BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

11880 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, A. HARNACK, CH. HENRY, G. KOENIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME X. — ANNÉE 1886.

(TOME XXI DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1886

Le lecteur a déjà aperçu que l'existence d'expressions représentant des fonctions distinctes se déduit immédiatement des considérations que nous avons rappelées au commencement.

Supposons, en effet, que l'on ait trouvé une expression uniforme

$$x = \mathrm{V}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

représentant une racine quelconque de l'équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots \pm a_n = 0,$$

expression convergente pour tous les systèmes de valeurs a_1, a_2, ..., a_n, à l'exception de certains systèmes singuliers constituant une variété d'ordre $(n-1)$. D'après le principe de Vandermonde, on peut remplacer dans cette expression les coefficients a par les n fonctions symétriques $f_1, f_2, \ldots, f_n$, des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et l'expression uniforme

$$x = \mathrm{V}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

sera convergente en général et aura pour valeur une racine x_k déterminée.

Si l'on y substitue des fonctions rationnelles $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_n(z)$ au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on obtient une expression uniforme en z, qui, dans diverses parties du plan des z, représente les diverses fonctions $\varphi_k(z)$.

Il me semble que c'est la voie la plus naturelle pouvant nous amener à des expressions affectées de coupures, expressions dont on a donné de nombreux exemples dans les derniers temps.

Berlin, juillet 1885.

LE RÉSUMÉ HISTORIQUE DE PROCLUS;

Par M. Paul TANNERY.

J'aborde maintenant le long fragment historique inséré par Proclus dans la seconde partie de son Prologue (p. 64-70); je vais donner la traduction intégrale de ce texte capital pour l'histoire de la Géométrie; j'examinerai ensuite à quelles sources Proclus a dû puiser en réalité et ce qu'il peut avoir tiré de son propre fonds.

a (¹). « Il convient désormais de parler de l'origine de la Géométrie dans la période actuelle; car, comme l'a dit le surhumain Aristote, les mêmes pensées sont venues à plusieurs reprises aux hommes suivant certaines périodes déterminées de l'univers, et ce n'est pas de notre temps, ou dans celui que nous connaissons par l'histoire, que les sciences se sont constituées pour la première fois; mais elles apparaissent et tour à tour disparaissent suivant les retours de révolutions célestes, dont on ne peut assigner le nombre pour le passé ni pour l'avenir. C'est donc pour la période actuelle seulement qu'il faut considérer les commencements des arts et des sciences.

b. « Nous dirons que, suivant la tradition générale, ce sont les Égyptiens qui ont les premiers inventé la Géométrie, et qu'elle est née de la mesure des terrains, qu'il leur fallait sans cesse renouveler à cause des crues du Nil qui fait disparaître les bornes des propriétés.

c. « Il ne faut pas s'étonner qu'un besoin pratique ait occasionné l'invention de cette science ou des autres, puisque tout ce qui est soumis à la génération procède de l'imparfait au parfait; il y a donc progrès naturel de la sensation au raisonnement, de celui-ci à l'intelligence pure. De même donc que la connaissance exacte des nombres a commencé chez les Phéniciens à la suite du trafic et des transactions auxquelles ils se livraient, la Géométrie a été inventée par les Égyptiens pour la raison que j'ai dite.

d. « Thalès, le premier, ayant été en Égypte, en rapporta cette théorie dans l'Hellade; lui-même fit plusieurs découvertes et mit ses successeurs sur la voie de plusieurs autres, par ses tentatives d'un caractère tantôt plus général, tantôt plus restreint au concret.

e. « Après lui, Mamercos (²) (Mamertinos?) frère du poète

(¹) La subdivision du texte en paragraphes marqués par des lettres est destinée à faciliter les renvois ultérieurs.

(²) La leçon des manuscrits est douteuse : Mamertinos est la forme donnée par Suidas; le fragment pseudo-héronien porte Mamertios.

Stésichore, est mentionné comme s'étant enflammé pour la Géométrie, et Hippias d'Elis rapporte qu'il s'y fit de la réputation.

f. « Après eux, Pythagore transforma cette étude, et en fit un enseignement libéral; car il remonta aux principes supérieurs et rechercha les théorèmes abstraitement et par l'intelligence pure; c'est à lui que l'on doit la découverte des *irrationnelles* et la construction des figures du *cosmos* [*les polyèdres réguliers*].

g. « Après lui, Anaxagore de Clazomène s'occupa de diverses questions géométriques, de même qu'Œnopide de Chios, un peu plus jeune qu'Anaxagore; Platon, dans ses *Rivaux,* fait mention de tous deux comme de mathématiciens en réputation.

h. « Puis devinrent célèbres en Géométrie : Hippocrate de Chios, l'inventeur de la quadrature de la *lunule* et Théodore de Cyrène. Hippocrate fut le premier qui composa des *Éléments.*

i. « Après eux vécut Platon qui fit prendre aux Mathématiques en général, à la Géométrie en particulier, un essor immense, grâce au zèle qu'il déploya pour elles, et dont témoignent assez ses écrits tout remplis de discours mathématiques, et qui, à chaque instant, éveillent l'ardeur pour ces sciences chez ceux qui s'adonnent à la philosophie.

j. « Vers le même temps vivaient Léodamas de Thasos, Archytas de Tarente, et Théétète d'Athènes, qui augmentèrent le nombre des théorèmes et en firent un ensemble plus scientifique; Néoclide (plus jeune que Léodamas) et son disciple Léon, qui agrandirent singulièrement les connaissances antérieures, en sorte que Léon put composer des *Éléments* très supérieurs par le nombre et l'importance des démonstrations; ce fut aussi lui qui inventa les *distinctions* (διορισμοί), quand le problème cherché est possible et quand il est impossible (1).

k. « Eudoxe de Cnide, un peu plus jeune que Léon, et disciple

(1) Dans les ouvrages classiques, toutes les fois qu'un problème est astreint, pour être possible, à certaines conditions, celles-ci sont insérées dans l'énoncé du problème sous la rubrique : δεῖ δὴ (il faut que). Elles constituent ce qu'on appelle le διορισμός.

des amis de Platon, augmenta le premier le nombre des théorèmes dits *généraux;* il ajouta trois nouvelles *analogies* aux trois anciennes ([1]), et fit progresser les questions relatives à la *section* ([2]), questions soulevées par Platon et pour lesquelles il fit usage des *analyses*.

l. « Amyclas d'Héraclée, disciple de Platon, Ménechme, élève d'Eudoxe et de Platon, Dinostrate, frère de Ménechme, perfectionnèrent l'ensemble de la Géométrie. Theudios de Magnésie s'acquit une réputation singulière dans les Mathématiques comme aussi dans les autres branches de la Philosophie; il rédigea d'excellents *Éléments* et rendit plus générales diverses définitions ([3]). Athénée de Cyzique vécut à la même époque et fut célèbre comme mathématicien, en particulier comme géomètre. Tous ces savants se réunissaient à l'Académie et faisaient leurs recherches en commun.

m. « Hermotime, de Colophon, poursuivit les découvertes d'Eudoxe et de Théétète, trouva diverses propositions des *Éléments,* et composa une partie des *Lieux*. Philippe de Medma ([4]), disciple de Platon qui le tourna vers les Mathématiques, fit des recherches suivant les indications de son maître, mais il se proposa aussi toutes les questions qu'il crut utiles pour la philosophie de Platon. C'est jusqu'à ce Philippe que *ceux qui ont écrit les histoires* conduisent le développement de la Géométrie.

n. « Euclide, l'auteur des *Éléments,* n'est pas beaucoup plus jeune; il a mis en ordre divers travaux d'Eudoxe, amélioré ceux de

---

([1]) L'arithmétique, la géométrique et l'harmonique; celles d'Eudoxe sont définies par les relations suivantes entre le moyen m et les extrêmes $a > b$:

$$1^\circ \quad \frac{a-m}{m-b} = \frac{b}{a}; \qquad 2^\circ \quad \frac{a-m}{m-b} = \frac{b}{m}; \qquad 3^\circ \quad \frac{a-m}{m-b} = \frac{m}{a}.$$

([2]) La section en moyenne et extrême raison, d'après Bretschneider, dont l'opinion a, depuis, été généralement admise; la section des corps ronds, d'après l'interprétation antérieure que je montrerai être la plus probable.

([3]) Le texte est douteux; peut-être : « rendit plus générales diverses propositions particulières ».

([4]) Μεδμαῖος doit certainement être lu au lieu de Μενδαῖος; mais il ne semble pas qu'il faille distinguer ce Philippe de celui dit ordinairement d'Opunte. (*Voir* Boeckh, *Sonnenkreise der Alten* (Berlin, 1863), p. 34-40.

Théétète, et aussi donné des démonstrations irréfutables pour ce que ses prédécesseurs n'avaient pas assez rigoureusement prouvé.

o. « Euclide vivait sous Ptolémée I, car il est mentionné par Archimède, qui naquit vers la fin du règne de ce souverain, et d'autre part on rapporte que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas pour la Géométrie de route plus courte que celle des *Éléments;* il eut cette réponse : « Il n'y a pas en Géométrie de chemin fait pour les rois ». Euclide est donc plus récent que les disciples de Platon, mais plus ancien qu'Ératosthène et Archimède, car ces derniers étaient contemporains, comme Ératosthène le dit quelque part.

p. « Euclide était d'ailleurs Platonicien d'opinion, et bien familier avec la philosophie du Maître : aussi s'est-il proposé comme but final de l'ensemble de ses *Éléments,* la construction des figures appelées platoniciennes (*les cinq polyèdres réguliers*).

q. « Il y a de lui nombre d'autres Ouvrages de Mathématiques, écrits avec une singulière exactitude et pleins de science théorique. Tels sont ses *Optiques*, ses *Catoptriques,* ses Éléments de Musique, et encore son livre *sur les Divisions* ([1]).

r. « Mais on admire singulièrement ses *Éléments* de Géométrie, pour l'ordre qui y règne, le choix des théorèmes et problèmes pris comme éléments (car il n'a nullement inséré tous ceux qu'il pouvait donner, mais bien seulement ceux qui sont susceptibles de jouer le rôle d'éléments), et aussi la variété des raisonnements, conduits suivant tous les modes et produisant la conviction, tantôt en partant des causes, tantôt en remontant des faits, mais toujours irréfutables, exacts, et du caractère le plus scientifique. Ajoutez tous les procédés de la dialectique : la méthode de *division* (διαιρετική), dans la reconnaissance des espèces, celle de *définition* (ὁριστική), dans les raisons en essence, l'*apodictique,* dans les marches des principes au cherché, l'*analytique,* dans celles inverses, du cherché aux principes. Le même Traité nous montre encore, exactement distinguées, les diverses espèces des *réciproques,* tantôt plus simples,

---

([1]) L'Ouvrage géométrique copié par Mahomet de Bagdad, dans le Traité de même titre qui fait partie de l'édition d'Euclide par Grégory.

tantôt plus composées, en tant que la réciprocité peut avoir lieu, soit de la totalité à la totalité, soit de la totalité à la partie, ou inversement, soit enfin de partie à partie. Parlerons-nous de la teneur continue de l'invention, de l'économie et de l'ordre des antécédents et des conséquents, de la puissance avec laquelle il établit chaque point? Si tu veux y ajouter ou retrancher, tu reconnaîtras que tu t'écartes de la science, et te laisses emporter en dehors, vers l'erreur ou l'ignorance.

s. « Nombre de choses, à vrai dire, paraissent bien offrir la vérité, et découler des principes de la science, mais s'écartent de ces principes vers l'erreur et trompent les esprits superficiels. Euclide a donc aussi donné les procédés qu'emploie l'intelligence clairvoyante, et grâce auxquels il est possible d'exercer les débutants dans l'étude de la Géométrie, à reconnaître les paralogismes et à éviter les erreurs. C'est dans l'écrit qu'il a intitulé Ψευδάρια que ce travail a été accompli, qu'il a énuméré séparément et en ordre les divers genres de faux raisonnements, exerçant pour chacun notre intelligence par des théorèmes de toute sorte, où il oppose le vrai au faux, et où avec la preuve il fait concorder la réfutation de l'erreur. Ainsi ce Livre a pour but la purification et l'exercice de l'intelligence, tandis que les *Éléments* sont un guide sûr et accompli pour la contemplation scientifique des objets de la Géométrie. »

2. D'ordinaire, on reconnaît comme empruntée à Eudème la partie de ce fragment (*b*-*m*) qui concerne les temps antérieurs à Euclide; mais on admet que cet emprunt a été fait par Proclus, car il est trop clair qu'en tout cas nous n'avons pas le texte même d'Eudème, et l'on considère le commentateur d'Euclide comme ayant rédigé toute la partie (*n*-*s*) relative à l'auteur des *Éléments*.

Je vais essayer de montrer que le fragment tout entier appartient à Geminus, sauf les quelques légères altérations que Proclus a pu se permettre.

En premier lieu, j'appelle l'attention sur le paragraphe *a*; ce singulier hors-d'œuvre ne correspond pas à une doctrine assez invétérée chez Proclus, pour qu'on puisse croire qu'il l'ait écrit sans y avoir été au moins incité par quelque auteur qu'il avait sous les yeux. L'autorité d'Aristote ne doit pas non plus nous faire illusion, quoique le Stagirite dise bien quelque chose (*Metaph.*, XI, 8, 13) qui justifie suffisamment la citation de Proclus; ce n'est point là une doctrine du Lycée ([1]), et un tel développement serait aussi singulier dans l'*Histoire géométrique* d'Eudème qu'il l'est dans Proclus. La croyance qu'indique ce paragraphe est au contraire bien connue comme faisant partie des dogmes stoïciens; nous devons donc soupçonner là la main de Geminus, sauf à laisser à Proclus la mention d'Aristote.

Passons maintenant à la partie du fragment qui concerne Euclide; les mentions précises d'Eudoxe et de Théétète (*n*), dont Proclus n'a certainement pas les ouvrages, indiquent assez que, pour ce qu'il dit d'Euclide, il a encore une autorité postérieure à Eudème.

La petite discussion chronologique (*o*), sur l'époque où vivait Euclide, ne peut être de Proclus, homme qui se contente toujours de s'en référer à la tradition; elle répond au contraire tout à fait aux habitudes du temps de Geminus, alors que la chronologie venait à peine de se fonder. Cette discussion nous prouve d'ailleurs une chose, c'est que son auteur, quel qu'il soit, n'en savait pas plus que nous sur les dates de la vie d'Euclide.

Je ne m'arrête pas au renseignement (*p*) que Proclus aurait pu tenir d'une tradition quelconque, ni à la liste (*q*) incomplète des Ouvrages attribués à Euclide et que nous avons encore ([2]), mais je relève la digression (*s*) sur les *Pseudaria*. Évidemment Proclus en parle comme s'il avait l'Ouvrage entre les mains; qui peut croire cependant que de son temps un livre dont nous ne trouvons ailleurs qu'une seule mention ([3]) ait été, comme il semble le dire, encore suivi dans l'enseignement? Qui peut croire qu'un commen-

---

([1]) Aristote, comme Platon, qui admet de même des périodes successives de civilisation aboutissant à des cataclysmes, croit en tout cas que la race humaine n'est pas détruite et conserve des traces des connaissances antérieures.

([2]) Cependant, si les *Données* et les *Porismes* n'y figurent pas, c'est sans doute parce que Geminus se réservait d'en parler plus loin et qu'il l'avait fait après l'endroit où Proclus s'est arrêté; les *Divisions* ne méritaient pas une mention plus détaillée. Quant aux *Phénomènes*, leur omission ici ne peut étonner.

([3]) Alexand. Aphrod. in Arist. σοφιστ. ἐλέγχ. (Venise, 1520), fol. 25, B. Peut-être aussi le scholiaste du *Théétète* de Platon, 141 B.

tateur d'Euclide ait possédé un pareil Ouvrage, sans en rien tirer pour une seule remarque, même incidente? Il y a certes là une des preuves les plus palpables que le fragment est copié en son entier, et dès lors, à qui peut-il être emprunté, si ce n'est à Geminus?

Quant à l'éloge des *Éléments* qui précède (*r*), il suffit de remarquer que, dans le commentaire de Proclus, il n'est nullement à sa place; il se comprend très bien au contraire dans le plan que paraît avoir suivi Geminus, parlant des Ouvrages d'Euclide après avoir brièvement rappelé les travaux antérieurs, et commençant ainsi l'exposé des théories géométriques en relevant les mérites de l'œuvre classique où se trouvaient développés les éléments de ces théories.

3. Nous possédons dès maintenant des motifs suffisants pour penser que c'est à Geminus également que Proclus emprunte le résumé de l'histoire antérieure à Euclide, et que, s'il vient originairement d'Eudème, c'est Geminus qui a fait le premier extrait. Examinons donc ce résumé plus attentivement et cherchons à discerner, dans cette hypothèse, s'il n'y a pas d'autre trace nous indiquant que Proclus n'avait nullement Eudème sous la main.

Tout d'abord, écartons une question préjudicielle : on nous parle (*m*) de *ceux qui ont écrit les histoires*. Geminus avait-il, lui, à sa disposition d'autres historiens qu'Eudème?

On répète souvent, d'après Diogène Laërce (V, 48, 50), que Théophraste, comme Eudème, disciple d'Aristote, avait, lui aussi, composé quatre Livres d'*Histoires géométriques,* six d'*Histoire astrologique,* un d'*Histoires arithmétiques*. Mais, comme Usener l'a remarqué le premier, il est probable que cette donnée nous fournit seulement le nombre de livres historiques composés par Eudème, le seul sous le nom duquel soient citées de telles histoires, tandis que Théophraste n'est cité que comme auteur d'*Histoires physiques* (seize Livres), et que les quelques renseignements qui proviennent en outre de lui sur l'histoire astronomique doivent être empruntés à des écrits spéciaux, comme celui *sur le Ciel,* etc. Il suffit d'ajouter que le prétendu catalogue des écrits de Théophraste est formé de quatre listes successives par ordre alphabétique, dont la troisième et la quatrième, qui parlent des *Histoires mathématiques,* ne contiennent aucun ouvrage authentique de l'auteur des *Caractères*, mais seulement des écrits de la même école.

La mention que fait également Diogène Laërce (IV, 13) de cinq Livres Περὶ γεωμετρῶν (sur les géomètres), qu'aurait écrits Xénocrate, disciple de Platon et contemporain d'Eudème, n'est guère plus acceptable. Aucune trace ne se rencontre ailleurs d'un pareil écrit dont le titre peut être corrompu et lu Περὶ γεωμετρικῶν (sur la Géométrie); d'autre part, il semble que la source de Diogène Laërce ait réuni sous ce titre commun cinq Livres distincts qui sont énumérés ensuite, et dont aucun n'a de caractère historique ([1]).

Mais, si Eudème est le seul historien de la Géométrie avant Euclide, comment Geminus aura-t-il pu employer le pluriel?

Il est aisé de voir que, quoique Eudème ait été la source principale, comme le témoigne assez l'exclusivisme de la liste des géomètres nommés ([2]), Geminus a dû chercher d'autres renseignements que les siens, sinon chez des historiens spéciaux qui n'existaient pas, au moins chez les écrivains qui pouvaient compléter Eudème, et cela suffit pour justifier l'expression dont il s'est servi.

On le soupçonne, quand on rencontre dans le fragment la tradition sur les débordements du Nil (*b*), qui remonte à Hérodote, et l'attribution aux Phéniciens de l'invention de l'Arithmétique (*c*). Sur ces deux points, en effet, le fragment s'écarte de l'opinion formelle d'Aristote (*Metaph.*, I, 1), qui voit dans les loisirs des prêtres égyptiens la cause déterminante de la formation première des Mathématiques. Platon admettait également et à juste titre que la science des nombres venait originairement de l'Égypte; enfin, quand Jamblique nous dit que Thalès emprunte aux Égyptiens sa définition de l'unité, il nous fournit un renseignement qui doit venir plus ou moins directement d'Eudème et qui contredit également la prétendue origine phénicienne.

([1]) Je remarque incidemment que le *Périgènes*, auteur d'un ouvrage sur les Mathématiques chaldéennes, cité par le scholiaste d'Apollonius (Nesselmann, p. 1-2), est évidemment Épigène de Byzance, dont parlent Sénèque et Pline.

([2]) Notamment l'omission de Démocrite; il est bien peu croyable d'ailleurs qu'en dehors d'Athènes ou de l'Académie, il n'y ait pas eu un nom à citer à partir d'Hippocrate de Chios. La Sicile notamment a dû avoir des géomètres entre Mamercos et Archimède, quand elle a eu des astronomes originaux comme Ecphante et Hicétas.

On reconnaît, d'autre part, une source particulière utilisée par Geminus, quand on voit citer (*e*) Hippias d'Elis à propos de Mamercos. Cette citation ne peut en effet appartenir à Proclus qui n'avait point certainement l'ouvrage d'Hippias; si elle était d'Eudème, Geminus ne l'aurait pas sans doute conservée dans l'extrait, tandis qu'il aura voulu donner une preuve de son érudition, en parlant d'un géomètre omis par le disciple d'Aristote. Au reste, la mention du polygraphe Hippias devait probablement se référer à des vers du poète Stésichore, et n'a donc pas de valeur historique réelle.

La mention des *Rivaux* de Platon (*g*) conduit aux mêmes conclusions; à la rigueur, elle aurait pu être faite par Proclus; mais, comme le dialogue est apocryphe, cette citation n'est certainement pas d'Eudème, tandis que Geminus pouvait déjà la faire.

A la vérité, Eudème avait parlé d'Œnopide; nous sommes donc conduits à supposer qu'il avait omis Anaxagore, et que c'est ce dernier que Geminus aura voulu placer, d'après le témoignage qu'il invoquait, à côté de l'astronome de Chios. Il est certain pourtant que ce témoignage est d'autant plus insuffisant qu'il concerne une discussion astronomique et non pas géométrique : nous n'avons pas de preuves valables en fait qu'Anaxagore se soit sérieusement occupé de Géométrie [1]. Son Ouvrage sur la perspective, mentionné par Vitruve, pouvait ne pas réclamer des connaissances bien étendues, et le trait rapporté par Plutarque (*de Exsilio*, C. 17), qu'il composa dans sa prison une *Quadrature du cercle*, s'il n'est pas inventé à plaisir, ne prouve nullement qu'Anaxagore fût à la hauteur, comme géomètre, même des sophistes Antiphon et Bryson. En tout cas, sa conception du monde semble bien prouver que ses connaissances géométriques n'étaient pas au niveau de son originalité comme physicien.

Dans la suite du fragment, nous reconnaissons aussi dans le retour perpétuel aux *Éléments* la main d'un auteur qui recherche les origines de l'œuvre d'Euclide, qui lui est donc postérieur. C'est bien le même qui va rapprocher (*n*) de cette œuvre les travaux

(1) Pas plus que les autres physiciens de l'école ionique après Thalès. L'ὅλης Γεωμετρίας ὑποτύπωσιν ἔδειξεν de Suidas sur Anaximandre doit sans doute se rapporter à la figuration de la Terre sur une mappemonde, qui fut l'œuvre du Milésien.

d'Eudoxe et de Théétète; il en a lu l'exposition détaillée dans Eudème et il résume ainsi son impression, de même qu'il l'a fait plus haut à plusieurs reprises. La façon dont il parle des *Lieux* à propos d'Hermotine (*m*) est bien aussi d'un écrivain au temps duquel ce sujet comprenait une matière considérable, tandis qu'au temps d'Eudème on commençait seulement à l'aborder.

Je me résume : les renseignements que fournit notre fragment pour les temps antérieurs à Euclide étaient épars dans les quatre Livres d'Eudème, composés sans doute par ordre des matières, suivant l'usage de son école. Si Proclus avait eu ces Livres entre les mains, il n'aurait point fait l'extrait que nous avons, et il nous aurait fourni en temps et lieu beaucoup plus de détails tirés d'Eudème que nous n'en trouvons malheureusement chez lui. Tout, au contraire, indique la main de Geminus, pour lequel cet extrait, avec le morceau qui suit sur Euclide, forme un ensemble rentrant naturellement dans le cadre qu'il s'était tracé; nous avons donc assez de probabilités pour pouvoir lui attribuer la totalité du fragment historique.

4. Il me reste à indiquer une conséquence importante qui s'ensuit relativement à un témoignage de ce fragment relatif à Platon et à Eudoxe (*k*).

Bretschneider a pensé que la *section* dont il est parlé dans ce passage était la section d'une ligne en moyenne et extrême raison, et qu'Eudème avait en vue les théories du Livre XIII d'Euclide, sur les polyèdres réguliers, lequel débute précisément par des théorèmes où intervient cette division en moyenne et extrême raison et pour lesquels, à côté des démonstrations d'Euclide, les manuscrits en ont conservé d'autres, par analyse et synthèse. Ce seraient là, d'après lui, des débris des *analyses* d'Eudoxe.

Contre cette dernière conclusion, Heiberg a objecté très justement que ces démonstrations ne peuvent, philologiquement parlant, être regardées que comme l'œuvre d'un scholiaste très postérieur à Euclide. Mais la thèse générale elle-même, quoique très séduisante, surtout si l'on croit retrouver dans le fragment historique un texte d'Eudème, n'a guère plus de valeur que la conjecture qui s'y rattache.

A mon sens, il s'agit, comme on le croyait avant Bretschneider, de la section des solides [1] et des travaux qui ont préludé à l'invention des coniques. Mais j'ajoute que selon toute probabilité la donnée dont il s'agit appartient à Geminus, non pas à Eudème; que, d'autre part, elle est empreinte d'un caractère légendaire qui en diminue singulièrement la valeur.

La donnée qui précède immédiatement, relative à l'invention par Eudoxe de trois *analogies* nouvelles, excite tout d'abord nos soupçons; comme ces *analogies* semblent avoir toujours été considérées comme rentrant dans l'Arithmétique, il est improbable qu'Eudème en ait parlé à propos de la Géométrie; d'un autre côté, Jamblique les attribue tantôt à Eudoxe, tantôt à Archytas; la tradition n'était donc pas bien assurée à cet égard. Il est donc possible qu'ici Geminus se soit écarté d'Eudème; en tout cas, pour Eudoxe, il a cherché d'autres renseignements que ceux que fournissaient les *Histoires géométriques*.

Quant à l'invention des sections coniques, il est très probable qu'Eudème n'en avait point parlé. Si l'on considère que son Ouvrage ne comprenait que quatre Livres, et que la quadrature des lunules se trouvait exposée, très longuement d'ailleurs, dans le second, il paraît impossible qu'un Traité aussi restreint comme dimensions et entrant dans autant de détails ait pu comprendre la théorie des coniques.

Cette conjecture est confirmée par le passage de Geminus que cite Eutocius (sur Apollonius) au sujet de l'histoire des coniques. Dans ce passage, Geminus a évidemment emprunté à Eudème ce qu'il dit de la façon dont les anciens démontraient l'égalité à deux droits de la somme des angles d'un triangle; mais, pour l'invention même des coniques, il semble réduit aux connaissances qu'il pouvait tirer lui-même des écrits antérieurs à Apollonius, et Eutocius, qui le cite pour réfuter l'opinion d'Héraclite [2], ne peut y trouver l'attribution de l'invention à un personnage déterminé.

---

[1] L'emploi du singulier, quand d'ailleurs le texte serait plus assuré qu'il ne l'est, ne prouve rien. Il est au reste impossible de montrer un texte où il soit parlé d'une section proprement dite, à savoir celle en moyenne et extrême raison; un peu plus haut Proclus (p. 60, 17-19) s'exprime tout autrement.

[2] Nom douteux. Il avait écrit une vie d'Archimède, où il attribuait au Syracusain l'invention des coniques.

Geminus cependant, mais dans un autre passage et d'une façon tout incidente (*Proclus*, p. 111), avait reconnu Ménechme comme l'inventeur des coniques, mais il s'appuyait expressément sur un vers où Érastothène parlait des triades de Ménechme, les sections du cône, et qui se trouve dans la lettre conservée par Eutocius (sur Archimède). Ce témoignage, postérieur à Eudème, n'est pas évidemment suffisant pour trancher complètement la question.

Enfin les solutions du problème de Délos, attribuées à Ménechme par Eutocius, ne paraissent pas remonter à Eudème, comme celle qui nous est restée sous le nom d'Archytas; est-il nécessaire d'ajouter que ces solutions peuvent très bien avoir été imaginées après coup, et qu'elles doivent nous être suspectes jusqu'à un certain point, surtout quand nous trouvons déjà dans l'une d'elles l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes?

Ménechme peut très bien avoir distingué le premier les trois coniques et établi leur équation au sommet, mais son maître Eudoxe peut, par exemple, avoir considéré la section plane du cylindre ([1]), et peut-être Geminus retrouvait-il dans un de ses écrits encore existants le nom antique de θυρεός (bouclier), appliqué autrefois à l'ellipse; cela suffisait pour lui attribuer d'avoir étudié les questions relatives *à la section des corps*.

Mais il est aussi très possible que Geminus ait forgé complètement sa donnée pour faire remonter jusqu'à Platon le principe de l'invention. Dans ce cas, Eudoxe, comme maître de Ménechme, était un intermédiaire naturel.

5. Dès le temps de Geminus en effet, avait cours, dans le milieu philosophique, la légende qui attribuait à Platon une part considérable dans le développement de la Géométrie. Ce que dit du Maître le passage (*l*) du fragment historique peut bien être considéré comme exact ou tout au moins comme représentant fidèlement le témoignage d'Eudème, qui devait déjà être quelque peu porté à s'exagérer le rôle de Platon comme promoteur de la Géo-

([1]) Eudoxe, pour représenter les mouvements des planètes, avait étudié une courbe qui est l'intersection d'une sphère par un cylindre tangent antérieurement; Archytas avait déjà, dans sa solution du problème de Délos, au moins posé la question d'intersections encore plus complexes.

métrie. Mais, quand nous arrivons au passage sur Eudoxe, la légende a pris corps, Platon a inventé l'analyse et soulevé les questions sur la *section*.

Sur la prétendue invention de l'analyse, je reviendrai ailleurs; quant à l'autre élément de la légende, il ne me paraît pas difficile d'en reconnaître l'origine : au Livre VII de la *République*, où il parle longuement des diverses sciences mathématiques, Platon constate que les théories géométriques concernant les solides sont encore à peine ébauchées. Si l'on considère que cependant la construction des cinq polyèdres réguliers était attribuée aux Pythagoriciens, que la découverte capitale d'Eudoxe sur le volume de la pyramide présente un caractère pratique qui ne permettait guère aux disciples de Platon de l'apprécier à sa juste valeur, une seule théorie se présentait comme représentant le *desideratum* du Maître, c'était celle qui, en tout cas, apparut vers la même époque, la théorie de la section du cône. C'est donc à elle que s'attache la légende et dès lors c'est à Platon lui-même qu'à tort ou à raison elle fait remonter l'origine de la question.

Dans ces conditions, nous pouvons d'autant moins nous prononcer sur la valeur réelle de cette tradition que, d'une part, elle s'appuie en fait sur des textes de Platon pour l'interprétation complète desquels les éléments nous font défaut, mais que d'un autre côté, si cette légende a peut-être un fond de vérité, nous la voyons s'accroître bientôt de développements inadmissibles.

Qu'elle ait été rattachée dès l'origine au fameux problème de Délos, il est à peine utile de le faire remarquer, puisque, historiquement parlant, les sections coniques apparaissent tout d'abord comme appliquées à la solution de ce problème. A la vérité, dans sa lettre à Ptolémée, Ératosthène n'indique nullement que Platon lui-même se soit occupé de ce problème, mais dans son *Platonicien* (1), il racontait déjà que c'était au chef de l'Académie que s'étaient adressés les Déliens, embarrassés par l'oracle, et il lui attribuait d'avoir dit : « Si le Dieu a fait cette réponse, ce n'est pas qu'il eût besoin d'un autel double, mais il a voulu reprocher aux Grecs de négliger les Mathématiques, il blâme leur dédain pour la Géométrie. »

---

(1) *Théon de Smyrne*, Arith., Chap. I.

La légende ira en grossissant de plus en plus; bientôt on attribuera à Platon une solution déterminée du problème, solution pratique d'une rare élégance au reste, mais certainement postérieure à Ératosthène; aux derniers temps, d'après Philopon, ce sera Platon qui aura ramené la duplication du cube à l'invention des deux moyennes proportionnelles, réduction que cependant Ératosthène attribue formellement à Hippocrate de Chios.

Mais arrêtons-nous à Plutarque. Il nous raconte (*Quest. conviv.*, VIII, 9-2, CI. — *Vita Marcelli,* C. 14, 5) que Platon a blâmé Eudoxe, Archytas et Ménechme d'avoir employé pour la duplication du cube des instruments et des dispositions mécaniques, d'avoir ainsi rabaissé jusqu'aux objets sensibles une science dont les spéculations doivent être exclusivement abstraites. Ce fut aussi lui qui sépara définitivement la Géométrie de la Mécanique et réduisit celle-ci au rôle secondaire qu'elle garda jusqu'à Archimède.

Ce récit de Plutarque est ordinairement accepté sans défiance : comment nier cependant qu'il ne soit forgé à plaisir d'après le caractère général de la philosophie de Platon et sans tenir aucun compte de ce qu'étaient les solutions d'Eudoxe, d'Archytas et de Ménechme? Par une singulière contradiction avec une autre forme de la légende, la solution attribuée à Platon est, avant celle d'Eratosthène, la seule qui suppose l'emploi d'un instrument, celles d'Archytas et de Ménechme sont aussi théoriques que possible, et il n'y a pas à douter que celle d'Eudoxe, que nous n'avons plus, ne leur ressemblât sous ce rapport.

Si Diogène Laërce nous dit (VIII, 83) (¹) qu'Archytas fut le premier à introduire des mouvements d'instrument dans une figure géométrique pour trouver la duplication du cube par l'intersection d'un cône, d'un cylindre et d'un tore, ce peut être vrai en tant que ces mouvements sont considérés comme purement abstraits; mais on répète simplement sous une forme encore plus inadmissible la donnée de Plutarque, si l'on entend que le Tarentin aura effectivement tenté de réaliser mécaniquement sa construction; il aurait, à ce compte, certainement tenu la gageure de trouver le pro-

(¹) C'est d'après une autre source évidemment que le même auteur indique Archytas comme le géomètre dont parle Platon à mots couverts, au Livre VII de la *République*, pour le proposer comme maître aux mathématiciens.

cédé manuel le plus impraticable qu'il fût possible d'imaginer.

Ce que l'on peut seulement concéder, c'est que les surfaces considérées par Archytas rentraient dans celles qui, pratiquement et à l'aide du tour, pouvaient être réalisées avec autant d'exactitude que la surface plane et qui, dès lors, avaient droit, à tous égards, d'être introduites dans les spéculations géométriques. Si, d'autre part, Ératosthène, dans sa lettre à Ptolémée, nous dit que Ménechme a été jusqu'à lui le seul qui ait tenté une solution plus ou moins pratique, je ne puis, pour ma part du moins, supposer une description continue d'une conique pas plus qu'une construction par points, je ne puis penser qu'à une construction d'un cône et à sa section effective, pour obtenir par exemple une parabole d'un paramètre donné; mais, en fait, une pareille solution reste toujours purement théorique.

Le témoignage d'Ératosthène suffit, en tout cas, pour repousser les récits de Plutarque, mais la légende platonicienne n'en embarrasse pas moins d'un voile désormais impénétrable les origines de la théorie des coniques.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME X; 1886. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME X.