.



(1) Coroll. 19. hujus.

THEOREMA XXX PROPOSITIO XXXI.

Si prima ad tertiam majorem rationem habeat, quam secunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit majorem rationem, quam prima, & secunda ad tertiam, & quartam.

Habeat AB ad DE majorem rationem, quam BC ad EF, dico, & AB ad DE majorem rationem habere, quam AC ad DF. Sit enim, ut AB ad DE, ita BC ad aliam; erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG; tota igitur AC ad totam DG est, ut AB ad DE. (1) Sed AC ad DG majorem rationem habet, quam ad DF; (2) ergo AB ad DE majorem habebit rationem, quam AC ad DF, & manifestum est totam AC ad totam DF minorem rationem habere, quam AB ad DE, & si minor sit ratio partis, totius major erit.

(1) 12. hujus.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

Si tota ad totam majorem habeat rationem, quam ablata ad ablatam, reliqua ad reliquam majorem rationem habebit, quam tota ad totam.

Habeat AC ad DF majorem rationem, quam AB ad DE. Dico, & reliquam BC ad reliquam EF majorem rationem habere, quam AC ad DF. Sit enim, ut AC ad DF, ita AB ad DG, ergo, & reliqua BC ad reliquam GF est, ut AC ad DF. (1) Sed BC ad EF majorem rationem habet, quam ad FG; ergo & BC ad EF majorem habebit rationem, quam AC ad DF.

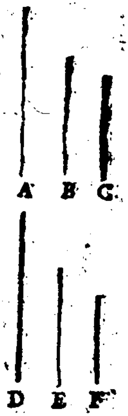
Si verò AC ad DF minorem rationem habeat, quam AB ad DE, & reliqua BC ad reliquam EF minorem rationem habebit, quam AC ad DF, quod eodem, quo suprà, modo ostendetur.

THEO-

(1) 19. hujus.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales; habeatque prima priorum ad secundam majorem rationem, quam prima posteriorum ad secundam; secunda verò priorum ad tertiam majorem rationem habeat, quam secunda posteriorum ad tertiam: etiam ex æquali prima priorum ad tertiam majorem habebit rationem, quam prima posteriorum ad tertiam.



HAbeat A ad B majorem rationem, quam D ad E, & B ad C majorem rationem habeat, quam E ad F. Dico ex æquali A ad C majorem habere rationem, quam D ad F. Quoniam enim A ad B majorem rationem habet, quam D ad E, habebit permutando A ad D majorem rationem, quam B ad E, (1) & eadem ratione B ad E majorem, quam C ad F; ergo A ad D majorem habet rationem, quam C ad F; & rursus permutando A ad C majorem habebit, quam D ad F. (2) Quod oportebat demonstrare.

Quod si prima priorum ad secundam minorem habeat rationem, quam prima posteriorum ad secundam; secunda verò priorum ad tertiam minorem rationem habeat, quam secunda posteriorum ad tertiam: similiter demonstrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem rationem habere, quam primam posteriorum ad tertiam.

FINIS LIBRI QUINTI.

(1) 29. hujus. (2) 27. hujus.

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER SEXTUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.

Ex g. si sint duo triangula, inter se æquiangula, hoc est, quod singuli anguli unius sint æquales singulis angulis alterius, habeantque circa æquales angulos latera proportionalia, hoc est, quod bina latera, quæ sunt circa singulos angulos unius, eam habeant inter se rationem, quam inter se habent bina latera, quæ sunt circa singulos æquales angulos alterius, dicuntur triangula hæc inter se similia.

2. Reciprocæ figuræ sunt, quando in utraque figura antecedentes, & consequentes termini rationum fuerint.

Hoc est, si sint duo parallelogramma, quæ latera ita habeant proportionalia, ut primus, & quartus terminus proportionis sint circa unum angulum unius, secundus verò, & tertius terminus sint circa unum angulum alterius, dicentur parallelogramma hæc reciproca. Idipsum est intelligendum de triangulis.

3. Extrema, ac media ratione secari recta linea dicitur, quando fit, ut tota ad majorem portionem, ita major portio ad minorem.

4. Altit-

4. Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur.

Perpendicularis hæc, quæ à vertice figuræ ad basim ducitur, vel intra figuram in basim, vel extra eandem in basim productam cadere potest. Animadvertendum autem hic est, figuras, quæ sunt inter easdem parallelas, esse æque altas, sive eandem habere altitudinem. Nam earum altitudines, neque majores, neque minores esse possunt recta linea inter parallelas ipsas intercepta, quæ ad utramque parallelam est perpendicularis, quæque est distantia, qua parallelæ distant inter se. Et contra, figuræ æquè altæ, quarum bases sunt in eadem recta linea, sunt inter easdem parallelas, hoc est si conjungantur earum vertices quadam recta linea, hæc est parallela lineæ, in qua figurarum bases sunt positæ. Quum enim altitudines sint æquales, & perpendiculares eidem rectæ, in qua sunt posita bases figurarum, erunt quoque inter se parallelæ, ac proinde ea rectæ, quæ ipsas conjungunt, hoc est lineæ, in qua sunt bases figurarum, & illa, quæ earundem vertices connectit, erunt quoque parallelæ, ut patet ex prop. 33. lib. 1.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

Docet in hac definitione Euclides, quid sit ratio composita, atque esse illam ait, quæ nascitur ex multiplicatione quantitatum rationum, ex quibus componitur. Rationum quantitates diximus in def. 3. lib. 5. haberi quoties antecedens rationis per consequentem dividatur, sive si rationes instar fractionum numericarum scribantur. Si igitur quantitates rationum sic repertæ invicem multiplicentur, productum, ex hac multiplicatione proveniens, erit ratio composita ex illis rationibus, quarum quantitates multiplicantur. Sic si sunt rationes 2 ad 3, & 5 ad 7, quarum quantitates sunt $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$; si invicem hæ quantitates multiplicentur (quod fit ducendo antecedentem unius in antecedentem alterius, & consequentem unius in consequentem alterius) habebitur ratio $\frac{10}{21}$ sive 10 ad 21 composita ex rationibus 2 ad 3, & 5 ad 7. Non

aliter

aliter se res habet in rationibus surdis, ut si sint rationes A ad B, & C ad D, quarum quantitates $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ *si invicem multiplicentur, habebitur ex iisdem ratio composita. Fit autem hujusmodi multiplicatio, ut docetur in Algebra, si antecedentes simul, & consequentes simul scribantur: ac proinde ratio composita ex rationibus A ad B, & C ad D, sive ex* $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ *erit* $\frac{AC}{BD}$, *sive AC, ad BD.*

Si rationes, quæ invicem multiplicantur sint duæ, & inter se æquales, ratio ex iisdem composita dicitur ratio duplicata unius ex iisdem; si vero sint tres, & æquales inter se, dicitur ratio triplicata unius ex iisdem, si quatuor fuerint, & æquales, dicitur quadruplicata &c. Non confundenda vero est ratio duplicata cum ratione dupla, neque triplicata cum ratione tripla &c. Nam ratio dupla ex additione duarum rationum æqualium fit, ratio vero duplicata ex earundem multiplicatione, ut dictum est. Sic ratio dupla rationis 3 ad 1 est ratio 6 ad 2, quæ nascitur ex additione ejusdem rationis 3 ad 1 sibi metipsi; at ratio duplicata rationis 3 ad 1 est ratio 9 ad 1, quæ provenit ex multiplicatione ejusdem rationis 3 ad 1 in semetipsam. Idem est intelligendum de ratione tripla, & ratione triplicata, &c.

L E M M A I.

Si duæ magnitudines per eandem magnitudinem multiplicentur, eandem habebunt inter se rationem post multiplicationem, quam habebant, quum simplices erant.

Ut quod hic proponitur, facilius intelligatur, demonstremus id primò in numeris. Sint numeri 3, & 4, qui per eundem numerum 5 multiplicentur. Dico productum, quod provenit ex multiplicatione 3 in 5, esse ad productum, quod habetur ex multiplicatione 4 in 5, ut 3 se habent ad 4. Quoniam enim ex natura multiplicationis unitas est ad numerum multiplicantem, uti numerus multiplicatus se habet ad productum, erit 1 ad 5, ut 3 ad 15, qui numerus est, qui producitur ex multiplicatione 3 in 5. Eadem ratione, 1 est ad 5, ut 4 se habet ad 20, qui numerus est, qui producitur ex 4 in 5. Ergo 3 est ad 15, ut 4 ad 20,

mira-

utraque enim ratio est æqualis rationi 1 ad 5. (1) Ergo permutando 3 est ad 4, ut 15 est ad 20, quod erat demonstrandum.

Sed sint quæcumque magnitudines A, B, quæ per eandem magnitudinem C multiplicentur. Dico A ad B esse, ut AC ad BC, quæ quantitates sunt, quæ producuntur ex A in C, & B in C. Quoniam enim ex natura multiplicationis ita se habet unitas ad magnitudinem C multiplicantem, ut A, quantitas multiplicata ad productum AC; & eadem ratione unitas est ad C, ut B ad BC, erit A ad AC, uti B ad BC, (2) ac proinde permutando A est ad B, ut AC ad BC: Si igitur duæ magnitudines per eandem magnitudinem multiplicentur, eandem habebunt, inter se rationem post multiplicationem, quam habebant, quum erant simplices, quod erat ostendendum.

(1) 11. quinti. (2) 11. quinti.

LEMMA II.

Si inter datas duas magnitudines quæcumque interponantur magnitudines, ratio datarum magnitudinum erit composita ex rationibus mediarum.

Demonstremus & hoc primò in numeris. Sint duo numeri, 3 & 4, inter quos quicumque, & quotcumque numeri interponantur 5, 7, 9, 6. Dico rationem 3 ad 4 compositam esse ex rationibus 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9, 9 ad 6, 6 ad 4. Quoniam enim ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates invicem multiplicatæ aliquam efficiunt rationem; & quantitates prædictarum rationum sunt $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{6}$, $\frac{6}{4}$; si hæ invicem multiplicentur, habebitur ratio ex iisdem composita. Sed iis invicem multiplicatis fit $\frac{5670}{7560}$, sive 5670 ad 7560. Ergo hæc est ratio ex illis composita. At numerus 5670 ad numerum 7560 se habet, ut 3 ad 4, quia 5670 fit ex multiplicatione 3 in 1890, & 7560 fit ex multiplicatione 4 in eundem numerum 1890. (1) Ergo ratio 3 ad 4 componitur ex rationibus

(1) lem. 1.

tibus mediorum numerorum, qui inter 3 & 4 interponuntur.

Non dissimili ratione idipsum demonstratur in quibuscumque magnitudinibus. Sint quaecumque duae magnitudines A, & B, inter quas interponantur quaecumque, & quotcumque magnitudines C, D, E, F. Dico, rationem A ad B compositam esse ex rationibus A ad C, C ad D, D ad E, E ad F, F ad B. Harum rationum quantitates sunt

$\frac{A}{C}, \frac{C}{D}, \frac{D}{E}, \frac{E}{F}, \frac{F}{B}$, *quae si invicem multiplicentur, fit*

$\frac{ACDEF}{CDEFB}$, *hoc est ACDEF, ad CDEFA, quae erit ratio composita ex ipsis; sed ACDEF ad CDEFB est ut A ad B, quia A, & B per eandem magnitudinem CDEF multiplicantur. (1) Ergo ratio A ad B ex rationibus interpositarum magnitudinum componitur. Si ergo inter datas duas magnitudines &c. Quod erat demonstrandum.*

---

(1) lem. 2.

COROLLARIA.

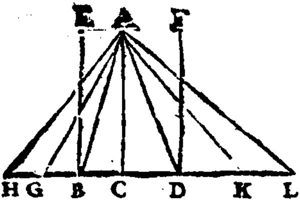
1. Si igitur sint tres magnitudines A, B, C in continua proportione, prima A ad tertiam C duplicatam habebit rationem ejus, quam habet prima A ad secundam B, quia ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, quae duae rationes inter se sunt equales ex hypothesi.

2. Et si sint quatuor magnitudines in continua proportione A, B, C, D; prima A ad quartam D triplicatam habebit rationem ejus, quam prima magnitudo A habet ad secundam D, quia ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, B, ad C, C ad D, quae sunt aequales inter se ex hypothesi.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Triangula, & parallelogramma, quae eandem habent altitudinem, inter se sunt, ut bases.

Sint triangula quidem ABC, ACD; parallelogramma verò EC, CF, quae eandem habeant altitudinem, videli-

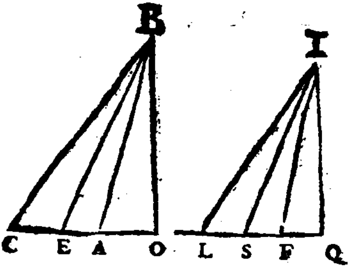


delicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. Dico, ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Producatur enim BD ex utraq; parte ad puncta H, L, & ipsi quidem BC basi ęquales quotcumque ponantur BG, GH; ipsi vero basi CD ponantur quotcumque ęquales DK, KL: & AG, AH, AK, AL jungantur. Quoniam igitur CB, BG, GH inter se ęquales sunt, erunt & triangula AHG, AGB, ABC inter se ęqualia; (1) ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex est LC basis, ipsius basis CD, totuplex est, & triangulum ALC ipsius ACD trianguli. Et si ęqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est ęquale, & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC, & si minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC, CD, & duobus triangulis ABC, ACD sumta sunt ęque multiplicia, basis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis verò CD, & trianguli ACD, alia utcumque ęque multiplicia, nempè CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si ęqualis, ęquale; & si minor, minus; est igitur, ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. (2) Et quoniam trianguli ABC duplum est parallelogrammum EC, (3) & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum: partes autem eodem modo multiplicium eandem inter se rationem habent; (4) erit, ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est, ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita

(1) 38. primi. (2) corol. 1. lem. lib. quinti.
(3) 41. primi. (4) 15. quinti.

ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum: erit ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. (5) Quare triangula, & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter se sunt, ut bases; quod demonstrare oportebat.

COROLLARIUM.



Triangula, & Parallelogramma, quæ eandem, aut æquales bases habent, inter se sunt, ut altitudines. Sint triangula BCA, ILF, quæ bases CA, LF æquales habeant, altitudines verò BO, IQ inæquales. Dico triangulum BCA esse ad triangulum ILF, ut altitudo BO ad altitudinem IQ. Fiat OE ipsi CA æqualis, & QS ipsi LF, ducanturque BE, IS. Si in triangulis BEO, ISQ considerentur BO, IQ ut bases, ut altitudines verò EO, SQ, quæ sunt inter se æquales, erunt triangula BEO, ISQ, ut bases BO, IQ. Sed triangulum BEO est æquale triangulo BCA, (bases enim CA, EO æquales habent, & sunt inter easdem parallelas, quia altitudinem BO eandem habent) & eadem ratione triangulum ISQ est æquale triangulo ILF. Ergo triangulum BCA est ad triangulum ILF, ut altitudo BO est ad altitudinem IQ. Idem demonstratur de parallelogrammis, quæ habent bases æquales, & altitudines inæquales, quia parallelogramma sunt dupla triangulorum.

THEO-

(5) 1. quinti.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

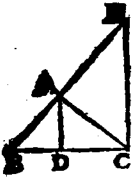
TRianguli enim ABC uni laterum BC parallela ducatur DE. Dico, ut BD ad DA, ita esse CE ad EA. Jungantur enim BE, CD; triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale; in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE, BC parallelis; (1) aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habent rationem; (2) ergo, ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. Ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est BD ad DA; nam quum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt, uti bases; (3) & ob eandem causam, ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA: & ut igitur BD ad DA, ita est CE ad EA. (4) Sed trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secta sint, & ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; & jungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse. Iisdem enim constructis, quoniam est, ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit, ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE (5) Quod quum utrumque triangulum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habeat rationem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; (6) & sunt in eadem basi DE; æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem sunt parallelis; (7) ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera pro-

(1) 37. primi. (2) 7. quinti. (3) Ex antecedente. (4) 11. quinti (5) 11. quinti (6) 9. quinti. (7) 39. primi.

proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit; quod oportebat demonstrare.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, secet etiam basim; basis partes eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem rationem habeant, quam reliqua trianguli latera, quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli, angulum bifariam secabit.



SIt triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam recta linea AD. (1) Dico, ut BD ad DC, ita esse BA ad AC. Ducatur enim per C ipsi DA parallela CE, (2) & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD, EC incidit recta linea quædam AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. (3) Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD, ergo, & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. Rursus quoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC; ostensus autem est, & angulus ACE angulo BAD æqualis; ergo, & ACE ipsi AEC æqualis erit: ac proptereà latus AE æquale lateri AC. (4) Et quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; erit, ut BD ad DC, ita BA ad AE; (5) æqualis autem est AE ipsi AC; est igitur, ut BD ad DC, ita BA ad AC. (6) Sed sit, ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. Dico angulum BAC bifariam sectum esse recta linea AD; iisdem enim constructis, quoniam est, ut BD ad DC, ita BA ad AC; Sed, & ut BD ad DC, ita BA ad AE: etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD; (7) erit, & ut BA ad AC, ita BA ad AE: ergo AC est æqua-

(1) 9. primi. (2) 31. primi. (3) 29. primi. (4) 6. primi. (5) Ex antecedente. (6) 9. quinti. (7) Ex antecedente.

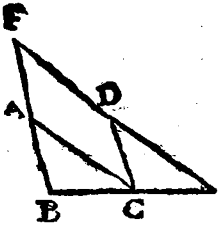
æqualis AE; (8) ac propterea & angulus AEC angulo ECA æqualis. Sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD; angulus verò ACE æqualis alterno CAD; (9) quare, & CAD angulus ipsi BAD æqualis erit; angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea, etiam basim secet, basis partes eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & si basis partes eandem rationem habeant, quam reliqua trianguli latera, quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

(8) 9. quinti. (9) 29 primi.

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

Æquiangulorum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia sunt, & homologa, sive ejusdem rationis sunt latera, quæ æqualibus angulis subtendantur.

SInt æquiangula triangula ABC, DCE quæ angulum quidem ABC angulo DCE, angulum verò ACB angulo DEC æqualem habeant; & præterea angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC, CDE proportionalia esse latera, quæ sunt circa æquales angulos, & homologa latera esse, quæ æqualibus angulis subtenduntur.



Ponatur enim BC in directum ipsi CE. Et quoniam anguli ABC, ACB duobus rectis minores sunt; (1) æqualis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores; quare BA, ED productæ inter se convenient; producantur, & conveniant in puncto F. Et quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC, erit BF ipsi DC parallela. (2) Rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC parallela erit AC ipsi FE; parallelogram-

(1) 17. primi. (2) 28. primi.

grammum igitur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD; AC verò ipsi FD est æqualis. (3) Et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE parallela ducta est AC; erit, ut BA ad AF, ita BC ad CE; (4) æqualis autem est AF ipsi CD: ut igitur BA ad CD, ita BC ad CE; & permutando, ut AB ad BC, ita DC ad CE. Rursus quoniam DC parallela est BF, erit, ut BC ad CE, ita FD ad DE; (6) Sed DF est æqualis AC; ergo ut BC ad CE, ita AC ad ED; permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. Itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE ad ED: erit ex æquali, ut BA ad AC, ita CD ad DE. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa, sivè ejusdem rationis latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Quod demonstrare oportebat.

COROLLARIA.

1. Triangula igitur, quæ sunt æquiangula sunt similia.

2. Si in triangulo uni lateri ducatur recta parallela, hæc secabit ab eodem aliud triangulum ipsi simile. Sic in triangulo EBF ducta DC parallela lateri BF, erit triangulum EDC simile ipsi EFB. Nam angulus EDC æqualis est angulo EFB, exterior nempe interiori, & opposito: & angulus ECD eadem ratione est æqualis angulo EBF; ac denique angulus E est utrique communis, ac proinde æquiangula sunt triangula EDC, EFB, & ideo similia.

---

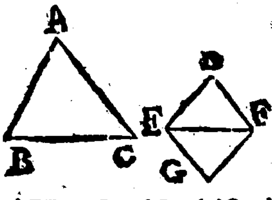
(3) 34. primi. (4) 2. hujus. (5) 7. quinti. (6) 2. hujus.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

SInt duo triangula ABC, DEF, quæ latera proportionalia habeant, sitque ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF, ut autem BC ad CA, ita EF ad FD, & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & æquales habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum verò BCA angulo EFD, &

pro-præterea angulum BAC angulo EDF. Constituantur .n. ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipsa E, F angulo quidem ABC æqualis angulus FEG, angulo autem BCA angulus EFG: (1) quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est æqualis: ideoque æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF; trianngulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa latera sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur; (2) ergo, ut AB ad BC, ita GE ad EF. Sed ut AB ad BC, ita DE ad EF: ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF. (3) Quod quum utraq; ipsarum DE, GE, ad EF eandem rationem habeat, erit DE ipsi EG æqualis. (4) Eadem ratione, & DF æqualis FG. Itaq; quoniam DE est æqualis EG, communis autem EF; duæ DE, EF, duabus GE, EF æquales sunt, & basis DF basi FG æqualis; angulus igitur DEF est æqualis angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. (5) Ergo angulus quidem DFE est æqualis angulo GFE, angulus verò EDF æqualis angulo EGF. Et quoniam angulus FED est æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit & angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione, & angulus ACB æqualis est angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D; ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtendūtur. Quod oportebat demonstrare.

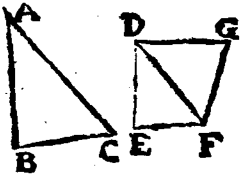


(1) 23. primi. (2) Ex antecedente. (3) 11. quinti.
(4) 9. quinti. (5) 8. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem



autem angulos latera proportionalia, sitque ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & habere angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum verò ACB angulo DFE. Constituatur enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipsa D, F alterutri angulorum BAC, EDF æqualis angulus FDG, angulo autem ACB æqualis DFG; (1) reliquus igitur, qui ad B reliquo, qui ad G est æqualis; ergo triangulum ABC triangulo DGF æquiangulum est; ac propterea, ut BA ad AC, ita est GD ad DF; (2) ponitur autem, & ut BA ad AC, ita ED ad DF; ut igitur ED ad DF, ita GD ad DF; (3) quare EF æqualis est ipsi DG, (4) & communis DF; ergo duæ ED, DF duabus GD, DF æquales sunt, & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est æqualis basi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; (5) ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus verò ad G angulo ad E. Sed angulus DFG æqualis est angulo ACB; & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis: ponitur autem, & BAC angulus æqualis angulo EDF; ergo, & reliquus, qui ad B æqualis reliquo, qui ad E: æquiangulum igitur est triangulū ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.

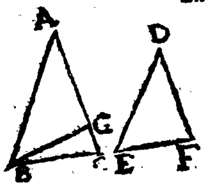
(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 11. quinti.
(4) 9. quinti. (5) 4. primi.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo

gulo



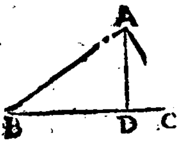
gulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C, F, primum utrumque simul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet, qui ad C, reliquo, qui ad F, æqualem. Si enim inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit. Sit major ABC: & constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsâ B angulo DEF æqualis angulus ABG. (1) Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus verò ABG angulo DEF, erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis; æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF; quare, ut AB ad BG, sic DE ad EF: (2) utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC; & ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG. Quod cum AB ad utramque BC, BG eandem habeat rationem, erit BC ipsi BG æqualis: (3) ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC; (4) minor autem recto ponitur angulus, qui ad C; ergo & BGC minor est recto, & ob id, qui ei deinceps est AGB major recto; (5) atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo, qui ad F; angulus igitur, ad F recto major est; atqui ponitur minor recto, quod est absurdum. Non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF; ergo ipsi est æqualis; est autem, & angulus ad A æqualis ei, qui ad D, quare & reliquus, qui ad C æqualis reliquo, qui ad F. Æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Sed rursus ponatur uterque angulorum, qui ad C, F non minor recto. Dico rursus & sic, triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse. Iisdem enim constructis similiter demonstrabimus BC æqualem ipsi BG, angulumque ad C angulo BGC æqualem; sed angulus qui ad C non est minor recto, non minor igitur recto est BGC; quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis minores, quod fieri non potest. (6) Non igitur rursus inæqualis est ABC angulus angulo DEF; ergo æqualis necessario erit; est autem, &

(1) 23.primi. (2) 4.hujus. (3) 9.primi.
(4) 5.primi. (5) 13.primi. (6) 17.primi.

qui ad A æqualis ei, qui ad D, reliquus igitur, qui ad C reliquo, qui ad F est æqualis; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum est. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VII.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.



Sit triangulum rectangulũ ABC, rectum habens angulum BAC, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD, ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim uterque est, & angulus, qui ad B communis duobus triangulis ABC, ABD erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis; æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD; quare ut BC, quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum, qui ad C trianguli ABC ad BD subtendentem angulum æqualem angulo, qui ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: & adhuc AC ad AD subtendentem angulum, qui ad B communem duobus triangulis; ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum est, & circa æquales angulos latera habet proportionalia: (1) Simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD. (2) Eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse: quare utrumque ipsorum ABD, ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD, ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus, est æqualis recto ADC: Sed, &
BAD

(1) 4 hujus. (2) 1. diff. hujus.

BAD ostensus est æquales ei, qui ad C, erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC; ergo, ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulum ad DA, trianguli ADC, subtendentem angulum, qui ad C æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli BAD subtendens angulum, qui ad B ad DC subtendentem angulum DAC ei, qui ad B æqualem: & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo ad basim perpendicularis ducatur, quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, ductam basis partium mediam proportionalem esse, & adhuc basis, & uniuscujusque partium latus quod ad partem medium esse proportionale. Quod demonstrare oportebat.

PROBLEMA I. PROPOSITIO IX.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

SIt data recta linea AB, oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia, & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D, & ipsi AD æquales ponantur DE, EC, deindè jungatur BC, & per D ipsi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est FD; erit ut CD ad DA, ita BF ad FA; (1) dupla autem est CD ipsius DA; ergo, & BF ipsius FA dupla erit, tripla igitur est BA ipsius AF. Quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.

(1) 2. hujus.

PROBLEMA II. PROPOSITIO X.

Datam rectam lineam insectam, data recta linea secta similiter secare.

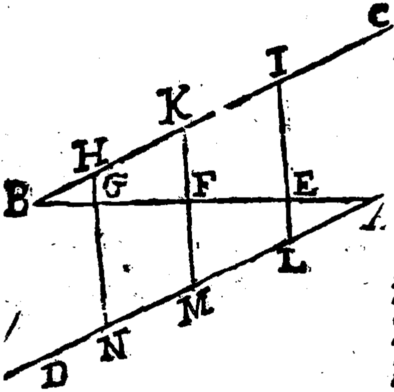
SIt data quidem recta linea insecta AB, secta verò AC; oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. Sit secta AC in punctis D, E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, junctaque BC per puncta, quidem D, E ipsi BC paralleIæ ducantur DF, EG; per D verò, ipsi AB ducatur parallela DHK; parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH, HB: ac propterea DH quidem æqualis FG, HK verò ipsi GB. (1) Et quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC parallela ducta est HE; erit ut CE ad ED, ita KH ad HD; (2) æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD verò ipsi GF est igitur, ut CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed ostensum est, ut CE ad ED, ita esse BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea insecta AB datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur, quòd si plures rectæ ad unum trianguli latus parallelæ ducantur, erunt omnia laterum segmenta proportionalia. Ostensum enim est, ductis in triangulo ABC rectis GE, FD parallelis lateri BC, latera AB, AC divisa esse in segmenta inter se proportionalia; hoc est BG esse ad GF, ut CE ad ED, & GF ad FA, ut ED ad DA.

Ex hac propositione discimus datam rectam in quotvis æquales partes secare. Si enim recta AB in quotlibet æquales partes secunda sit, ducatur recta AC indefinita, quemcumque angulum A cum recta AB efficiens, in qua sumantur tot partes æquales, quot sunt illæ, in quas dividenda est ipsa AB, & eadem fiant, quæ in propositione, factum erit quod erat faciendum. Sed

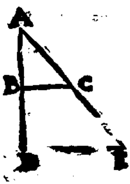
(1) 34. primi. (2) 2. hujus.



Sed magis expeditè idem fit hoc pacto. Sit data AB, quam dividere oporteat in quotlibet æquales partes, ex. g. in quatuor. Ex puncto A ducatur recta AD indefinita, angulum quemcumque DAB efficiens cum data recta AB. Deinde ex puncto B ipsi AD parallela ducatur BC etiam indefinita. In his accipiantur partes æquales AL, LM, MN, & BH, HK, KI; in singulis nempe una pauciores, quam desiderantur in AB; tum rectæ ducantur HN, KM, IL, quæ quadrisecabunt rectam AB. Nam cum IK, ML sint æquales, & parallelæ, erunt MK, IL inter se parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt MK, HN. Ergo cum AN divisa sit in tres partes æquales AL, LM, MN, erit quoque AG divisa in tres æquales partes AE, EF, FG. Similiter BE divisa erit in tres æquales partes AG, GF, FE. Tota igitur AB divisa erit in quatuor partes AE, EF, FG, GB, inter se æquales.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XI.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

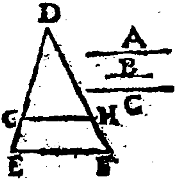


Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AC & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; oportet ipsarum AB, AC, tertiam proportionalem invenire. Producantur enim AB, AC ad puncta D, E, ponaturque ipsi AC æqualis BD, & juncta BC, ducatur per D ipsi BC parallela DE. Quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit ut AB ad BD, ita AC ad CE; æqualis autem est BD ipsi AC; ut igitur BA ad AC, ita est AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB, AC tertia proportionalis inventa est CE. Quod facere oportebat.

Aliter. In figura prop. 8. hujus, data recta BD, DA ad angulos rectos ponantur, & jungantur BA, ex puncto vero A ipsi AB perpendicularis excitetur recta AC; & producatur BD, usque quo conveniat cum AC in puncto C; erit BD, ad DA, ut DA ad DC, & ideo inventa est DC, quæ tertia proportionalis est ipsis BD, DA.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO XII.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.



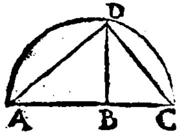
Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, C; oportet ipsarum A, B, C, quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ DE, DF angulum quemvis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis DG, ipsi vero B æqualis GE, & ipsi C æqualis DH; junctaque GH per E ipsi parallela ducatur EF. Itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF, parallela ducta est GH, erit ut DG ad GE; ita DH ad HF; (1) est autem DG ipsi A æqualis; GE vero æqualis B; & DH æqualis C. Ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa est HF. Quod facere oportebat.

(1) 2. hujus.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XIII.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC oportet ipsarum AB, BC mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & in ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD,



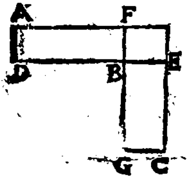
BD, AD, DC jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus ADC, is rectus est; (1) & quoniam in triangulo rectangulo A D C ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB basis partium A B, B C media proportionalis. (2) Duabus igitur datis rectis lineis AB, BC media proportionalis inventa est BD. Quod facere oportebat.

Hinc patet, si ex quovis circumferentiæ puncto D sit ducta ad diametrum AC quavis perpendicularis DB, eam esse mediam proportionalem inter diametri segmenta AB, BC.

(1) 31.tertii. (2) cor.8.hujus.

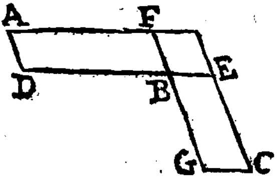
THEOREMA IX. PROPOSITIO XIV.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contrariæ parte sibi ipsis respondent: & quorum parallelogrammorum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; ea inter se sunt æqualia.



Sint æqualia parallelogramma AB, BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB, BE; ergo, & in directum erunt FB, BG. Dico parallelogrammorum AB, BC latera, quæ sunt circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondere: hoc est, ut DB ad BE, ita esse GB ad BF; compleatur enim parallelogrammum FE. Et quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum; erit ut AB ad FE, ita BC ad FE. (1) Sed, ut AB quidem ad FE, ita est DB ad BE; (2) ut autem BC ad FE, ita GB ad BF; & ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF; (3) ergo parallelogrammorum AB, BC latera, quæ circum æquales angulos,

(1) 7.quinti. (2) 1.hujus. (3) 11.quinti.



ex contraria parte sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera, quæ circum æquales angulos, sitquè, ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. Quoniam enim est, ut DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE: (4) & ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit, & ut AB ad FE, ita BC ad FE; (5) æquale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo BC. (6) Ergo æqualium, & unum uni æqualium habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; & quorum parallelogrammorum, unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

(4) 11. quinti. (5) 1. hujus. (6) 9 quinti.

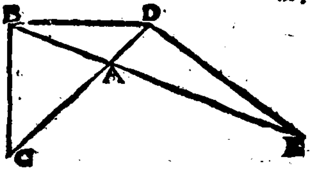
THEOREMA X. PROPOSITIO XV.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondere, hoc est, ut CA ad AD, ita esse EA ad AB. Ponantur enim ita, ut in directum sit CA ipsi AD; ergo, & EA ipsi AB in directum erit; (1) & jungatur ED.

Quo-

(1) 14. quinti.



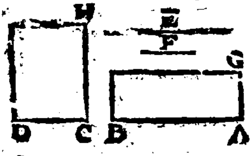
Quoniam igitur triã-gulum ABC æquale est triangulo ADE, aliud autẽ est ABD; erit, ut CAB triangulum ad triangulum ABD, ita triangulũ ADE ad triangulum BAD. (2) Sed, ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita CA ad AD; (3) ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita EA ad AB; & ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB. (4) Quare triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria sibi ipsis respondent. Sed ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera triangulorum ABC, ADE; & sit, ut CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. Juncta enim rursus BD, quoniam, ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum EAD ad BAD triangulum, erit, ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. Utrumque igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet rationem; ac propterea æquale est ABC triangulum triangulo ADE. (5) Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia. Quod demonstrato oportebat.

I. 5 THEO-

(2) 7. quinti. (3) 1. hujus. (4) 11. quinti.
(5) 9. quinti.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XXI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei rectangulo, quod mediis continetur; & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F, sitque, ut AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB, F æquale esse ei, quod ipsis CD, E continetur. Ducantur enim à punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos AG, CH; ponaturque ipsi quidem F æqualis AG: ipsi verò E æqualis CH, & compleantur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur est, ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E æqualis CH, & F ipsi AG; erit, ut AB ad CD, ita CH ad AG; parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se sunt æqualia; (1) ergo parallelogrammum BG æquale est parallelogrammo DH; atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB, F continetur, est enim AG æqualis F; parallelogrammum verò DH, quod continetur ipsis CD, E, quum CH ipsi E sit æqualis; rectangulum igitur contentum AB, F est æquale ei, quod ipsis CD, E continetur. Sed rectangulum contentum AB, F sit æquale ei, quod CD, E continetur. Dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet, ut AB ad CD, ita E ad F. Iisdem enim constructis; quoniam rectangulum contentum AB, F est æquale ei, quod CD, E continetur; atque est contentum quidem AB, F rectangulum BG; etenim AG est æqualis F: contentum verò CD, E est rectangulum DH, quod CH ipsi E sit æqualis; erit parallelogrammum BG æqua-

le.

(1) 14 hujus.

le parallelogrammo DH, & sunt æquiangula; æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent; (2) quare, ut AB ad CD, ita CH ad AG; æqualis autem est CH ipsi E, & AG ipsi F. Ut igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod mediis continetur: & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIUM.

Hinc ad datam rectam lineam facile est rectangulum applicare, quod sit æquale dato rectangulo, ut si datam rectam lineam AB applicari debeat rectangulum æquale dato rectangulo DH: fiat ut BA ad DC, ita HG ad aliam rectam AG; rectangulum enim, quod continetur ex BA, AG æquale est dato rectangulo DH.

Vera est hæc propositio, etiam si BH, DH non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita ut anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales.

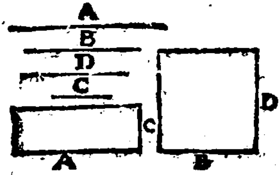
(2) 14. hujus.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XVII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod à media fit, quadrato; & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C; & sit, ut A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum contentum A, C æquale esse ei, quod à media B fit, quadrato. Ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D: erit, ut A ad B, ita D ad C. (1) Si enim quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum extremis contentum æquale est ei, quod me-

(1) 7. quinti.



mediis continentur; (2) ergo rectangulum A, C, contentũ, est æquale ei, quod continentur B, D. Sed rectangulũ contentum BD est æquale quadrato, quod fit ex ipsa B, etenim B est æqualis D; rectangulum igitur contentum A, C est æquale ei, quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum A, C æquale fit quadrato, quod fit ex B. Dico, ut A ad B, ita esse B ad C; iisdem enim constructis: quoniam rectangulum contentum A, C æquale est quadrato, quod fit ex B; at quadratũ, quod fit ex B est rectangulum, quod ipsis B, D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum A, C æquale ei, quod B, D continetur. Si autem rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt; (3) est igitur, ut A ad B, ita D ad C; æqualis autem B ipsi D; ergo, ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum est æquale ei, quod à media fit, quadrato; & si rectangulum extremis contentum æquale fuerit, ei, quod à media fit, quadrato; tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIA.

1. Si ex puncto quopiam sumto in circuli circumferentia ad diametrum perpendicularis recta linea ducatur, hujus perpendicularis quadratum æquale erit rectangulo, quod diametri segmentis continetur. Patet ex corol. prop. 13. hujus libri & ex prima parte hujus propositionis.

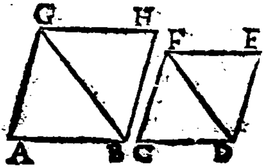
2. Qualibet recta, cujus quadratum est æquale rectangulo, quod à duabus aliis rectis lineis continetur, est media proportionalis inter easdem.

PRO-

(1) 7. quinti. (2) Ex antecedente. (3) Ex antecedente.

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XVIII.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.



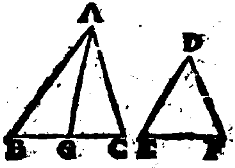
Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CE; oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum describere. Jungatur DF, & ad rectam lineam AB, & ad puncta in ipsa A, B, angulo quidem C æqualis angulus constituatur GAB, (1) angulo autem CDF angulus ABG; reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB est æqualis; ergo æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea, ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. (2) Rursus constituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipsa B, G, angulo quidem DFE æqualis angulus BGH, angulo autem FDE æqualis GBH; ergo reliquus qui ad E, reliquo, qui ad H est æqualis; æquiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH: quare, ut FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. (3) Ostensum autem est, & ut FD ad GB; ita FC ad GA, & CD ad AB; & ut igitur FC ad GA, ita CD ad AB, & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. (4) Itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH, erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione, & CDE est æqualis ipsi ABH; & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H; æquiangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æquales angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit. (5) A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum AH descriptum est. Quod facere oportebat.

THEO-

(1) 23 primi. (2) 4. hujus. (3) 4. hujus.
(4) 22 quinti. (5) def. 1. hujus.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIX.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.



Sint similia triangula ABC DEF, habentia angulum ad B ęqualem angulo ad E, et sit, ut AB ad BC, ita DE ad EF; *ita ut latus* BC *homologum sit lateri* EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus, quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsarum BC, EF tertia proportionalis BG, (1) ut sit, sicut BC ad EF, ita EF ad BG, & jungatur GA. Quoniam igitur, ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando, ut AB ad DE, ita BC ad EF. Sed, ut BC ad EF, ita EF ad BG; & ut igitur AB ad DE, ita EF ad BG; (2) quare triangulorum ABG, DEF latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; quorum autem triangulorum unum uni ęqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent, ea inter se ęqualia sunt; (3) ęquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. Et quoniam est, ut BC ad FE, ita EF ad BG; si autem tres *rectæ* lineæ proportionales sint prima ad tertiam duplicatam rationem habet ejus, quam habet ad secundam: (4) habebit BC ad BG duplicatam rationem ejus, quam habet BC ad EF. Ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. (5) ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam rationem habet ejus, quam BC ad EF; est autem ABG triangulum triangulo DEF ęquale; & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplicatam rationem habebit ejus, quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in duplicata sunt ratione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.

CO

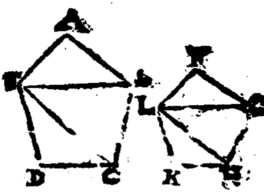
(1) 11. hujus. (2) 11. quinti. (3) 15. hujus.
(4) corol. 1. lem. 2. (5) 1. hujus.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima, ad triangulum, quod à secunda, simile, & similiter descriptum, quod ostensum est, ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF; quod ostendere oportebat.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XX.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet ejus rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



Sint polygona ABCDE, FGHKL inter se similia, ita ut singuli anguli unius sint æquales singulis angulis alterius, & circa æquales angulos latera sint proportionalia; hoc est, ut angulus A sit æqualis angulo F, angulus B angulo G, angulus C angulo H, angulus D angulo K, & angulus E angulo L; & insuper latus AB sit ad latus BC, ut latus FG ad latus GH; & BC ad CD, ut GH ad HK; & CD ad DE ut HK ad KL; & DE ad EA, ut KL ad LF ac denique EA ad AB, ut LF ad FG. Dico primò polygonum ABCDE in tot triangula dividi posse, in quot dividitur polygonum FGHKL. Sumantur in ipsis duo anguli E, L inter se æquales, & ab his ad singulos angulos oppositos ducantur rectæ EB, EC, & LG, LH. Quoniam enim numerus angulorum polygoni ABCDE est æqualis numero angulorum polygoni FGHKL, manifestum est triangula, in quæ dividitur ipsum ABCDE æqualia numero esse triangulis, in quæ ipsum FGHKL dividitur.

Dico secundò triangula polygoni ABCDE triangulis polygoni FGHKL esse similia, singula singulis. Quoniam enim in triangulo ABE est angulus A, qui est æqualis angulo

angulo F in triangulo FGL; & circa angulum A latera sunt AE, AB, quæ in eadem sunt inter se ratione, in qua sunt inter se latera LF, FG, quæ sunt circa angulum F; æquiangula sunt inter se triangula AEE, FLG, (1) habentia quidem angulos ABE, FGL æquales inter se, & angulos AEB, FLG inter se æquales; ac proinde circa æquales angulos latera proportionalia quoque habebunt; (2) & ideo inter se similia. Eadem ratione similia inter se erunt triangula EDC, LKH. Rursus quoniam propter similitudinem triangulorum AFB, FLC, EB est ad BA, ut LG ad GF (3), & ob similitudinem polygonorum AB est BC, ut FG ad GH: erit ex æquo EB ad BC, ut LG ad GH. (4) Et quoniam ABC angulus æqualis est angulo FGH; est & ablatus ABE æqualis ablato FGL, ut est ostensum: ergo & reliquus EDG reliquo LGH est æqualis. Æquiangulum igitur est triangulum EBC triangulo KGH: (5) ac propterea eidem simile. Eodem pacto ostenderetur similia esse alia triangula, si plura fuerint.

Dico tertio triangula hæc esse homologa totis; hoc est ita esse unumquodque triangulum in uno polygono ad sibi simile triangulum in altero polygono, ut totum polygonum ad totum polygonum. Quoniam triangulum AEB est simile triangulo FLG, duplicatam rationem inter se habent ejus, quam habet latus homologum AB ad latus homologum FG. (6) Sed AB ad FG est, ut BC ad GH; (ex hypotesi enim AB est ad BC, ut FG ad GH, ac proinde permutando AB est ad FG, ut BC ad GH) ratio duplicata ejus, quam habet AB ad FG eadem erit, sive æqualis rationi duplicatæ ejus, quam habet BC ad GH: ac proinde triangulum AEB ad triangulum FLG duplicatam habet rationem ejus, quam habet BC ad GH. Rursus triangulum FEC simile est triangulo GLH, ideoque in duplicata ratione erunt inter se ejus, quam habet latus BC ad GH: sed triangulum AEB ad triangulum FLG est quoque in duplicata ratione ejus, quam habet latus BC ad latus GH: triangulum igitur AEB ad triangulum FLG est, ut triangulum BEC ad triangulum GLH. Eadem ratione ostendetur triangulum EDC ad triangulm LKH duplicatam habere rationem ejus, quam habet BC ad GH; ac proinde esse inter se, ut triangulum

(1) 6. hujus. (2) 4. hujus. (3) 4. hujus.
(4) 22. quinti. (5) 6. hujus (6) Ex antecedente.

lum BEC ad triangulum GLH, sive ut triangulum AEB ad triangulum FLG. Eodem pacto ostenderetur alia triangula in duplicata ratione esse ejus, quam habet BC ad latus GH, si plura fuerint. Quum igitur plura sint triangula, quæ ad plura triangula eandem habent rationem, ut unum AEB est ad unum FLG, ita omnia ad omnia, (1) hoc est ut polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL.

Dico denique quartò polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam habere rationem ejus, quam habet homologum latus BC ad homologum latus GH. Quoniam enim polygonum ABCDE ap polygonum FGHKL est ut unum triangulum ad sibi simile triangulum; & singula triangula ad singula triangula sunt in duplicata ratione ejus, quam habet latus homologum BC ad latus homologum FH; Ergo polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL est in duplicata ratione ejus, quam habet latus homologum BC ad latus homologum GH. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur &c. quod erat demonstrandum.

COROLLARIA.

1. Si igitur fuerint tres recta linea proportionales, ut est prima ad tertiam, ita erit polygonum super prima descriptum ad polygonum super secunda simile, similiterque descriptum; vel ita erit polygonum super secunda descriptum ad polygonum super tertia simile, similiterque descriptum. Patet ex hac, & ex corol. 1. lem 2. hujus.

2. Si in similibus polygonis homologorum laterum ratio fuerit nota, erit quoque nota ratio ipsorum polygonorum. E. g. duorum polygonorum latera homologa sint inter se sunt, ut 2 ad 6, si inveniatur ipsis 2, & 6, tertius proportionalis numerus 18, erit unum polygonum ad aliud, ut 2 ad 18.

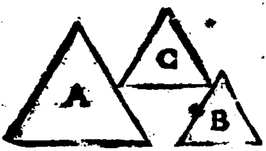
3. Elicitur hinc metodus figuram quamvis recti lineam augendi, aut minuendi secundum rationem datam; ut si velis pentagoni, cujus latus est FL (in figura propositionis) aliud facere quintuplum, inter LF, & quinque LF, inveni mediam proportionalem per prop. 18. hujus, & super hac construe pentagonum simile dato, quod erit ejusdem quintuplum.

THEO-

(1) 21.quinti.

THEOREMA XV. PROPOSITIO XXI.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.



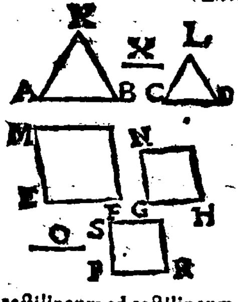
Sint enim utrumque rectilineum A, B simile rectilineo C. Dico, & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. Rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit. Utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare, & recta linea A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XXII.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, EF, GH, & ut AB ad CD, ita sit EF ad GH; describanturque ab ipsis quidem AB, CD similia, & similiter posita rectilinea KAB, LCD: ab ipsis vero EF, GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF, NH. (1) Dico, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum. Sumatur enim ipsarum quidem AB, CD tertia proportionalis X: (2) ipsarum vero EF, GH tertia propor-

(1) 18. hujus. (2) 11. hujus.



portionalis O. Et quoniam est, ut AB ad CD, ita EF ad GH; ut autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali, ut AB ad X, ita EF ad O. Sed, ut AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum, (3) ut autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum, MF ad NH rectilineum. (4) Sed sit, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum MH. Dico, ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. Fiat enim, ut AB ad CD, ita EF ad PR, (5) & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF, NH simile, & similiter positum rectilineum SR. Quoniam igitur est, ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB, CD similia, & similiter posita KAB, LCD rectilinea, ab ipsis vero EF, PR similia, & similiter posita rectilinea MF, SR, erit, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad SR rectilineum. Ponitur autem, & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH; ergo, ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. Quod cum rectilineum MF ad utrumque ipsorum NH, SR eandem habeat rationem, erit rectilineum NH ipsi SR æquale; (6) est autem ipsi simile, & similiter positum: ergo GH est æqualis PR. Et quoniam, ut AB ad CD, ita est EF ad PR, æqualis autem PR ip GH; erit, ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

Quod autem similia, similiterque posita rectilinea inter- Se

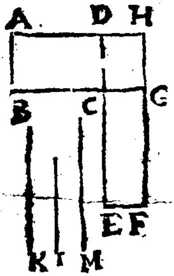
(3) corol.2 hujus. (4) 11.quinti. (5) 12. hujus. (6) 9.quinti.

si aequalia super rectas GH, PR aequales consistant, hoc pacto ostenditur. Quoniam ob similitudinem rectilineorum GH est ad GN, ut PR ad PS, si GH major erit ipsa PR, erit & NG major ipsa PS, ex 14 lib. 5., ac proinde rectilineum NH major erit rectilineo RS, quod est contra hypothesim.

Vera est haec propositio, si tantum tres sint rectae lineae proportionales, ut patet si bis sumatur secunda.

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XXIII.

Aequiangula parallelogramma inter se rationem habent ex lateribus compositam.



Sint aequiangula parallelogramma AC, CF aequalem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex ratione, quam habet BC ad CG, & ex ratione quam DC habet ad CE. Ponatur enim, ut BC sit in directum ipsi CG; ergo, & DC ipsi CE in directum erit: (1) & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quaedam K, & fiat, ut BC quidem ad CG, ita K ad L, (2) ut autem DC ad CE, ita L ad M; rationes igitur ipsis K ad L, & L ad M eaedem sunt, quae rationes laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed ratio K ad M composita est ex ratione K ad L, & ratione L ad M: (3) quare, & K ad M rationem habet ex lateribus compositam. Et quoniam est, ut BC ad CG, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; (4) sed, ut BC ad CG, ita K ad L: erit, & ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. (5) Rursus quoniam est, ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M, & ut L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. (6) Itaque quum ostensum sit, ut K qui-

(1) 14.primi. (2) 12.hujus. (3) lem.2.hujus.
(4) 1.hujus. (5) 11.quinti.

quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF; habet autem K ad M rationem ex lateribus compositam; ergo & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF rationem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma inter se rationem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIA.

1. *Triangula igitur, quæ unum angulum uni angulo æqualem habent, rationem compositam habent inter se ex rationibus, quas habent latera circa æquales angulos, ita ut in uno sint antecedentia, & in altero consequentia, patet ex hac, & 34. lib. 1.*

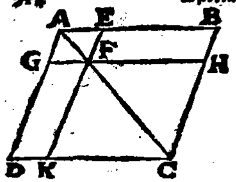
2. *Rectangula inter se, & parallelogramma quæcumque inter se, nec non triangula inter se rationem habent compositam ex rationibus basis ad basim, & altitudinis ad altitudinem. In rectangulis est manifestum. In parallelogrammis vero patet ex 35. lib. 1., quia parallelogramma æqualia sunt rectangulis in eadem basi, & inter easdem parallelas constituti. In triangulis denique liquet ex 34 lib. 1., ex qua est manifestum, triangula esse dimidia parallelogrammorum.*

3. *Ratio parallelogrammorum, & triangulorum sic exhibere potest. Sint ex. g. duo parallelogramma AC, CF, quorum bases sint BC, CG; altitudines verò DC, CE, si fiat ut altitudo DC ad altitudinem CE ita basis CG ad aliam quandam lineam M: erit parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF, ut BC ad M.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XXIV.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti inter se similia sunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG



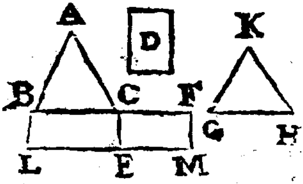
HK. Dico parallelogramma EG, HK, & toti ABCD, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli AFC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit, ut BE ad EA, ita CF ad FA. (1) Rursus quoniam uni laterum trianguli ACD, nempè ipsi CD, ducta est parallela FG, ut CF, ad FA, ita erit DG ad GA; sed, ut CF ad FA, ita ostensa est, & BE ad EA; ergo, & ut BE ad EA, ita DG ad GA, (2) componendoque, ut BA ad AE, ita DA ad AG, & permutando ut BA ad AD, ita EA ad AG; parallelogrammorum igitur ABCD, EG latera, quæ circa communem angulum BAD proportionalia sunt. Et quoniam parallela est GF ipsi DC, angulus quidem AGF est æqualis angulo ADC, (3) angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC, AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione, & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE; (4) totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æquiangulum; ergo, ut AD ad DC, ita AG ad GF. ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & prætereà, ut CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam ostensum est, ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali, ut DC ad CB, ita GF ad FE; ergo parallelogrammorum ABDC, EG proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. Eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. Utrumque igitur ipsorum EG, HK parallelogrammorum parallelogrammo ABCD est simile, quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt; (5) parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo Hk. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

THEO-

(1) 2. hujus. (2.) 18. quinti. (3) 29. primi. (4) 4. hujus. (5) 21. hujus.

THEOREMA VII. PROPOSITIO XXV.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.



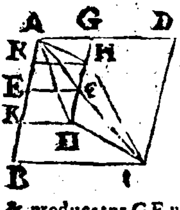
Sit datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D, oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur enim ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale parallelogrammum BE; (1) ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis; in directum igitur est BC ipsi CF & LE ipsi EM. (2) Sumatur ipsarum BC, CF media proportionalis GH, (3) & ab ipsa GH describatur rectilineum KGH, simile, & similiter positum rectilineo ABC, (4) Et quoniam est, ut BC ad GB, ita GH ad CF; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita est figura, quæ fit a prima, ad eam, quæ a secunda, similem, & similiter descriptam, (5) erit, ut BC ad CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH: sed, & ut BC ad CF, ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum; & ut igitur rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF: (6) quare permutando, ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum. Est autem rectilineum ABC æquale parallelogrammo BE; æquale igitur est, & KGH rectilineum parallelogrammo EF. Sed EF parallelogrammum æquale est rectilineo D; ergo, & rectilineum KGH ipsi D est æquale; est autem KGH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato æquale idem constitutum est KGH. Quod facere oportebat.

THEO-

(1) 45. primi. (2) 14 primi. (3) 13. hujus. (4) 18. hujus. (5) corol. 1. 20. hujus. (6. 11. quinti.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XXVI.

Si a parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.



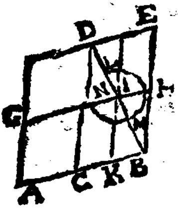
A Parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, simili ipsi ABCD, & similiter positum, communemque ipsi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF. Non enim, sed si fieri potest, sit ipsorum diameter AHC, & producatur GF usque ad H; ducaturque per H alterutri ipsarum AD, BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo KG; & erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile; (1) ergo, ut DA ad AB, ita GA ad AK, (2) est autem, & propter similitudinem parallelogrammorum ABCD, EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE; & ut igitur GA ad AE, ita GA ad AK (3) Quod cum GA ad utramque ipsarum AK, AE eandem rationem habeat, erit AE ipsi AK æqualis, (4) minor majori, quod fieri non potest; non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur a parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.

THEO-

(1) 21. hujus. (2) 1. def. hujus. (3) 11. quinti. (4) 9. quinti.

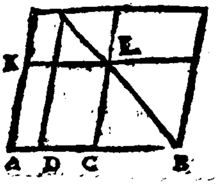
THEOREMA XX. PROPOSITIO XXVII.

Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei, quæ a dimidia describitur, maximum est applicatum, simile existens defectui.



Sit recta linea AB, seceturque bifariam in C, & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma DB, simili, & similiter posita ei, quæ a dimidia ipsius AB descripta est hoc est a CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi DB, maximum esse AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma FB simili, & similiter posita ipsi DB; dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse. Quoniam enim simile est parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eandem diametrum sunt (1) ducatur eorum diameter DB, & describatur figura. Quoniam igitur CF est æquale ipsi FE, (2) commune apponatur FB; totum igitur CH toti KE est æquale. Sed CH est æquale CG, quoniam, & recta linea AC ipsi CB; (3) ergo, & GC ipsi EK æquale erit; commune apponatur CF; totum igitur AF est æquale gnomoni LMN, quare, & DB hoc est AD parallelogrammum, parallelogrammo AF est majus. Omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei, quæ a dimidia describitur, maximum est, quod ad dimidiam est applicatum. Quod demonstrare oportebat.

(1) Ex antecedente. (2) 43. primi. (3) 36. primi.



ALITER. Sit n. rursus AB secta bifariam in puncto C, & applicatum sit AL, deficiens figura LB, & rursus ad rectam linem AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura EB simili, & similiter posita ei, quæ a dimidia AB describitur, videlicet ipsi LB. Dico parallelogrammum AL, quod ad dimidiam est applicatum, majus esse parallelogrammo AE. Quoniam enim simile est EB ipsi LB, circa eandem sunt diametrum; (1) sit ipsorum diameter EB, & describatur figura. Et quoniam LF æquale est LH, etenim FG ipsi GH est æqualis; (2) erit LF ipso EK maius; est autem LF æquale DL; (3) majus igitur est, & DL ipso EK: commune apponatur KD; ergo totum AL toto AE est majus; quod oportebat demonstrare.

---

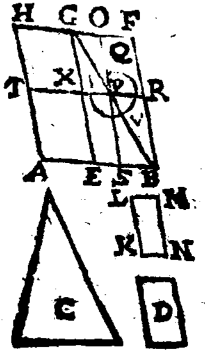
(1) 24. hujus. (2) 36. primi. (3) 43. primi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO XXVIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ; oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, & eo quod a dimidia, & ea, cui oportet simile deficere.

SIt data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam, rectam, lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo, quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D; oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum

ipsi

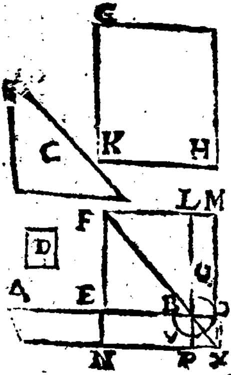


ipsi D; (1) quod sit EBFG, & compleatur A G parallelogrammum: itaque A G, vel æquale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem, & si quidem A G si æquale C, factum jam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma GB, ipsi D simili. Si autem non est æquale, erit HE majus, quam C: atque est HE æquale GB; ergo & GB, quam C est majus; quo autem GB superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur KLMN; (2) sed D est simile GB; quare, & KM ipsi GB simile erit; sit igitur recta linea quidem KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF, & quoniam æquale est GB ipsis C, KM, erit GB ipsi KM majus; major igitur est recta linea GE ipsa KL; & GF ipsa LM; ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrammum; æquale igitur est, & simile GP ipsi KM sed KM simile est GB; ergò, & GP ipsi GB est simile; (3) circa eandem igitur est diametrum GP ipsi GB; (4) sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. Itaque quoniam GB est æquale ipsis C, KM, quorum GP est æquale KM, erit reliquus IVQ gnomon æqualis reliquo C: & quoniam OR est æquale XS, (5) commune apponatur PB; totum igitur, OB toti XB est æquale: sed XB est æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB; (6) quare, & TE ipsi OB æquale; commune apponatur XS; ergo totum TS est æquale toti gnomoni IVQ, at IVQ gnomon ipsi C ostensus est æqualis; & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma PB ipsi D simili, quoniam, & PB simile est ipsi GB; quod facere oportebat.

(1) 18. hujus. (2) 25. hujus. (3) 21. hujus. (4) 26. hujus (5) 43. primi. (6) 36. primi.

PROBLEMA IX. PROPOSITIO XXIX.

Ad datam rectam lineam dato recti lineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.



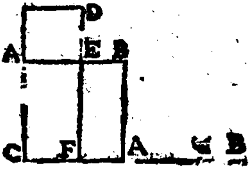
SIt data recta linea AB, datem vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C, cui autem oportet simile excedere, D; itaque oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter positum parallelogrammum describatur BF, (1) & utriusque quidem BF, C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem constituatur GH. (2) Simile igitur est GH ipsi FB. Sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. Et quoniam parallelogrammum GH majus est ipso FB, erit recta linea KH major, quam FL, & KG major, quam EF; producantur FL, FE, & ipsi quidem KH æqualis sit FLM, ipsi vero KG æqualis FEN, & compleatur MN parallelogrammum; ergo MN æquale est, & simele ipsi GH; sed GH est simile EL, & MN igitur ipsi EL simile erit; (3) ac propterea circa eandem diametrum est EL ipsi MN. (4) Ducatur ipsorum diamter FX, & figura describatur. Itaque quoniam GH ipsis EL, C; est æquale, sed GH est æquale MN, erit & MN æqualis ipsis EL, C; commune auferatur EL reliquus igitur QJV gnomon ipsi C est æqualis. Et quoniam AE est æqualis EB, æquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo EB, hoc est ipsi LO; commune apponatur EX: totum igitur AX æqua-

(1) 18. hujus. (2) 25 hujus. (3) 21. hujus. (4) 26. hujus.

æquale est gnomoni QIV. Sed QVI gnomon est æqualis C; ergo, & AX ipsi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO ipsi D simili, quoniam, & ipsi EL simile est OP. (5) Quod fecisse oportebat.

PROBLEMA X. PROPOSITIO XXX.

Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.



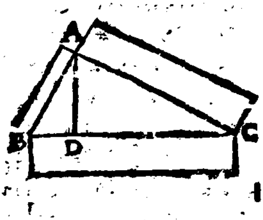
Sit data recta linea terminata AB; oportet ipsam AB extrema, ac media ratione secare. Describatur enim ex AB quadratum BC, (1) & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili. (2) Quadratum autem est BC, ergo & AD quadratum erit. Et quoniam BC æquale CD, commune auferatur CE; reliquum igitur BF reliquo AD est æquale; est autem, & ipsi æquiangulum: ergo ipsorum BF, AD latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte sibi ipsis respondent; (3) ut igitur FE ad ED, ita est AE ad EB; est autem FE æqualis AC, (4) hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE; quare, ut BA ad AE, ita AE ad EB. Sed AB major est, quam AE; ergo AE quam EB est major. (5) Recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E, & major ipsius portio est AE; quod facere oportebat.

ALITER. Sit data recta linea AB, oportet ipsam AB extrema, ac media ratione secare. Secetur enim AB in G, ita ut rectangulum, quod continetur AB, BC æquale sit quadrato ex AC. (6) Quoniam igitur rectangulum ABC æquale est quadrato ex AC, erit, ut BA ad AC, ita AC, ad CB, (7) ergo AB recta linea extrema, ac media ratione secta est; Quod facere oportebat.

(1) 46. primi (2) Ex antecedente. (3) 14. hujus. (4) 34 primi. (5) 14. quinti. (6) 11. secundi. (7) 17. hujus.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXXXI.

In rectangulis triangulis figura, quæ fit a latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.



SIt triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram, quæ fit ex BC æqualē esse eis, quæ ex BA, AC fiunt similibus, & similiter descriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triāgulo rectangulo ABC ab angulo recto, qui est ad A, ad BC basim perpendicularis ducta est AD, erunt triāgula ABD, ADC, quę sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se se. (1) Et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit, ut CB ad BA, ita AB ad BD; quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut *prima ad tertiam*, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam; (2) ut igitur CB ad BD, ita figura, quæ fit ex CB ad eam, quæ ex BA, similem, & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex CA; quare, & ut BC ad ipsas BD, DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA, AC similes, & similiter descriptas, æqualis autem BC ipsis BD, DC; ergo figura, quæ fit ex BC æqualis est eis, quæ ex BA, AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. in rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit a latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus fiunt similibus, & similiter descriptis; quod demonstrare oportebat.

ALITER. Quoniam similes figuræ sunt in duplicata ratione laterum homologorum; (3) figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA, duplicatam rationem habebit ejus,

quam

(1) 8. hujus. (2) corol. 20. hujus. (3) 20. hujus.

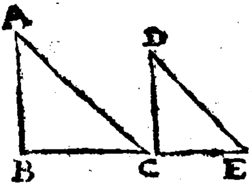
quam habet BC ad BA; habet autem, & quadratum ex BC ad quadratum ex BA duplicatam rationem ejus, quam BC ad BA; ergo, & ut figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA. Eadem ratione, & ut figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum: & ut igitur figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA, AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA, AC; (4) quadratum autem, quod ex BC æquale est eis, quæ ex BA, AC quadratis; (5) ergo, & figura, quæ fit ex BC est æqualis ei, quæ ex BA, AC fiunt, similibus, & similiter descriptis; quod ostendere oportebat.

Ex hac propositione addi, & subtrahi possunt quævis figuræ similes eadem prorsus methodo, qua quadrata adduntur, & subtrahuntur in schol. prop. 47. lib. 1.

(4) 22. quinti. (5) 47. primi.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXXII.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsa constituta erunt.



Sint duo triangula ABC, DCE, quæ duo latera BA, AC, duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ut sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC, & AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, & in ipsa incidit recta linea AC; erunt anguli alterni BAC, ACD æquales inter se. (1) Eadem ratione, & angulus CDE æqualis est angulo ACD; quare, & BAC ipsi CDE est æqualis. Et quoniam duo triangula sunt ABC, DCE, unum angulum, qui ad A, uni angulo

(1) 29. primi.

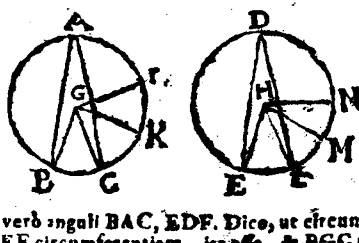
gulo, qui ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit, ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum; (2) ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE; ostensus autem est, & angulus ACD æqualis angulo BAC; totus igitur ACE duobus ABC, BAC est æqualis; communis apponatur ACB; ergo anguli ACE, ACB angulis BAC, ACB, CBA æquales sunt. Sed BAC, ACB, CBA anguli duobus rectis sunt æquales; & anguli igitur ACE, ACB duobus rectis æquales erunt; itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C duæ rectæ lineæ BC, CE non ad easdem partes positæ, angulos, qui deinceps sunt ACE, ACB duobus rectis æquales efficiunt; ergo BC ipsi CE in directum erit. (3) Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat.

(2) 6. hujus. (3) 14. primi.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXXIII.

In circulis æqualibus anguli eandem habent rationem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Adhuc autem, & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

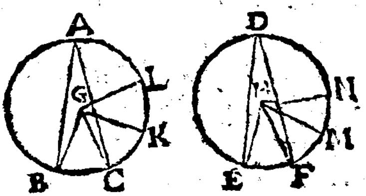
Sint æquales circuli ABC, DEF; & ad centra quidem ipsorum G, H sint anguli BGC, EHF ad circumferentias verò anguli BAC, EDF.



rentias verò anguli BAC, EDF. Dico, ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse, & BGC angulum

ad

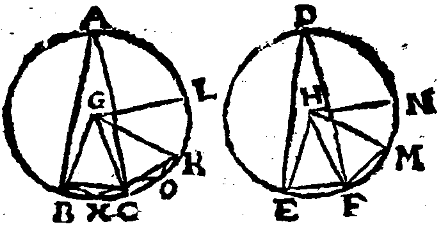
ad angulum EHF: & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem. Ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcumque deinceps CK, KL; circumferentiæ verò EF rursus æquales quotcumque FM, MN; & jungantur GK, GL, HM, HN. Quoniam igitur circumferentiæ BC, CK, KL inter se sunt æquales, & anguli BGC, CGK, KGL inter se æquales erunt: (1) quotuplex igitur est circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex est, & BGL angulus anguli BGC. Eadem ratione, & quotuplex est circumferentia NF circumferentiæ EF, totuplex, & EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis est BL circumferentia circumferentiæ EN, & angulus BGL an-



gulo EHN erit æqualis, & si circumferentia BL major est circumferentia EN, major erit & BGL angulus angulo EHN, & si minor, minor: quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC, EF, & duobus angulis BGC, EHF, sumta sunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL, & BGL angulus: circumferentiæ vero EF, & EHF anguli æque multiplicia, nempè circumferentia EN, & angulus EHN; atque ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN, & BGL angulum superare angulum EHN, & si æqualis, æqualem, & si minor, minorem esse. Ut igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. (2) Sed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum; (3) uterque enim utriusque est duplus; (4) & ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF,

(1) 27.tertii. (2) corol.1.lem.quinti.
(3) 15 quinti. (4) 20.tertii.

EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum; quare in circulis æqualibus anguli eandem habent rationem, quam circumferentiæ, quibus insistunt, sivè ad centra, sivè ad circumferentiam insistant. Dico insuper, & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HEF sectorem. Jungantur enim BC, CK, & sumtis in circumferentiis BC, CK punctis X, O, jungantur, & BX, XC, CO, OK; itaque quoniam duæ BG, GC duabus

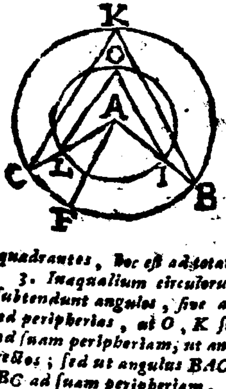


CG, GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit, & basis BC basi CK æqualis; æquale igitur est, & GBC triangulum triangulo GCK. (5) Et quoniam circumferentia BC circumferentiæ CH est æqualis, & reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ, quæ eundem circulum complet; quare, & angulus BXC angulo COX est æqualis; similis igitur est BXC portio portioni COX, & sunt in æqualibus rectis lineis BC, CK; quæ autem in æqualibus rectis lineis similes circulorum portiones, & inter se æquales sunt, ergo portio BXC est æqualis portioni COK: est autem, & BGC triangulum triangulo CGK æquale: & totus igitur sector BGC toti sectori CGK æqualis erit. Eadem ratione, & GKL sector utrique ipsorum GKC, GCB est æqualis, tres igitur sectores BGC, CGK, KGL æquales sunt inter se. Similiter, & sectores HEF, HFM, HMN inter se sunt æquales; quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est, & GBL sector sectoris GBC. Eadem ratione, & quotuplex est

(5) 4. primi.

est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex est, & HEN sector sectoris HEF; quare si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN, & si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat, & BGL sector sectorem EHN, & minor minor. Quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC, EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC, FHE, sumta sunt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector: circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF æque multiplicia circumferentia EN, & EHN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentia EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor minorem: est igitur, ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.

C O R O L L A R I A.



1. *Perspicuum est, ut sector ad sectorem, ita esse angulum ad angulum.*

2. *Angulus centri BAC est ad quatuor rectos, ut arcus BC, cui insistit, est ad totam circumferentiam. Nam ut BAC angulus ad angulum rectum BAF, ita arcus BC ad quadrantem BF, ergo ut angulus BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad quatuor quadrantes, hoc est ad totam circumferentiam.*

3. *Inæqualium circulorum arcus IL, BC, qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, ut IAL, BAC, sive ad peripherias, ut O, K sunt similes. Arcus enim IL est ad suam peripheriam, ut angulus IAL, seu BAC ad quatuor rectos; sed ut angulus BAC ad quatuor rectos, ita est arcus BC ad suam peripheriam. Ergo arcus IL ad suam peripheriam est, ut arcus BC ad suam, ac proinde inter se sunt similes arcus IL, BC.*

4. Duæ

4. Duæ semidiametri AB, AC, à concentricis circulis auferunt similes arcus, patet ex antecedenti corollario.

5. Segmenta BKC, IOL, quæ angulos capiunt æquales KO, similia sunt. Nam arcus BC, IL ex corollario tertio sunt similes, & ideo etiam similes arcus CKB, LOI.

FINIS LIBRI SEXTI.