LA

GÉOMÉTRIE GRECQUE.

10852 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

LA

GÉOMÉTRIE GRECQUE,

COMMENT SON HISTOIRE NOUS EST PARVENUE ET CE QUE NOUS EN SAVONS.

ESSAI CRITIQUE

PAR

PAUL TANNERY.

PREMIÈRE PARTIE,

HISTOIRE GÉNÉRALE DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1887

PRÉFACE.

Qui veut connaître réellement ce qu'était la Géométrie grecque, soit comme forme, soit comme fond, doit l'étudier sur les écrits mêmes ou, au moins, sur les traductions d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius et de Pappus. Mais ces écrits ne peuvent nous apprendre l'histoire de la Science; ils nous laissent ignorants de son origine, de ses premiers développements, de même que, par suite de la perte d'Ouvrages considérables, ils ne nous permettent pas d'apprécier, sans recourir à des conjectures, la direction des travaux concernant la Géométrie supérieure et le niveau réel des connaissances atteintes.

L'histoire de la Géométrie grecque doit donc faire appel à d'autres sources; soumettre ces sources à une critique méthodique et conforme aux principes applicables en pareille matière, c'est le but que je me suis proposé, parce qu'il m'a semblé que cela n'avait pas encore été fait d'une façon satisfaisante, malgré les travaux très importants qui ont été déjà publiés sur ce sujet. Rechercher spécialement comment les traditions se sont formées, comment elles nous ont été transmises, m'a paru, notamment dans la question des origines, indispensable pour déterminer ce que nous pouvons affirmer, ce que nous pouvons seulement considérer comme probable, ce qu'au contraire nous devons regarder comme purement conjectural ou même tout à fait incertain.

Sauf quelques détails sur la classification des Mathématiques dans l'antiquité, le présent Volume ne concerne que la Géométrie élémentaire, et même celle-ci n'y est traitée qu'au point de vue général. J'ai réuni les matériaux nécessaires pour continuer l'œuvre que j'ai entreprise; je dois dire toutefois que, pour les coniques et la Géométrie supérieure, je viens d'être devancé par M. Zeuthen dont l'Ouvrage danois, traduit en allemand par M. von Fischer-Benzon (*Die Lehre von den Kegelschnitten in Altertum*, Copenhague, Höst, 1886), a comblé, mieux que je ne rêvais pouvoir le faire, la lacune que présentait, jusqu'à présent, l'histoire de cette branche de la Science.

J'ai un autre devoir à remplir, c'est de témoigner ma profonde reconnaissance, d'un côté, pour la direction du *Bulletin des Sciences mathématiques,* dont la bienveillante hospitalité a accueilli mes études depuis le mois d'avril 1885 et m'a permis de les réunir en Volume; de l'autre, pour les administrateurs de la Bibliothèque de l'Université de Leyde, dont la gracieuse libéralité a mis à ma disposition un manuscrit arabe, grâce auquel j'ai pu (*voir* Chap. XIII et XIV) préciser la nature du travail de Héron sur les *Éléments* et en publier quelques fragments inconnus.

Tonneins, le 18 juillet 1887.

TABLE DES MATIÈRES.

LA

GÉOMÉTRIE GRECQUE,

COMMENT SON HISTOIRE NOUS EST PARVENUE, ET CE QUE NOUS EN SAVONS.

I^{RE} PARTIE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

INTRODUCTION.

Le vrai problème de l'histoire des Mathématiques anciennes.

1. Écartons de l'histoire des Mathématiques la partie proprement bibliographique, je veux dire la constatation matérielle des faits : telle phrase se trouve telle page, soit de telle édition de tel ouvrage, soit de tel manuscrit coté sous tel numéro dans telle bibliothèque; écartons encore ce qui peut, comme dans l'*Aperçu historique* de Michel Chasles, former un des principaux attraits d'un livre, mais appartient en fait à la Science elle-même, bien loin de constituer une partie intégrante de son histoire; j'entends les développements donnés à telle méthode, les relations établies entre elles et d'autres plus récentes, enfin les démonstrations de théorèmes ou solutions de problèmes, soit conçues dans l'esprit des procédés d'autrefois, soit seulement suggérées par leur étude.

Ce départ fait, que reste-t-il en réalité? Un tissu de conjectures, qui sont d'ailleurs à tous les degrés de probabilité, depuis celui qui vaut presque la certitude jusqu'à celui qui diffère à peine du doute, pour ne pas parler des hypothèses encore moins favorisées; et encore ce tissu ressemble assez à la toile de Pénélope, car, s'il est vrai que l'on peut regarder comme allant toujours en augmentant la probabilité moyenne des résultats obtenus par la critique.

il n'en est nullement de même pour la probabilité spéciale à chaque assertion particulière; cette probabilité est sujette à de continuelles variations, et il n'est guère de point pour lequel l'opinion aujourd'hui dominante se trouve garantie contre une exclusion soit momentanée, soit définitive, à la suite ou bien de la mise en lumière de quelque fait nouveau, ou bien de l'apparition de quelque nouvelle hypothèse.

Coordonner la totalité des faits matériels, établir la filiation logique de ceux qui concordent entre eux, expliquer comment tels autres se trouvent en désaccord et déterminer, d'après cette explication, quels sont ceux qui ne devront pas être utilisés comme matériaux par l'historien futur, telle est la tâche, toujours inachevée, à laquelle travaille le critique. Et il ne peut guère se faire d'illusions sur le sort réservé à son œuvre; les faits dont il aura signalé l'importance, c'est aux sources mêmes, non dans ses écrits, que ses successeurs iront les rechercher pour les soumettre à un nouvel examen; les erreurs qu'il aura dissipées pourront ne plus jamais revenir embarrasser l'histoire; mais combien ce résultat purement négatif était au-dessous de ses aspirations! Les thèses positives, auxquelles il attachait le plus de poids et consacrait surtout ses veilles, que deviendront-elles, bientôt après sa mort, sinon avant? Qu'il jette un regard sur les exemples que lui offre un passé récent; quelle confiance peut-il garder dans l'avenir, s'il réfléchit à ce que pèsent en réalité aujourd'hui, dans la balance des opinions, les noms encore les plus justement honorés, ainsi celui de Letronne, pour ne pas en citer d'autres?

2. Il faut donc, dans la critique d'érudition, borner son ambition au présent et, sans trop préjuger l'avenir, s'efforcer d'assurer à ses opinions le plus possible de *probabilité actuelle*. Or à quoi se mesure cette probabilité? En fait, c'est à la proportion plus ou moins considérable d'adhésions rencontrées dans le cercle, d'ailleurs fort restreint, des érudits vivants s'occupant de l'ordre de questions dont il s'agit. A peine est-il besoin d'ajouter que, pour une évaluation effective, il conviendrait d'introduire des coefficients personnels; un savant comme Moritz Cantor, comme Friedrich Hultsch, comme J.-L. Heiberg, en vaut plusieurs autres, mais il ne réclame, ni ne peut réclamer l'infaillibilité. Quant à

ceux qui sont disparus de la scène et que parfois on invoque encore, ils ne comptent plus guère; ils n'ont pas su ce qui a été appris depuis. ils n'ont pu peser les nouveaux arguments, enfin et surtout, ils n'étaient pas dans le courant d'idées actuel.

Pourquoi insisté-je sur ce dernier point? Je vais chercher à l'expliquer, d'autant qu'il s'agit d'un élément considérable dans l'appréciation des opinions.

Voici déjà la dixième année depuis que j'ai commencé à publier, sur l'histoire des Sciences, quelques-unes de mes conjectures personnelles; à partir du moment où mes humbles essais ont attiré quelque attention, il est une question que j'ai souvent eu à me poser; pourquoi telle hypothèse, que j'émettais presque sans preuves, souvent à titre de simple possibilité, rencontrait-elle un assentiment général? Comment telle autre au contraire, que je m'étonnais d'être le premier à soutenir, tant elle me semblait naturelle, tant elle ressortait invinciblement pour moi de l'ensemble des faits, comment trouvait-elle des adversaires? Étudiais-je des travaux étrangers, je voyais surgir devant moi le même problème; tel point qui, à mes yeux, ne faisait pas l'ombre d'un doute, telle question qui me semblait devoir se régler en quelques mots, devenait l'objet de discussions approfondies, de polémiques sérieuses et prolongées.

J'ai cru m'expliquer tout cela, au moins dans une certaine mesure, en réfléchissant sur les motifs qui me déterminaient moi-même à adopter ou à rejeter telle ou telle conjecture nouvelle. Certainement, en présence d'une opinion qui n'est pas encore la sienne, le critique cherchera à être aussi impartial que possible; il pèsera le pour et le contre d'après les données objectives de la question, il cherchera à éliminer, autant que faire se peut, tout motif personnel de décision. Mais une pareille élimination est impossible à faire complètement; qu'on parvienne à la réaliser sans exception aucune, on ne sera plus soi-même.

Avant de se hasarder à rien produire, chaque érudit a dû accomplir pour lui-même, au moins à titre provisoire, la coordination logique de l'ensemble des faits qu'il connaît; il a dû jeter ainsi les fondements nécessaires de l'œuvre qu'il rêve. A la vérité, cette coordination, il la remanie sans cesse; mais telle qu'elle est à un moment donné, elle n'en jouera pas moins, qu'il en ait d'ailleurs plus ou moins conscience, le rôle d'un calibre ou d'un gabarit d'essai. Une thèse nouvelle s'y adapte-t-elle d'elle-même, elle aura toute chance d'être acceptée d'emblée; qu'au contraire elle ne se prête pas au cadre préétabli, elle sera l'objet d'une critique plus attentive, de réserves plus scrupuleuses; et cela, indépendamment de la valeur propre des arguments qui l'appuient.

Ce que je viens de dire pour un érudit en particulier peut s'appliquer à l'ensemble; nul ne peut connaître la totalité des faits à coordonner; les éléments employés ne sont donc pas exactement les mêmes pour chacun, leur connexion variera également suivant les tournures d'esprit particulières. Néanmoins, à un moment donné, il y a un ensemble d'idées commun à tous et par suite prédominant; la chance de succès d'une conjecture nouvelle diffère donc selon qu'elle est plus ou moins en harmonie avec cet ensemble commun.

3. Je n'ai nullement la prétention d'exposer quel est aujourd'hui le courant d'idées prépondérant; mais on pourrait croire *a priori* qu'il n'est susceptible que de lentes modifications; je voudrais, par une rapide esquisse des traits les plus importants, du moins à mes yeux, montrer qu'il est au contraire sujet à de brusques variations, soit par suite du travail interne accompli chez chaque érudit, soit en raison du renouvellement continu des savants qui attirent le plus l'attention par leurs travaux.

Il y a une douzaine d'années, la conception générale de l'histoire des Mathématiques, telle qu'elle se dégage, par exemple, de l'œuvre de Hankel, présentait un caractère qui, jusqu'à un certain point, était marqué au sceau des doctrines de l'*évolution,* déjà en grande faveur dans les milieux philosophique et scientifique. Les éléments de la Science ont été élaborés, dans une mesure sans doute mal connue, mais certainement considérable, chez les peuples de l'antiquité dont la civilisation a précédé celle de la Grèce. Depuis cette obscure origine, malgré les apparences contraires, le progrès a été incessant; d'abord les Grecs, puis les Hindous, enfin les Arabes; chaque peuple a développé suivant son génie propre, et en donnant tout ce qu'il pouvait donner, des branches spéciales de la Science; l'héritage sacré, fidèlement transmis et successivement accru, arrive aux nations de l'Occident moderne; la diversité de leurs races, l'heureuse rivalité qu'elles déploient, la rapide diffusion chez toutes des découvertes dues à chacune, semblent désormais assurer que le progrès indéfini de l'avenir n'exigera pas, comme dans le passé, de partielles et successives décadences.

Ainsi, autrefois, aux Grecs la Géométrie, aux Hindous l'Arithmétique et l'Algèbre; la spécialité des aptitudes est nettement tranchée, Diophante est à peine un Grec, il n'est pas possible qu'il n'ait point subi quelque influence orientale; si ses écrits ne nous avaient pas été conservés dans la langue qu'il parlait, personne ne pourrait soupçonner qu'ils soient un fruit du génie hellène.

Les deux tendances opposées se réunissent chez les Arabes; ceux-ci s'attachent spécialement à l'Astronomie, mais en même temps ils commencent cette longue élaboration qui s'achèvera à la Renaissance avant d'aboutir à la révolution cartésienne, à l'ouverture de l'ère glorieuse des Mathématiques modernes. Depuis lors, aucun indice ne peut faire soupçonner qu'il nous manque, comme il manquait aux Grecs, quelque élément nécessaire pour la poursuite des travaux mathématiques, et la Science, à jamais rajeunie, pourra toujours nourrir *un long espoir et de vastes pensers.*

4. Rapprochons de cette esquisse sommaire quelques-uns des traits qui se dessinent dans la partie déjà publiée (1880) des *Vorlesungen* de M. Cantor. Ce Volume marque en effet d'une façon décisive la transition mesurée de l'ancien au nouveau courant d'idées qui, depuis, va s'accentuant de plus en plus. La conception évolutive s'efface; il n'en subsiste que quelques rares éléments dont l'indiscutable vérité s'adapte au changement du point de vue. La Science, en tant que l'on n'abuse point de son nom, éclôt chez les Grecs, presque brusquement, en tout cas intégralement; après avoir donné des fruits immortels, elle subit un irrécusable déclin, végète plus ou moins misérablement pendant de longs siècles, avant de retrouver sa vitalité primitive et de prendre, dans les temps modernes, un nouvel et définitif essor.

L'explication du papyrus mathématique égyptien par Eisenlohr, le déchiffrement de quelques tablettes chargées d'écritures cunéiformes, nous ont révélé des faits curieux et permis de préciser un peu mieux le point de départ des découvertes hellènes; mais, en thèse générale, ces documents ont singulièrement rabaissé l'opinion que l'on se faisait des connaissances mathématiques chez les Égyptiens et chez les Babyloniens, quoique d'ailleurs la plupart des orientalistes soient toujours disposés à s'exagérer ces connaissances, et que notamment l'histoire des origines de l'Astronomie soit encore loin d'être suffisamment éclaircie.

Quant aux mathématiciens hindous et arabes, leur étude plus approfondie n'a nullement confirmé les thèses de Hankel : certes, il reste encore bien à apprendre à leur sujet, mais les découvertes, qui sont encore à faire dans leurs écrits, ne semblent plus devoir offrir un intérêt aussi puissant qu'on était porté à l'espérer. Plus on les examine, plus ils apparaissent comme dépendants des Grecs et, malgré quelques inventions heureuses et vraiment originales, restés en moyenne bien inférieures à leurs devanciers sous tous les rapports. J'ajoute que l'on est encore certainement assez loin d'avoir restitué aux Grecs tout ce qui leur appartient légitimement dans les travaux attribués à leurs héritiers scientifiques. J'en veux donner une seule preuve :

De tous les instruments astronomiques des Arabes, étudiés par A. Sédillot et donnés par lui comme étant de leur invention, le plus intéressant est sans contredit l'*astrolabe planisphère* qui permettait de déterminer l'heure au moyen d'une observation de hauteur sur le Soleil ou sur une étoile, et d'une opération consistant à faire mouvoir l'un sur l'autre deux cercles figurant en projection stéréographique, l'un la sphère mobile, l'autre la sphère fixe. Cet instrument a d'ailleurs joué un rôle historique d'autant plus important que jusqu'à l'invention des horloges à pendule, les astronomes n'avaient aucun moyen exact pour déterminer l'heure pendant la nuit sans observations des étoiles, et que l'*astrolabe planisphère* leur permettait de résoudre le problème sans calcul. Or ce même astrolabe se trouve exactement décrit dans un Traité grec [1] composé par Jean le grammairien (Philopon) au commencement du VIe siècle après J.-C., et la nomenclature grecque des pièces de l'instrument a même été servilement adoptée par les

(1) Publié par Hase dans le *Rheinisches Museum* en 1839, mais n'en étant pas plus connu.

Arabes. Notre auteur le donne d'ailleurs comme connu dès le temps de Ptolémée, et rien ne doit faire supposer qu'en fait l'invention ait été d'une date plus récente (¹).

5. Ainsi il est permis de penser que la conception générale actuelle de l'histoire des Mathématiques ira en s'affermissant de plus en plus, au moins pendant une ou deux générations; il est clair d'ailleurs qu'elle revient très sensiblement à celle qui dominait, d'après Montucla, il y a une cinquantaine d'années, vers le moment où Michel Chasles ouvrit une ère nouvelle pour l'étude de cette histoire.

Je ne fais point cette remarque pour en tirer une conclusion sceptique; bien au contraire, la double évolution que j'ai indiquée n'aurait certainement pu s'accomplir sans la coordination historique d'un nombre considérable de faits inconnus ou mal connus il y a un demi-siècle. Qui ne s'est pas mis au courant du mouvement critique depuis cette époque pourrait croire à quelque découverte capitale, à quelque travail hors ligne capable de changer d'un seul coup l'orientation des esprits; il n'en a rien été : le mouvement a résulté d'une quantités de faits souvent assez minimes, de discussions minutieuses, d'études de détail et de monographies fragmentaires.

La véritable conséquence à formuler, c'est que la plus humble contribution ne doit pas être négligée et qu'il ne faut pas se rebuter devant des détails parfois d'apparence fastidieuse; tout au plus convient-il d'ajouter une réserve pour ceux qui craignent les inconvénients du trop grand éparpillement des efforts (²); c'est

(¹) Je soupçonne que le principe en remonte aux Babyloniens, dont on a des observations faites de nuit et marquées en *heures temporaires;* seulement, avant la découverte de la propriété des projections stéréographiques, l'instrument devait consister en une sphère mobile autour d'un axe incliné comme l'axe du monde, et en un hémisphère creux, fixe et concentrique, analogue à celui des cadrans solaires primitifs. Le nom d'*araignée* (ἀράχνη), donné, dans l'*astrolabe planisphère*, au cercle représentant la sphère mobile (parce qu'il était découpé à jour pour permettre d'obtenir les coïncidences avec l'autre cercle, lequel était massif), était également le nom donné, d'après Vitruve, au cadran *sphérique* d'Eudoxe. En tout cas, il ne me paraît pas douteux qu'un instrument analogue n'ait servi, avant l'invention de la Trigonométrie, à résoudre mécaniquement les problèmes de la sphérique.

(²) Le danger est réel dans le vaste domaine de la Philologie; dans le cercle que le travailleur fera bien de tenir compte des courants d'idées dominants, des questions à l'ordre du jour, et de relever ainsi la minutie des détails qu'il étudie.

Mon objet maintenant va précisément être, après avoir indiqué les principaux problèmes qui s'imposent aujourd'hui dans l'histoire des Mathématiques anciennes, de montrer, par quelques exemples, comment leur solution dépend de questions qui paraissent, à première vue, d'une importance tout à fait secondaire. On ne s'étonnera pas si je choisis ces exemples parmi des conjectures que j'ai déjà proposées, et qui, à côté d'adhésions parfois peu espérées, ont rencontré de sérieux contradicteurs. En appelant de nouveau l'attention sur elles, j'ai le ferme espoir soit de convaincre ceux qui les ont rejetées jusqu'à présent, soit de provoquer de leur part des recherches fécondes pour la vérité.

6. L'histoire n'a pas pour unique objet la satisfaction d'une vaine curiosité; c'est l'avenir que finalement doit éclairer l'étude du passé. Or un mathématicien, vraiment digne de ce nom, peut-il ne pas se préoccuper parfois du sort futur réservé à la Science à laquelle il s'est consacré? Peut-on vraiment parler de progrès indéfini? Ne trouvera-t-on pas le tuf un jour, et ne faudra-t-il pas, comme disait Lagrange, abandonner la mine trop profonde? Certes la question n'est pas urgente; à la vitesse actuelle du progrès, il semble bien que l'on ait au moins deux siècles pour se demander ce qu'il conviendra de faire en pareil cas et comment conserver au mieux les trésors acquis, si l'espoir de les accroître est enfin interdit. Mais d'ici là, quelque bouleversement social ne peut-il entraîner la ruine de la Science? Elle n'a plus, dira-t-on, rien à craindre sérieusement des crises passagères, et toute société un peu stable protégera et encouragera forcément les savants, dont les services sont, de nos jours, non seulement utiles, mais même nécessaires. Cela est incontestable pour les chimistes, les physiciens, et, si l'on veut, aussi les astronomes; la Mathématique pure sera donc garantie par son utilité dans les sciences de la nature. Mais, si la question d'utilité se pose, n'est-il pas à craindre que la protection et les en-

---

malheureusement très restreint qui s'occupe de l'histoire des Mathématiques, il est loin d'être à redouter encore.

couragements ne se bornent à certaines branches, et ne délaissent les autres, précisément les plus élevées et les plus abstruses? Supposons maintenant que l'histoire démontre que, pour la Science, l'arrêt dans la marche en avant équivaut à un recul, qu'on ne peut vouloir se borner aux parties nécessaires pour les applications, sans arriver peu à peu à négliger de plus en plus la théorie et à n'en conserver finalement que des débris tout à fait insuffisants; que deviendrait dès lors la garantie de l'*utilité?* Si le danger que je signale ici n'est pas imaginaire, peut-on affirmer que, comme le premier, il est encore bien loin de nous, et qu'une génération prochaine n'aura pas à s'en préoccuper?

On peut voir, devant ces questions, quel intérêt majeur présente l'histoire des Mathématiques anciennes du moment où elles nous offrent l'exemple d'une décadence profonde après un brillant apogée; et l'on peut affirmer, de ce point de vue, que le *vrai problème* qui s'impose aujourd'hui dans cette histoire est de *préciser les circonstances et de déterminer les causes de la décadence passée, en vue de connaître les précautions à prendre pour éviter une décadence future.*

Je n'ai, bien entendu, aucunement la prétention de résoudre un problème aussi complexe; je voudrais seulement préciser dans une certaine mesure les diverses questions qu'il soulève, et donner quelques indications sur la marche à suivre pour en traiter au moins une.

7. Il est à peine besoin de réfuter sérieusement l'opinion qui attribuerait aux invasions barbares la décadence des sciences grecques. Quand, au VII^e siècle, les Arabes entrèrent dans Alexandrie, la glorieuse cité des Ptolémées pouvait avoir encore une école, mais depuis trois cents ans au moins cette école était incapable de produire autre chose que de pâles commentateurs des œuvres antiques; si parfois encore ils nous font illusion, nous n'en devons pas moins nous dire que le niveau est déjà tombé aussi bas qu'il le fut en moyenne chez les Byzantins pendant les longs siècles du moyen âge. Un exemple suffira pour le prouver :

Richard Hoche a publié (1864 et 1867) un commentaire de Jean le grammairien (Philopon) sur l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque et en même temps, pour le premier Livre seulement, les importantes variantes que lui donnait une réédition de ce commentaire contenu dans un manuscrit de la bibliothèque épiscopale de Zeitz. Philopon, quoique n'étant pas particulièrement mathématicien, était certainement considéré de son temps comme un savant universel de la plus haute valeur; son commentaire doit d'ailleurs reproduire l'enseignement d'un maître également considérable, et dont la compétence mathématique était bien reconnue, Ammonius, fils d'Hermias; il est cependant difficile d'imaginer les erreurs grossières qu'il a entassées dans ses volumineuses dissertations. Or ces erreurs sont en général assez bien corrigées dans la réédition de Zeitz, et l'auteur anonyme fait certainement preuve et d'une meilleure intelligence du texte de Nicomaque et de connaissances mathématiques mieux digérées; Hoche a bien reconnu que cet auteur était postérieur à Philopon, mais il a pensé que ce pouvait être un de ses disciples. Il n'est rien; le manuscrit n° 2377 du fonds grec de la Bibliothèque Nationale de Paris contient le même texte avec des annotations marginales qui établissent que la réédition est due au moine Isaac Argyros, lequel vivait dans la seconde moitié du XIVe siècle.

8. La décadence de la Mathématique grecque remonte donc à une époque bien antérieure au VIIe siècle, et en tous cas on ne peut s'arrêter avant les derniers grands noms que présente l'Ecole d'Alexandrie, ceux de Pappus et de Diophante. C'est l'âge qui précède immédiatement celui de Constantin et du triomphe du christianisme; on a pu dire, avec quelque apparence de raison, que la profonde révolution qui s'ensuivit fut fatale à la Science; il est certain que dès lors se proposa à l'humanité un idéal tout autre que celui qu'avaient fait briller Platon et Aristote, la vie du savant contemplant *la théorie pour elle-même*. Mais si, depuis la Renaissance, cet idéal retrouvé a gardé d'assez nombreux fidèles, sommes-nous assurés qu'une nouvelle révolution sociale ne l'éteindra pas au profit des doctrines utilitaires?

Au reste l'accusation tombe à faux sur le christianisme; comme les barbares n'ont pas eu la peine de faire crouler la société gréco-romaine, déjà tombée d'elle-même, le christianisme n'a eu qu'à liquider la banqueroute de la philosophie officielle, après le siècle des Antonins. L'idéal platonicien avait dès longtemps disparu devant celui des Stoïciens, *utilitaire au fond et par suite contraire à la Science*, malgré les apparences de sa morale sublime. La secte du Portique arriva, il est vrai, d'assez bonne heure à rallier assez d'intelligences pour qu'il lui fallût tenir en quelque honneur les connaissances scientifiques négligées par ses fondateurs; mais ses doctrines ne pouvaient sérieusement favoriser le développement de ces connaissances, et la suprématie qu'elle obtint semble avoir été au moins inutile pour la Science, aussi bien qu'elle le fut pour le maintien des institutions sociales. Bientôt peut-être l'histoire portera sur cette secte, souvent exaltée, un jugement plus sévère encore.

Quoi qu'il en soit, pour la question qui nous occupe, il s'agit sans contredit d'étudier la période qui remonte depuis Pappus et Diophante jusqu'à l'apogée de la Géométrie grecque, au temps d'Apollonius de Perge. Dans cet intervalle de cinq siècles environ, un nouveau point de repère nous permet de diviser le problème; la décadence a-t-elle réellement commencé avant l'extension de la domination romaine sur la Grèce et l'Orient hellénisé? A-t-elle au contraire suivi cette extension, qui semblerait dès lors avoir été une des causes déterminantes de cette décadence?

Actuellement la question est très obscure; *a priori*, la perte de l'indépendance pour les États hellènes, la domination d'un peuple dont le génie pratique n'a jamais pu se plier aux abstractions scientifiques, ont dû porter un coup funeste aux études mathématiques sérieuses; mais on peut dire d'un autre côté que, les ruines de la conquête une fois réparées, les pays grecs purent profiter des bienfaits d'une longue paix qui leur avait toujours manqué, que les Romains reconnurent de très bonne heure la supériorité intellectuelle de la race hellène, et que les études scientifiques retrouvèrent bien vite une protection très largement suffisante. Enfin l'histoire montre que, malgré leur défaite momentanée, les Grecs possédaient encore plus de vitalité que les Romains.

9. Il n'est d'ailleurs ni établi historiquement, ni unanimement reconnu que le niveau moyen de la Science pendant la période gréco-romaine ait été inférieur à celui de la période gréco-alexandrine. C'est en ces termes que peut se préciser la première question à résoudre, et, pour l'étudier, il convient de dresser séparé-

ment le bilan pour chacune des branches principales à considérer: Arithmétique, Algèbre, Géométrie élémentaire, Géométrie supérieure, Astronomie.

Pour l'Arithmétique, la question, je crois, est aujourd'hui bien tranchée; personne ne peut plus considérer comme des auteurs originaux, ainsi que le faisait Nesselmann, de pseudo-mathématiciens, tels que Nicomaque ou Théon de Smyrne. Les connaissances qu'ils nous ont transmises appartiennent en totalité soit à la période purement hellène, soit à la période alexandrine; si la forme de l'exposition est leur propriété, elle constitue un symptôme irrécusable de décadence. L'Arithmétique théorique n'a été cultivée scientifiquement chez les anciens qu'avec l'appareil géométrique euclidien, et comme travail de ce genre postérieur à notre ère, nous ne connaissons que l'opuscule *des nombres polygones* de Diophante, essai incontestablement malheureux.

En ce qui concerne l'Astronomie, la question de supériorité a été très vivement controversée entre Hipparque et Ptolémée; mais elle offre, pour le problème qui nous occupe, moins d'intérêt qu'on ne pourrait le penser tout d'abord; l'Astronomie comporte en effet deux sortes d'éléments, les uns empruntés à l'observation, les autres à la théorie; pour les premiers, l'astronome le plus récent a toujours l'avantage; Ptolémée a donc incontestablement réalisé des progrès sur Hipparque, de même que les Arabes en ont réalisé sur lui; la question à résoudre pourrait être de savoir si les uns ou les autres ont bien tiré des matériaux dont ils disposaient tout le parti possible; mais nous ne sommes encore capables d'y répondre sérieusement ni pour Hipparque, ni pour Ptolémée, ni pour les Arabes, et en tout cas la réponse n'aurait pas de portée réelle en ce qui concerne la Mathématique pure. Quant à la partie théorique du système de Ptolémée, on est d'accord pour reconnaître qu'elle appartient, comme fond, aux premiers Alexandrins; la théorie des épicycles et la Trigonométrie remontent à Apollonius et à Hipparque. Toutefois il reste nombre de points secondaires à éclaircir, et en tout cas une histoire réelle de la sphérique ancienne est à peu près entièrement à faire.

Pour l'Algèbre et la Géométrie supérieure (Diophante et Pappus), la question est au contraire particulièrement grave et passablement obscure; à la vérité, personne ne soutiendrait plus les paradoxes de Hankel que je rappelais tout à l'heure, et l'on a réuni assez d'indices pour être assuré que les problèmes traités par Diophante lui sont en réalité bien antérieurs; Pappus, d'autre part, nous a laissé un recueil précieux, mais qui n'est, en fait, qu'une compilation de travaux remontant pour la plupart à une date antérieure à l'ère chrétienne. Ces deux contemporains paraissent ainsi avoir obéi au même mouvement qui, à leur époque, après la chute du stoïcisme officiel, ramenait les philosophes vers les sources antiques, et donnait ainsi la passagère illusion d'une renaissance bientôt condamnée à l'avortement. Il n'en est pas moins vrai que le degré d'originalité de Diophante reste incertain, de même que le degré de nouveauté de ses méthodes et de ses notations. Pour être résolues, les questions qu'il soulève réclament de longues discussions et avant tout la publication d'une édition critique de son Ouvrage. Je crois devoir d'autant plus préciser ainsi l'état actuel du problème, que mon opinion personnelle est mieux arrêtée sur le peu de valeur propre de Diophante, et que cette opinion a été plus favorablement accueillie jusqu'à présent, malgré le défaut de preuves péremptoires.

Pour Pappus, nous possédons désormais ce qui manque pour Diophante, une bonne édition, celle de Hultsch; mais il reste à l'étudier à fond, ce qui demandera des efforts soutenus et répétés, car la mine à exploiter sera difficilement épuisée. Les travaux de Géométrie entre Apollonius et Pappus sont en fait très peu connus, et leur caractère s'apprécie aussi mal que leur importance; si, après les *Coniques* du géomètre de Perge, il n'est paru aucun Ouvrage qui soit devenu classique, le sort qui attendait ses successeurs a peut-être eu son motif dans le déclin des études plutôt que dans l'imperfection de l'œuvre. D'un autre côté, il est certain que les traités classiques d'analyse géométrique ont été l'objet, après leur rédaction, de travaux approfondis qui avaient au moins pour but de faciliter l'étude des matières dont traitaient ces Ouvrages. Les indications que Pappus donne sur ces travaux, les lemmes qu'il en a tirés, doivent être soigneusement examinés pour déterminer quels progrès réels ont pu être réalisés.

10. Ainsi, des cinq branches que nous avons distinguées dans la Science, deux sont à mettre hors de compte; deux autres présentent pour leur histoire des difficultés majeures qui ne permet-

tent pas d'espérer une prompte solution, en ce qui les concerne, du problème que j'ai posé. Heureusement, pour la cinquième branche, il n'en est pas ainsi.

Pour la Géométrie élémentaire en effet, en regard de l'œuvre d'Euclide, nous possédons le *Commentaire sur le premier Livre,* écrit au v^e^ siècle après J.-C. par Proclus, chef de l'École d'Athènes. S'il est possible de démontrer, par l'examen de ce commentaire, qu'aucune idée nouvelle n'a été émise sur les principes de la Science, depuis le premier siècle avant l'ère chrétienne jusqu'à Proclus, la question sera tranchée pour la branche qui nous occupe, comme elle l'est, avons-nous dit, pour l'Arithmétique théorique, et il est clair que pour toute la période correspondante, il y aura un motif suffisant de préjuger défavorablement ce qui concerne les branches supérieures; alors que les éléments sont négligés, il n'est guère à penser que des progrès se réalisent plus haut.

Le *Commentaire* de Proclus peut être divisé en deux Parties bien distinctes : la première, après un double prologue consacré à des considérations générales, d'abord sur l'ensemble des Mathématiques, puis sur la Géométrie en particulier, traite des définitions, des postulats et des axiomes; la seconde Partie commente les propositions du Livre I d'Euclide. Or j'ai déjà avancé à diverses reprises que Proclus avait emprunté à très peu près tout ce qui est réellement mathématique dans son commentaire, pour la première partie à Geminus, auteur du I^er^ siècle avant l'ère chrétienne. pour la seconde à Porphyre, qui, au III^e^ siècle après J.-C., avait commencé à écrire sur les propositions d'Euclide. Si cette double thèse était établie, il ne resterait qu'à constater, ce qui est facile, que le commentaire relatif aux propositions ne présente aucun intérêt réel au point de vue mathématique.

Heiberg (*Philologus,* XLIII, 2, p. 345) m'a objecté que j'estimais trop peu Proclus et que j'exagérais en le qualifiant de *copiste infatigable.* Nous avons cependant un témoignage bien connu depuis longtemps de la façon dont notre philosophe entendait la rédaction d'ouvrages mathématiques : c'est le Traité *De la sphère* de Proclus, c'est-à-dire une copie textuelle des chapitres III, IV, XII et II de l'*Introduction aux phénomènes* qui nous reste, précisément de ce Geminus si souvent cité dans la première partie du *Commentaire sur Euclide.*

Mais je suis le premier à reconnaître que ce témoignage n'est pas suffisant pour établir sérieusement la conjecture que j'ai émise; quel est d'ailleurs l'intérêt de cette conjecture, peut-être d'apparence assez insignifiante de prime abord, je crois l'avoir suffisamment montré; comment donc la discuter à fond? Il faut procéder à une analyse complète, à un examen circonstancié de l'Ouvrage de Proclus, et faire, en procédant suivant les règles de la critique, le départ entre ce qui peut lui appartenir et ce qu'il a dû emprunter à autrui. On reconnaîtra sans aucun doute que Proclus n'est pas simplement un copiste, que de longs développements sont bien de son propre cru; mais on s'apercevra également que son originalité ne s'exerce que sur les questions qu'il considère comme touchant la Philosophie, qu'en somme pour nous, elle n'a qu'une conséquence fâcheuse, c'est que ce qui nous intéresse vraiment, se trouve noyé dans un fatras pseudo-philosophique dont nous n'avons que faire.

11. Le travail dont j'indique le plan peut sembler devoir être fastidieux dans ses détails, surtout à cause de cet élément néoplatonicien introduit par Proclus dans les questions mathématiques, et qu'il s'agit d'écarter. Mais ce travail n'en est pas moins nécessaire, si l'on veut vraiment résoudre les problèmes posés; d'ailleurs il offrira un attrait spécial qui suffirait à lui seul pour soutenir l'attention.

Proclus est en fait la source capitale pour l'histoire de la Géométrie chez les Grecs; en exceptant Pappus, c'est-à-dire la géométrie supérieure, on ne trouve en dehors de lui qu'un petit nombre de documents épars, qu'il serait absolument impossible de coordonner s'il nous manquait. Dès lors la question de savoir où il puise ses renseignements historiques est une des plus graves qui se présentent pour le critique.

Que Proclus n'ait connu par lui-même aucun Ouvrage géométrique antérieur à Euclide, c'est un point unanimement concédé; mais qu'il n'ait pas même utilisé directement l'*histoire géométrique* composée un peu avant Euclide par le disciple d'Aristote, Eudème de Rhodes, alors qu'il le cite assez fréquemment, je crois avoir été le premier à soutenir cette thèse[1]. Heiberg (*loc. cit.*, p. 492),

---

[1] *Sur les fragments d'Eudème de Rhodes relatifs à l'histoire des Mathematiques* (*Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux*, 1882).

en la déclarant insuffisamment fondée, remarque très justement qu'elle dépend d'une question plus importante, dit-il, mais trop peu débattue, celle de savoir ce que les derniers siècles de l'antiquité possédaient encore de l'ensemble des écrits plus anciens.

La gravité de cette dernière question n'échappera à personne; mais il est clair que, si elle touche la Philologie en général, elle ne peut être résolue que par des travaux spéciaux pour les différentes branches de la littérature. L'historien des Mathématiques n'a pas à se préoccuper de savoir au juste quels poètes, perdus pour nous, Proclus pouvait encore lire; il lui suffit de savoir, en thèse générale, que, dès le v^e siècle de notre ère, des Ouvrages qui, cependant, avaient dû rester longtemps accessibles, étaient désormais introuvables; mais, ce point incontestable étant bien admis, il ne peut se dérober devant la tâche qui lui incombe, de discerner si Proclus a, en réalité, directement puisé à telle source antique.

La question ne peut être résolue autrement que par l'étude approfondie du *Commentaire sur Euclide;* c'est seulement après s'être familiarisé avec les procédés de Proclus qu'il est possible de juger quand il fait une citation de première ou de seconde main. Le problème se rattache d'ailleurs à ceux que j'ai posés plus haut; car, à partir du moment où une œuvre aussi intéressante pour le mathématicien que celle d'Eudème a commencé à être négligée, où son autorité n'a plus été invoquée que sur la foi d'autrui, il est bien à présumer que la Science était déjà sur la pente de l'irrémédiable déclin; mais, en même temps, la question se transforme et s'élargit.

Il ne s'agit de rien moins, en fait, que de *la tradition de l'histoire de la Géométrie chez les Grecs;* comment et sur quels documents a-t-elle été composée à l'origine, avec quelle fidélité a-t-elle été transmise, quel degré de probabilité présente donc chacune des données de cette histoire, voilà en effet quels problèmes soulèvera à chaque instant l'étude du *Commentaire* dû à Proclus. Il est clair, par exemple, que tel texte, relatif aux temps avant Euclide, prendra une signification toute différente, suivant que l'on devra le considérer comme emprunté à Eudème, ou comme, au contraire, venant de Geminus; dans certains cas même, l'interprétation littérale pourra changer.

Le travail, ainsi conçu, ne pourra évidemment se borner à Proclus, quoique ce dernier doive toujours fournir, et de beaucoup, la somme de matériaux la plus considérable. Que ce travail soit d'ailleurs indispensable et doive précéder tout essai d'une histoire véritable et réelle de la Géométrie, il est à peine utile de le faire remarquer; il s'agit de l'application d'une des règles les plus élémentaires de la critique; cependant, ce sujet n'a pas encore été traité d'une façon systématique, et, par suite, il est presque neuf. Sans doute, lorsque Bretschneider [1] a recueilli soigneusement les documents relatifs à la période préeuclidienne, si mal traitée dans Montucla, il lui a bien fallu discuter la valeur de chacun de ces documents; c'est bien aussi ce que fait aujourd'hui, plus complètement et plus judicieusement, G.-J. Allman, qui a repris la tâche de Bretschneider [2]. Mais l'examen critique a toujours porté, en thèse générale, plutôt sur les documents considérés en eux-mêmes, dans leur probabilité intrinsèque, que sur leur origine réelle et sur leur filiation. Il y a là un point de vue important, qui jusqu'à présent, a été trop négligé.

---

(1) *Die Geometrie und die Geometer vor Euklid,* Leipzig, 1870.

(2) *Greek Geometry from Thales to Euclid* publiée dans l'*Hermathena* (Dublin, vol. III, 1877; IV, 1881; V, n° 10, 1884; n° 11, 1885).

INDEX.

Les chiffres arabes renvoient aux pages, les chiffres romains aux Chapitres dans tout le cours desquels il est parlé de l'auteur qui fait l'objet du renvoi. Les chiffres entre parenthèses sont ceux des pages des éditions citées, lorsque ces pages n'ont pas été indiquées ci-avant.)

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page 14, *ligne* 6 *en remontant.* — La preuve que j'ai mise en avant pour établir les procédés de compilation de Proclus est sans valeur; les recherches que j'ai faites sur les manuscrits du *Traité de la Sphère* m'ont en effet prouvé que cet extrait de Geminus est dû à quelque Byzantin, et n'a été mis sous le nom de Proclus que vers le XVe siècle.

Page 17, *note* 2. — *Ajoutez*, vol. VI, n° 12, 1886, et n° 13, 1887. Le travail de M. G.-J. Allman est terminé; il est désirable qu'il le réunisse en un volume.

Page 57, *note* 1. — En fait, les anciens ont connu, sous le nom de *météoroscope*, deux instruments bien distincts : l'un, probablement inventé par Ptolémée et exclusivement adapté à la mesure des hauteurs méridiennes; l'autre, la sphère armillaire dont je parle d'après Proclus (*Hypotyposes*, éd. Halma, p. 137), et qui peut remonter à Hipparque.

Dans le passage auquel se rapporte cette note, les *latitudes* dont il est parlé sont les latitudes géographiques (les latitudes célestes des étoiles se mesurant directement sur les sphères armillaires); ce que j'ai voulu marquer, c'est que, dans Ptolémée, les premières applications de la Trigonométrie suivent le Chapitre où il parle de son instrument des hauteurs, et qu'en cela il devait suivre la tradition.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

10852 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.