

Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur «*Notes du mont Royal*» dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DE LA PAGE INTERNET

Remacle.org

[RETOUR À L'ENTRÉE DU SITE](#)

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN



Oeuvre numérisée par Marc Szwajcer

ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΜΑΘΗΤΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΣΦΕΙΜΟΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΤΙΚΟΝ ΑΝΑΓΩΓΗΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES

POUR LA LECTURE DE PLATON

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

Par J. DUPUIS

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^{ie}

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1892

EXPOSITION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES POUR LA LECTURE DE PLATON

PREFACE

PREMIÈRE PARTIE

INTRODUCTION

De l'utilité des mathématiques

ARITHMÉTIQUE

SECONDE PARTIE

LIVRE CONTENANT LES LOIS NUMÉRIQUES DE LA MUSIQUE,...

TROISIÈME PARTIE

ASTRONOMIE

[RETOUR À L'ENTRÉE DU SITE](#)

[ALLER A LA TABLE DES MATIERES DE THÉON DE SMYRNE](#)



THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

Oeuvre numérisée par Marc Szwajcer

ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΜΑΘΗΤΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΣΦΕΙΜΟΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΜΑΘΗΤΙΚΟΝ ΑΝΑΓΩΓΗΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES
POUR LA LECTURE DE PLATON

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

Par J. DUPUIS

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^{ie}

Boulevard Saint-Germain, 79

1892

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

UTILES POUR LA LECTURE DE PLATON

SECONDE PARTIE LIVRE CONTENANT LES LOIS NUMÉRIQUES DE LA MUSIQUE,...

PREFACE

Nous n'avons aucune donnée précise sur l'époque à laquelle vécut Théon de Smyrne; mais il est certainement postérieur au musicographe Thrasyllle, puisqu'il le cite dans ses écrits et il est probablement antérieur à l'astronome Claude Ptolémée, auteur de l'*Almageste* qu'il n'eût pas manqué de citer, si Ptolémée l'avait précédé. Il doit donc avoir vécu entre le temps de Tibère près duquel Thrasyllle était en faveur à titre d'astrologue, et le temps d'Antonin-le-Pieux sous lequel Ptolémée s'est illustré.

Il vivait donc sans doute au commencement du second siècle de notre ère, c'est-à-dire au temps de Plutarque, et c'est peut-être ce Théon que Plutarque introduit comme interlocuteur dans son livre *Du visage qui apparaît sur le disque lunaire*, dans les *Questions de table*, et dans le livre *Sur le ελ du temple de Delphes*. C'est sans doute encore lui que Théon d'Alexandrie, commentateur de Ptolémée, appelle « Théon l'ancien. »

Théon a composé un abrégé de mathématiques en cinq livres, qui a pour titre : *Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* ; exposition abrégée comprenait: I, l'arithmétique; II, la géométrie (plane); III, la stéréométrie (géométrie de l'espace); IV, l'astronomie; et V, la musique.

La musique se composait alors de trois parties: les lois mathématiques des sons, la musique instrumentale, et l'harmonie des sphères célestes. Dans son travail, Théon omet la musique instrumentale qui était considérée comme étrangère aux spéculations philosophiques et il expose la théorie des nombres musicaux immédiatement après l'arithmétique. Il dit: « Puisque les principes numériques de la musique se rattachent à la théorie des nombres abstraits, nous leur donnerons le second rang pour la facilité de notre étude ». Et quelques lignes plus loin il ajoute: « Ainsi, dans notre plan, les lois numériques de la musique viendront immédiatement après l'arithmétique; mais, d'après l'ordre naturel, la cinquième place doit être donnée à cette musique qui consiste dans l'harmonie des mondes. »

L'arithmétique, les lois mathématiques de la musique et l'astronomie sont seules parvenues jusqu'à nous. Il manque les livres sur la géométrie et sur la stéréométrie, ainsi que l'écrit sur l'harmonie du monde céleste que Théon dit expressément avoir composé. Michel Psellus, écrivain byzantin du XI^e siècle a composé un petit traité sur les quatre sciences mathématiques. Cet écrit paraît être pour l'arithmétique, la musique et l'astronomie, un résumé des pages de Théon, mais il est tellement abrégé que nous ne croyons pas qu'on puisse combler en partie la lacune de Théon par les notions trop succinctes de géométrie et de stéréométrie de Michel Psellus.

La première partie de l'ouvrage de Théon traite des nombres pairs et des nombres impairs, des nombres hétéromèques et des nombres promèques, des nombres semblables, des nombres polygones et des nombres pyramidaux, des nombres latéraux et des nombres diagonaux,... Elle ne contient rien sur l'arithmétique pratique des Grecs, que Platon appelait λογιστική (science du calcul), et qu'il distinguait de l'ἀριθμητική (science des propriétés des nombres). Les démonstrations manquent, Théon se borne à de simples vérifications.

La seconde partie comprend 81 paragraphes: les 38 premiers traitent des nombres musicaux: les 3 autres, qui traitent des analogies, des quaternaires et des médiétés, seraient presque tous mieux à leur place dans la première partie.

La troisième partie traite de la forme de la terre, du mouvement des planètes, des éclipses... Elle contient de nombreuses erreurs que le lecteur relèvera facilement.

.....

Nous offrons aux lecteurs de Platon et aux rares amis de l'histoire des sciences la première traduction française de ce qui nous reste de l'Exposition de Théon. Si les mathématiques n'ont rien à gagner à la publication de cette traduction, l'histoire des sciences peut y trouver du moins quelques renseignements utiles. Quant à nous, nous avons trouvé dans Théon la confirmation de l'interprétation que nous avons donnée en 1882 des termes énigmatiques du passage de la *République* de Platon, où il est question du *Nombre géométrique*, valeur hypothétique de la *grande année* après laquelle tous les événements humains devaient se reproduire dans le même ordre.

Tout le premier chapitre est rempli de citations de la *République*, d'*Epinomis*, des *Lois*, de *Phédon*, de *Phèdre* et de *Théétète*, dialogues de Platon ou attribués à Platon. C'est plutôt une introduction à tout l'ouvrage de Théon qu'une partie du livre sur l'arithmétique. Les citations étant rarement textuelles, au moins dans leur entier, sont très probablement faites de mémoire. Lorsque la différence des deux textes est trop sensible, nous avons cru devoir conserver en général celui de Théon. L'exception est signalée en note.

Outre les ouvrages de Platon et d'Aristote, ouvrages que Théon paraît avoir sus par cœur, il avait lu les livres d'un grand nombre d'auteurs dont il cite, dans le cours de son Exposition, plusieurs passages qu'on ne trouve guère ailleurs.

Ce qui nous reste de l'Exposition de Théon nous est parvenu en deux parties: la première (arithmétique et musique) se trouve dans le ms. 307 de la bibliothèque Saint Marc à Venise; la seconde (astronomie) dans le ms. 303 de la même bibliothèque.

... Le premier manuscrit en parchemin est du XI^e ou XII^e siècle; le second en papier de grand format est du XIV^e ou XV^e siècle. Les titres des chapitres de ces manuscrits étant souvent mal choisis ou assez mal placés, nous avons cru devoir en supprimer plusieurs du corps du texte, nous les reportons alors dans les notes des bas de pages. Nous avons conservé les numéros des paragraphes pour la commodité des renvois.

La Bibliothèque nationale de Paris possède plusieurs manuscrits de Théon

Voici l'indication de quelques autres bibliothèques qui possèdent des manuscrits de Théon:

En Angleterre, à Cambridge, bibliothèque du collège e de la Trinité; à Oxford, bibliothèque Bodléienne.

En Espagne, à l'Escorial.

En Hollande, à Leyde.

En Italie, à Bologne: à Florence, bibliothèque Laurentienne; à Milan, bibliothèque Ambrosienne; à Turin, bibliothèque royale.

Nous avons collationné plusieurs passages de notre texte sur les manuscrits de la Bibliothèque nationale de Paris et sur les manuscrits de quelques bibliothèques d'Italie, pendant une mission dont nous avons été chargé en 1887 en Italie, en Grèce et en Bavière.

Chalcidius, philosophe platonicien du III^e siècle, a inséré la plus grande partie de l'astronomie de Théon dans un commentaire latin sur le *Timée*. D'après H. Martin, qui a remarqué le premier cette insertion, Chalcidius n'a presque rien ajouté à l'ouvrage de Théon, qu'il semble donner comme sien. Il a omis ou résumé plusieurs passages importants et il en a mal compris quelques autres. Il n'a rien négligé, dit H. Martin, pour faire disparaître les traces de son larcin : *Furti autem sui vestigia sedulo*

delevit.

Le commentaire de Chalcidius offre quelque avantage pour la correction du texte de Théon, et réciproquement.

Nous avons été très sobre de notes, de commentaires et de rectifications, voulant éviter de faire jouer à une œuvre scientifique, même très imparfaite, un rôle qui parût secondaire.

.....

J. D. PROVISEUR HONORAIRE,
DERNIER DIRECTEUR
DE L'ÉCOLE PROFESSIONNELLE FRANÇAISE DE MULHOUSE
Paris, 12 août 1892.

PREMIÈRE PARTIE

INTRODUCTION

De l'utilité des mathématiques

I. Tout le monde conviendra assurément qu'il n'est pas possible de comprendre ce que Platon a écrit sur les mathématiques, si l'on ne s'est pas adonné à leur étude. Lui-même a montré en beaucoup d'endroits que cette connaissance n'est pas inutile et sans fruit pour les autres sciences. Celui-là donc doit être estimé très heureux qui, en abordant les écrits de Platon, possède bien toute la géométrie, toute la musique et l'astronomie. Mais ce sont là des connaissances dont l'acquisition n'est ni rapide, ni facile: elle exige, au contraire, un travail assidu dès la première jeunesse. Dans la crainte que ceux qui n'ont pas eu la possibilité de cultiver les mathématiques et qui désirent néanmoins connaître les écrits de Platon ne se voient forcés d'y renoncer, nous donnerons ici un sommaire et un abrégé des connaissances nécessaires et la tradition des théorèmes mathématiques les plus utiles sur l'arithmétique, la musique, la géométrie, la stéréométrie et l'astronomie, sciences sans lesquelles il est impossible d'être parfaitement heureux, comme il le dit, après avoir longuement démontré qu'on ne doit pas négliger les mathématiques.

Eratosthène, dans le livre qui a pour titre le *Platonicien*, rapporte que les Déliens ayant interrogé l'oracle sur le moyen de se délivrer de la peste, le dieu leur ordonna de construire un autel double de celui qui existait déjà. Ce problème jeta les architectes dans un étrange embarras. Ils se demandaient comment on peut faire un solide double d'un autre. Ils interrogèrent Platon sur la difficulté. Celui-ci leur répondit que le dieu avait ainsi rendu l'oracle, non qu'il eût aucun besoin d'un autel double, mais pour reprocher aux Grecs de négliger l'étude des mathématiques et de faire

peu de cas de la géométrie.

Pour entrer dans ces vues d'Apollon Pythien, il s'étendit, dès lors longuement, dans ses entretiens, sur l'utilité des mathématiques. C'est ainsi que dans l'*Epinomis*, voulant exciter à les étudier, il dit : « Personne, certes, ne saurait être heureux dans l'Etat, s'il les ignore; telle est la voie, telle est l'éducation, telles sont les sciences, faciles ou non à apprendre, qui peuvent conduire à cette fin; on n'a pas le droit de négliger les dieux... » Plus loin il dit encore que « s'il y en a un seul qui voit tel (mathématicien), c'est celui-là qui sera favorisé de la fortune et au comble de la sagesse et de la félicité ».

Dans la *République*, voici ce qu'il écrit: « A partir de vingt-cinq ans,^[1] ceux qu'on aura choisis obtiendront des distinctions plus honorables et on devra leur présenter dans leur ensemble les sciences que tous, dans l'enfance, ont étudiées isolément, afin qu'ils saisissent sous un point de vue général et les rapports que ces sciences ont entre elles, et la nature de l'être. ». Il prescrit de se livrer d'abord à l'étude de l'arithmétique, puis à celle de la géométrie, en troisième lieu à celle de la stéréométrie, ensuite à celle de l'astronomie qu'il dit être l'étude du solide en mouvement, enfin il exhorte à apprendre en cinquième lieu la musique. Après avoir montré l'utilité des mathématiques, il dit: « Vous êtes amusant, vous qui semblez craindre que je vous impose des études inutiles. Ce n'est pas seulement, du reste, à des esprits médiocres, c'est à tous les hommes qu'il est difficile de se persuader que c'est par ces études, comme avec des instruments, que l'on purifie l'œil de l'âme et qu'on fait briller d'un nouveau feu cet organe qui était obscurci et comme éteint par les ténèbres des autres sciences, organe dont la conservation est plus précieuse que celle de dix mille yeux, puisque c'est par celui-là seul que nous contemplons la vérité ».

Dans le septième livre de la *République*,^[2] parlant de l'arithmétique, il dit que c'est de toutes les connaissances la plus nécessaire, puisque c'est celle dont ont besoin tous les arts, toutes les conceptions de notre esprit, toutes les sciences et l'art militaire lui-même. « Palamède,^[3] dit-il, représente souvent, dans les tragédies, Agamemnon comme un plaisant général; il se vante d'avoir inventé les nombres et d'avoir mis de l'ordre dans le camp et dans la flotte des Grecs devant Ilion et dans tout le reste, tandis qu'auparavant on n'avait fait aucun dénombrement et qu'Agamemnon lui-même semblait ne pas savoir combien il avait de pieds, car il ignorait complètement l'art de compter. L'arithmétique semble donc par sa nature appartenir à tout ce qui élève l'âme à la pure intelligence et l'amène à la contemplation de l'être; mais personne n'en fait usage comme il faut. Les choses qui ne font qu'une seule impression sur nos sens n'invitent point l'entendement à la réflexion : telle est la vue d'un doigt gros ou mince, long ou court, mais celles qui font naître deux sensations opposées ont le pouvoir de réveiller et d'exciter notre entendement, comme lorsque le même objet nous paraît grand ou petit, léger ou lourd, un ou multiple. C'est donc l'unité et le nombre qui ont la vertu de réveiller et d'exciter notre intelligence, puisque ce qui est un nous paraît quelquefois multiple. La science du calcul et l'arithmétique nous conduisent donc à la connaissance de la vérité.^[4]

L'art du calcul ne doit donc pas être traité à la manière du vulgaire, mais de façon à conduire les hommes à la contemplation de l'essence des nombres, non en vue du commerce, comme font les marchands et les courtiers, mais pour le bien de l'âme, en lui facilitant les moyens de s'élever de l'ordre des choses qui passent, vers la vérité et l'être.

C'est, en effet, cette étude qui, donnant à notre âme un puissant élan vers la

région supérieure, l'oblige à raisonner sur les nombres tels qu'ils sont en eux-mêmes, sans jamais souffrir que la discussion porte sur des unités visibles et tangibles. Il dit encore dans le même livre: « Ceux qui savent calculer s'appliquent avec succès à toutes les sciences, et ceux mêmes qui ont l'esprit plus lent, deviennent par là plus intelligents ». Dans le même livre il assure encore que, dans la guerre même, l'art de calculer est très utile pour les campements, pour la prise de possession des places, pour la concentration et le développement des troupes. Plus loin, faisant l'éloge des mêmes sciences, il dit que la géométrie s'occupe des surfaces, mais que l'astronomie a pour objet le solide en mouvement, qu'en conséquence elle oblige l'âme à regarder en haut et à passer des choses de la terre à la contemplation de celles du ciel. Dans le même écrit, il parle de la musique parce que, pour la contemplation de tout ce qui existe, il faut deux choses, « l'astronomie et l'harmonie qui, selon la doctrine des Pythagoriciens, sont deux sciences sœurs ». Ceux-là donc font un travail inutile qui, cherchant à saisir les nuances diatoniques et à comparer les sons, se contentent de prêter attentivement l'oreille et de s'approcher le plus possible de l'instrument, comme s'ils voulaient surprendre la conversation du voisin. Les uns disent qu'ils entendent un certain son particulier entre deux sons et que l'intervalle est le plus petit qui se puisse apprécier. Les autres doutent de l'existence de ce son. Préférant tous l'autorité de l'oreille à celle de l'esprit, ils cherchent la vérité en pinçant les cordes et en tournant les clefs de leurs instruments. Mais les arithméticiens habiles cherchent par la réflexion quels sont les nombres qui répondent aux consonances et forment l'harmonie, et quels sont ceux qui répondent aux dissonances. Cette étude conduit à la recherche du bien et du beau, toute autre est inutile. Toute méthode, si elle est générale et s'étend à toutes les propriétés communes des choses, en resserrant les liens de leurs affinités mutuelles, portera son fruit selon l'ardeur et le zèle avec lesquels on s'y sera appliqué. Il est impossible, en effet, que les dialecticiens qui y sont habiles ne sachent pas se rendre compte à eux-mêmes, et rendre compte aux autres, de la raison des choses. C'est à quoi personne n'arrivera s'il ne prend ces sciences pour guide, car c'est en raisonnant d'après elles que nous arrivons à la contemplation des choses.

Dans l'*Epinomis*, Platon revient encore sur l'arithmétique qu'il appelle « un don de Dieu^[5] » et il dit que personne ne saurait devenir vertueux sans elle. Passant ensuite à la description du contraire, il dit: « Si on ôtait le nombre à l'humanité, on lui rendrait impossible toute prudence : l'âme de l'animal destitué de raison serait incapable d'aucune vertu; elle n'aurait même plus son essence. Certes l'animal qui ne sait distinguer ni deux ni trois, qui ne connaît ni le pair ni l'impair, enfin qui ne sait rien du nombre, ne sera jamais en état de rendre raison d'aucune chose, ne la connaissant que par les sens et la mémoire. Privé de la vraie raison, il ne deviendra jamais sage. Passons en revue tout ce qui a rapport aux autres arts, nous verrons qu'il n'en est aucun qui puisse subsister, aucun qui ne périclite, si on ôte la science du nombre. A ne considérer que les arts, on pourrait croire avec quelque raison que cette science n'est nécessaire au genre humain que pour des objets de peu d'importance; ce serait déjà beaucoup. Mais celui qui considérera ce qu'il y a de divin dans l'origine de l'homme et ce qu'il y a de mortel en lui, quel besoin de piété il a envers les dieux, celui-là reconnaîtra en lui le nombre, et nul, fut-il un prophète, ne saura ni ne comprendra jamais de combien de facultés et de force le nombre est pour nous la source. Il est évident, par exemple, que la musique ne peut se passer de mouvements et de sons mesurés par les nombres, et il n'est pas moins évident que le nombre, comme source de tous les biens, ne saurait être la cause d'aucun mal. » Au contraire, celui à qui tout nombre échappe manque en quelque sorte de raison; il est sans ordre, sans

beauté, sans grâce et enfin privé de toutes les perfections. Plus loin, il continue ainsi : « Personne ne nous persuadera jamais qu'il y ait pour le genre humain une vertu plus grande et plus auguste que la piété, car c'est par elle que celui qui a pris soin de s'instruire acquiert les autres vertus. Il montre ensuite comment on inspire la piété envers les dieux; puis il dit que c'est par l'astronomie qu'il faut commencer, car, s'il est honteux de commettre le mensonge à l'égard des hommes, il l'est bien plus de le commettre à l'égard des dieux. Or, celui-là est menteur qui se fait des dieux une fausse opinion, l'exprime et n'a pas même étudié la nature des dieux sensibles, c'est-à-dire l'astronomie. « Ignorez-vous, dit-il, que celui-là est nécessairement très sage qui est véritablement astronome, non pas astronome à la manière d'Hésiode, s'occupant à observer le lever et le coucher des astres, mais celui qui scrute les révolutions des sept planètes, de la connaissance desquelles tout le génie de l'homme est à peine capable^[6] ». Or celui qui se propose de préparer les esprits des hommes à ces études, lesquelles supposent beaucoup de connaissances préliminaires, doit s'être rendu les sciences mathématiques familières dès son enfance et pendant toute sa jeunesse, et, parmi ces sciences, la meilleure, la principale, est la science des nombres abstraits et séparés de toute matière, celle aussi de la génération et de la vertu du pair et de l'impair, en tant qu'elle contribue à faire connaître la nature des choses. Après cette science, il en est une, dit-il, à laquelle on a donné le nom parfaitement ridicule de géométrie, car elle comprend une assimilation de nombres qui ne sont pas semblables entre eux par nature, assimilation que met en évidence la condition des surfaces. Il fait ensuite mention d'une autre science qu'il appelle stéréométrie : si quelqu'un, dit-il, multipliant trois nombres, rend le produit semblable (à un autre) de dissemblable qu'il était, il fera une œuvre vraiment divine et merveilleuse. Dans les *Lois*, parlant de l'harmonie musicale, il dit que la plus grande et la plus belle harmonie politique est la sagesse. On ne la possède qu'autant qu'on vit selon la droite raison; quant à celui à qui elle fait défaut, il est le corrupteur de sa propre maison, c'est un citoyen inutile au salut et à la prospérité de l'Etat, puisqu'il vit dans une extrême ignorance^[7] ».

Et dans le troisième livre de la *République*, voulant prouver que le philosophe est seul musicien, il dit : « Par les dieux immortels, nous ne serons jamais musiciens, ni nous ni ceux dont nous devons faire l'éducation comme gardiens, tant que nous ne connaissons pas toutes les formes de la tempérance, du courage, de la générosité et de la grandeur et tant que nous n'aurons pas compris tout ce qui, dans le monde, est conforme ou contraire à ces vertus, tant que nous ne saurons pas les reconnaître et en reconnaître les images dans ceux qui les possèdent, sans en négliger une seule, grande ou petite, les regardant comme faisant partie du même art et de la même étude^[8] ». Par ces paroles et par celles qui précèdent, il prouve l'utilité de la musique, et il montre que le seul philosophe est réellement musicien, tandis que celui qui est vicieux et méchant est étranger aux Muses. Car, dit-il, la vraie et sincère probité des mœurs, celle vertu qui consiste dans le bon et honnête règlement de notre vie, suit la droite raison, c'est-à-dire l'usage conforme à la raison. Il ajoute que les compagnons de la droite raison sont la décence, la cadence et l'accord, la décence dans le chant, l'accord dans l'harmonie, la cadence dans le rythme. Par contre, l'improbité ou la corruption des mœurs est essentiellement liée à la perversion de la raison, c'est-à-dire à l'usage corrompu de la raison, et ses compagnons sont l'indécence, la confusion et le désaccord dans tout ce qu'on fait, de soi-même ou par imitation, de sorte que celui-là seul est musicien qui a de bonnes mœurs et, comme on le voit par ce qui précède, il est aussi le vrai philosophe, si toutefois, dès les premières années de son adolescence, quand on lui eut appris la musique, il prit des habitudes de décence et

d'ordre, car la musique joint un plaisir innocent à l'utilité. Il est impossible, dit Platon, que celui-là devienne musicien parfait, qui n'a pas en tout des habitudes de bonne éducation, qui n'a pas les idées de décence, de noblesse d'âme et de tempérance. Il doit reconnaître que ces idées se retrouvent partout et ne les mépriser ni dans les petites choses ni dans les grandes. Car c'est au philosophe qu'il appartient de connaître les idées, et personne ne connaîtra la modestie, la tempérance et la décence, s'il est lui-même immodeste et intempérant. Mais les choses qui font l'ornement de la vie humaine, le beau, l'harmonieux, l'honnête, tout cela est l'image de cette beauté, de cet accord, de ce bel ordre éternel et qui a une existence véritable, c'est-à-dire que ces choses sensibles sont les caractères et l'expression des choses intelligibles ou des idées.

Les Pythagoriciens dont Platon adopte souvent les sentiments, définissent aussi la musique une union parfaite de choses contraires, l'unité dans la multiplicité, enfin l'accord dans la discordance. Car la musique ne coordonne pas seulement le rythme et la modulation, elle met l'ordre dans tout le système; sa fin est d'unir et de coordonner, et Dieu aussi est l'ordonnateur des choses discordantes, et sa plus grande œuvre est de concilier entre elles, par les lois de la musique et de la médecine, les choses qui sont ennemies les unes des autres. C'est aussi par la musique que l'harmonie des choses et le gouvernement de l'univers se maintiennent; car ce que l'harmonie est dans le monde, la bonne législation l'est dans l'Etat, et la tempérance l'est dans la famille. Elle a, en effet, la puissance de mettre l'ordre et l'union dans la multitude. Or, l'efficacité et l'usage de cette science, dit Platon, se voient dans quatre des choses qui appartiennent à l'humanité : l'esprit, le corps, la famille et l'Etat. En effet, ces quatre choses ont besoin d'être bien ordonnées et constituées.

Voici encore ce que Platon dit des mathématiques dans les livres de la *République* : « L'homme de bien est celui qui, éprouvé par la peine ou le plaisir, agité par le désir ou par la crainte, conserve toujours, sans jamais les rejeter, les idées droites qu'on lui a données en faisant son éducation. Je vais vous dire à qui il me paraît semblable. Quand nos teinturiers veulent teindre la laine en pourpre, ils commencent par choisir, parmi les laines de diverses couleurs, celle qui est blanche. Ils font ensuite leur préparation, et il ne faut pas peu de soin pour que la laine prenne la fleur de la couleur. C'est ainsi qu'ils opèrent, et grâce à cette méthode, les couleurs s'incorporent à la laine et leur éclat ne peut être enlevé ni à l'aide de lessive, ni autrement. Que si, au contraire, le teinturier ne prend pas ces précautions, on sait ce qui arrive, et comment les laines conservent peu la couleur qui s'efface et disparaît. Il faut opérer de même pour nos facultés^[9] ». Nous apprenons aux enfants la musique, la gymnastique, les lettres, la géométrie et l'arithmétique, ne négligeant rien pour qu'ils reçoivent, comme une teinture, les raisons de toutes les vertus que nous leur enseignons; après leur avoir administré préalablement des détersifs, et d'autres préparations, consistant dans ces sciences, qui sont comme autant de médicaments astringents, leurs sentiments resteront indélébiles, leur caractère aura été formé par l'éducation. Cette couleur et cette teinture que nous leur aurons données, ne pourront être effacées par aucune lessive, -je veux dire par la volupté plus dangereuse que toute perversité et que toute habitude, - ni par la douleur, ni par la crainte et la cupidité, plus corrosives que toutes les lessives. Nous pouvons encore comparer la philosophie à l'initiation aux choses vraiment saintes et à la révélation des mystères qui ne sont pas des impostures.^[10] Il y a cinq parties dans l'initiation : la première est la purification préalable, car on ne doit pas faire participer aux mystères indistinctement tous ceux qui le désirent, mais il y a des aspirants que la voix du héraut écarte, tels sont ceux qui ont les mains impures, ou dont la parole manque de

prudence; et ceux-là mêmes qui ne sont pas repoussés doivent être soumis à certaines purifications. Après cette purification, vient la tradition des choses sacrées (qui est proprement l'initiation). Vient en troisième lieu la cérémonie qu'on appelle la pleine vision (degré supérieur de l'initiation). La quatrième, qui est la fin et le but de la pleine vision, est la ligature de la tête et l'imposition des couronnes, afin que celui qui a reçu les choses sacrées devienne capable d'en transmettre à son tour la tradition à d'autres, soit par la dadouchie (port des flambeaux), soit par l'hiérophantie (interprétation des choses sacrées), soit par quelque autre sacerdoce. Enfin la cinquième, qui est le couronnement de toutes celles qui précèdent, est d'être ami de Dieu et de jouir de la félicité qui consiste à vivre dans un commerce familier avec lui.

C'est absolument de la même manière que se fait la tradition des raisons platoniques. On commence, en effet, dès l'enfance par une certaine purification consistant dans l'étude de théories mathématiques convenables. Selon Empédocle^[11] « il faut que celui qui veut puiser dans l'onde pure des cinq fontaines commence par se purifier de ses souillures ». Et Platon dit aussi qu'il faut chercher la purification dans les cinq sciences mathématiques, qui sont l'arithmétique, la géométrie, la stéréométrie, la musique et l'astronomie. La tradition des principes philosophiques, logiques, politiques et naturels répond à l'initiation. Il appelle pleine vision^[12] l'occupation de l'esprit aux choses intelligibles, aux existences vraies et aux idées. Enfin il dit que par la ligature et le couronnement de la tête, on doit entendre la faculté qui est donnée à l'adepte, par ceux qui l'ont enseigné, de conduire les autres à la même contemplation. La cinquième est cette félicité consommée dont ils commencent à jouir et qui, selon Platon, « les assimile à Dieu, autant que cela est possible ».

Celui qui voudrait démontrer l'utilité et la nécessité des sciences mathématiques pourrait en dire beaucoup plus long. Mais de crainte que je ne paraisse m'arrêter plus que de raison louer ces sciences, je vais commencer l'explication des théorèmes nécessaires, non pas de tous ceux qui seraient nécessaires aux lecteurs pour devenir de parfaits arithméticiens, géomètres, musiciens ou astronomes, car ce n'est pas le but que se proposent tous ceux qui veulent lire les écrits de Platon; mais j'expliquerai les théorèmes qui suffisent pour comprendre le sens de ses écrits. En effet, Platon lui-même ne veut pas que l'on continue jusque dans l'extrême vieillesse à tracer des figures géométriques ou à chanter des chansons, choses qui conviennent aux enfants et qui sont destinées à préparer et à purifier leur esprit, pour le rendre capable de comprendre la philosophie. Il suffit que celui qui veut aborder nos écrits, ou les livres de Platon, ait parcouru les premiers éléments de la géométrie, pour qu'il comprenne facilement nos explications. Toutefois ce que nous dirons sera tel, que nous pourrions être compris même de celui qui ignore complètement les mathématiques.

ARITHMÉTIQUE

De l'ordre dans lequel on doit étudier les mathématiques

II. Nous allons commencer par les théorèmes arithmétiques auxquels se rattachent de très près les théorèmes musicaux qui se traduisent par des nombres. Nous n'avons nul besoin de musique instrumentale, ainsi que l'explique Platon lui-même, lorsqu'il dit qu'il ne faut pas tourmenter les cordes des instruments, (l'oreille tendue) comme des

curieux qui sont aux écoutes. Ce que nous désirons c'est de comprendre l'harmonie et la musique célestes; cette harmonie, nous ne pouvons l'examiner qu'après avoir étudié les lois numériques des sons. Quand Platon dit que la musique occupe le cinquième rang^[13] (dans l'étude des mathématiques), il parle de la musique céleste, laquelle résulte du mouvement, de l'ordre et du concert des astres qui cheminent dans l'espace. Mais nous devons donner à la musique mathématique la seconde place (c'est-à-dire la mettre) après l'arithmétique, comme le veut Platon, puisqu'on ne peut rien comprendre à la musique céleste, si l'on ne connaît celle qui a son fondement dans les nombres et dans la raison. Puis donc que les principes numériques de la musique se rattachent à la théorie des nombres abstraits, nous leur donnerons le second rang pour la facilité de notre étude.

Selon l'ordre naturel, la première science serait celle des nombres, qu'on appelle arithmétique. La seconde serait celle qui pour objet les surfaces, et qu'on appelle géométrie. La troisième est celle qui pour objet les solides, et qu'on appelle stéréométrie. La quatrième traite des solides en mouvement, c'est l'astronomie. Quant à cette musique dont l'objet est de considérer les relations mutuelles des mouvements et des intervalles, quelles que soient ces relations, il n'est pas possible de la comprendre avant d'avoir saisi celle qui est basée sur les nombres. Ainsi, dans notre plan, les lois numériques de la musique viendront immédiatement après l'arithmétique mais, d'après l'ordre naturel, la cinquième place doit être donnée à cette musique qui consiste dans l'étude de l'harmonie des mondes. Or, selon la doctrine des Pythagoriciens, les nombres sont pour ainsi dire le principe, la source et la racine de toutes choses.

De l'Un et de la monade

III. Le nombre est une collection de monades, ou une progression de la multitude commençant et revenant à la monade (par l'addition ou la soustraction successive d'une unité). Quant à la monade, c'est la quantité terminante – principe et élément des nombres – qui, une fois débarrassée de la multitude par soustraction, et privée de tout nombre, demeure ferme et fixe: il est impossible de pousser plus loin la division. Si nous divisons en plusieurs parties un corps sensible, ce qui était *un* devient plusieurs, et si l'on soustrait chacune des parties, il se terminera à *un*; et si cet *un*, nous le divisons de nouveau en plusieurs parties, il en sortira la multitude, et en enlevant chacune de ces parties, on reviendra à *un*, de sorte que ce qui est un, en tant qu'un, est sans parties et indivisible.^[14] Tout autre nombre étant divisé est diminué et réduit en parties plus petites que lui, comme 6 en 3 et 3, ou en 4 et 2, ou en 5 et 4. Ce qui est un, dans les choses sensibles, si on le divise, est diminué à la manière des corps, et par le partage qu'on en fait, il est divisé en parties plus petites que lui; mais il augmente comme nombre; car, à la place de ce qui était un, il y a plusieurs. C'est d'après cela que ce qui est un est indivisible. Nulle chose, en effet, ne peut être divisée en parties plus grandes qu'elle-même. Mais ce qui est un, divisé en parties plus grandes que l'entier, se divise à la manière des nombres en parties égales en somme) à l'entier. Par exemple, si un corps, unité sensible, est divisé en six parties, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ces parties sont égales à l'unité; mais, si on le divise en 5 et 2, les parties sont plus grandes que l'unité; en effet, 1 et 2, comme nombres, surpassent un. La monade donc, en tant que nombre, est indivisible. Si elle est appelée monade, c'est, ou bien parce qu'elle demeure immuable et ne sort pas des limites de sa nature; en multipliant, en effet, la monade par elle-même, nous aurons toujours la monade : une fois un donne toujours un; et, si nous multiplions la monade jusqu'à l'infini, elle restera toujours monade. Ou bien encore, elle est appelée monade, parce qu'elle est séparée et mise seule en dehors de la multitude des autres

nombres. Comme le nombre diffère de ce qui est nommé, de même la monade diffère de ce qui est *un*. Le nombre, en effet, est une quantité intelligible, comme la quantité 5 et la quantité 10, qui ne sont pas composées de corps sensibles, mais de choses intelligibles. Quant à la quantité nombrable, elle se trouve dans les choses sensibles telles que 5 chevaux, 5 bœufs, 5 hommes. Donc la monade est l'idée d'un *un* intelligible, lequel *un* est indivisible. Quant à l'*un* qui se rencontre dans les choses sensibles, on le dit *un* en soi, comme un cheval, un homme.^[15]

IV. La monade sera donc le principe des nombres; et l'*un* le principe des choses nombrées. Ce qui est un, en tant que sensible, peut, à ce qu'on assure, être divisé à l'infini, non en tant qu'il est nombre ou principe du nombre, mais en tant qu'il est sensible, en sorte que la monade qui est intelligible, n'admet pas de division, mais que ce qui est un, étant sensible, peut être divisé à l'infini. Les choses nombrées diffèrent encore des nombres, en ce qu'elles sont corporelles, tandis que les nombres sont incorporels. Mais, sans faire cette distinction, « les modernes considèrent la monade et la dyade comme principes des nombres ; quant aux Pythagoriciens, ils font consister les principes des nombres dans les séries des termes successifs par lesquels se conçoivent les pairs et les impairs »; ils disent, par exemple, que le principe de trois dans les choses sensibles est la triade, que le principe de tout ce qui est quatre, parmi les choses sensibles, est la tétrade, et ainsi de même pour tous les autres nombres. Ils prétendent en outre que la monade est le principe de tous ces nombres et que l'*un* est libre de toute variété, l'un qui se trouve dans les nombres n'étant pas tel ou tel un, c'est-à-dire n'étant pas une certaine quantité et une diversité à l'égard d'un autre un, mais étant l'un considéré en lui-même. Car c'est par là qu'il devient le principe et la mesure des choses qui lui sont soumises, de même que chacune des choses qui existent est dite un, comme étant participante de la première essence et de l'idée de ce qui est un. Archytas et Philolaüs se servent indifféremment des mots un et monade, et ils disent que la monade est l'un. La plupart ajoutent au nom de monade l'épithète « première », comme s'il y avait une monade qui ne fût pas première, et comme si celle qu'ils appellent première était plus universelle, et qu'elle fût la monade et l'un, – car ils l'appellent aussi l'un – et comme si elle était l'essence première et intelligible qui fait que toutes les choses qui sont un, soient telles. C'est en vertu d'une participation à cette essence que toutes choses sont appelées un. C'est pourquoi le nom même *un* ne dit pas de quelle chose il s'agit, ni quelle en est l'espèce, mais il s'applique à toutes choses. Ainsi, la monade et l'*un* étant tout à la fois intelligibles et sensibles, ces deux choses ne diffèrent en rien l'une de l'autre. Quelques-uns mettent une autre différence entre l'un et la monade : l'un ne change pas selon la substance, et ce n'est pas lui qui fait que la monade ou les impairs changent selon l'essence. Il ne change pas non plus selon la qualité, car c'est lui-même qui est monade, et non comme les monades qui sont plusieurs. Il ne change pas non plus selon la quantité, car il n'est pas composé, comme les monades auxquelles s'ajoute une autre monade. Il est un et non plusieurs: c'est pour cela qu'on l'appelle lui seul *un*. Et quoique Platon, dans le *Philèbe*, se soit servi de l'expression « les unités », il ne les a pas appelées ainsi d'après l'un, mais d'après la monade qui est une participation de l'un. Cet un, qui se distingue de la monade dont il est l'essence, est quelque chose de tout à fait immuable. L'un diffère donc de la monade, en tant qu'il est défini et terme, tandis que les monades sont indéfinies et indéterminées.

Du nombre pair et du nombre impair

V. Une première division partage les nombres en deux espèces: les uns sont appelés pairs, les autres impairs. Les pairs sont les nombres qui peuvent se diviser en deux

parties égales, comme deux et quatre, les impairs au contraire sont les nombres qui ne peuvent se diviser qu'en parties inégales, comme cinq et sept. Quelques-uns ont dit que le premier des impairs est l'unité. Car pair est le contraire d'impair, et l'unité est nécessairement paire ou impaire; or elle ne peut pas être paire, puisque, non seulement elle ne se divise pas en parties égales, mais elle ne se divise même pas du tout; donc l'unité est impaire. Que si vous ajoutez un nombre pair à un autre nombre pair, le tout sera pair; or, l'unité, ajoutée à un nombre pair, donne un tout impair: donc, encore une fois, l'unité n'est pas paire, elle est impaire. Cependant, Aristote dit, dans le *Pythagoricien*,^[16] que l'un participe des deux natures. En effet, ajouté à un nombre pair, il donne un nombre impair; mais, ajouté à un nombre impair, il donne un nombre pair, ce qu'il ne pourrait faire s'il ne participait des deux natures. C'est pourquoi on l'appelle *pair-impair*. Archytas paraît avoir été aussi de ce sentiment. La première idée de l'impair est donc l'unité, comme aussi dans le monde, on attribue la qualité d'impair à ce qui est défini et bien ordonné. Au contraire, la première idée du pair est le binaire indéfini, ce qui fait que, dans le monde aussi, on attribue la qualité de pair à tout ce qui est indéfini, inconnu et désordonné. C'est pourquoi le binaire est appelé indéfini, parce qu'il n'est pas défini comme l'unité. Quant aux termes qui se suivent par une série continue, en commençant par l'unité, ils augmentent toujours d'une quantité égale, chacun surpassant d'une unité celui qui le précède; mais, à mesure que les termes augmentent, leur rapport mutuel diminue. Soient, par exemple, les termes 1, 2, 3, 4, 5, 6, la *raison* du nombre 2 à l'unité est double; celle du nombre 3 au nombre 2 est sesquialtère ($1 + 1/2$); celle du nombre 4 au nombre 3 est sesquiterce ($1 + 1/3$); celle du nombre 5 au nombre 4 est sesquiquarte ($1 + 1/4$); enfin celle du nombre 6 au nombre 5 est sesquiquinte ($1 + 1/5$). Or le rapport $1 + 1/5$ est plus petit que $1 + 1/4$; $1 + 1/4$ est plus petit que $1 + 1/3$; $1 + 1/3$ est plus petit que $1 + 1/2$; et enfin $1 + 1/2$ est plus petit que 2. Et on trouverait que la raison décroît de même pour les autres nombres. On voit aussi que les nombres successifs sont alternativement pairs et impairs.

Du nombre premier ou incomposé

VI. Parmi les nombres, les uns sont dits premiers absolus ou incomposés; d'autres sont premiers entre eux, mais non absolument; d'autres sont absolument composés; d'autres, composés entre eux. Les nombres absolument premiers et incomposés sont ceux qu'aucun nombre ne peut mesurer, si ce n'est l'unité. Tels sont 3, 5, 7, 11, 13, 17... et autres semblables. Ces nombres sont aussi appelés linéaires et euthymétriques, parce que les longueurs et les lignes ne sont considérées que dans une seule dimension. On les appelle aussi impairement-impairs. On leur donne donc cinq dénominations différentes : premiers, incomposés, linéaires, euthymétriques et impairement-impairs. Ce sont les seuls qui ne soient pas divisibles; ainsi aucun des autres nombres, différents de l'unité, ne peut diviser le nombre 3, de sorte que 3 puisse résulter de leur multiplication. En effet, une fois 3 fait 3. De même, une fois 5 fait 5, une fois 7 fait 7, et une fois 11 fait 11. Et c'est pour cela qu'on appelle ces nombres impairement-impairs;^[17] car ils sont impairs, et l'unité qui les mesure est également impaire. Aussi les seuls impairs peuvent être premiers ou incomposés. En effet, les nombres pairs ne sont pas premiers et incomposés; ils n'ont pas la seule unité pour mesure, d'autres nombres les mesurent: par exemple, 2 mesure 4, car 2 fois 2 font 4; 2 et 3 mesurent 6, car 2 fois 3 et 3 fois 2 font 6. Tous les autres nombres pairs, à l'exception de 2, sont mesurés de même par des nombres plus grands que l'unité. Le nombre 2 est le seul, parmi les pairs, qui soit dans le même cas que plusieurs impairs, de n'avoir que l'unité pour mesure. En effet une fois 2 est 2. C'est pour cela qu'on a dit que le nombre 2 a la nature du nombre impair, parce qu'il a la même propriété que

les impairs. On appelle premiers entre eux, mais non absolument, les nombres qui ont pour commune mesure l'unité, quoique d'autres nombres les mesurent, si on les considère séparément, comme 8 que mesurent 2 et 4, 9 que mesure 3, et 10 que mesurent 2 et 5. Ils ont, en effet, l'unité pour commune mesure, soit entre eux, soit par rapport à leurs facteurs premiers : on a [une fois 3 égale 3] une fois 8 égale 8, une fois 9 égale 9, et une fois 10 égale 10.

Du nombre composé

VII. Les nombres composés sont les nombres mesurés par un nombre moindre qu'eux-mêmes, comme 6 qui est mesuré par 2 et 3. Les nombres composés entre eux sont ceux qui ont une mesure commune comme 8 et 6, qui ont 2 pour commune mesure, car 2 fois 3 font 6 et 2 fois 4 font 8. Tels sont encore 6 et 9 qui ont 3 pour commune mesure, car 3 fois 2 font 6 et 3 fois 3 font 9. Quant à l'unité, elle n'est pas un nombre, mais le principe du nombre; et, quant au nombre 2, il n'est pas indéfini, il est le premier nombre différent de l'unité et, quoique pair, il n'a pas de diviseur plus grand que l'unité. Les nombres composés qui sont le produit de deux nombres sont appelés *plans*; on les considère comme ayant deux dimensions, longueur et largeur. Ceux qui sont le produit des trois nombres sont appelés *solides*, comme possédant la troisième dimension. Enfin, on appelle *circuit* le résultat de la multiplication de nombres les uns par les autres.

Des diverses sortes de nombres pairs.

VIII. Parmi les nombres pairs, les uns sont parement pairs d'autres impairement-pairs, d'autres enfin parement-impairs. On reconnaît qu'un nombre est parement-pair quand il réunit ces trois conditions 1° qu'il soit engendré par deux pairs multipliés entre eux; 2° que toutes les parties en soient paires jusqu'à la réduction à l'unité; 3° qu'aucune de ses parties n'ait le même nom qu'un nombre impair. Tels sont 32, 64, 128, et ainsi de suite en procédant par une progression double. En effet, 32 est le produit des nombres 4 et 8 qui sont pairs. Toutes les parties en sont paires, savoir : la moitié 16, le quart 8, le huitième 4, les parties sont de même nom que les nombres pairs, la moitié est considérée comme le nombre binaire, il en est de même du quart, du huitième (qui sont considérés comme les nombres 4, 8). Il en est de même des autres nombres.^[18]

IX. On appelle nombres parement impairs les nombres mesurés par le nombre 2 et par un nombre impair quelconque et qui ont, par conséquent, des moitiés impaires quand on fait la division par 2. Tel est 2 fois 7 ou 14. On les appelle parement impairs, parce qu'ils ont pour mesure le nombre 2, qui est pair et, en outre, un nombre impair; 2 a l'unité; 6 a le nombre 3; 10 a le nombre 5; 14 a 7. Ces nombres, une fois faite la division par 2, sont partagés en deux parties impaires, et, après la première division, ils n'en admettent plus d'autre en deux parties égales. En effet, la moitié de 6 est 3, mais 3 ne peut se diviser en parties égales, car l'unité (qui reste après la division par 2) est indivisible.^[19]

X. Les nombres impairement pairs sont ceux qui résultent de la multiplication de deux nombres quelconques, l'un impair, l'autre pair, lesquels, multipliés l'un par l'autre, sont divisés par le nombre 2 en deux parties paires; mais, si l'on emploie de plus grands diviseurs, les quotients sont tantôt pairs, tantôt impairs. Tels sont les nombres 12 et 20, qui valent respectivement 3 fois 4, et 5 fois 4. Or, en divisant 12 successivement par 2, 3 et 4, on a $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 4 \times 3$. On a de même $20 = 2 \times 10 = 4 \times 5 = 5 \times 4$.^[20]

Des nombres carrés, hétéromèques, parallélogrammes

XI. Parmi les nombres composés les uns sont également égaux, c'est-à-dire carrés et

plans, quand ils résultent de la multiplication de deux nombres égaux (le résultat est également égal ou carré). Tels sont les nombres 4 et 9, car 2 fois 2 font 4 et 3 fois 3 font 9.

XII. Au contraire, les nombres composés sont inégalement inégaux, quand ils résultent de la multiplication de deux nombres inégaux. Tel est 6, car 2 fois 3 font 6.

XIII. Parmi ces nombres, on nomme *hétéromèques*, ceux qui ont un côté (facteur) plus long que l'autre d'une unité. Or, le nombre qui surpasse le nombre impair d'une unité est pair, donc les hétéromèques ne comprennent que des nombres pairs. En effet, l'unité, principe de tous les nombres, étant impaire et tendant à la production des autres, a fait, en se doublant elle-même, le nombre 2 qui est hétéromèque, C'est pourquoi le nombre 2, étant hétéromèque et surpassant l'unité d'une unité, rend hétéromèques les nombres pairs qui surpassent les impairs d'une unité. Or, les nombres dont il s'agit s'engendrent de deux manières, par la multiplication et par l'addition. Par l'addition, les nombres pairs ajoutés aux nombres pairs qui les précèdent, produisent les nombres hétéromèques. Soient, en effet, les nombres pairs successifs

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Par l'addition, on a $2+4=6$; $6+6=12$; $12+8=20$; $20 + 10=30$; en sorte que les sommes sont les nombres hétéromèques 6, 12, 20, 30 et ainsi des suivants.^[21] Les mêmes nombres hétéromèques sont également obtenus par la multiplication des pairs et des impairs successifs, le premier nombre étant multiplié par le suivant. Soit, en effet,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

On a 1 fois 2=2; 2 fois 3=6; 3 fois 4=12; 4 fois 5=20; 5 fois 6=30; et ainsi de suite. Les nombres hétéromèques sont ainsi appelés, parce que c'est l'addition de l'unité à l'un des côtés qui fait la première diversité des côtés.

XIV. Les nombres parallélogrammes sont ceux qui ont un côté plus grand que l'autre de 2 unités, comme 2 fois 4, 4 fois 6, 6 fois 8, 8 fois 10, qui valent 8, 24, 48, 80.

XV. Les nombres engendrés par l'addition des nombres impairs successifs sont carrés. Soit, en effet, la série des impairs 4, 3, 5, 7, 9, 11; 1 et 3 font 4 qui est carré, car il est également égal, 2 fois 2 font 4; 4 et 5 font 9, qui est aussi carré, car 3 fois 3 font 9; 9 et 7 font 16, qui est carré, car 4 fois 4 font 16; 16 et 9 font 25, c'est encore un nombre carré, car il est également égal, 5 fois 5 font 25. On continuerait ainsi à l'infini. Telle est donc la génération des nombres carrés par l'addition, chaque impair étant successivement ajouté au carré obtenu en sommant les impairs précédents à partir de l'unité.^[22] La génération a lieu aussi par la multiplication, en multipliant un nombre quelconque par lui-même, comme 2 fois 2 font 4, 3 fois 3 font 9, 4 fois 4 font 16,

XVI. Les carrés consécutifs ont pour moyens, en proportion géométrique, des hétéromèques, c'est-à-dire des nombres dont un côté est plus long que l'autre d'une unité; mais les hétéromèques consécutifs n'ont pas des carrés pour moyens proportionnels.

Ainsi, soient les nombres 1, 2, 3, 4, 5; chacun d'eux multiplié par lui-même donne un carré: $1 \times 1=1$; $2 \times 2=4$; $3 \times 3=9$; $4 \times 4=16$; $5 \times 5=25$; aucun des facteurs ne sort de ses propres limites, car le nombre 2 ne fait que se doubler lui-même, 3 ne fait que se tripler... Les carrés successifs sont donc 1, 4, 9, 16, 25. Je dis qu'ils ont pour moyens les hétéromèques. Prenons, en effet, le carrés successifs 1 et 4, le moyen entre eux est le nombre hétéromèque 2 : si nous posons la série 1, 2, 4, le moyen 2 contient l'extrême 1, autant de fois qu'il est contenu dans l'autre extrême 4; 2 est en effet,

le double de 1, et 4 le double de 2. Soient encore les carrés 4 et 9, leur moyen est le nombre hétéromèquement 6. Si nous mettons en ligne 4, 6, 9, le rapport du moyen 6 au premier extrême est égal au rapport du deuxième extrême à 6, car le rapport de 6 à 4 est sesquialtère ($1 + 1/2$), comme le rapport de 9 à 6. Il en est de même des carrés suivants.

Les hétéromèques, au contraire, produits de facteurs qui diffèrent d'une unité, ne restent pas dans leurs propres limites et ne comprennent pas les carrés. Ainsi $2 \times 3=6$; $3 \times 4=12$; et $4 \times 5=20$. Or, aucun des (premiers) facteurs ne demeure dans ses propres limites, il change dans la multiplication, le nombre 2 se multipliant par 3, le nombre 3 par 4, et 4 par 5.

De plus, les nombres hétéromèquement engendrés ne comprennent pas les nombres carrés. Ainsi 2 et 6 sont des hétéromèques successifs entre lesquels se trouve le carré 4; mais celui-ci n'est pas compris entre eux d'après la proportion géométrique continue, en sorte qu'il ait le même rapport avec les extrêmes. Si nous disposons en ligne 2, 4, 6; 4 aura un rapport différent avec les extrêmes, car le rapport de 4 à 2 est double et celui de 6 à 4 est sesquialtère ($1 + 1/2$). Or, pour que 4 fut moyen proportionnel, il faudrait que le rapport du premier terme au moyen fût égal au rapport du moyen au troisième terme. Pareillement 9, nombre carré, est compris entre les hétéromèques successifs 6 et 12, mais il n'a pas le même rapport avec les extrêmes, car le rapport de 9 à 6 est sesquialtère ($1 + 1/2$), tandis que celui de 12 à 9 est sesquiterce ($1 + 1/3$). Il en est de même des hétéromèques suivants. [23]

Des nombres promèques

XVII. Un nombre promèque est un nombre formé de facteurs inégaux quelconques dont l'un surpasse l'autre, soit d'une unité, soit le deux, soit d'un plus grand nombre. Tel est 24 qui vaut 6 fois 4, et autres nombres semblables. Il y a trois classes de nombres promèques. En effet, tout nombre hétéromèquement est en même temps promèque, en tant qu'il a un côté plus grand que l'autre; mais, si tout nombre hétéromèquement est par là même promèque, la réciproque n'est pas vraie, car le nombre qui a un côté plus long que l'autre de plus d'une unité, est promèque; mais il n'est pas hétéromèquement, puisque celui-ci se définit un nombre dont un côté surpasse l'autre d'une unité, comme 6, puisque $2 \times 3 = 6$.

Un nombre est encore promèque quand, suivant les multiplications diverses, il a un des côtés tantôt plus long d'une unité, tantôt plus long de plus d'une unité. Tel est 12 qui résulte de 3×4 et de 2×6 , en sorte qu'à raison des côtés 3 et 4, le nombre 12 est hétéromèquement, et qu'à raison des côtés 2 et 6, il est promèque. Enfin, un nombre est encore promèque, si, résultant de toute espèce de multiplication, il a un côté plus long que l'autre de plus d'une unité. Tel est 40, qui est le produit de 10 par 4, de 8 par 5 et de 20 par 2. Les nombres de cette espèce ne peuvent être que promèques. Le nombre hétéromèquement est celui qui reçoit la première altération après le nombre formé de facteurs égaux, l'addition d'une unité faite à l'un des deux côtés égaux étant la première altération. C'est pourquoi les nombres qui résultent de cette première altération des côtés ont été appelés, avec raison, hétéromèquement; mais ceux qui ont un côté plus grand que l'autre d'une quantité supérieure à l'unité ont été appelés promèques, à cause de la plus grande différence de longueur entre les côtés.

XVIII. Les nombres plans sont les nombres produits par la multiplication de deux nombres représentant la longueur et la largeur. Parmi ces nombres, il y en a qui sont triangulaires, d'autres sont quadrangulaires, pentagones et en général polygones.

Des nombres triangulaires, de la manière dont ils s'obtiennent, et des autres nombres polygones

XIX. Les nombres triangulaires s'obtiennent de la manière que nous allons indiquer. Et d'abord les pairs successifs ajoutés les uns aux autres produisent les hétéromèques. Ainsi le premier pair 2 est en même temps hétéromèque, car il vaut 1×2 . Si maintenant à 2 on ajoute 4, la somme sera 6 qui est encore un hétéromèque, puisqu'il vaut 2×3 et il en est de même des suivants à l'infini. Mais, afin que ce que nous venons de dire soit plus clair, nous allons le montrer ainsi.

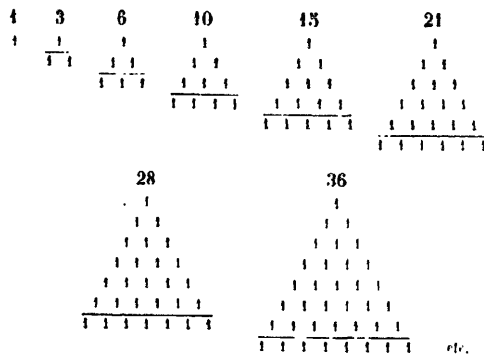
Supposons que le premier pair 2 soit représenté par les deux unités 1, 1, la figure qu'elles forment est hétéromèque, car elle a 2 en longueur et 1 en largeur. Après le nombre 2 vient le nombre pair 4; si nous ajoutons les quatre unités aux deux premières, en les plaçant autour (à angle droit), nous aurons la figure du nombre hétéromèque 6, car sa longueur est 3 et sa largeur 2. Après le nombre 4 vient le nombre pair 6. Si nous ajoutons les 6 unités aux 6 premières en les plaçant autour (à angle droit), la somme sera 12 et la figure sera hétéromèque, comme ayant 4 en longueur et 3 en largeur, et ainsi de suite à l'infini par l'addition des nombres pairs



A leur tour, les impairs ajoutés ensemble donnent les nombres carrés. Or, les impairs successifs sont 1, 3, 5, 7, 9, 11. En les additionnant d'une manière continue, on obtient les nombres carrés. Ainsi l'unité est le premier nombre carré, car $1 \times 1 = 1$. Vient ensuite le nombre impair 3. Si on ajoute ce gnomon à l'unité,^[24] on obtient un carré également égal, car il a 2 tant en longueur qu'en largeur. L'impair qui vient suite est 5. Si on ajoute ce gnomon au carré 4, on obtient un nouveau carré 9, qui a 3 en longueur comme en largeur. Vient ensuite l'impair 7 qui, ajouté au carré 9, donne le carré 16, dont la longueur et la largeur valent 4, et ainsi de suite à l'infini.



De même, en additionnant non plus seulement les pairs seuls ou les impairs seuls, mais les pairs et les impairs, nous obtiendrons les nombres triangulaires. La suite des pairs et des impairs est 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; c'est en les additionnant que nous formerons les nombres triangulaires. Le premier est l'unité, car si elle n'est pas tel en acte, elle est tout en puissance, étant le principe de tous les nombres. Si on lui ajoute le nombre 2, on a le nombre triangulaire 3. Si à ce nombre on ajoute 3, on obtient 6, et, en ajoutant 4 à celui-ci, on a 10. Si à ce dernier on ajoute 5, la somme est 15. Ajoutez 6, vous aurez 21. Ajoutez 7 à ce dernier, vous a aurez 28 qui, augmenté de 8, deviendra 36. Et celui-ci augmenté de 9 deviendra 45. Ajoutez 10, vous aurez 55. Et ainsi de suite à l'infini. Or, il est évident que ces nombres sont triangulaires, d'après la figure obtenue en ajoutant aux premiers nombres les gnomons successifs.^[25] Les nombres triangulaires obtenus par addition seront donc 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55... et ainsi de suite.



XX. Les carrés sont produits, comme nous l'avons dit, par l'addition des impairs successifs, en commençant par l'unité. Ils ont cela de particulier, qu'ils sont alternativement pairs et impairs, tout comme les nombres simples sont alternativement pairs et impairs, c'est ce qu'on peut voir dans la série

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Si maintenant on dispose les nombres pairs et impairs par ordre, en commençant par l'unité, on verra que les gnomons qui se surpassent de 2 étant additionnés ensemble, forment les carrés, comme nous l'avons montré ci-dessus les impairs en commençant par l'unité, se surpassent en effet de 2 les uns les autres, de même, les nombres qui se surpassent de 3 étant additionnés, toujours en commençant par l'unité, forment les pentagones. Ceux qui se surpassent de 4 donnent les hexagones; en sorte que la raison des gnomons, qui donnent un polygone, est toujours moindre de 2 unités que le nombre des angles de la figure.

Il y a un autre ordre de nombres polygones, donné par les nombres multiples à partir de l'unité. En effet, parmi les nombres multiples à partir de l'unité, comme les doubles, les triples et ainsi de suite, les termes sont carrés de deux en deux, et cubiques de trois en trois. De plus, ceux qui se suivent de 6 en 6 sont à la fois carrés et cubiques; comme cubiques, leurs côtés sont des nombres carrés, et comme carrés, leurs côtés sont des nombres cubiques. Voici comment nous montrons que les nombres multiples, commençant par l'unité, sont carrés de deux en deux, cubiques de trois en trois, et à la fois carrés et cubiques de six en six. Disposons plusieurs nombres en progression double

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Le premier double est 2. Vient ensuite 4 qui est carré, puis 8 qui est cubique, puis de nouveau 16 qui est carré. Celui-ci est suivi de 32, après lequel vient 64, tout à la fois carré et cubique. On a ensuite 128 suivi de 256 qui est carré ; et l'on pourrait continuer de même jusqu'à l'infini.

Dans la progression triple on trouvera pareillement les carrés alternes. De même dans la progression quintuple et dans les autres progressions multiples. Si on omet alternativement deux termes, on trouvera que les termes restants sont des cubes; et si on en omet cinq, on trouvera que ceux qui restent sont à la fois carrés et cubiques. [26]

Les carrés ont cette propriété d'être exactement divisibles par 3, ou de le devenir étant diminués d'une unité. Ils sont aussi exactement divisibles par 4, ou le deviennent après la soustraction d'une unité.

Le carré (pair), qui devient divisible par 3 après avoir été diminué d'une unité, est divisible par 4, ce qui est le cas de 4. Le carré, qui devient divisible par 4 après avoir été diminué d'une unité, est divisible par 3, ce qui est le cas de 9. [27]

Un carré peut être à la fois divisible par 3 et par 4, comme 36. Enfin, le carré qui n'est divisible ni par 3 ni par 4, comme 25, admet ces deux diviseurs après la soustraction d'une unité.^[28]

XXI. Parmi les nombres, les uns également égaux sont carrés, les autres inégalement inégaux sont hétéromèques ou promèques. Et, pour tout dire, les produits de deux facteurs sont plans et ceux de trois facteurs sont solides. On leur donne les noms de nombres plans triangulaires ou carrés, ou de nombres solides, et d'autres noms semblables, non au sens propre. mais par comparaison avec les espaces qu'ils semblent mesurer, Ainsi 4 est appelé nombre carré, parce qu'il mesure un espace carré ; et c'est pour une raison fondée sur une analogie semblable que 6 est appelé hétéromèque.

XXII. Parmi les nombres plans, les carrés sont tous semblables entre eux. Parmi les nombres plans qui ont les côtés inégaux, ceux-là sont semblables, dont les côtés, c'est-à-dire les nombres qui les comprennent, sont entre eux dans le même rapport. Prenons l'hétéromèque 6 dont les côtés, longueur et largeur, sont 3 et 2, et un autre nombre plan 24 dont les côtés, longueur et largeur, sont 6 et 4. La longueur de mn est à la longueur de l'autre comme la largeur de l'un est à la largeur de l'autre, car on a $6 : 3 = 4 : 2$. Donc les nombres plans 6 et 24 sont semblables. Tantôt les mêmes nombres représentent des longueurs, quand ils sont pris comme côtés, pour la formation d'autres nombres; tantôt ils représentent des nombres plans, quand on les considère comme produits par la multiplication de deux nombres: tantôt enfin ils représentent des solides, quand ils sont produits par la multiplication de trois nombres.

Tous les cubes sont semblables, ainsi que les autres solides (parallélépipèdes rectangles) qui ont les côtés proportionnels, en sorte qu'il y ait le même rapport entre la longueur de l'un et la longueur de l'autre, la largeur de l'un et la largeur de l'autre, et enfin la hauteur de l'un et la hauteur de l'autre.

XXIII. De tous les nombres plans et polygones, le premier est le nombre triangulaire, comme parmi les figures rectilignes planes la première est le triangle. Nous avons exposé précédemment^[29] la génération des triangulaires, et nous avons vu qu'elle consiste à ajouter au nombre 1 la suite naturelle des nombres pairs et des nombres impairs. Or, tous les nombres successifs qui servent à former les triangulaires, les quadrangulaires et les nombres polygones quelconques, sont appelés *gnomons*; et les côtés d'un triangle quelconque ont toujours autant d'unités qu'on contient le dernier gnomon ajouté. Prenons d'abord l'unité, qui n'est pas un triangle en acte, comme nous l'avons déjà dit, mais en puissance; car étant comme la semence de tous les nombres, l'unité possède aussi la faculté d'engendrer le triangle.

Quand elle s'adjoint le nombre 2, elle donne naissance au triangle dont les trois côtés contiennent autant d'unités qu'en a le gnomon ajouté 2, et tout le triangle contient autant d'unités qu'en contiennent les gnomons ajoutés ensemble. Car la somme du gnomon 1 et du gnomon 2 égale 3, en sorte que tout le triangle se compose de trois unités et qu'il a deux unités à chacun de ses côtés, c'est-à-dire autant d'unité qu'il y a de gnomons ajoutés ensemble.

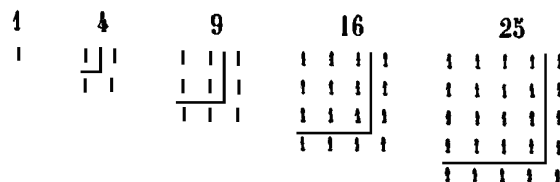
Le triangle 3 s'adjoint ensuite le gnomon 3, qui surpasse le nombre 2 d'une unité, et le triangle entier devient 6. Ses côtés ont chacun autant d'unités qu'il y a de gnomons ajoutés, et le triangle vaut autant d'unités que les gnomons ajoutés en contiennent, car en ajoutant à l'unité 2 et 3, on a le nombre 6.

Le nombre 6 augmenté du gnomon 4 donne le triangle de 10 unités dont les côtés ont chacun 4 unités. En effet, le gnomon qu'on vient d'ajouter est 4 et tout le triangle se compose des unités des 4 gnomons, savoir $1 + 2 + 3 + 4$. Le nombre 10 étant augmenté du

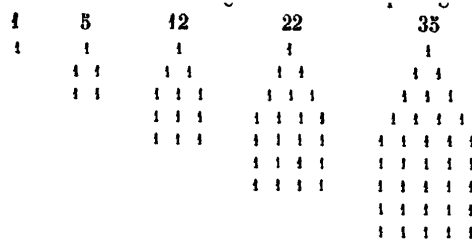
gnomon 5 on a le triangle 15 dont 3 chaque côté a 5 unités, étant composé de 5 gnomons, et c'est de la même manière que les gnomons suivants forment les nombres triangulaires correspondants.

XXIV. Quelques nombres sont appelés circulaires, sphériques ou récurrents. Ce sont ceux qui multipliés carrément ou cubiquement, c'est-à-dire selon deux ou selon trois dimensions, reviennent au nombre qui a été leur point de départ. Tel est aussi le cercle qui revient au point où il a commencé, car il consiste en une seule ligne et il commence et se termine au même point. Parmi les solides, la sphère a la même propriété, car elle est décrite par la révolution d'un cercle autour d'un diamètre, le cercle revenant la position d'où il est parti. De même les nombres qui par la multiplication finissent par eux-mêmes, sont appelés circulaires ou sphériques. Ces nombres sont 5 et 6. En effet $5 \times 5 = 25$; $25 \times 5 = 125$; $6 \times 6 = 36$; et $36 \times 6 = 216$.

XXV. Ainsi que nous l'avons dit, [30] les nombres carrés s'engendrent par l'addition des impairs, c'est-à-dire de ceux qui, en partant de l'unité, se surpassent de 2 les uns les autres. C'est ainsi que $1+3=4$; $4+5=9$; $9+7=16$; $16+9=25$.

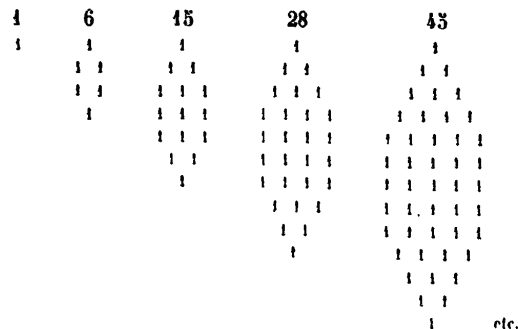


XXVI. – Les nombres pentagones sont ceux qui se forment par l'addition des nombres se surpassant de 3 les uns les autres, à partir de l'unité. Leurs gnomons sont donc 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 et les polygones eux-mêmes sont 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 et ainsi de suite. Voici la figure des nombres pentagones:



XXVII. Les nombres hexagones sont ceux qui se forment par l'addition de nombres se surpassant de 4 les uns les autres, à partir de l'unité. Les gnomons sont 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25 ... d'où résultent les hexagones 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91

Voici leur figure:



Les autres nombres polygones se composent de la même manière. Les heptagones sont

ceux qui se forment par l'addition de nombres se surpassant les uns les autres de 5, à partir de l'unité. Les gnomons sont 1, 6, 11, 16, 21, 26 d'où résultent les heptagones 1, 7, 18, 34, 55, 81.....

Les octogones sont pareillement composés de nombres qui se surpassent de 6 partir de l'unité, les ennéagone, de nombres se surpassant de 7, à partir de l'unité, les décagones de nombres se surpassant de 8. Ainsi généralement, dans tous les polygones, en ôtant deux unités du nombre des angles, on aura la quantité dont les nombres servant à former le polygone doivent se surpasser les uns les autres.^[31]

XXVIII. La somme de deux triangles successifs donne un carré. Ainsi, 1 et 3 font 4 ; 3 et 6 font 9 ; 6 et 10 font 16; 10 et 15 font 25 ; 15 et 21 font 36; 21 et 28 font 49; 28 et 36 font 64; 36 et 45 font 81. Les nombres triangulaires qui suivent, combinés ensemble, forment aussi des carrés, de même que la réunion de deux triangles linéaires présente la figure d'un quadrangle.^[32]

XXIX. Parmi les nombres solides, les uns ont leurs cotés égaux [comme quand on multiplie entre eux trois nombres égaux] les autres ont les côtés inégaux. Parmi ces derniers, les uns ont tous les côtés inégaux; d'autres ont deux côtés égaux et un autre inégal. Parmi ceux qui ont deux côtés égaux, les uns ont le troisième côté plus grand, les autres l'ont plus petit.

Ceux qui ont les côtés égaux étant également égaux également, sont appelés cubes. Ceux au contraire qui ont tous les côtés inégaux, et qui sont inégalement inégaux inégalement, sont appelés *bomisques* (petits autels). Ceux qui ont deux côtés égaux et le troisième plus petit que les deux autres, étant également égaux déficients, ont été appelés *plinthes* ou carreaux. Enfin, ceux qui ont deux côtés égaux et le troisième plus grand que les deux autres, étant également égaux excédants, sont appelés *docides* ou poutrelles.

Des nombres pyramidaux.

XXX. Les nombres pyramidaux sont ceux qui mesurent les pyramides et les pyramides tronquées. Or, une pyramide tronquée est (ce qui reste d')une pyramide dont la partie supérieure a été enlevée. Quelques-uns ont donné à une telle figure tronquée le nom de trapèze (solide), par analogie avec les trapèzes plans; car on appelle ainsi ce qui reste d'un triangle dont une ligne droite parallèle à la base a retranché la partie supérieure.^[33]

Des nombres latéraux et des nombres diagonaux

XXXI. De même que les nombres ont en puissance les rapports des triangulaires, des tétragones, des pentagones et des autres figures, de même nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.

Supposons par exemple deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout soit en puissance le côté et la diagonale; ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois.^[34] Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit. Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le

double de l'unité. Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est-à-dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors 2 unités; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est-à-dire 2 unités à l'unité, la diagonale vaudra 3 unités; le carré construit sur le côté 2 et 4, et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3, le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est-à-dire 2 fois 2, nous aurons 7 unités. Le carré construit sur le côté est 2, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double 50 du carré 25. De nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17 dont le carré 289) est plus grand d'une unité que le double (288) du carré de 12. Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté, en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.

Inversement les diagonales comparées aux côtés, en puissance, sont tantôt plus grandes d'une unité que les doubles, tantôt plus petites d'une unité. Toutes les diagonales sont donc, par rapport aux carrés des côtés, doubles alternativement par excès et par défaut, la même unité combinée également avec tous, rétablissant l'égalité, en sorte que le double ne pêche ni par excès, ni par défaut; en effet, ce qui manque dans la diagonale précédente se trouve en excès, en puissance, dans la diagonale qui suit.^[35]

Les nombres parfaits, des nombres abondants et des nombres déficients

XXII. En outre, parmi les nombres, les uns sont appelés parfaits, d'autres abondants et d'autres déficients. On appelle *parfaits* ceux qui sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes, comme 6. Les parties de 6 sont, en effet, la moitié 3, le tiers 2, et le sixième 1, qui additionnées ensemble donnent 6.

Voici comment sont engendrés les nombres parfaits : si nous disposons les nombres en progression double à partir de l'unité, et que nous les additionnions jusqu'à ce que nous obtenions un nombre premier et non composé, et si nous multiplions cette somme par le dernier terme additionné, le produit sera au nombre parfait.^[36] Disposons donc les nombres en progression double 1, 2, 4, 8, 16. Additionnons 1 et 2, la somme est 3; si nous la multiplions par le dernier nombre additionné qui est 2, nous aurons 6 qui est le premier nombre parfait car $1 + 2 + 3 = 6$. Si nous additionnons maintenant les trois doubles successifs 1, 2, 4, la somme 7, multipliée par le dernier nombre additionné 4 donne 28, qui est le second nombre parfait. Il a en effet pour parties aliquotes la moitié qui est 14, le quart qui est 7, le septième qui est 4, le quatorzième qui est 2, et le vingt-huitième qui est 1 et l'on a $1+2+4+7+14=28$).

Le nombre *abondant* est le nombre dont les parties aliquotes additionnées ensemble font une somme plus grande que le nombre proposé, Tel est 12, dont la moitié est 6, le tiers 4, le quart 3, le sixième 2 et le douzième 1. Or, toutes ces parties additionnées ensemble donnent la somme 16 plus grande que le nombre proposé 12.

Le nombre *déficient* est le nombre dont les parties aliquotes additionnées ensemble donnent une somme moindre que le nombre proposé. Tel est 8 dont la moitié est 4, le quart 2 et le huitième 1. Il en est de même du nombre 10 que les Pythagoriciens appellent cependant parfait pour une autre raison dont nous parlerons en son lieu.^[37]

On dit aussi que le nombre 3 est parfait, parce qu'il est le premier qui ait un commencement, un milieu et une fin: et il est à la fois ligne et surface, c'est, en

effet, un nombre triangulaire équilatéral dont tous les côtés valent deux unités. Enfin le nombre 3 est le premier lien et la puissance du 15 solide, car l'idée de solide repose sur les trois dimensions.

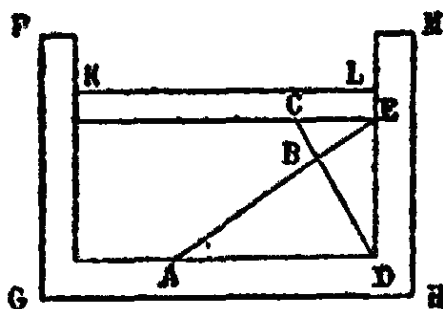
NOTES

NOTE I. – *Problème de la duplication du cube. Solution mécanique de Platon* (Introduction)

Le problème de la duplication de l'autel, avec la condition que le nouvel autel soit semblable au premier, se ramène à la duplication du cube d'une arête. Hippocrate de Chio trouva que si l'on insère deux moyennes proportionnelles continues x et y entre le côté a d'un cube et le double $2a$ de ce côté, la première moyenne x est le côté du cube double. On a en effet, par définition

$$a/x = x/y = y/2a \quad \text{d'où } a^3/x^3 = axy/2axy = \frac{1}{2} \quad \text{et } x^3 = 2a^3$$

Platon a résolu le premier le problème des deux moyennes proportionnelles. Il y employa un instrument formé de deux règles XL, GH, dont l'une mobile parallèlement à l'autre fixe, glissait entre les rainures de deux montants FG, MH, fixés perpendiculairement à celle-ci.



Les géomètres anciens ne pouvaient pas disposer des ressources de l'algèbre qu'ils ne connaissaient pas; mais les proportions, qu'ils maniaient avec une très grande habileté, quoiqu'ils n'eussent aucune notation particulière, leur fournissaient des procédés de calcul très simples et très ingénieux. En combinant les proportions par voie de multiplication, de division.., et en simplifiant les rapports de la proportion finale, ils parvenaient à ne conserver qu'une inconnue dans des questions qui en comportaient plusieurs.

Soient a et b les deux droites entre lesquelles on veut insérer deux moyennes proportionnelles, On trace deux droites perpendiculaires AE, CD, sur lesquelles on prend, à partir de leur point de concours. $AB=a$ et $BC=b$. Puis on applique l'instrument sur la figure de manière que le bord d'une règle passe par le point A. et le bord de l'autre par le point C. On écarte alors, plus ou moins, la règle mobile de la règle fixe, et en même temps on fait tourner l'instrument dans le plan de la figure, jusqu'à ce que les bords des deux règles passant toujours par les points A et C, les prolongements des droites AB et BC passent en même temps par les sommets du rectangle que forme l'instrument.

Les deux triangles ADE, CDE étant rectangles, la hauteur de chacun d'eux est moyenne proportionnelle entre les segments de l'hypoténuse, et l'on a:

$$AB/BD = BD/BE = BE/BC$$

Ainsi BD et BE sont deux moyennes proportionnelles entre AB et BC, c'est-à-dire entre a et b .

Cette solution de Platon est mécanique, puisqu'elle exige l'usage d'un instrument, autre que la règle et le compas. Elle nous a été transmise par Eutocios d'Ascalon, géomètre du VI^e siècle dans un commentaire sur le livre II du traité *De la sphère et du cylindre* par Archimède

NOTE II. – *Sur le sophisme: Un, en tant qu'un, est sans parties et indivisible.* I, § III.

Problème d'Achille et de la tortue.

Le raisonnement de Théon est un sophisme. J'ai un objet sensible, dit-il, je le divise en plusieurs parties que je supprime successivement une à une, il viendra un moment où il ne restera plus qu'un objet sensible. Je divise de nouveau cet un sensible en plusieurs parties que je supprime de même une à une, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un objet. En opérant ainsi, j'arrive toujours à *un*, donc *un*, en tant qu'un, est sans parties et indivisible:

L'un des plus célèbres sophismes est de Zénon d'Elée, qui vivait au V^e siècle avant notre ère, on le nomme *l'Achille*. En voici l'énoncé : *Achille va dix fois plus vite qu'une tortue qui a un stade d'avance, on demande s'il l'atteindra et à quelle distance.*^[38]

Zénon prétendait qu'Achille n'atteindrait jamais la tortue, car, disait-il, pendant qu'Achille parcourra la stade qui le sépare de la tortue, celle-ci avancera de 0,1 de stade; pendant qu'Achille parcourra ce dixième, la tortue qui va dix fois moins vite, avancera de 0,01 de stade; pendant qu'Achille parcourra ce centième, la tortue avancera de 0,001 : et ainsi de suite. Donc il s'écoulera un nombre infini d'instantes avant la rencontre, et Achille n'atteindra jamais la tortue.

Cela revient à affirmer, dit Aristote, « que jamais le plus lent, quand il est en marche, ne pourra être atteint par le plus rapide, attendu que le poursuivant doit, de toute nécessité, passer d'abord par le point d'où est parti celui qui fuit sa poursuite, et qu'ainsi le plus lent conservera constamment une certaine avance. *Leçons de physique*, VI, IX, t. II, p. 396 de la trad. de B. Saint-Hilaire.

L'erreur de Zénon est manifeste, car Achille atteint la tortue à une distance de son point de départ, égale à 1 stade et $\frac{1}{9}$ ^e ou $\frac{10}{9}$ ^e de stade. En effet, pendant qu'il parcourt ces $\frac{10}{9}$ ^e de stade, la tortue, qui va dix fois moins vite, en parcourt $\frac{1}{9}$ ^e ; or l'espace parcouru par Achille est alors égal à l'espace parcouru dans le même temps que la tortue, plus à l'espace qui les séparait, donc il y a rencontre.

Zénon ne voit pas que la somme des espaces parcourus pendant le nombre infini des instants successifs du mouvement d'Achille et de la tortue représente une distance finie, et que, dans le cas du mouvement uniforme, le nombre infini de ces instants successifs représente un temps fini.

NOTE III. – *Sur les nombres hétéromèques* I, § XVI.

Soient $(n - 1)$ $n = n^2 - n$ et $n (n + 1) = n^2 + n$ deux hétéromèques successifs. Le carré compris entre $n^2 - n$ et $n^2 + n$ est n^2 . Or n^2 est la moyenne arithmétique entre $n^2 - n$ et $n^2 + n$, et la moyenne arithmétique entre deux nombres est plus grande que leur moyenne géométrique; donc, comme Théon le vérifie, le carré compris entre deux hétéromèques successifs n'est pas la moyenne géométrique entre ces deux nombres. Mais la moyenne géométrique entre deux carrés successifs est un hétéromèque; soit, en effet

x la moyenne géométrique entre deux carrés successifs n^2 et $(n+1)^2$, on a $x^2 = n^2 (n+1)^2$, d'où $x = n(n+1)$, nombre hétéromèqne. puisque les deux facteurs diffèrent d'une unité.

NOTE IV. – Sur les nombres carrés (I, § xx).

Tout nombre étant un multiple de 6 ou un multiple de 6, plus 1, plus 2, plus 3, plus 4 ou plus 5, est de la forme $6n$, $6n \pm 1$, $6n \pm 2$, ou $6n \pm 3$. Donc tout carré est de la forme $36n^2$, $36n^2 \pm 12n + 1$, $36n^2 \pm 24n + 4$ ou $36n^2 + 36n + 9$.

1° S'il est de la forme $36n^2 \pm 24n + 4$, il est divisible par 4, et non par 3, mais la soustraction d'une unité donne le reste $36n^2 \pm 24n + 3$ qui est divisible par 3;

2° S'il est de la forme $36n^2 + 36n + 9$, il est divisible par 3, et non par 4, mais la soustraction d'une unité donne le reste $36n^2 + 36n + 8$ qui est divisible par 4;

3° S'il est de la forme $36n^2$, il est à la fois divisible par 3 et par 4, et par conséquent $36n^2 - 1$ ne l'est pas;

4° Enfin, s'il est de la forme $36n^2 \pm 12n + 1$, il n'est divisible ni par 3 ni par 4, mais la soustraction d'une unité donne le reste $36n^2 \pm 12n$ qui est à la fois divisible par 3 et par 4.

NOTE V. – Des nombres polygonaux (I, §§ XIX-XXVII).

Nous allons résumer cette théorie des nombres polygones en y ajoutant quelques explications. Soit d la raison d'une progression par différence commençant par l'unité, les premiers termes seront :

$$1, 1+d, 1+2d, 1+3d, 1+4d, 1+5d, 1+6d, 1+7d\dots$$

Si on fait les sommes successives des termes, à partir de l'unité, on obtient les nombres correspondants :

$1, 2 + 2d, 3+3d, 4+6d, 5+10d, 6+15d, 7+24d, 8+28d\dots$ Les termes de la seconde suite se nomment des *nombres polygones*, et ceux de la première en sont les *gnomons*. Si on donne à d , dans les deux suites, les valeurs successives 1, 2, 3, 4, 5, 6,... on obtient les gnomons et les nombres polygones suivants:

$d = 1$, gnomons....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n. triangulaires....	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
$d = 2$, gnomons ...	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
n. quadrangulaires.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$d = 3$, gnomons....	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
n. pentagones	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210
$d = 4$, gnomons ...	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
n. hexagones	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276
$d = 5$, gnomons ...	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56
n. heptagones.....	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342
$d = 6$, gnomons ...	1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67
n. octogones.....	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408
$d = 7$, gnomons ...	1	8	15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
n. ennéagones	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474
$d = 8$, gnomons ...	1	9	17	25	33	41	49	57	65	73	81	89
n. décagones	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540
$d = 9$, gnomons...	1	10	19	28	37	46	55	64	73	82	91	100
n. endécagones....	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	506	606
$d = 10$, gnomons ..	1	11	21	34	44	51	61	71	81	91	101	111
n. dodécagones....	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	561	672

En désignant par k le n -ième gnomon et par l le n -ième nombre polygone, on a $k = 1 + (n - 1)d$

$$\text{et } l = 1+(1+d)+(1+2d)+(1+3d)+(1+4d+(1+5d) + \dots + (1 + (n-1)d) = n$$

$$+d(1+2+3+4+5\dots+n-1)$$

$$\text{d'où } l = n + dn(n-1)/2 \quad \text{[A]}$$

Or $n(n-1)/2$, est la somme des $(n-1)$ premiers nombres à partir de l'unité, est le $(n-1)$ ème nombre triangulaire, on a donc ces deux théorèmes:

1° Le n -ième nombre polygone égale n , plus d fois le $(n-1)$ ème nombre triangulaire, d étant la raison de la progression des gnomons;

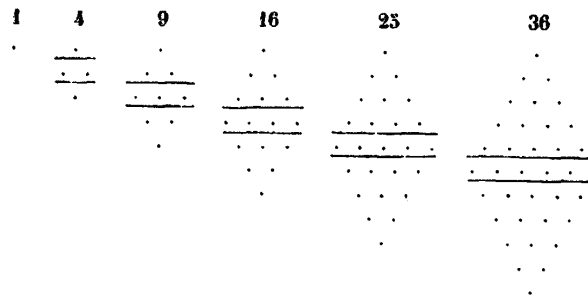
2° Les nombres polygones, de même rang n , forment une progression par différence, dont le premier terme est n , et dont la raison est le $(n-1)$ ème nombre triangulaire.

Les nombres triangulaires sont ainsi nommés, parce que, si on dispose les uns au-dessous des autres les gnomons à ajouter et décomposés en unités, on a des figures triangulaires.

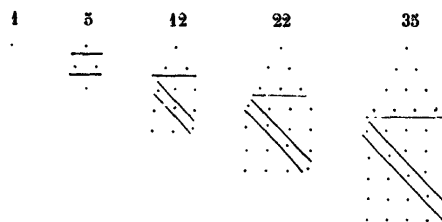
Les nombres carrés sont ainsi nommés, parce qu'on peut donner la forme carrée aux groupes d'unités dont ces nombres se composent.

On peut aussi obtenir la figure des nombres carrés par la formule $l = n + dn(n-1)/2$ qui, pour $d=2$, devient $l = n + n(n-1)$.

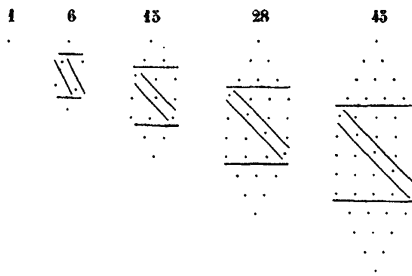
On écrira sur une ligne les n unités du nombre n , puis on placera, de part et d'autre de cette ligne, les unités dont se compose le $(n-1)$ ème nombre triangulaire; on obtiendra les figures quadrangulaires suivantes, en remplaçant les unités par des points:



Les nombres pentagones sont donnés par la formule $l = n + 3n(n-1)/2$. On obtiendra donc leur représentation en ajoutant à n , trois fois le $(n-1)$ ème nombre triangulaire; ils peuvent donc être figurés de la manière suivante:



On aura les nombres hexagonaux en ajoutant à n , quatre fois le $(n-1)$ ème nombre triangulaire; on peut donc leur donner cette forme:



On peut remarquer que la suite naturelle des nombres hexagonaux est égale à la suite des nombres triangulaires de rang impair. On démontre, en effet, que le n-ième nombre hexagone est égal au (2n - 1)ième nombre triangulaire; car, d'après la formule générale [A], donnée plus haut, chacun d'eux égale $n(2n - 1)$.

Une autre remarque à faire, c'est que *les nombres parfaits*, c'est-à-dire égaux à la somme de leurs parties aliquotes, *sont tous hexagones et par conséquent triangulaires*.

En effet le n-ième hexagone $l = n(2n - 1)$. Supposons $n = 2^k$ on aura $l = 2^k (2^{k+1} - 1)$. C'est la formule qui donne les nombres parfaits quand le facteur $2^{k+1} - 1$ est premier; donc les nombres parfaits sont hexagones et par conséquent triangulaires. Ainsi

6 =	2 × 3	est le	2° hexag. et le	3° triangul.
28 =	4 × 7	est le	4° — et le	7° —
496 =	16 × 31	est le	16° — et le	31° —
8 128 =	64 × 127	est le	64° — et le	127° —
33 550 336 =	4 096 × 8 191	est le	4 096° — et le	8 191° —
8 389 869 036 =	65 536 × 131 071	est le	65 536° — et le	131 071° —
137 438 691 328 =	262 144 × 524 287	est le	262 144° — et le	524 287° —

et ainsi des autres.

NOTE VI. — Des nombres pyramidaux (I, xxx).

Le n-ième nombre pyramidal, à base triangulaire, est la somme des n premiers nombres triangulaires. On démontre qu'il est égal à $n(n+1)(n+2)/(1 \times 2 \times 3)$

De même, le n-ième nombre pyramidal, à base carrée, est la somme des n premiers nombres carrés. On démontre qu'il est égal à $n(n+1)(2n+1)/(1 \times 2 \times 3)$

Le nombre pyramidal tronqué s'obtient en évaluant la pyramide totale et celle qui en a été enlevée, on prend la différence des deux valeurs. Soit une pyramide triangulaire tronquée dont le côté de la base inférieure vaut s et celui de la base supérieure p, le nombre pyramidal tronqué vaudra

$$[n (n+1)(n+2) - (p-1) p (p+1)] / (1 \times 2 \times 3)$$

NOTE VII. — Des nombres latéraux et des nombres diagonaux (I, § XXXI)

Les nombres latéraux et les nombres diagonaux sont définis par leur génération. Théon explique ainsi: il prend d'abord le côté 1 et la diagonale 1, puis il détermine successivement les autres côtés, en ajoutant au côté précédent la diagonale, et il détermine les autres nombres diagonaux en ajoutant à la diagonale précédente deux fois le côté correspondant. On obtient, d'après cette règle, le tableau suivant, complété par l'addition du double carré des côtés, et du carré des nombres diagonaux :

Côtés.	Nombres diagonaux.	Double carré des côtés.	Carré des nombres diagonaux.
1	1	2	1 = 2 - 1
2 = 1 + 1	3 = 1 + 1 × 2	8	9 = 8 + 1
5 = 2 + 3	7 = 3 + 2 × 2	50	49 = 50 - 1
12 = 5 + 7	17 = 7 + 5 × 2	288	289 = 288 + 1
29 = 12 + 17	41 = 17 + 12 × 2	1682	1681 = 1682 - 1
70 = 29 + 41	99 = 41 + 29 × 2	9800	9801 = 9800 + 1
169 = 70 + 99	239 = 99 + 70 × 2	57122	57121 = 57122 - 1 etc.

Cette règle de Théon donne, en nombres entiers, la résolution du triangle rectangle isocèle, avec cette condition que la différence entre le carré de l'hypoténuse et le double carré du côté de l'angle droit ne soit que d'une unité, c'est-à-dire qu'elle donne, en nombres entiers, les solutions de l'équation $y^2 - 2x^2 = \pm 1$. Supposons que $y = a$ et $x = b$ soient une solution de l'équation, c'est-à-dire qu'on ait $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, je dis que $x = b + a$ et $y = a + 2b$ en sont aussi une solution. On déduit, en effet, de ces deux dernières relations $y^2 - 2x^2 = 2b^2 - a^2$. Or $a^2 - 2b^2 = \pm 1$ par hypothèse, donc $y^2 - 2x^2 = \pm 1$. Mais $y = x = 1$ est une première solution de l'équation $y^2 - 2x^2 = -1$, on en conclura donc une infinité d'autres solutions, d'après la règle donnée par Théon.

NOTE VIII. - *De la perfection du nombre dix* (I, § XXXII).

Le nombre 10=1 + 2 + 3 + 4; or 1 était le principe des nombres; 2 représentait la première ligne (la ligne droite qui est définie par deux de ses points); 3 représentait la première surface (le triangle défini par ses trois sommets); et 4 représentait le premier solide (le tétraèdre défini par ses quatre sommets). Donc la décade 1 + 2 + 3 + 4 symbolisait tout ce qui existe.

[1] Le texte de Platon porte vingt ans au lieu de vingt-cinq ans.

[2] *République* VII, le texte de cette citation et des suivantes diffère sensiblement de celui de Platon. Plutarque semble avoir imité en partie le passage quand il dit : « Accoutumée, par les fortes atteintes de la souffrance et du plaisir, à prendre pour un être réel la substance incertaine et changeante des corps, l'intelligence devient aveugle à l'égard de l'être véritable : elle perd l'organe qui à lui seul vaut dix mille yeux, je veux dire la vue de la lumière de l'âme par laquelle seule peut se voir la divinité. » *Symposiaques*, VIII. quest. II, I.

[3] *Rp.* VII, ce sont les poètes qui ont prêté ce langage à Palamède dans plusieurs tragédies où ils lui faisaient jouer un rôle.

[4] *Gorgias*, voyez la distinction que Platon établit entre la science du calcul et la science des nombres.

[5] Je crois, dit-il, qu'un dieu plutôt que le hasard nous a fait don de cette science pour notre consécration. *Epinomis*.

[6] *Epinomis*, Platon fait sans doute allusion à ce problème « construire un parallélépipède rectangle semblable à un parallélépipède rectangle donné et qui soit à ce solide dans un rapport donné, problème dont celui de la duplication du cube n'est qu'un cas particulier.

[7] *Lois*. III

[8] *République*, III.

[9] *République*, IV.

[10] Cf. *Phédon*.

[11] Empédocle, vs. 432, édition Mullach.

[12] Cf. *Phèdre*.

[13] Platon place la musique après l'astronomie (*Rp.* VII), après avoir assigné à l'astronomie le quatrième rang.

[14] Voyez la note II après la traduction.

[15] Ainsi, d'après Théon, la monade est abstraite, l'un est concret.

[16] L'un des ouvrages perdus d'Aristote.

[17] Euclide appelle impairement-impairs les nombres de la forme $(2a + 1)(2b + 1)$, cf. *Eléments*, VII, déf. 10. Les nombres premiers sont compris dans cette formule en supposant $2b + 1 = 1$, c'est-à-dire $b = 0$.

[18] Ainsi, suivant Théon, le nombre pairement-pair est une puissance de 2. Suivant Euclide, c'est un produit de deux nombres pairs; cf. *Eléments*, VII, déf. 8.

[19] Les nombres pairement impairs sont donc, d'après Théon, les nombres de la forme $2(2a + 1)$. C'est la même définition que celle d'Euclide, Cr. *Eléments*, VII, déf. 9.

[20] Les nombres impairement pairs, que Théon distingue des nombres pairement impairs, seraient donc les nombres de la forme $(2a + 1)4b$.

[21] La somme des termes de la progression formée par la suite naturelle des nombres pairs : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, $2n$

est, en effet, $n(n + 1)$, donc c'est un nombre hétéromèque d'après la définition. Théon ne donne jamais la démonstration des théorèmes arithmétiques qu'il énonce; il les vérifie sur quelques exemples.

[22] En effet, le n -ième nombre impair à partir de l'unité est $2n - 1$ et la somme des termes de la progression 1, 3, 5, 7, 9 $2n - 1$ est n^2 .

[23] Voyez la note III.

[24] Les *gnomons* sont ici les nombres impairs successifs. Voyez la définition

générale du *gnomon*, § XXIII.

[25] Les *gnomons* sont dans ce cas la suite naturelle des nombres.

[26] La notation, de l'exposant rend évidentes toutes ces vérités. Soit la progression, 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 , 2^7 , 2^8 , 2^9 , 2^{10} , 2^{11} , 2^{12}, les termes 2^2 , 2^4 , 2^6 pris de deux en deux sont des carrés, puisque les exposants sont pairs: les termes 2^2 , 2^6 , 2^9 pris de trois en trois, sont cubiques, puisque l'exposant est un multiple de 3: et les termes 2^6 , 2^{12} ,... pris de six en six, sont à la fois carrés et cubiques, Comme carrés, leurs racines sont des cubes, et comme cubiques, leurs racines sont des carrés.

[27] Ou bien, c'est le carré diminué d'une unité qui est aussi divisible par 3. Tels sont les carrés 25 et 49.

[28] Voir la note IV

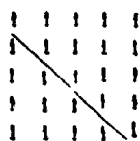
[29] Voyez le § XIX.

[30] Voyez le § XIX.

[31] Voyez la note V.

[32] Un nombre carré n^2 se décompose en deux nombres triangulaires, le n^e et le $(n - 1)^e$, on a en effet : $[n(n+1)/2] + [(n-1)n/2] = n^2$

Ainsi le nombre carré 25 se décompose en deux nombres triangulaires, le 5^e égal à 1 + 2 + 3 + 4 + 5 et le 4^e égal à 1 + 2 + 3 + 4, connue l'indique d'ailleurs la figure :



[33] Voyez la note VI.

[34] C'est-à-dire que deux fois le carré du côté égale une fois le carré de la diagonale.

[35] Voyez la note VII.

[36] Cf. Euclide, *Eléments*, IX, 36.

[37] Voyez la note VIII et l'Epilogue.

[38] Le stade valait 185 mètres.

[RETOUR À L'ENTRÉE DU SITE](#)

[ALLER A LA TABLE DES MATIERES DE THÉON DE SMYRNE](#)



THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

Oeuvre numérisée par Marc Szwajcer

ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΣΦΕΙΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΩΓΗΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES
POUR LA LECTURE DE PLATON

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

Par J. DUPUIS

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^{ie}

Boulevard Saint-Germain, 79

1892

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES POUR LA LECTURE DE PLATON

PREFACE

PREMIÈRE PARTIE

INTRODUCTION

De l'utilité des mathématiques

SECONDE PARTIE

LIVRE CONTENANT LES LOIS NUMÉRIQUES DE LA MUSIQUE,...

INTRODUCTION

I. Puisqu'on dit qu'il y a des nombres consonants, on ne saurait trouver en dehors de l'arithmétique la raison de la consonance, qui a les plus grandes vertus, étant dans l'âme raisonnable la vérité, dans la vie la félicité, dans la nature l'harmonie; et l'harmonie elle-même qui est répandue dans le monde ne s'offrant à ceux qui la cherchent que lorsqu'elle leur est révélée par des nombres. Cette harmonie qui est intelligible se comprend plus facilement quand elle est précédée par l'harmonie sensible. Nous traiterons donc de ces deux harmonies, savoir de celle qui se fait sentir par les instruments, et de l'harmonie intelligible qui consiste dans les nombres.

Et après avoir terminé notre traité sur toutes les mathématiques, nous y ajouterons une dissertation sur l'harmonie du monde, et il ne nous déplaira pas de rapporter ce que nos devanciers ont découvert, non plus que de faire connaître davantage les traditions des Pythagoriciens que nous avons rapportées, sans nous vanter d'en avoir découvert la moindre partie. Désirant donc faire part à ceux qui veulent étudier Platon, de ce qui nous a été transmis par nos prédécesseurs, nous avons jugé nécessaire de composer ce recueil.

Du son et de la voix enharmonique

II. Thrasyllé, traitant de l'harmonie sensible des instruments, définit le son une tension de voix enharmonique. Or, le son est dit enharmonique, quand, s'il est aigu, il peut y en avoir un plus aigu encore, et s'il est grave, il peut y en avoir un plus grave encore, en sorte qu'il se trouve intermédiaire. Si donc nous supposons un son qui surpasse toute acuité, il ne saurait être enharmonique, et c'est pour cela que jamais on ne regardera comme un son enharmonique le bruit violent de la foudre dont les blessures sont parfois funestes, comme l'a dit le poète

Et les coups de la foudre ont fait bien des victimes

Sans blessure sanglante.

De même si le son est tellement grave qu'il ne puisse pas y en avoir de plus grave, ce ne sera plus un son, parce qu'il ne sera plus enharmonique. Ce n'est donc ni toute voix, ni toute tension de voix, qu'on appelle son, mais seulement une voix enharmonique, comme celle qui donne la mèse, la nète ou l'hypate.^[1]

Des intervalles et de l'harmonie

III. On définit l'intervalle une certaine disposition des sons, les uns par rapport aux autres, telles sont la quarte, la quinte et l'octave. Et on appelle système d'intervalles un certain ensemble, tels que le tétracorde, le pentacorde, l'octacorde.

IV. L'harmonie est la coordination des systèmes, tels sont le lydien, le phrygien, le dorien. Quant aux sons, les uns sont aigus, d'autres sont graves et d'autres moyens. Les sons aigus sont ceux que rendent les nètes, les sons graves ceux que rendent les hypates et les sons moyens ceux que rendent les cordes intermédiaires.

V. Parmi les intervalles, les uns sont consonants, les autres dissonants. Les

intervalles consonants sont antiphones, tels que l'octave et la double octave, ou paraphones, tels que la quinte et la quarte. Sont au contraire dissonants les intervalles de sons juxtaposés tels que le ton et le diésis (ou demi-ton). Les intervalles antiphones ou de sons opposés sont consonants, parce que la gravité opposée à l'acuité produit la consonance: et les intervalles paraphones sont consonants, parce que les sons ne sont ni l'unisson ni dissonants, mais qu'il y a un intervalle semblable perceptible. Sont dissonants et non consonants les sons dont l'intervalle est d'un ton ou d'un diésis; car le ton et le diésis sont le principe de la *consonance*, mais ils ne sont pas la consonance elle-même.

Des consonances.

VI. Araste le péripatéticien, dans son traité connu *De l'harmonie et de la consonance*, dit: De même que dans le discours soit écrit, soit parlé, les verbes et les noms en sont les parties les plus importantes; que les parties essentielles des verbes et des noms sont les syllabes composées de lettres: et que les lettres sont les premiers signes de langages élémentaires, indivisible et les plus courts puisque le discours se compose de lettres et se résout finalement en lettres: de même ce qui fait la partie principale du chant et de toute mélodie, ce sont les systèmes qu'on appelle tétracordes, pentacordes et octacordes, lesquels se composent d'intervalles qui sont eux-mêmes composés de sons. Ces sons étant les éléments premiers et indivisibles dont se compose toute modulation et dans lesquels elle se résout définitivement. Les sons diffèrent les uns des autres par les tensions, les uns étant plus aigus, les autres plus graves. On a défini ces tensions de différentes manières.^[2]

Voici, à cet égard, l'opinion qu'on attribue aux Pythagoriciens. Toute modulation et tout son étant une voix, et toute voix étant un bruit, et le bruit étant une percussion de l'air qui n'en est point brisé, il est évident que dans un air immobile il ne saurait y avoir ni bruit, ni voix, ni son. Au contraire, quand l'air est frappé et mis en mouvement, le son se produit: aigu, si le mouvement est rapide; grave, si le mouvement est lent; fort, si le mouvement est violent; faible, si le mouvement est peu sensible. Les vitesses de ces mouvements s'accomplissent suivant certains rapports, ou n'en ont aucun.

De ces vitesses sans rapports, résultent des sons sans rapports et dissonants, auxquels, à proprement parler, ne convient pas le nom de sons et que l'on appellerait plus justement bruit. Au contraire, on doit regarder comme les vrais sons, propres à la modulation, ceux qui ont entre eux certains rapports, soit multiples, soit superpartiels,^[3] ou simplement de nombre à nombre. De ces sons, les uns sont seulement concordants, d'autres sont consonants selon les raisons premières et multiples les plus connues, et selon les raisons superpartielles.

Ils font entre eux une consonance, quand un son étant produit par une des cordes d'un instrument, les autres cordes résonnent par l'effet d'une certaine affinité, d'une sorte de sympathie; et aussi, quand deux sons étant produits en même temps, il en résulte un son mixte qui a une douceur et un charme tout particuliers. Parmi les sons successifs concordants, les quatrièmes forment avec les premiers une consonance, savoir celle que pour cette raison nous appelons quarte. Les cinquièmes à la suite donnent la quinte.

Viennent ensuite les huitièmes qui comprennent ces consonances et que nous appelons diapason (octave). En effet, sur la lyre à huit cordes, on trouve que le son qui est le plus grave, et qu'on appelle hypate, s'accorde par opposition avec le dernier et le plus aigu qui est celui de la nète, avec lequel il a la même consonance. Et quand, la musique avant fait des progrès, les instruments ont reçu un plus grand nombre de cordes

et ont rendu des sons plus multipliés, un grand nombre de sons, tant aigus que graves, avant ajoutés aux huit anciens on a néanmoins conservé les dénominations des anciennes consonances : quarte, quinte et octave.

Cependant plusieurs autres consonances ont été trouvées à la consonance d'octave, on en a ajouté de plus petites, de plus grandes, ou d'égales, et de la somme des deux résulte une consonance nouvelle, telle qu'octave et quarte, octave et quinte, et double octave ; et si l'on ajoute encore à l'octave quelque une des consonances précédentes on obtient la double octave et quarte et ainsi de suite, tant que le son peut être produit et est perceptible à l'oreille. Il y a en effet, une certaine étendue que la voix parcourt en commençant par le son le plus grave pour s'élever au plus aigu et inversement étendue qui est plus grande chez les uns, moins grande chez les autres.

Cette série de modulations n'a pas lieu au hasard, ni sans art et d'après un seul mode, mais d'après certains modes déterminés qu'il faut observer dans les différents genres de mélodie. Car, de même que dans le discours soit parlé, soit écrit, ce n'est pas toute lettre, combinée avec une lettre quelconque, qui produit une syllabe ou un mot; de même, dans la mélodie, ce n'est pas la combinaison de sons quelconque qui produit la voix bien ordonnée, ou qui, à sa place, produit l'intervalle propre la modulation; mais il faut que cette combinaison ait lieu, comme nous venons de le dire, suivant la loi de modes définis.

Du ton et du demi-ton

VII. La partie la plus facile à apprécier et la mesure de ce qu'on nomme l'étendue de la voix et de tout son intervalle est appelée ton, de même qu'on appelle coudée la mesure principale de l'espace que parcourent les corps en mouvement. L'intervalle de ton est très facile à distinguer, comme différence des consonances premières les plus connues; car la quinte surpasse la quarte d'un ton.

VIII. Le demi-ton n'est pas ainsi appelé parce que ce serait la moitié d'un ton, comme le pense Aristoxène, de la même manière que la demi-coudée est la moitié de la coudée: mais parce que c'est un intervalle musical moindre que le ton, de la même manière que nous appelons certaine lettre demi-voyelle, non parce qu'elle fait entendre la moitié d'un son, mais parce qu'elle ne fait pas entendre complètement le même son. On démontre, en effet, que le ton, considéré dans la raison sesquioctave ($9/8$), ne peut pas plus se partager en deux parties égales que tout autre intervalle sesquipartiel, car 9 n'est pas divisible par 2.

Du genre diatonique de la modulation, du genre chromatique et du genre enharmonique

IX. Quand la voix qui est modulée dans les limites de son étendue passe d'un son plus grave à un plus aigu, en produisant l'intervalle d'un demi-ton, qu'ensuite, franchissant l'intervalle d'un ton, elle passe un autre son, et qu'elle continue à moduler, il ne peut y avoir d'autre intervalle, que celui d'un ton, qui produise un autre son agréable et apte à la modulation, et ce son aigu consonant donnera avec le premier la consonance de quarte.

Une modulation de ce genre s'appelle système tétracorde, elle se compose de trois intervalles, savoir d'un demi-ton, d'un ton et d'un autre ton, et de quatre sons, dont les extrêmes, c'est-à-dire le plus grave et le plus aigu, forment une consonance. Cette consonance, que nous avons dit être appelée quarte, se compose donc de deux tons et d'un demi-ton.

Ce genre de modulation s'appelle diatonique, soit parce que d'ordinaire, il s'élève par des tons, soit à cause de la vigueur et de la fermeté qu'il montre.

X. Quand la voix produit un premier son, et que, franchissant un demi-ton, elle

s'élève à un son plus aigu, puis passe de là à un troisième, en franchissant encore un demi-ton, et que s'efforçant d'avancer avec modulation, elle en produit encore un autre après celui-ci, elle ne peut observer un autre intervalle qu'un trihémiton in composé, complément du premier tétracorde, et ne peut produire d'autre son que celui qui limite ce tétracorde en montant vers les sons aigus, et qui avec le plus grave donne la consonance de quarte. Cette modulation se fait donc par un demi-ton, suivi d'un demi-ton et d'un trihémiton in composé, et ce genre de modulation s'appelle chromatique, parce qu'il s'écarte du premier et qu'il change de couleur, il exprime les affections lamentables et les passions violentes.

XI. Il y a un troisième genre de modulation qu'on appelle enharmonique. C'est celui où partant du son le plus grave la voix module le tétracorde en progressant par un diésis, puis un autre diésis et un double ton.

Du diésis

XII. Les disciples d'Aristoxène appellent diésis mineur le quart de ton ou moitié du demi-ton qu'ils considèrent comme le plus petit intervalle appréciable. Les Pythagoriciens appellent diésis ce qu'on nomme maintenant demi-ton.^[4] Aristoxène dit que le genre enharmonique s'appelle ainsi parce qu'il est le meilleur, ce qui lui a fait donner le nom qui convient à tout ce qui est bien ordonné. Cette modulation est très difficile, et comme il le dit lui-même, elle demande beaucoup d'art et d'étude et ne s'acquiert que par une longue pratique. Le genre diatonique au contraire est simple, noble et plus naturel, c'est pourquoi Platon le préfère.^[5]

GENRES	INTERVALLES		
Diatonique	demi-ton	ton	ton
Chromatique	demi-ton	demi-ton	trihémiton
Enharmonique	diésis	diésis	duton

De la découverte des lois numériques des consonances

XII (bis). C'est Pythagore qui paraît avoir trouvé le premier que les sons consonants ont entre eux des rapports.^[6] Les sons qui produisent la quarte ont entre eux le rapport sesquiterce (4/3); ceux qui produisent la quinte ont la raison sesquialtère (3/2); ceux qui produisent l'octave ont entre eux la raison double; ceux qui donnent octave et quarte sont dans le rapport de 8 à 3 qui est polyépimère, car il est égal à $2 + \frac{2}{3}$. Les sons qui donnent octave et quinte sont en raison triple, et ceux qui donnent la double octave sont en raison quadruple. Parmi les autres sons concordant, ceux qui donnent le ton sont dans la raison sesquioctave (9/8), et ceux qui donnent le demi-ton, mais qu'alors on appelait diésis, sont dans le rapport du nombre 256 au nombre 243.^[7]

C'est Pythagore, disons-nous, qui paraît avoir découvert ces rapports, par la longueur et la grosseur des cordes, ainsi que par la tension à laquelle il les soumettait en tournant les chevilles, ou par une méthode plus connue, en y suspendant des poids, et dans les instruments à vent par le diamètre de la cavité, par l'intensité plus ou moins grande du souffle, ou par le poids des disques, ou le niveau dans les vases. Quelle que soit la méthode choisie parmi celles que nous venons de citer, on aura la consonance suivant le rapport indiqué, toutes choses égales d'ailleurs.

Pour le moment, contentons-nous de la démonstration qui, dans ce qu'on appelle le canon harmonique, s'obtient par la longueur des cordes : si nous divisons en quatre

parties égales une corde tendue sur le canon harmonique, le son produit par la corde entière formera avec celui qui est produit par trois parties de la corde l'accord de quarte, le rapport est sesquiterce ; avec le son produit par deux parties ou la moitié de la corde, il formera l'accord d'octave, le rapport est double; avec le son produit par le quart de la corde, il donnera l'accord de double octave, le rapport est quadruple.

De plus le son produit par trois parties de la corde donnera avec le son produit par la moitié de la corde la consonance de quinte, le rapport est sesquialtère, et, à l'égard du son produit par le quart de la corde, il donnera la consonance d'octave et quinte, le rapport est 3. Si nous divisons la corde en 9 parties égales, le son produit par la corde entière donnera avec le son qui est produit par 8 parties l'intervalle d'un ton, le rapport est sesquioctave.

Le quaternaire 1, 2, 3, 4, renferme toutes les consonances, car il contient celles de quarte, de quinte, d'octave, d'octave et quinte et de double octave, savoir les raisons sesquiterce, sesquialtère, double, triple et quadruple (c'est-à-dire $4/3$, $3/2$, 2, 3, 4 et).

Ces consonances, les uns ont voulu les obtenir par des poids, d'autres par des longueurs, d'autres par des mouvements nombrés, d'autres encore par la capacité des vases. On raconte que Lasus d'Hermione et les disciples d'Hippase de Métaponte, ce dernier de la secte de Pythagore, ont observé sur des vases la rapidité et la lenteur des mouvements à l'aide desquels les consonances se calculent en nombres. Prenant plusieurs vases de même capacité et semblables, on a laissé l'un vide et l'on a rempli l'autre à moitié d'un liquide, puis on a frappé chacun d'eux, on a obtenu la consonance d'octave.

Laissant de nouveau un vase vide et remplissant l'autre au quart, on a obtenu, en les frappant, la consonance de quarte; pour l'accord de quinte, on remplissait le tiers d'un vase: le rapport des espaces vides était, pour l'octave celui de 2 à 1, pour la quinte celui de 3 à 2, pour la quarte celui de 4 à 3.

Par la division des cordes, on obtient les mêmes rapports comme nous l'avons vu. Toutefois, on ne se servait pas d'une seule corde, comme dans le canon harmonique, mais de deux cordes à l'unisson également tendues. On interceptait la moitié d'une de ces cordes en pressant le milieu avec le doigt, on obtenait avec la moitié et l'autre corde entière la consonance d'octave; quand on interceptait seulement un tiers, les deux autres tiers et la corde entière donnaient l'accord de quinte, de même pour obtenir la consonance de quarte, on interceptait le quart d'une des deux cordes, en laissant l'autre entière.

On a fait une expérience semblable sur la flûte et on a trouvé les mêmes rapports. Ceux qui ont mesuré les consonances avec des poids, ont suspendu à deux cordes des poids dans les rapports que nous avons dits et qu'on avait obtenus par la longueur des cordes, en déterminant les consonances de ces cordes.

XIII. Le son est le repos de la voix sur une seule intonation, car on dit que le son doit toujours être semblable à lui-même et ne pas admettre la moindre différence ni se composer de différentes tensions de gravité ou d'acuité. Or les voix sont en partie aiguës, en partie graves; c'est pourquoi parmi les sons, l'un, aigu, est rapide, et l'autre, grave, est lent. Si donc on souffle dans deux tuyaux d'une égale grosseur et d'un diamètre égal, percés à la manière d'une flûte, et dont l'un soit deux fois plus long que l'autre, l'air qui s'échappe du tuyau deux fois moins long a une vitesse double et il en résulte la consonance d'octave, le son le plus grave sortant du tuyau le plus long et le son le plus aigu sortant du tuyau le plus court.

La cause en doit être attribuée à la vitesse et à la lenteur du mouvement, et cette cause produit les mêmes consonances dans une seule flûte; à cause de la distance des trous. En effet, si une flûte étant divisée en deux parties égales, on souffle dans la flûte entière, puis jusqu'au trou qui la divise en deux parties, on entendra la consonance d'octave; la flûte étant divisée en trois, et deux tiers étant pris du côté de la languette et un tiers vers l'extrémité, si on souffle dans la flûte entière et dans les deux tiers, on entendra l'accord de quinte. Si elle est divisée en quatre, et que l'on prenne trois parties vers le haut et une vers le bas, en soufflant dans la flûte entière et dans les trois quarts, on aura la consonance de quarte.

L'école d'Eudoxe et celle d'Archytas ont pensé que les rapports des consonances pouvaient être exprimés par des nombres; elles ont reconnu aussi que ces rapports expriment les mouvements, un mouvement rapide correspondant à un son aigu, parce qu'il frappe et pénètre l'air d'une manière plus continue et plus rapide, et un mouvement lent répondant à un son grave, parce qu'il est plus tardif.

Voilà ce que nous avons à dire de la découverte (des lois numériques) des consonances. Revenons maintenant à ce qu'a dit Adraste au sujet de ces instruments qui ont été préparés selon certains rapports dans le but de découvrir les consonances; il dit, en effet, que nous jugeons par l'ouïe la grandeur des intervalles et que les raisons confirment le témoignage des sens. Nous expliquerons bientôt comment les sons qui ont entre eux l'intervalle d'un demi-ton, ainsi que nous l'avons dit, sont dans le rapport de 256 à 243.

De l'addition et de la soustraction des consonances

XIII (*bis*). Il est évident que les compositions et les divisions des consonances sont entre elles dans le même rapport que les compositions et les divisions des nombres qui mesurent les consonances, comme nous l'avons expliqué. Ainsi l'octave se compose de la quinte et de la quarte et se divise en quinte et quarte. Or la raison de l'octave est double, celle de quarte est sesquitière ($4/3$) et celle de la quinte est sesquialtère ($3/2$). Il est clair que la raison 2 se compose de $4/3$ et de $3/2$ et se résout dans les mêmes nombres. Ainsi 8 est les $4/3$ de 6 et 12 est les $3/2$ de 8, or 12 est le double de 6: on a les nombres 6, 8, 12. De même, la raison 2 de 12 à 6 se décompose en deux, le rapport sesquitière ($4/3$) de 12 à 9 et le rapport sesquialtère ($3/2$) de 9 à 6.

Comme la quinte surpasse d'un ton la consonance de quarte, puisqu'elle se compose de trois tons et demi, le ton étant dans le rapport sesquioctave on trouve que le rapport sesquialtère ($3/2$) surpasse aussi le rapport sesquitière ($4/3$) de la raison sesquioctave ($9/8$): en effet, si de la raison sesquialtère, comme de 9 à 6, on retranche la raison sesquitière de 8 à 6, le reste est la raison sesquioctave de 9 à 8.^[8] Si de même on ajoute à celle-ci la raison sesquitière de 12 à 9, on complète la raison sesquialtère de 12 à 8.^[9]

Comme la consonance d'octave est en raison double et la consonance de quarte en raison sesquitière ($4/3$), la somme des deux donne la raison de 8 à 3, car 4 est à 3 dans le rapport sesquitière et le double de 4 est 8.^[10]

La quinte de l'octave est en raison triple, le rapport sesquialtère ajouté à 2 donne, en effet, cette raison, car rapport de 9 à 6 est sesquialtère et le rapport de 18 à 9 est double, ce qui donne la raison triple pour rapport de 18 à 6.^[11]

$$\begin{array}{ccc}
 8 & 4 & 3 \\
 \hline
 \text{octave} = 2 & \text{quarte} = 4/3 & \\
 \hline
 \text{octave et quarte} = 2 + 2/3 & & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 18 & 9 & 6 \\
 \hline
 \text{octave} = 2 & \text{quinte} = 3/2 & \\
 \hline
 \text{octave et quinte} = 3 & & \\
 \end{array}$$

La double octave est pareillement en raison quadruple, car elle se compose de deux raisons doubles : le double de 6 est 12 et le double de 12 est 24 qui est quadruple de 6 ou plutôt, d'après ce que nous avons dit au commencement, la raison triple ajoutée à la raison sesquitièrc donne la raison quadruple. Or la raison d'octave et quinte est 3, celle de quarte est sesquitièrc $4/3$ et c'est des deux que se compose la double octave. C'est donc justement qu'on voit ici la consonance quadruple, car le triple de 6 est 18 dont les $4/3$ sont 21 qui est le quadruple de 6, de même le rapport de 8 à 6 est sesquitièrc elle triple de 8 est 24 qui est le quadruple de 6. On peut pousser ces notions aussi loin qu'on voudra, on trouvera toujours les mêmes rapports résultant de la composition des consonances.^[12]

Platon a conduit le genre diatonique et l'étendue de ce système jusqu'à la quatrième octave avec une quinte en plus et un ton.^[13] Que si quelqu'un objecte, dit Adraste, qu'il ne faut pas pousser si loin le calcul, puisque Aristoxène a limité à la double octave et quinte l'étendue du diagramme qui représente les différents modes, et que les modernes ont le pentadécacorde (lyre à 15 cordes) dont l'étendue la plus considérable ne contient que la double octave [avec un ton de plus], je répons, poursuit-il, que ces derniers ne considérant que le point de vue pratique, ont réglé les choses de cette manière, parce qu'ils étaient persuadés que ceux qui concourent pour le prix du chant, ne peuvent pousser la voix au-delà de ces limites, et que, d'ailleurs, les auditeurs ne pourraient plus distinguer facilement les sons.

Platon, au contraire, considérant la nature des choses et l'âme qui se compose nécessairement d'harmonie. prolonge le calcul jusqu'aux nombres solides (8 et 27) et joint les termes par deux moyennes, afin de pouvoir embrasser complètement tout ce qui compose le corps solide du monde; et il en étend jusqu'à ce point l'harmonie qui, selon sa nature peut aller à l'infini.

Il dit de plus qu'il est convenable d'attribuer les plus grands nombres aux sons les plus graves, quoique cela ne paraisse pas convenir à certaines tensions, par exemple à la tension qui se fait par la suspension des poids. En effet, de deux cordes égales en longueur et en grosseur, et semblables du reste, celle qui soutiendra le plus grand poids produira le son le plus aigu, à cause de la tension plus grande, car le plus grand poids, produisant une plus forte tension, donne extrinsèquement une plus grande force au son plus aigu par lui-même qui a, d'après cela, une force moindre que le poids suspendu. Au contraire, il est évident qu'un son plus grave, possédant par lui-même une force plus grande que le poids suspendu, se suffit à lui-même pour retenir sa propre harmonie et sa consonance; en sorte que le plus grand nombre doit être attribué à la plus grande force. Cela s'accorde avec le reste, car les longueurs et les grosseurs des cordes, ralentissant le mouvement, les rendent impuissantes et les empêchent de vibrer facilement et de frapper rapidement l'air qui les entoure.

Il est donc évident que les sons les plus graves ont leur force propre selon le nombre le plus grand. On trouve la même chose avec les instruments à vent, car dans ces instruments les sons les plus graves résultent de leur longueur et de la largeur des trous qui font mettre en mouvement une plus grande quantité d'air; ils résultent aussi de la diminution du souffle, comme dans la trompette et dans l'organe vocal où les sons

faibles et tempérés ont une force propre plus grande.

La première de toutes les consonances, dit Platon, est la quarte, car c'est par elle qu'on trouve toutes les autres; la quinte n'est séparée de la quarte que par l'intervalle d'un ton.

Du limma

XIV. On peut définir le ton, l'intervalle qui sépare la quinte de la quarte. On trouve que l'octave est la somme de la quarte et de la quinte, car elle se compose de ces deux consonances.

Les anciens prenaient le ton pour premier intervalle de la voix, sans tenir compte du demi-ton et du diésis. Ils ont trouvé que le ton est en raison sesquioctave (9/8). Ils l'ont démontré avec des disques, des vases, des cordes, des tuyaux, des poids suspendus, et de plusieurs autres manières. C'était toujours le rapport de 8 à 9 qui permettait à l'oreille de discerner l'intervalle d'un ton. Le premier intervalle (contenu dans la quarte) est donc le ton; la voix, en franchissant cet intervalle, donne à l'oreille une sensation fixe et bien déterminée. L'oreille peut encore saisir avec précision l'intervalle suivant. Quant à l'intervalle qui vient après et qu'on appelle demi-ton, les uns disent que c'est un demi-ton parfait, les autres disent que c'est un limma (un reste). La consonance de quarte qui est en raison sesquiterce (4/3), n'est donc pas complétée par un ton, c'est-à-dire par un intervalle sesquioctave (9/8).

Tous conviennent que l'intervalle de quarte est supérieur à deux tons et inférieur à trois tons. Aristoxène dit qu'il se compose de deux tons et demi parfaits, tandis que Platon dit que cet intervalle est de deux tons et un reste, et il ajoute que ce reste (limma) n'a pas de nom, mais qu'il est dans le rapport de nombre à nombre, qui est celui de 256 à 243.^[14] Tel est le limma, la différence des termes est 13.

Voici la méthode dont on s'est servi pour trouver ce rapport le premier terme ne saurait être 6, puisqu'il n'est pas divisible par 8 et qu'on doit en prendre les 9/8. Il ne saurait non plus être 8, car si les 9/8 de 8 sont 9, on ne saurait prendre ensuite les 9/8 de 9, et il faut prendre les 9/8 des 9/8, puisque la quarte qui est dans le rapport sesquiterce surpasse le double ton. Nous prenons donc le fond sesquioctave, 8 et 9; or, 8 multiplié par lui-même, donne 64 et 9 x 8 donne 72; enfin, 9, multiplié par lui-même, donne 81. Nous avons donc [8, 9,] 64, 72, 81. Si maintenant on multiplie chacun de ces nombre par 3,^[15] on a 64 x 3 = 192; 72 x 3 = 216; 81 x 3=243; en sorte que nous avons [8, 9, 61, 72, 81], 192, 216, 243. Après 243, plaçons 192 x 4/3 ou 256 et nous aurons la série des termes suivants

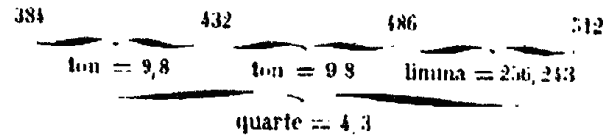
- le fond sesquioctave 8, 9,
- les seconds sesquioctaves 64, 72, 81,
- les troisièmes sesquioctaves 192, 216, 243.

Si on ajoute les 4/3 de 192 ou 256, la consonance de quarte (6/3) sera complétée par deux tons et le limma dont nous avons parlé.

$$\begin{array}{cccc} 192 & & 216 & & 243 & & 256 \\ \hline \text{ton} = 9,8 & & \text{ton} = 9,8 & & \text{limma} = 256,243 & & \\ \hline & & \text{quarte} = 4,3 & & & & \end{array}$$

Il y en a quelques-uns qui choisissent pour premier terme le nombre 384, afin de pouvoir en prendre deux fois de suite les 9/8. Ils multiplient le terme 6 par 8, ce qui donne 48, et en multipliant ce nombre de nouveau par 8, ils ont pour produit 384 dont

les 4/3 égalent 512. Entre ces deux termes se trouvent deux sesquioctaves; car $384 \times 9/8 = 432$ et $432 \times 9/8 = 486$ qui, avec 512, donne le rapport de limma.



Quelques-uns disent que ces nombres ne sont pas pris convenablement, attendu que l'excès du quatrième terme sur le troisième n'est pas 13, nombre que Platon a dit devoir être celui du limma. Mais rien n'empêche que nous ne trouvions dans d'autres nombres le même rapport qui existe entre 256 et 243; car Platon n'a pas pris un nombre déterminé mais seulement la raison du nombre. Or, le rapport qui existe entre 256 et 243 est le même qu'entre 512 et 486, puisque 512 est le double de 256 et 486 le double de 243. Il est manifeste que cet intervalle des nombres 256 et 243, dont la différence est 13, est moindre que le demi-ton, car le ton étant $1 + 1/8$, le demi-ton sera la moitié de $1 + 1/8$, c'est-à-dire $1 + 1/16$. Or, $13/243$ est un rapport moindre que $1/18$, rapport qui est lui-même moindre que $1/16$.^[16]

Il n'est d'ailleurs pas possible de partager la raison $1 + 1/8$ en deux parties égales, quoique quelques-uns le croient possible, jugeant cette question, non par le raisonnement, mais par l'oreille. Le fond de l'intervalle sesquioctave étant le rapport de 9 à 8,^[17] la différence des termes qui est l'unité, n'est assurément pas divisible.

XV. Si quelqu'un demande, au sujet du limma, à quelle consonance il appartient, nous lui dirons qu'il faut le considérer comme appartenant à la quarte; car c'est lui qui fait que la quarte est moindre que deux tons et demi parfaits.

Or, voici comment le ton a été trouvé. La quarte étant dans le rapport 4/3, et la quinte dans le rapport 3/2, on a pris le premier nombre divisible à la fois par 2 et par 3. Ce nombre est 6 dont les 4/3 égalent 8 et les 3/2 égalent 9. On a 6, 8, 9, et l'excès de l'intervalle 3/2 sur l'intervalle 4/3 est 9/8, car 9 est les 9/8 de 8. On a donné à cette tension le nom de ton.

XVI. Il est manifeste que le ton ne peut être divisé en deux parties égales. Et d'abord, le fond sesquioctave 9/8 a pour différence des termes l'unité qui est indivisible; et puis, cet intervalle étant exprimé en nombres quelconques, la différence des termes ne peut pas toujours se diviser en deux parties égales: ainsi, la différence 27 des termes du rapport de 216 à 243 n'est pas susceptible de la division en deux parties égales, mais en deux nombres qui sont 13 et 14, car l'unité n'est pas divisible. Tantôt nous saisissons le ton par l'opération de l'intelligence, tantôt nous le cherchons dans les nombres et les intervalles, tantôt enfin nous le percevons par l'oreille dans la voix, et nous savons qu'il n'est pas toujours divisible en deux parties égales, soit dans les nombres, ainsi que nous venons de le montrer, soit dans les intervalles sensibles et visibles.

C'est comme dans le canon harmonique : le chevalet qui est sensible a, quoiqu'on fasse, une certaine largeur et ne peut être tellement privé d'épaisseur que, dans le partage du ton, il n'intercepte absolument rien de l'extrémité de la première partie et du commencement de la seconde, de sorte qu'il y aura toujours une certaine partie du ton qui sera absorbée. Dans les partages il y a donc trois choses : les deux divisions et la partie retranchée (par le chevalet). Par l'acte même de la division, une partie de ce qui est divisé se trouve détruite, comme on le voit quand on coupe quelque chose avec une scie. Comme dans certaines choses sensibles, il se perd quelques particules, il en est de même dans toutes les autres choses, quand on fait une section, bien que

nos sens ne nous en rendent pas témoignage.

Si, par exemple, avant de diviser une règle en bois, un roseau ou tout autre objet long, vous le mesurez, et qu'ensuite vous le divisiez en plusieurs parties, vous trouverez la longueur de toutes les parties réunies moindre que la longueur de l'objet avant la division. De même, si vous partagez une corde en plusieurs parties et que vous la coupez, vous trouverez qu'après la section, le développement sera moindre, et si vous voulez tendre de nouveau toutes les parties, vous ne pourrez empêcher en les joignant par les extrémités qu'il ne se perde une partie de la longueur de la corde. Voilà pourquoi deux demi-tons ne seront jamais complets.

Et dans la voix non plus, on ne trouve pas la section du ton en deux parties égales : car, si après avoir fait entendre un ton suivi d'un autre ton, je produis deux demi-tons, au lieu d'un seul ton, par trois émissions de voix, en montant de deux intervalles, le troisième son est plus aigu que le second et il est d'un ton plus haut que le premier, tandis qu'il ne semble être au-dessus du second que d'un demi-ton; mais ce demi-ton n'est ni égal ni semblable à celui qui se trouve entre le premier son et le second, le plus grave ne pouvant être semblable au plus aigu, et c'est en vain que nous voudrions reproduire deux fois le même son en coupant notre voix, nous donnerons la même résonance, mais il y aura toujours une différence quoique imperceptible à l'oreille.

C'est comme si l'on voulait faire deux piqûres tout à fait semblables, ou pincer également deux fois une corde, il y aura toujours une différence de force en plus ou en moins. Il en sera de même si l'on voulait plonger le doigt deux fois également dans un liquide, ou bien le plongeant dans de l'encre, du miel, de la poix, en retenir la même quantité.

Quant au ton idéal, on conçoit qu'il puisse être divisé en deux parties égales.

XVII. Nous avons à parler maintenant de l'harmonie qui est contenue dans les nombres et à expliquer ce que c'est que le terme qui, dans toute chose, montre la propriété de ce que l'on dit, par exemple, le nombre, la grandeur, la puissance, la masse, la gravité.

En combien de sens se prend le mot λόγος.

XVIII. Le mot λόγος est pris en plusieurs sens par les péripatéticiens ; car on appelle ainsi le langage que les modernes nomment oral et le raisonnement mental sans émission de voix; on appelle encore ainsi le rapport de proportion, et c'est en ce sens qu'on dit qu'il y a rapport de telle chose à telle autre; l'explication des éléments de l'univers; le compte des choses qui honorent ou qui sont honorées, et c'est dans cette acception que nous disons : tenir compte de quelque chose, ou n'en pas tenir compte. On appelle encore λόγος le calcul des banquiers, les discours de Démosthène et de Lysias dans leurs œuvres écrites; la définition des choses, qui en explique l'essence, puisque c'est à cela qu'elle sert; le syllogisme et l'induction; les récits libyques^[18] et la fable. On donne aussi le nom de λόγος à l'éloge et au proverbe. C'est encore ainsi qu'on appelle la raison de la forme, la raison séminale et beaucoup d'autres.

Mais, selon Platon, on emploie le mot λόγος en quatre sens : on appelle ainsi la pensée mentale et sans parole, le discours procédant de l'esprit et exprimé par la voix, l'explication des éléments de l'univers et la raison de proportion. C'est de cette raison que nous nous proposons maintenant de parler.

De la raison de proportion

XIX. La raison de proportion de deux termes de même espèce est un certain rapport qu'ils ont entre eux, comme le double, le triple. Il est impossible, dit Adraste, de

trouver un rapport entre deux choses qui ne sont pas de même espèce: ainsi on ne peut ni comparer, ni réunir la coudée (mesure de longueur) et la mine (mesure de poids) la chénice (mesure de capacité pour les choses sèches) et la cotyle (mesure de capacité pour les liquides, le blanc et le doux ou le chaud; mais on peut comparer ensemble les choses de même espèce, comme les longueurs avec les longueurs, les surfaces avec les surfaces, les solides avec les solides, les poids avec les poids, les liquides avec les liquides, les choses sèches avec les choses sèches, les nombres avec les nombres, le temps avec le temps, le mouvement avec le mouvement, la voix avec la voix, le suc avec le suc, la couleur avec la couleur, enfin toutes les choses de même espèce.

XX. Nous appelons termes les choses homogènes ou de même espèce, prises pour être comparées ensemble. Quand nous examinons quel rapport existe entre le talent et la mine, nous disons que ce sont des termes de même espèce, parce que l'un et l'autre sont des poids. Il en est de même des autres choses homogènes.

XXI. La proportion est une certaine liaison de rapports, telle que 2 est à 1 comme 8 est à 4.

XXII. Les rapports sont supérieurs, inférieurs ou égaux (à l'unité). Le rapport égal est *un* et toujours le même, et il l'emporte sur tous les autres, comme étant élémentaire. Tels sont les rapports qui se comparent par la même quantité, comme 1 comparé 1, 2 à 2, 10 à 10, 100 à 100. Parmi les rapports plus grands (que l'unité), les uns sont multiples (c'est-à-dire entiers), d'autres sont sesquipartiels, d'autres sont neutres. Parmi les rapports moindres (que l'unité), les uns sont sous-multiples, d'autres sont sous-sesquipartiels, d'autres sont neutres. Parmi ces raisons, les unes représentent les consonances, d'autres y sont étrangères.

Les raisons multiples qui représentent les consonances sont la raison double, la raison triple, et la raison quadruple. Les raisons sesquipartielles sont la raison sesquialtère ($3/2 = 1 + 1/2$), et la raison sesquiterce ($4/3 = 1 + 1/3$). Parmi les neutres, on a la raison sesquioctave ($9/8 = 1 + 1/8$) et le rapport de 256 à 243. Sont opposées à ces raisons la sous-double ($1/2$) la sous-triple ($1/3$), la sous-quadruple ($1/4$), la sous-sesquialtère ($2/3$), la sous-sesquiterce ($3/4$), la sous-sesquioctave ($8/9$) elle rapport de 243 à 256.

La raison double, comme nous l'avons vu plus haut, se trouve dans la consonance d'octave,^[19] la raison triple dans la consonance d'octave et quinte, la raison quadruple dans la double octave, la raison sesquialtère ($1 + 1/2$) dans la quinte, la raison sesquiterce ($1 + 1/3$) dans la quarte. Quant à la raison sesquioctave ($1 + 1/8$) c'est un ton et le rapport de 256 à 243 est le limma. Il en est de même des rapports inverses. Parmi les raisons neutres sont la raison sesquioctave ($1 + 1/8$) et la raison de 256 à 243 qui ne sont pas des consonances et n'y sont pourtant pas étrangères, puisque le ton et le limma sont les principes de la consonance et ont la vertu de la compléter, sans être cependant des consonances.^[20]

Il y a en arithmétique des raisons de nombres, non seulement multiples et superpartielles, mais encore des raisons épimères et polyépimères et d'autres raisons que nous expliquerons clairement plus tard. La quarte se compose de deux tons et d'un limma, la quinte de trois tons et d'un limma, l'octave d'une quinte et d'une quarte; mais les rapports de proportion doivent les précéder.

Ainsi, selon les principes de l'arithmétique, comme l'enseigne Adraste, il y a des rapports multiples, d'autres sont sesquipartiels, d'autres épimères, d'autres multi-superpartiels, d'autres polyépimères; d'autres sont neutres, et parmi les rapports plus petits (que l'unité), il y en a de sous-multiples, d'autres sont sous-sesquipartiels;

les autres sont inverses des rapports plus grands (que l'unité).

XXIII. Le rapport est multiple quand le plus grand terme contient plusieurs fois le plus petit, c'est-à-dire quand le petit terme mesure exactement le plus grand, sans qu'il reste aucune partie de celui-ci. Le plus grand terme est autant de fois multiple du plus petit que ce dernier le mesure de fois; si par exemple il le mesure deux fois, le rapport est double; s'il le mesure trois fois, le rapport est triple; s'il le mesure quatre fois, le rapport est quadruple; est ainsi de suite. Réciproquement le plus petit terme, comme partie du plus grand; reçoit une dénomination correspondante à la raison multiple: on l'appelle la moitié du terme double, le tiers du terme triple, ... et la raison est appelée demie, tiers, et ainsi de suite.

Du rapport superpartiel ou sesquipartiel

XXIV. Le rapport est appelé sesquipartiel quand le plus grand terme contient une fois le plus petit et une partie du plus petit, c'est-à-dire quand le plus grand terme surpasse le plus petit d'une certaine quantité qui en est une partie. Ainsi le nombre 4 est sesquipartiel par rapport à 3, parce qu'il le surpasse d'une unité qui est le tiers de 3. De même 6 surpasse 4 de 2 unités qui sont la moitié de 4.

Chaque rapport sesquipartiel a reçu, d'après le nom de la fraction, une dénomination particulière. Ainsi celui qui surpasse l'unité de la moitié du plus petit terme, comme $3/2$ et $6/4$, a été appelé sesquialtère, car la plus grande quantité contient la plus petite tout entière plus la moitié de la plus petite. En effet, 3 contient une fois 2, plus l'unité qui est la moitié de 2; 6 contient une fois 4, plus 2 qui est la moitié de 4. Le rapport qui surpasse l'unité du tiers du plus petit terme, comme $4/3$, est appelé sesquitierce, celui qui surpasse l'unité d'un quart, comme $3/4$ et $10/8$, est appelé sesquiquarte, et en continuant de même, on trouve les rapports qu'on nomme sesquiquinte ($1 + 1/5$), sesquisixte ($1 + 1/6$), sesquiseptime ($1 + 1/7$) qui sont tous sesquipartiels.

Inversement, les rapports des plus petits termes aux plus grands sont appelés sous-sesquipartiels, car de même que le rapport de 3 à 2 est appelé sesquialtère, par analogie le rapport de 2 à 3 est appelé sous-sesquialtère. De même encore le rapport de 3 à 1 est nommé sous-sesquitierce.

Parmi les rapports multiples, le premier et le plus petit est le double, vient ensuite le triple, puis le quadruple, et ainsi de suite indéfiniment en augmentant.

Parmi les rapports sesquipartiels, le premier et le plus grand est le rapport sesquialtère ($1 + 1/2$), parce que la fraction $1/2$ est la première, la plus grande, celle qui se rapproche le plus de l'entier; vient ensuite le rapport sesquitierce ($1 + 1/3$), puis le rapport sesquiquarte ($1 + 1/4$), et ainsi de suite indéfiniment, en allant toujours en diminuant.

Du rapport épimère

XXV. Le rapport est dit *épimère* quand le plus grand terme contient une fois le plus petit et en outre plusieurs parties de celui-ci, soit semblables, soit différentes, semblables comme deux tiers, deux cinquièmes, etc. Ainsi le nombre 5 contient 3, plus les deux tiers de 3; le nombre 7 contient 5, plus les deux cinquièmes de 3; le nombre 8 contient 3 et les trois cinquièmes de 5, et ainsi de suite. Les parties sont différentes quand le plus grand terme contient le plus petit, et en outre la moitié et le tiers de celui-ci, comme dans le rapport de 11 à 6, ou la moitié et le quart, comme dans le rapport de 7 à 4, ou encore le tiers et le quart, comme dans le rapport de 19 à 12. [21]

On peut pareillement reconnaître les autres rapports épimères qui surpassent

l'unité de deux, de trois ou d'un plus grand nombre de parties, que ces parties soient semblables ou non. Inversement le rapport hypépimère, est celui qu'on obtient en prenant, dans le rapport précédent, la raison du plus petit terme au plus grand.

Du rapport multi-superpartiel et du rapport polyépimère

XXVI. Le rapport est dit multi-superpartiel ou multi-sesquipartiel quand le plus grand terme contient 2 fois ou un plus grand nombre de fois le plus petit et en outre une partie de ce dernier. C'est ainsi que 7 contient 2 fois 3 et en outre un tiers de 3, aussi l'on dit que le rapport de 7 à 3 est bisesquitierce, de même 9 contient 2 fois 4 et en outre le quart de 4, on dit que le rapport de 9 à 4 est bisesquiquarte. De même encore 10 contient 3 fois 3 et en outre le tiers de 3, le rapport est appelé trisesquitierce.

On reconnaîtra de la même manière les autres rapports multi-superpartiels. C'est ce qui arrive toutes les fois que de deux nombres proposés le plus petit ne mesure pas exactement le plus grand, mais que le plus grand donne un reste qui est en même temps une partie du plus petit. Ainsi le rapport de 26 à 8 est multi-superpartiel par ce que 3 fois 8 ne donnent pas complètement 26; en arrivant à 24, au lieu de 26, il y a un reste 2 qui est le quart de 8.

XXVII. Le rapport est appelé polyépimère quand le plus grand terme contient 2 fois, ou plus, le plus petit, et en outre 2 ou plusieurs parties de ce dernier, soit semblables, soit différentes. Ainsi 8 contenant 2 fois 4 et de plus deux tiers de 3, le rapport est dit double avec deux tiers en plus ($2 + 2/3$); de même le rapport de 11 à 3 est triple avec deux tiers en plus ($3 + 2/3$); le rapport de 11 à 4 est double, avec une demie et un quart en plus, ou double avec trois quarts en plus ($11/4 = 2 + 3/4 = 2 + 1/2 + 1/4$).

Il est facile de trouver beaucoup d'autres rapports polyépimères, et cela a lieu toutes les fois que le plus petit nombre ne mesure pas exactement le plus grand, mais qu'il y a un reste formé de plusieurs parties du petit nombre, comme dans le rapport de 14 à 3, car 3 ne mesure pas exactement 14, mais 3 fois 4 font 12, de 14 il reste 2 qui forment deux parties de trois et qu'on nomme deux tiers. Au rapport polyépimère est opposé le rapport hypo-polyépimère (rapport inverse).

XXVIII. La raison de nombre à nombre est celle qui a lieu quand le plus grand n'a avec le plus petit aucun des rapports dont nous avons parlé; comme il sera montré, c'est un rapport de nombre à nombre, réduit à ses plus petits termes, qui mesure le limma; ce rapport est celui de 256 à 243.^[22] Il est évident que la raison des plus petits nombres aux plus grands est l'inverse. Elle emprunte son nom aux premiers rapports, comme il a été montré.

Du fond d'un rapport

XXIX. De tous les rapports dont il a été parlé en détail, ceux qui sont exprimés en nombres les plus petits et premiers entre eux sont appelés les premiers ou les fonds de tous les rapports d'espèce semblable (c'est-à-dire égaux). Ainsi le premier et le fond des rapports doubles est le rapport 2 à 1, car après celui-là les rapports doubles sont exprimés en nombres plus grands et composés, comme les rapports de 4 à 2, de 6 à 3, et ainsi de suite indéfiniment.

De même le premier et le fond des rapports triples est le rapport de 3 à 1, les rapports triples exprimés en nombres plus grands et composés vont à l'infini. Il en est de même des autres rapports multiples et des rapports superpartiels, le premier et le fond des rapports sesquialtères est $3/2$; pour le rapport sesquitierce c'est $4/3$, pour le rapport sesquiquarte c'est $3/2$. Il y a une infinité de rapports équivalents exprimés

en termes plus grands et composés. On peut faire les mêmes observations sur les autres rapports.

En quoi diffèrent l'intervalle et le rapport.

XXX L'intervalle et le rapport diffèrent en ce que l'intervalle est compris entre des termes homogènes et inégaux, tandis que le rapport lie simplement entre eux des termes homogènes. C'est pourquoi entre des termes égaux il n'y a pas d'intervalle, mais il y a entre eux un rapport qui est celui d'égalité. Entre les termes inégaux, l'intervalle de l'un à l'autre est unique et identique, tandis que le rapport est autre et inverse, d'un terme à l'autre : ainsi de 2 à 1 et de 1 à 2 il n'y a qu'un seul et même intervalle, mais il a deux rapports différents, le rapport de 2 à 1 étant double, tandis que le rapport de 1 à 2 est un demi.

Eratosthène, dans le *Platonicien*, dit aussi que l'intervalle et le rapport ne sont pas la même chose, parce que le rapport est une certaine liaison de deux grandeurs entre elles et qu'il existe entre des choses différentes ou non, comme quand on dit que le sensible est à l'intelligible dans le même rapport que l'opinion est à la science, ou que l'intelligible diffère du connu par le même rapport que le sensible diffère de l'opinion, tandis que ces choses diffèrent d'un seul intervalle, soit de grandeur, soit de qualité, soit de position, soit de toute autre manière. Par là il est évident que le rapport est autre chose que l'intervalle, car la moitié et le double ne forment pas un même rapport. tandis que l'intervalle est le même.

XXXI. La proportion est une similitude ou identité de plusieurs rapports, c'est-à-dire une similitude des raisons dans plusieurs termes, ce qui a lieu quand le rapport du premier terme au second est égal au rapport du second au troisième ou au rapport de deux autres termes. La première proportion est appelée continue et la seconde discontinue. Il faut trois termes au moins pour une proportion continue, la discontinue suppose au moins quatre termes.

Après la proportion formée de termes égaux, les trois plus petits termes 1, 2, 4, en raison double, forment une proportion continue, car 4 est à 2 comme 2 est à 1; et les nombres 6, 3, 4, 2, forment une proportion discontinue, car 6 est à 3 comme 4 est à 2. On observe la même chose avec les autres rapports multiples et la proportion continue est en quelque sorte une proportion à quatre termes, par la répétition du moyen terme. L'explication est la même quand les rapports sont sesquipartiels : ainsi les nombres 9, 6, 1, en rapport sesquialtère ($1 + 1/2$), forment une proportion continue, et les termes 9, 6, 15, 10, forment une proportion discontinue. On trouverait de même des proportions avec les autres rapports.

Eratosthène dit que le rapport est le principe qui donne naissance à la proportion et qu'il est aussi la première cause de la génération de toutes les choses qui sont disposées avec ordre. Toute proportion se compose, en effet, de rapports et le principe du rapport est l'égalité. Cela est évident dans tous les genres il y a un certain élément propre, ou un principe, dans lequel tous les autres se résolvent, tandis que lui-même ne se résout en aucun d'eux. Or, ce principe est nécessairement indécomposable et indivisible, car tout ce qui peut se décomposer et se diviser est appelé collection et non élément.

Les éléments de la substance sont donc indivisibles selon la substance, ceux de la qualité le sont selon la qualité, ceux de la quantité le sont selon la quantité. Et chaque chose est indivisible et une, selon qu'elle est un élément d'une chose composée ou mixte. Ainsi l'élément de la quantité est l'imité, celui de la grandeur est le point, celui du rapport et de la proportion est l'égalité. Car l'unité ne peut pas se diviser en quantité, ni le point en grandeur, ni l'égalité en rapports multiples. Le

nombre naît de l'unité, la ligne du point, le rapport et la proportion de l'égalité: mais ce n'est pas de la même manière, car l'unité multipliée par elle-même n'engendre pas, comme les autres nombres : une fois un est un, tandis que par l'addition le résultat augmente à l'infini.

Quant au point, ce n'est ni par la multiplication, ni par l'addition, qu'il forme la ligne, mais par un mouvement continu, de même que la ligne forme la surface et la surface le solide. Pareillement la raison d'égalité ne s'accroît pas par addition, car si l'on additionne par ordre plusieurs rapports égaux, la raison de la somme donne encore une égalité. Ainsi le point n'est pas une partie de la ligne, ni l'égalité une partie du rapport. Toutefois l'unité fait partie du nombre: car elle reçoit un accroissement par la seule répétition d'elle-même. La cause de ce que nous venons de dire est que l'égalité n'a pas d'intervalle, comme le point n'a pas de grandeur.

Platon semble croire que le lien des mathématiques est unique et qu'il consiste dans la proportion. Il dit, en effet, dans l'*Epinomis* : il faut que toute figure, toute combinaison de nombres, tout ensemble harmonique, toute révolution astronomique manifeste l'unité de proportion à celui qui apprendra selon la vraie méthode: or, cette unité apparaîtra à quiconque aura bien compris ce que nous enseignons. Il reconnaîtra qu'un seul lien unit naturellement toutes choses.

XXXII. Un nombre moyen diffère du moyen proportionnel.^[23] Car un nombre est moyen proportionnel entre deux autres, c'est un terme compris entre eux: mais si un terme est compris entre deux autres, ce n'est pas pour cela un moyen proportionnel entre ces nombres. Il peut arriver, en effet, qu'un nombre compris entre deux extrêmes ne soit pas en proportion avec eux, comme 2 qui est compris entre 1 et 3, et 2, 3, 4, qui sont compris entre 1 et 10, car on ne peut arriver de 1 à 10 sans passer par 2, 3, 4, et cependant aucun de ces nombres n'est en proportion avec les extrêmes, car le rapport de 1 à 2 n'est pas égal à celui de 2 à 3, et de même le rapport de 1 à 2, 3, ou 4, n'est pas égal à celui de 2, 3, ou 4, à 10. Les moyens proportionnels entre deux nombres sont au contraire compris entre ces nombres : ainsi dans la proportion 1, 2, 4, dont la raison est double, le moyen proportionnel 2 est compris entre 1 et 4.

Des proportions (entre trois nombres).

XXXIII. Thrasyllé compte trois proportions principales entre trois nombres: la proportion arithmétique, la proportion géométrique et la proportion harmonique : la proportion arithmétique est celle dont le terme moyen surpasse autant un terme extrême qu'il est surpassé par l'autre, telle est la proportion 1, 3, 5; la proportion géométrique est celle dont le terme moyen contient autant de fois un terme extrême qu'il est contenu dans l'autre, comme 2 fois, 3 fois, telle est la proportion 3, 6, 12: la proportion harmonique entre trois nombres est celle dans laquelle le nombre moyen surpasse un nombre extrême et est surpassé par l'autre, de la même fraction des nombres extrêmes, comme le tiers, le quart, telle est la proportion des nombres 6, 8, 12.

On peut considérer ainsi chacun des rapports : 12 est le double de 6; 18 en est le triple; 2 en est le quadruple: 9 en est les $\frac{3}{2}$ et 8 en est les $\frac{4}{3}$; 9 est les $\frac{9}{8}$ de 8; 12 est les $\frac{4}{3}$ de 9, les $\frac{3}{2}$ de 8 et le double de 6 : 18 est le double de 9 et 27 est les $\frac{3}{2}$ de 18; $\frac{8}{6}$ donne la consonance de quarte, $\frac{9}{6}$ la consonance de quinte et $\frac{12}{6}$ celle d'octave: $\frac{18}{6}$ donne octave et quinte, car 12 étant le double de 6 fournit la consonance d'octave et 18 étant les $\frac{3}{2}$ de 12 est la consonance de la quinte : on a les nombres relatifs 6, 12, 18;^[24] $\frac{24}{6}$ donne la consonance de double octave; $\frac{9}{8}$ donne le ton et $\frac{12}{9}$ la quarte; $\frac{12}{8}$ donne la quinte et $\frac{18}{9}$ l'octave. La raison $\frac{27}{18}$ donne la quinte.

L'octave 12/6 se compose de la quinte 9/6 et de la quarte 12/9, ou encore de la quinte 12/8 et de la quarte 8/6.^[25] L'octave 18/9 se compose de la quinte 18/12 et de la quarte 12/9;^[26] la raison 24/12 de l'octave se compose de la raison 24/18 de la quarte et de la raison 18/12 de la quinte.^[27] Enfin la raison 9/6 qui est une quinte se compose d'un ton 9/8 et d'une quarte 8/6;^[28] et la raison 12/8 qui est aussi une quinte se compose d'une quarte 12/9 et d'un ton 9/8.^[29]

XXXIV. Le limma est dans le rapport du nombre 26 au nombre 213. Voici comment on trouve ce rapport : on prend deux fois le rapport sesquioctave (on multiplie les deux termes tz du premier par 9, les deux termes du second par W) et on triple les résultats, puis on y joint le rapport sesquiterce. Le rapport sesquioctave étant celui de 9 à 8, on forme avec ces deux nombres deux autres rapports sesquioctaves de la manière suivante: $9 \times 9 = 81$; $9 \times 8 = 72$; et $8 \times 8 = 64$; o 81 est les 9/8 de 72 et 72 est les 9/8 de 61. Si nous triplons ces nombres, nous aurons $81 \times 3 = 243$; $72 \times 3 = 216$ et $61 \times 3 = 183$. Les t, '3 de 183 sont 26. Ce nombre cernpara 213 donne le rapport de limma qui est moindre que $1 + 1/18$.^[30]



De la division du canon

XXXV. La division du canon se fait suivant le quaternaire de la décade qui se compose des nombres 1, 2, 3, 4 et qui embrasse les raisons sesquiterce, sesquialtère, double, triple et quadruple (c'est-à-dire 4/3, 3/2, 2, 3 et 4).

Voici comment Thrasyllé divise ce canon. Prenant la moitié de la corde, il obtient la mèse consonance d'octave qui est en raison double, la tension étant double pour les sons aigus, en sens inverse des mouvements. L'inversion est telle que, quand la longueur totale de la corde est diminuée dans le canon, le ton est augmenté en proportion, et que, quand la longueur est augmentée, le ton décroît d'autant car la demi longueur de la proslambanomène, qui est la mèse par rapport à la corde totale, a une tension double vers l'aigu, et la corde totale qui est double a une tension moitié du côté des sons graves.

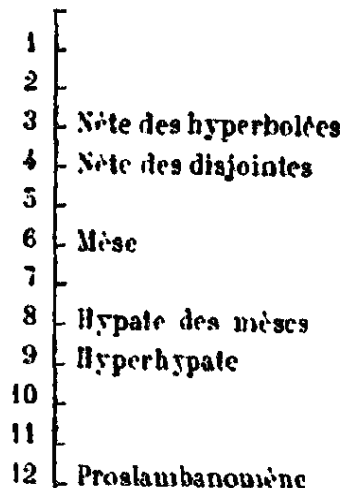
La division de la corde en trois donne l'hypate des mèses et la nète des disjointes, la nète des disjointes est la quinte de la mèse, puisque les divisions sont dans le rapport de 2 à 3, et elle est à l'hypate (des mèses) dans le rapport d'octave, puisque les divisions sont comme 1 est à 2. La nète des disjointes donne avec la proslambanomène la consonance d'octave et quinte, car de la proslambanomène à la mèse il y a une octave et les intervalles étant prolongés jusqu'à la nète des disjointes, il y a une quinte de celle-ci à la mèse.

De la mèse à l'hypate (des mèses) il y a une quarte, et de la mèse à la proslambanomène il y a une octave, l'hypate des mèses donnant la quinte par rapport à la proslambanomène. On obtient la même distance d'octave en ajoutant l'intervalle de l'hypate (des mèses) à la mèse, qui est une quarte, à l'intervalle de la mèse à la nète des disjointes qui est une quinte. Les nombres des mouvements (c'est-à-dire des vibrations) varient en sens inverse de la division des longueurs (c'est-à-dire en sens inverse de la longueur de la partie vibrante).

En divisant la corde en quatre, on obtient la diatone des hypates, nommée aussi

hyperhypate, et la nète des hyperbolées. La nète des hyperbolées est à la nète des disjointes dans le rapport de quarte, à la mèse dans le rapport d'octave, à l'hypate (des mèses) dans le rapport d'octave et quarte, à l'hyperhypate dans le rapport d'octave et quinte et à la proslambanomène dans le rapport de double octave, en allant vers les tons graves.

L'hyperhypate est à la proslambanomène dans le rapport de quarte, en allant vers les tons graves, et à la mèse dans le rapport de quinte, en allant vers les tons aigus; elle est d'un ton au-dessous de l'hypate (des mèses), et l'intervalle de ton de l'hyperhypate à la dernière corde (la proslambanomène) est égal à l'intervalle de quarte de la nète des disjointes à la nète des hyperbolées; et ici encore le nombre des mouvements est en sens inverse de la grandeur des divisions.



Tout cela sera rendu évident par des nombres, car si on divise la longueur du canon en douze parties convenables, la mèse sera donnée par chaque moitié de la corde totale. L'hypate des mèses sera donnée en supprimant quatre parties au commencement du canon et la nète (les disjointes en prenant quatre parties à l'autre extrémité du canon, de sorte qu'il y aura quatre parties entre elles. L'hyperhypate sera donnée en supprimant trois parties au commencement, elle est distante, d'une division, de l'hypate (des mèses). L'hyperbolée (nète des hyperbolées) s'obtient en prenant trois parties de la corde; elle est distante, d'une division, de la disjointe (nète des disjointes).

Entre l'hyperhypate et la nète des hyperbolées, il y a six divisions, trois au-dessus de la mèse, et trois au-dessous et ainsi le partage est complet. En effet, du commencement du canon à l'hyperhypate on compte trois parties du canon, de là à l'hypate des mèses, une partie, et de celle-ci à la mèse, deux parties. De la mèse à la nète des disjointes, il y a deux parties, de là à l'hyperbolée une partie, enfin de celle-ci à la fin du canon trois parties. Toutes les divisions sont donc au nombre de douze.

La raison de la nète des disjointes à la nète des hyperbolées sera $4/3$, c'est le rapport sesquiterce qui donne la consonance de quarte. Le rapport de la mèse à la nète des hyperbolées sera $6/3 = 2$ qui est la consonance d'octave. La raison de l'hypate des mèses à la même nète sera $8/3$, consonance d'octave et quarte. La raison de l'hyperhypate à la nète sera $9/3 = 3$, consonance d'octave et quinte et le rapport de la proslambanomène à la même est $12/3 = 4$, consonance de double octave. La raison de la mèse à la nète des disjointes égale $3/2$, c'est le rapport sesquialtère, consonance de quinte. L'intervalle de l'hypate (des mèses) à la nète des disjointes égale $8/4 = 2$, c'est l'octave. Celui de l'hyperhypate à la même nète égale $9/4$, c'est la double quinte (quinte de la quinte). Pour la proslambanomène tout entière, le rapport est $12/4 = 3$,

consonance d'octave et quinte.

Le rapport de l'hypate des mèses à la mèse est $8/6 = 4/3$, c'est la quarte. Celui de l'hyperhypate à la mèse est $9/6 = 3/2$, il donne la quinte, celui de la proslambanomène tout entière à la mèse est $12/6 = 2$, c'est l'octave. L'hyperhypate est à l'hypate des mèses comme 9 est à 8, c'est la raison d'un ton. Le rapport de la proslambanomène entière à l'hypate des mèses est $12/8 = 3/2$ (c'est la quinte). La même corde est à l'hyperhypate comme 12 est à 9, ce rapport égale $4/3$, consonance de quarte.

XXXVI. Les nombres de vibrations sont soumis à la proportion inverse, puisqu'on trouve condensés dans le canon le ton dont la raison est sesquioctave ($9/8$), la consonance de quarte dont la raison est sesquiterce ($4/3$), et la consonance de quinte dont la raison est sesquialtère ($3/2$).

La raison $3/2$ de la quinte surpasse la raison $4/3$ de la quarte, d'un ton qui est égal à $9/8$: prenons par exemple le nombre 6 qui est divisible par 2 et par 3, les $4/3$ de 6 valent 8, et les $3/2$ de 6 valent 9, or 9 est les $9/8$ de 8. On a la suite 6, 8, 9, et l'excès de l'intervalle $3/2$ sur l'intervalle $4/3$ est $9/8$. Mais l'intervalle $4/3$ de la quarte se compose de deux fois $9/8$ et d'un limma, les intervalles doivent donc être remplis par des tons et des limmas. Celle insertion commence à la nète des hyperbolées ; en effet si nous prolongeons celle-ci de la huitième partie de sa longueur, nous aurons la diatone des hyperbolées, qui est plus grave d'un ton.

Si nous prolongeons la diatone de la huitième partie de sa longueur, nous aurons la trite des hyperbolées, qui est plus grave d'un ton que la diatone: le reste de l'intervalle jusqu'à la nète des disjointes sera le limma, complément de la consonance de quarte par rapport à la nète de hyperbolées. Si au contraire nous diminuons d'un neuvième la longueur de la nète des disjointes, nous aurons la chromatique des hyperbolées, qui est d'un ton plus aigu que la nète des disjointes; celle-ci augmente d'un huitième donnera la paranète des disjointes, qu'on appelle aussi diatone et nète des conjointes et qui est plus grave d'un ton que la nète des disjointes.

Que si nous prolongeons la nète des conjointes d'un huitième de sa longueur, nous aurons la trite des disjointes, plus grave d'un ton, et qui est la même que la diatone de conjointes. Et le reste de l'intervalle jusqu'à la paramèse sera le limma. Si nous prolongeons la paramèse d'un huitième, nous aurons la mèse, plus grave d'un ton, et qui complète l'octave. Si nous diminuons la mèse de la même manière (en retranchant un neuvième de sa longueur), nous aurons la paramèse ou chromatique des conjointes, plus aigu d'un ton que la mèse; en retranchant de celle-ci la neuvième partie, nous aurons la chromatique des disjointes.

La mèse augmentée d'un huitième donnera la diatone des mèses, plus grave d'un ton que la mèse; la diatone des mèses, augmentée d'un huitième, donne la parhypate des mèses, plus grave d'un ton, et de là à l'hypate des mèses il reste un limma pour le complément de la consonance de quarte avec la mèse. Si de l'hypate des mèses on retranche un neuvième, on a la chromatique des mèses, plus aiguë d'un ton, et, si au contraire on l'augmente d'un huitième on a l'hyperhypate, laquelle augmentée d'un huitième donne la parhypate des hypates.

Réciproquement, si l'on divise en 9 parties la longueur de la proslambanomène, et qu'on retranche une de ces parties, à l'inverse de ce que nous avons fait pour les tons aigus, on aura l'hypate des hypates, plus aigu d'un ton que la proslambanomène et terminant le tétracorde des hypates par le rapport de limma quelle a avec la parhypate. C'est ainsi que se complète tout le système immuable du genre diatonique et du genre chromatique.

Quant au système enharmonique, il se déduit du système diatonique en supprimant les

diatoniques que nous faisons entendre deux fois dans chaque octave et en divisant en deux les demi-tons.

Nous trouverons les résultats en nombres en commençant par la nète des hyperbolées que nous supposerons composée de 384 parties, dont on prend successivement les $\frac{9}{8}$ et les autres fractions que nous avons indiquées. La proslambanomène en vaudra 10368.^[31] Il est superflu d'exposer cela en détail, parce que quiconque aura compris ce qui précède fera facilement le calcul.

Telle est la division du canon donnée par Thrasyllus. Quand nous exposerons les éléments de l'astronomie nous montrerons comment tout cela s'applique au système du monde. Revenons maintenant à l'explication des autres moyennes et des nombres moyens, puisque, comme nous l'avons dit, toute moyenne est un nombre moyen, mais que tout nombre moyen n'est pas une moyenne. C'est donc en tant que la moyenne est un nombre moyen, qu'il faut entendre ce qui suit, des moyennes et des nombres moyens.

Du quaternaire et de la décade.

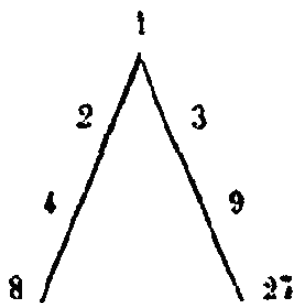
XXXVII. Puisque, comme nous l'avons montré, tous les rapports des consonances se trouvent dans le quaternaire de la décade, c'est de ces nombres que nous avons à parler. La décade constitue en effet le quaternaire, puisque la somme des nombres 1, 2, 3, 4 est 10. Or, ces nombres contiennent la consonance de quarte dans le rapport sesquiterce ($\frac{4}{3}$), celle de quinte dans le rapport sesquialtère ($\frac{3}{2}$), celle d'octave dans la raison double, et celle de double octave dans la raison quadruple; et par là est complété le diagramme immuable.

Combien il y a de quaternaire

XXXVIII. L'importance du quaternaire qu'on obtient par addition (c'est-à-dire 1, 2, 3, 4) est grande en musique, parce qu'on y trouve toutes les consonances. Mais ce n'est pas seulement pour cela que tous les Pythagoriciens lui font l'honneur du premier rang : c'est aussi parce qu'il semble renfermer toute la nature de l'univers. C'est pour cette raison que la formule de leur serment était : « J'en jure par celui qui a transmis dans nos âmes le quaternaire, source de la nature éternelle^[32] ». Celui qui a transmis, c'est Pythagore, ce qui a été dit de la tétractys paraît venir en effet de ce philosophe.

Le premier quaternaire est celui dont nous venons de parler : il est formé, par addition, des premiers nombres.

Le second est formé, par la multiplication, de nombres pairs et de nombres impairs, à partir de l'unité, de tous ces nombres, l'unité est le premier, parce que, comme nous l'avons dit, elle est le principe de tous les pairs, de tous les impairs et de tous les pairs-impairs, et que son essence est simple. Viennent ensuite trois nombres tant dans la série paire que dans la série impaire. Ils admettent la réunion du pair et de l'impair, parce que tout nombre n'est pas seulement pair ou seulement impair. C'est pour cela que dans la multiplication, on prend deux quaternaires, l'un pair, l'autre impair : le pair dans la raison double, le premier des pairs étant 2 qui provient de l'unité doublée; l'impair dans la raison triple, le premier des impairs étant 3 qui provient de l'unité triplée, en sorte que l'unité qui est paire et impaire tout à la fois est commune à l'un et à l'autre. Le second nombre dans les pairs et doubles est 2, dans les impairs et triples, 3. Le troisième dans l'ordre des pairs est 4, dans la série des impairs, 9. Le quatrième parmi les pairs est 8, parmi les impairs, 27.



C'est dans ces nombres que se trouvent les raisons des consonances les plus parfaites; le ton y est même compris. Or l'unité contient la raison de principe, de terme et de point. Les seconds 2 et 3 ont la raison latérale, étant incomposés, premiers et mesurés seulement par l'unité, et par conséquent linéaires. Les troisièmes termes, 4 et 9, ont la puissance de la surface carrée, étant également égaux c'est-à-dire des nombres carrés. Les quatrièmes termes, 8 et 27, ont la puissance du solide cubique, étant également égaux également c'est-à-dire des nombres cubiques; en sorte qu'à l'aide des nombres de ce quaternaire, l'accroissement va du terme et du point jusqu'au solide. En effet, après le terme et le point vient le côté, puis la surface et enfin le solide. C'est avec ces nombres que Platon constitue l'âme, dans le *Timée*. Le dernier de ces sept nombres est égal à la somme de tous les précédents, car on a $1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9 = 27$.

Il y a donc deux quaternaires de nombres, l'un qui se fait par addition, l'autre par multiplication; et ces quaternaires renferment les raisons musicales, géométriques et arithmétiques dont se compose l'harmonie de l'univers.

Le troisième quaternaire est celui qui, selon la même proportion, embrasse la nature de toutes les grandeurs: car ce que fait l'unité dans le précédent quaternaire, le point le fait dans celui-ci, et ce que font dans le précédent les nombres 2 et 3 qui ont la puissance latérale (ou linéaire), la ligne, par sa double forme, droite ou circulaire, le fait dans celui-ci, la ligne droite répondant au nombre pair, parce qu'elle a deux termes, et la circulaire à l'impair, parce qu'elle est comprise dans une seule ligne sans terme.

Et ce que sont dans le précédent les nombres 4 et 9 qui ont la puissance de la surface, les deux espèces de surfaces, la surface plane et la surface courbe, le sont dans celui-ci. Enfin ce que sont dans le précédent les nombres 8 et 27 qui ont la puissance du cube, et dont l'un est pair et l'autre impair, le solide le fait dans celui-ci, étant de deux espèces, l'une à surface courbe, comme la sphère et le cylindre, l'autre à surface plane, comme le cube et la pyramide. Le troisième quaternaire est donc celui qui a la propriété de constituer toute grandeur, par le point, la ligne, la surface et le solide.

Le quatrième quaternaire est celui des corps simples, le feu, l'air, l'eau et la terre, et il offre la même proportion que le quaternaire des nombres : car ce qu'est dans celui-ci l'unité, le feu l'est dans celui-là, l'air répond au nombre 2, l'eau au nombre 3, la terre au nombre 4; telle est, en effet, la nature des éléments selon la ténuité ou la densité de leurs parties, en sorte que le feu est à l'air comme 1 est à 2, l'eau comme 1 est à 3, et à la terre comme 1 est à 4. Les autres rapports ont aussi égaux (c'est-à-dire que l'air est à l'eau comme 2 est à 3, et ainsi des autres).

Le cinquième quaternaire est celui des figures des corps simples, car la pyramide est la figure du feu, l'octaèdre la figure de l'air, l'icosaèdre la figure de l'eau, le

cube la figure de la terre.

Le sixième est celui des choses engendrées, la semence étant analogue à l'unité et au point supposons l'accroissement en longueur, c'est analogue au nombre 2 et à la ligne; supposons encore l'accroissement en largeur, c'est analogue au nombre 3 et à la surface; supposons enfin l'accroissement en épaisseur, c'est analogue au nombre 4 et au solide.

Le septième quaternaire est celui des sociétés. L'homme en est le principe et pour ainsi dire l'unité. La famille répond au nombre 2, le bourg au nombre 3, la cité au nombre 4; car c'est de ces éléments que se compose la nation.

Tous ces quaternaires sont matériels et sensibles.

Le huitième contient les facultés par lesquelles nous pouvons porter des jugements sur les précédents et qui sont en partie intellectuelles, savoir : la pensée, la science, l'opinion et le sens. Et certes, la pensée doit être assimilée à l'unité dans son essence; la science est comme le nombre 2, parce qu'elle est la science de quelque chose; l'opinion est comme le nombre 3, car elle tient le milieu entre la science et l'ignorance; enfin le sens est comme le nombre 4, car il est quadruple, le tact étant commun à tous, tous les sens agissant par le contact.

Le neuvième quaternaire est celui dont se compose l'animal, corps et âme, l'âme ayant trois parties, la raisonnable, l'irascible, la concupiscible; la quatrième partie est le corps dans lequel l'âme réside.

Le dixième quaternaire est celui des saisons de l'année par la succession desquelles toutes choses prennent naissance, savoir : le printemps, l'été, l'automne, l'hiver.

Le onzième est celui des âges: l'enfance, l'adolescence, la virilité, la vieillesse.

Il y a donc onze quaternaires. Le premier est celui des nombres qui se forment par addition, le second est celui des nombres qui se forment par multiplication; le troisième est celui des grandeurs; le quatrième, celui des corps simples; le cinquième, celui des figures; le sixième, celui des choses engendrées; le septième, celui des sociétés; le huitième, celui des facultés du jugement; le neuvième, celui des parties de l'animal; le dixième, celui des saisons et le onzième, celui des âges. Ils sont proportionnels entre eux : car ce qu'est l'unité dans le premier et le second quaternaire, le point l'est dans le troisième; le feu dans le quatrième; la pyramide, dans le cinquième; la semence, dans le sixième; l'homme, dans le septième: la pensée, dans le huitième et ainsi des autres qui suivent la même proportion.

Ainsi le premier quaternaire est 1, 2, 3, 4. Le second est l'unité, le côté, le carré, le cube. Le troisième est le point, la ligne, la surface, le solide. Le quatrième est le feu, l'air, l'eau, la terre. Le cinquième est la pyramide, l'octaèdre, l'icosaèdre, le cube. Le sixième est la semence, la longueur, la largeur, la hauteur. Le septième est l'homme, la famille, le bourg, la cité. Le huitième est la pensée, la science, l'opinion, le sens. Le neuvième est la partie raisonnable de l'âme, l'irascible, la concupiscible et le corps. Le dixième est le printemps, l'été, l'automne, l'hiver. Le onzième est l'enfant, l'adolescent, l'homme fait, le vieillard. Et le monde parfait qui résulte de ces quaternaires est arrangé géométriquement, harmoniquement et arithmétiquement, comprenant en puissance toute nature du nombre, toute grandeur et tout corps, soit simple, soit composé. Il est parfait, parce que toutes choses en sont des parties, et que lui-même n'est partie d'aucun autre. C'est pourquoi les Pythagoriciens se servaient du serment dont nous avons rapporté la formule

et par lequel toutes choses sont assimilées au nombre.

De la décade.

XXXIX. Les Pythagoriciens n'ont pas été moins sages en ramenant tous tes nombre la décade, puisqu'au delà de dix nous ne comptons aucun nombre : dans l'accroissement nous revenons aux nombres 1, 2, 3, et ainsi de suite. La décade se trouve d'ailleurs dans le quaternaire, puisque la somme des quatre nombres 1, 2, 3, 4 est égale à 10, d'où il suit que les nombres les plus forts, peuvent être considérés comme ayant leur raison dans le quaternaire.

Propriétés des nombres contenus dans la décade.

XL. L'unité est le principe de toutes choses et ce qu'il y a de plus dominant : c'est d'elle que tout émane et elle n'émane de rien. Elle est indivisible et elle est tout en puissance. Elle est immuable et ne sort jamais de sa propre nature par la multiplication ($1 \times 1 = 1$). C'est en elle que demeure tout ce qui est intelligible et ne peut être engendré la nature des idées, Dieu lui-même, l'âme, le beau et le bon, et toute essence intelligible, telle que la beauté elle-même, la justice elle-même, l'égalité elle-même; car nous concevons chacune de ces choses comme étant une et comme existant par elle-même.

XLI. Le premier accroissement, le premier changement de l'unité se fait par le doublement de l'unité qui devient 2, en quoi l'en voit la matière et tout ce qui est sensible, la génération et le mouvement, la multiplication et l'addition, l'union et le rapport d'une chose à une autre.

XLII. Le nombre 2 ajouté à l'unité produit 3 qui est le premier nombre ayant un commencement, un milieu et une fin. C'est pourquoi ce nombre est le premier auquel on puisse appliquer le mot *multitude*,^[33] car des nombres moindres on ne dit pas multitude, mais un ou l'un et l'autre; tandis que de trois, on dit multitude. Nous faisons *trois* libations pour montrer que nous demandons *tout* ce qui est bien. Nous appelons trois fois malheureux ceux qui sont au comble de l'infortune, et trois fois heureux ceux qui sont au comble du bonheur.

Le nombre ternaire représente aussi la première nature du plan car il en est comme l'image, la première forme du plan étant le triangle. C'est pour cela qu'il y a trois genres de triangle, l'équilatéral, l'isocèle et le scalène: et qu'il y a aussi trois espèces d'angles, le droit dont la propriété est d'être unique, bien défini et composé de l'égal et du semblable, ce qui fait que tous les angles droits sont égaux entre eux, tenant le milieu entre l'angle aigu et l'angle obtus, plus grands que l'un et plus petits que l'autre. Tous les autres angles sont en nombre infini et indéterminé, car ils sont ou plus grands ou plus petits. Le nombre 3 ajouté à l'unité et à 2 donne 6 qui est le premier nombre parfait, c'est-à-dire égal à la somme de ses parties aliquotes. Ce nombre parfait ajouté au premier nombre carré 4, donne la décade.

XLIII. Le nombre quatre est l'image du solide, et c'est le premier nombre carré parmi les nombres pairs; il complète toutes les consonances, comme nous l'avons montré.^[34]

XLIV. Le nombre 5 est la moyenne de (deux nombres dont la somme est) la décade; car si, par l'addition de deux nombres quelconques, on obtient 10, la moyenne de ces nombres sera 5 selon la proportion arithmétique. Ainsi, par exemple, si vous additionnez 9 et 1, 8 et 2, 7 et 3, 6 et 4, la somme sera toujours 10 et la moyenne en proportion arithmétique sera 5, comme le montre le diagramme dans lequel toute addition de deux nombres (opposés) donne 10, la moyenne en proportion arithmétique étant 5 qui surpasse l'un des extrêmes et est surpassé par l'autre, de la même différence.

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Ce nombre est aussi le premier qui embrasse les deux espèces de nombres, le pair et l'impair, savoir 2 et 3, car l'unité n'est pas un nombre.

XLV. Le nombre six est un nombre parfait parce qu'il est égal à la somme de ses parties aliquotes, comme on l'a montré. C'est pour cela qu'on l'a appelé mariage, parce que l'œuvre du mariage produit des enfants semblables à leurs parents.^[35] La médiété harmonique se constitue d'après ce premier nombre, car, si l'on en prend les quatre tiers 8 et le double 12, on aura la proportion harmonique des nombre 6, 8, 12; 8 surpasse l'un des extrêmes 6 et est surpassé par l'autre extrême 12, de la même fraction des extrêmes, qui est un tiers des extrêmes. Il donne aussi la médiété arithmétique en prenant 9 qui en est les $3/2$ et 12 qui en est le double, car 9 surpasse un des extrêmes et est surpassé par l'autre, de la même quantité 3. Enfin, il produit la proportion géométrique quand, étant placé au milieu, on met d'un côté la moitié 3 et de l'autre le double 12, ce qui donne la proportion géométrique des nombres 3, 6, 12 : car alors 6 contient un des extrêmes 3 et est contenu dans l'autre, dans le même rapport 2.

XLVI. Un autre nombre de la décade, le nombre sept, est doué d'une propriété remarquable : c'est le seul qui n'engendre aucun nombre compris dans la décade et qui n'est engendré par aucun d'eux, ce qui a porté les Pythagoriciens à lui donner le nom de Minerve, parce que cette déesse n'a point été engendrée par une mère et n'a point été mère; elle ne provient d'aucune union et n'a été unie personne. Parmi les nombres compris dans la décade, les uns engendrent et sont engendrés, par exemple, 4 multiplié par 2 engendre 8, et il est engendré par 2. D'autres sont engendrés mais n'engendrent pas, comme 6, qui est le produit de 2 par 3, mais qui n'engendre aucun des nombres de la décade; d'autres engendrent mais ne sont point engendrés, comme 3 et qui ne sont engendrés par aucune combinaison de nombres, mais qui engendrent; savoir : 3 produit 9, et, multiplié par 2, produit 6, et 5 multiplié par 2 produit 10.

Sept est le seul nombre qui, multiplié par un autre, n'engendre aucun de ceux qui sont dans la décade, et qui n'est produit par la multiplication d'aucun nombre. Platon, dans le *Timée*, imitant la nature, constitue l'âme de 7 nombres. Le jour et la nuit, dit Posidonius, ont la nature du pair et de l'impair... Le mois se compose de quatre semaines *quatre fois sept* jours, dans la première semaine, la lune paraît divisée en deux ; dans la seconde, elle devient pleine: dans la troisième, elle est divisée de nouveau, et, dans la quatrième, elle revient à la rencontre du soleil pour commencer un nouveau mois et croître la semaine suivante.

C'est en sept semaines que le fœtus paraît arriver à sa perfection, comme Empédocle le dit, à mots couverts, dans son *Expiations*. Quelques-uns pensent que le fœtus mâle met cinq semaines à se perfectionner. C'est aussi dans le septième mois que les fœtus naissent viables. C'est dans le septième mois à partir de leur naissance que les enfants font leurs dents, et c'est à l'âge de sept ans qu'ils perdent leurs premières dents: c'est dans la seconde période de sept ans que la semence et la puberté font leur apparition, et le plus souvent c'est dans la troisième période que la barbe commence à

croître. C'est alors aussi que l'homme acquiert sa taille, mais ce n'est que dans la quatrième période qu'il acquiert son embonpoint.

Il faut sept jours pour le diagnostic des maladies, et dans toutes les fièvres périodiques, même dans la fièvre tierce et dans la fièvre quarte, le septième jour est le plus grave. D'une conversion tropicale du soleil à l'autre il y a sept mois, et les planètes sont au nombre de sept. Pareillement, d'un équinoxe à l'autre, on compte sept mois.^[36] La tête a sept ouvertures. Il y a sept viscères, le cœur, le poumon, le foie, la rate, les deux reins et l'intestin. Hérophile dit que l'intestin de l'homme a vingt-huit coudées de long, c'est-à-dire quatre fois sept coudées. Enfin, dans la plupart des détroits, le flux et le reflux se font sentir sept fois par jour.^[37]

XLVII. Le nombre huit qui est le premier cube se compose de l'unité et du septenaire. Quelques-uns disent qu'il y a huit dieux maîtres de l'univers et c'est aussi ce qu'on voit dans les serments d'Orphée

Par les créateurs des choses à jamais immortelles
le feu et l'eau, la terre et le ciel, la lune
et le soleil, le grand Phanès et la nuit noire.

Et Évandré rapporte qu'en Egypte on trouve sur une colonne une inscription du roi Saturne et de la reine Rhéa : « Le plus ancien de tous, le roi Osiris, aux dieux immortels, à l'esprit, au ciel et à la terre, à la nuit et au jour, au père de tout ce qui est et de tout ce qui sera et à l'Amour, souvenir de la magnificence de l'ordre de sa vie. » Timothée rapporte aussi le proverbe : huit est tout, parce que les sphères du monde qui tournent autour de la terre sont au nombre de huit. Et, comme dit Eratosthène:

« Ces huit sphères s'harmonisent ensemble en faisant leurs révolutions autour de la terre ».

XLVIII. Le nombre neuf est le premier carré parmi les impairs : les deux premiers nombres sont 2 et 3, l'un pair, l'autre impair, qui donnent les deux premiers carrés, et 9.

XLIX. La décade complète la série des nombres, comprenant en elle-même la nature du pair et de l'impair de ce qui est en mouvement et de ce qui est immuable, du bien et du mal. Archytas, dans son livre *Sur la Décade*, et Philotius, dans son traité *De la nature*, se sont longuement étendus sur ce sujet.

Des médiétés.

L Revenons maintenant aux proportions et aux médiétés. Il y a plusieurs médiétés : la géométrique, l'arithmétique, l'harmonique, la sous-contraire, la cinquième et la sixième, auxquelles il faut ajouter six autres qui sont sous-contraires. Or, de toutes ces médiétés, Adraste dit que la géométrique est la seule qui soit une vraie proportion et que c'est la première, car toutes les autres en ont besoin, tandis qu'elle-même n'a aucun besoin des autres, comme il le montre ensuite. Il dit que les autres médiétés reçoivent de quelques-uns le nom plus général de proportion.

Parmi les proportions proprement dites, c'est-à-dire géométriques, les unes ont les termes et les rapports rationnels, comme la proportion 12, 6, 3, dont les termes sont en raison double, ou toute autre proportion numérique: les autres ont des termes inexprimables et irrationnels grandeurs, poids, temps ou autres, en raison double, triple, et en général multiple ou sesquipartielle. Dans la médiété géométrique, le moyen terme, comme nous l'avons dit, est contenu dans un extrême et contient l'autre dans le même rapport ($a : b = b : c$). Dans la médiété arithmétique, le moyen terme est

surpassé par un extrême et surpasse l'autre, du même nombre ($a - b = b - c$). Enfin, dans la médiété harmonique, le moyen terme est surpassé par un extrême et surpasse l'autre de la même partie des extrêmes.^[38]

LI. Adraste montre que la raison d'égalité est la première en ordre, et que c'est l'élément de toutes les raisons dont nous avons parlé précédemment et de toutes les proportions qu'elles donnent. Car c'est d'elle que naissent toutes les autres et c'est en elle qu'elles se résolvent toutes.

Eratosthène dit aussi que toute raison s'accroît ou par un intervalle ou par les termes : or l'égalité a cela de propre qu'elle n'est susceptible d'aucun intervalle, et il est bien évident qu'elle ne peut s'accroître que par les termes. Prenant donc trois grandeurs avec la proportion qui s'y trouve, nous en combinerons les termes et nous montrerons que toutes les mathématiques consistent dans la proportion de certaines quantités et que l'égalité en est le principe et l'élément.

Eratosthène dit qu'il omettra les démonstrations mais Adraste montre clairement que « trois termes quelconques étant donnés en proportion continue, si on en prend trois autres formés de ceux-là, l'un égal au premier, un autre composé du premier et du second, un autre enfin composé du premier, de deux fois le second et du troisième, ces nouveaux termes seront encore en proportion continue^[39] ».

De la proportion dont les termes sont égaux, il naît ainsi une proportion en raison double, de la proportion en raison double naît la proportion en raison triple, celle-ci produit la proportion en raison quadruple et ainsi de suite, selon les autres multiples. Soit, par exemple, en trois termes égaux les plus petits possibles, c'est-à-dire en trois unités, la proportion d'égalité (1, 1, 1); si l'on prend trois autres termes de la manière qui a été indiquée, l'un formé du premier seul, l'autre composé du premier et du second, le dernier composé du premier, de deux fois le second et du troisième, on aura les termes 1, 2, 4, qui sont en raison double.

Avec ceux-ci, formons-en de nouveaux par la même méthode, le premier sera égal au premier, le second sera composé du premier et du second, le troisième le sera du premier, de deux fois le second et du troisième, et les termes seront 1, 3, 9, en raison triple. Par la même méthode, on formera avec ces nombres les termes 1, 4, 16, qui sont en raison quadruple, et avec ceux-ci, les termes 1, 5, 25, en raison quintuple, et ainsi à l'infini, en suivant l'ordre des multiples.

1	1	1
1	2	4
1	3	9
1	4	16
1	5	25
1	6	36
1	7	49
1	8	64
1	9	81
1	10	100

Si maintenant on dispose inversement les proportions multiples et qu'on additionne les termes de la même manière, on obtiendra des proportions en raison sesquipartielle: les doubles donneront, en effet le rapport hémiole ou sesquialtère ($1 + \frac{1}{2}$), les triples donneront le rapport épitríte ou sesquitierce ($1 + \frac{1}{3}$), les quadruples le rapport sesquiquarte, ($1 + \frac{1}{4}$), et ainsi de suite. Soit donnée, par exemple, la proportion en raison double, à trois termes, et soit le plus grand terme placé le premier 4, 2, 1;

avec ces termes formons-en de nouveaux selon la méthode indiquée, nous en déduirons 4, 6, 9, qui est une proportion continue dont le rapport est sesquialtère.

Soient de même les trois termes en proportion triple 9, 3, 1: nous en déduirons de la même manière les trois termes proportionnels en raison sesquitière 9, 12, 16. Avec les quadruples, nous obtiendrons les termes en raison sesquiquarte 16, 20, 25, et ainsi de suite; nous aurons toujours le rapport sesquipartiel $(1 + 1/n)$ correspondant au multiple (n) .^[40]

4	2	1		4
6	9			
9	3	1		9
12	16			
16	4	1	16	20
25				
36	6	1	25	30
36				
49	7	1	36	42
49				
64	8	1	49	56
64				
81	9	1	64	72
81				
36	6	1	81	90
100				

De même, les rapports sesquipartiels $(1 + 1/n)$ nous donnent les rapports épimères $((1 + m/(m+n)))$ et les rapports multisuperpartiels $(a + 1/n)$; et de nouveau les rapports épimères $((1 + m/(m+n)))$ nous donnent d'autres rapports épimères et des rapports polyépimères $((a + m/(m+n)))$. Nous devons omettre la plupart de ces rapports comme peu nécessaires; il nous faut cependant en considérer quelques-uns. Avec la proportion de raison sesquialtère $(1 + 1/2)$, en commençant par le plus grand terme, on obtient par la méthode indiquée une proportion dont la raison épimère est $1 + 2/3$; ainsi la proportion 9, 6, 4 donne par la méthode d'Adraste 9, 15, 25; et, en commençant par le plus petit terme on obtient la proportion dont la raison multisuperpartielle est $2 + 1/2$: on donne 4, 6, 9, on en conclut par la même méthode 4, 10, 25.

Et de la proportion dont le rapport est sesquitière $(1 + 1/3)$, en commençant par le plus grand terme, on tirera la proportion de raison épimère $(1 + 3/4)$. On a en effet, la proportion 16, 12, 9, qui donne 16, 28, 49, et en commençant par le plus petit terme, on aura la proportion de raison multisuperpartielle $2 + 1/3$ dans ces termes 9, 21, 49. Avec la proportion de raison sesquiquarte $(1 + 1/4)$, en commençant par le plus grand terme, on trouvera la proportion de raison épimère $1 + 4/5$. La proportion 25, 20, 16, donne, en effet, 25, 45, 81; et, en commençant par le plus petit terme, on en déduira la proportion de raison multisuperpartielle $2 + 1/4$. Ainsi, des termes 16, 20, 25, on déduit 16, 36, 81; et on peut continuer ainsi à l'infini, en sorte qu'au moyen de ces proportions, on peut en former d'autres par la même méthode. Nous n'avons pas besoin de développer davantage ce sujet.

LII. De même que toutes ces proportions et toutes leurs raisons se composent de la première raison d'égalité, de même aussi elles se résolvent définitivement en elle. En effet, si une proportion quelconque, à trois termes inégaux, étant donnée, nous soustrayons du moyen terme le plus petit, et du plus grand le plus petit et deux fois le moyen diminué du plus petit, si ensuite nous mettons en ordre les termes ainsi

obtenus, nous aurons pour premier terme le même plus petit, puis pour second l'excès du moyen sur le plus petit et enfin pour troisième ce qui est resté du plus grand, la proportion qui résultera de cette décomposition sera celle-là même qui a donné naissance à la nouvelle proposition. Quand on aura répété cette décomposition, on arrivera à la proportion d'égalité qui est la première origine de toutes les proportions et qui elle-même ne peut se résoudre en aucune autre, mais seulement dans la raison d'égalité.

Ératosthène démontre que toutes les figures résultent de quelque proportion, que pour les construire il faut partir de l'égalité et qu'elles se résolvent en égalité. Il n'est pas nécessaire de nous étendre davantage sur ce sujet.

Des Figures

LIII. Nous trouverons les mêmes résultats dans les figures dont la première est le point, qui est un signe sans étendue, sans dimension, étant le terme d'une ligne et tenant la même place que l'unité (dans les nombres). La grandeur qui n'a qu'une dimension et n'est divisible que d'une manière, et la ligne, qui est une longueur sans largeur; la grandeur tendue dans deux sens, est une surface, elle a longueur et largeur; la grandeur ayant trois dimensions, est le solide, qui a longueur, largeur et hauteur. Or, le solide est compris et limité entre des surfaces, la surface est limitée par des lignes et la ligne limitée par des points.

Parmi les lignes, la ligne droite est celle qui est directe et comme tendue, c'est celle qui, entre deux points donnés, est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités et qui est étendue également entre tous ses points. La ligne courbe est celle qui n'a pas cette propriété. La même différence se retrouve entre le plan et la surface courbe. En effet, la surface est le terme apparent de tout corps solide, suivant deux dimensions. longueur et largeur. Or le plan est une surface droite telle que si une ligne droite la touche en deux points, elle coïncide avec elle dans toute sa longueur. Des lignes droites sont parallèles quand, prolongées à l'infini sur un même plan, elles ne se rencontrent pas et gardent toujours entre elles la même distance.

Les figures planes sont celles dont toutes les lignes sont dans un même plan. Les figures rectilignes sont celles qu'entourent des lignes droites et les figures non rectilignes n'ont pas cette propriété. Parmi les figures planes et rectilignes celles qui sont comprises entre trois côtés sont appelées trilatérales. Celles de quatre côtés sont appelées quadrilatères: on appelle polygones celles qui sont comprises entre un plus grand nombre de lignes droites.

Parmi les quadrilatères, ceux qui ont les côtés opposés parallèles sont appelés parallélogrammes et les parallélogrammes qui ont les angles droits sont appelés rectangles. Les angles sont droits quand une ligne droite en rencontre une autre en formant avec elle deux angles adjacents égaux. Chaque parallélogramme rectangle est dit proprement compris sous les côtés qui forment l'angle droit, et parmi ces rectangles ceux qui ont les quatre côtés égaux sont appelés proprement carrés. Ceux qui ne sont pas dans ce cas sont appelés promèques.^[41]

LIV. Parmi les solides, les uns sont compris sous des parallélogrammes plans, au nombre de 6, et sont appelés parallélépipèdes. D'autres sont compris sous des rectangles et sont appelés parallélépipèdes rectangles. De ceux-ci, les uns sont équilatéraux dans tous les sens, c'est-à-dire que la longueur, la largeur et la hauteur sont égales et qu'ils sont compris sous des carrés égaux, ils sont appelés cubes. Ceux qui ont la longueur et la largeur égales, c'est-à-dire les bases carrées, mais dont la hauteur est moindre, sont appelés plinthes ou carreaux. Ceux dont la longueur est égale à la largeur, mais dont la hauteur est plus grande, sont appelés docides ou poutrelles.

Enfin, ceux qui ont les trois dimensions inégales, sont appelés parallélépipèdes scalènes.

Propriétés des médiétés.

Nous avons maintenant à parler plus en détail des médiétés dont la théorie est indispensable pour comprendre les écrits de Platon. Il y a médiété quand, entre deux termes homogènes inégaux, on prend un autre terme homogène tel que l'excès du premier, qui est en même temps le plus grand, sur ce terme moyen, soit à l'excès de celui-ci sur le plus petit, comme le premier terme est à lui-même ou à l'un des deux autres, ou bien comme le plus petit est à l'un des deux autres.

LV. En particulier, la médiété arithmétique est celle où le moyen terme surpasse un extrême et est surpassé par l'autre d'un même nombre, comme dans la proportion 3, 2, 1. En effet, le nombre 2 surpasse 1 d'une unité et est aussi surpassé par 3 d'une unité. Ce moyen terme a la propriété d'être la demi-somme des extrêmes; en effet, $3 + 1 = 4$ qui est le double du terme moyen 2.

LVI. La médiété géométrique, appelée aussi proprement proportion, est celle dont le moyen terme surpasse un extrême et est surpassé par l'autre dans la raison, multiple ou superpartielle (du premier terme au second ou du second au troisième), comme la proportion 1, 2, 4. En effet, 4 est le double de 2, et 2 est le double de l'unité; et de même la différence $2 - 1$ est 1, et la différence $4 - 2$ est 2. Ces nombres comparés ensemble sont donc en raison double. Cette médiété jouit de la propriété, que le produit des extrêmes est égal au carré du moyen terme ainsi, dans la proportion précédente, le produit des extrêmes est, car $1 \times 4 = 4$, et le carré de 2 est aussi 4, car $2 \times 2 = 4$. Donc le produit des extrêmes est égal au carré du moyen terme.^[42]

LVII. Il y a proportion harmonique quand, étant donnés trois termes, le premier est au troisième dans le même rapport que l'excès du premier (sur le second) est l'excès du second (sur le troisième). Tels sont les nombres 6, 3, 2: l'extrême 6 est le triple de 2, et l'excès de 6 sur 3 est 3, qui est le triple de l'unité, laquelle est l'excès de 3 sur 2. Cette proportion jouit de la propriété, que le moyen terme surpasse un extrême et est surpassé par l'autre de la même partie des extrêmes. Ainsi, dans la proportion formée des nombres 2, 3, 6, l'extrême 6 surpasse 3 de la moitié de 6, et l'autre extrême 2 est surpassé par 3 de la moitié de 2. De plus, si l'on additionne les termes extrêmes et qu'on multiplie la somme par le terme moyen, on trouve un nombre double du produit des extrêmes. Ainsi $6 + 2 = 8$, et 8 multiplié par le moyen terme 3 donne 24; or $6 \times 2 = 12$ dont le double est 24.^[43]

LVIII. On appelle médiété sous-contraire à l'harmonique la médiété dont le troisième terme est au premier comme l'excès du premier (sur le second) est à l'excès du second (sur le troisième): telle est la médiété formée par les nombres 6, 5, 3, où 6 surpasse 5 d'une unité, et où 5 surpasse 3 de 2 unités, où enfin 3 est moitié de 6, comme l'unité, excès du premier nombre (sur le second), est moitié de 2, excès du second nombre sur le troisième.

LIX. On a la cinquième médiété, quand, étant donnés trois termes, le troisième est au second comme l'excès du premier (sur le second) est à l'excès du second (sur le troisième): telle est la proportion formée des nombres 5, 4, 2. L'extrême 5 surpasse 4 d'une unité et 4 surpasse l'autre extrême 2 de 2 unités. Or l'extrême 2 est moitié de 4, et l'unité, excès du premier terme (sur le second), est moitié de 2, excès du second (sur le troisième).

LX. On a la sixième médiété, quand, étant donnés trois termes, le second est au premier comme l'excès du premier (sur le second) est à l'excès du second (sur le

troisième): telle est la proportion formée des nombres 6, 4, 1. En effet, l'extrême 6 surpasse 4 de 2, et 4 surpasse l'autre extrême 1 de 3, et 1 est à 6 comme 1 est à $1 + 1/2$. Or 2, excès de 6 sur 4, est à 3, excès de 4 sur 1, dans le même rapport 1 à $1 + 1/2$.

Les Pythagoriciens se sont longuement étendus sur ces six médiétés et leurs sous-contraires. Pour nous, qu'il nous suffise d'avoir, selon la méthode de Pythagore, esquissé sommairement ces principes, pour résumer l'exposition des mathématiques.

Comment on trouve les moyens termes des médiétés

LXI. Voici comment on trouve les moyennes. Dans la proportion arithmétique, on ajoute au petit terme la moitié de l'excès du plus grand sur le plus petit, ou bien on additionne les moitiés de chacun des deux nombres donnés, ou enfin on prend la moitié de la somme des deux termes donnés. Soit proposé de trouver le moyen terme, en proportion arithmétique, entre les nombres 12 et 6, on prend l'excès du plus grand 12 sur le plus petit 6, la moitié est 3 qu'on ajoute au plus petit 6, et l'on obtient 9 qui est la moyenne arithmétique entre les nombres 12 et 6, puisqu'elle surpasse l'un et est surpassée par l'autre de 3 unités. De même, si on additionne les extrêmes 12 et 6, la somme est 18, dont la moitié 9 est la moyenne entre les nombres donnés.

Voici maintenant comment on obtient le moyen terme d'une proportion géométrique : on prend la racine carrée du produit des extrêmes. Soient donnés, par exemple, les deux nombres 24 et 6, dont il s'agit de trouver le moyen terme en proportion géométrique. On multiplie les nombres donnés l'un par l'autre, le produit est 144 dont la racine 12 est le moyen terme, car on a $24 : 12 = 12 : 6$, en raison double. Si le nombre compris sous les extrêmes est carré, le moyen terme trouvé est rationnel et sa longueur est commensurable avec les extrêmes, se composant d'unités entières. Mais si le nombre compris sous les extrêmes n'est pas un carré parfait, le moyen terme ne sera commensurable qu'en puissance avec les extrêmes.

Le plus souvent on le détermine géométriquement, qu'il soit exprimé en nombre rationnel ou que la raison et les grandeurs soient incommensurables. Voici comment on s'y prend: soient $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ les deux termes. Plaçons-les en ligne droite et sur la somme $\alpha\gamma$, décrivons une demi-circonférence, puis du point β menons à $\alpha\gamma$ la perpendiculaire $\beta\delta$, jusqu'à sa rencontre avec la demi-circonférence, je dis que $\beta\delta$ sera la moyenne proportionnelle géométrique entre les droites $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$. En effet, si l'on joint $\alpha\delta$ et $\delta\gamma$ on a en δ un angle droit, puisqu'il est inscrit dans une demi-circonférence. Dans le triangle $\alpha\delta\gamma$ la hauteur est $\delta\beta$ et les triangles qui sont de part et d'autre sont semblables au triangle total et, par conséquent, semblables entre eux, donc les côtés qui comprennent les angles égaux sont proportionnels et l'on a: $\alpha\beta : \beta\delta = \beta\delta : \beta\gamma$; donc $\beta\delta$ est moyenne proportionnelle entre $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Il nous reste à montrer comment on obtient le moyen terme dans la proportion harmonique. Soient donnés deux extrêmes en raison double, comme 12 et 6. On multiplie l'excès du plus grand sur le plus petit, c'est-à-dire 6, par le plus petit 6, puis on divise le produit 36 par la somme des extrêmes, c'est-à-dire par 48, et on ajoute le quotient 2 au plus petit terme 6, on obtient 8 qui sera le moyen terme cherché, car il surpasse un extrême et est surpassé par l'autre de la même fraction des extrêmes, savoir du tiers. La proportion harmonique est donc formée des nombres 12, 8, 6.

Si les extrêmes donnés sont en raison triple, comme 12 et 6, on multiplie par lui-même l'excès du plus grand sur le plus petit, le produit 12×12 est 144 dont la moitié égale 72. On divise ce résultat par la somme des extrêmes ou 48, le quotient 3 de la division, ajouté au plus petit terme, donne 9 pour le moyen terme cherché, car il surpasse un extrême et est surpassé par l'autre de la moitié des extrêmes. On a la

proportion harmonique des nombres 18, 9, 6.

Pour trouver la moyenne harmonique entre deux termes inégaux quelconques donnés, on peut aussi se servir de la méthode plus générale que nous avons d'abord exposée. Il faut multiplier l'excès par le plus petit extrême et diviser le produit par la somme des extrêmes, puis ajouter le quotient au plus petit terme. Soient donnés, par exemple, les deux termes 12 et 4. En multipliant l'excès de 12 sur 4 c'est-à-dire 8, par le plus petit terme 4, on a pour produit 32. Si maintenant on divise 32 par la somme des extrêmes qui est 16, on a 2 pour quotient. Ce quotient 2, ajouté au plus petit terme 4, donne 6 pour moyenne harmonique entre 12 et 4. En effet, 6 surpasse un extrême et est surpassé par l'autre de la même fraction des extrêmes, soit de la moitié. On a donc la proportion harmonique des nombres 12, 6, 4.^[44]

Après cette exposition sommaire, en faveur des lecteurs de Platon, de ce qu'il y a de plus nécessaire et de plus utile dans les parties des sciences mathématiques dont nous avons parlé, il nous reste à faire mention des éléments de l'astronomie.

NOTES

NOTE IX. – *Sur l'addition et la soustraction des consonances* (II, § XIII bis).

Nommons A, B, C, trois sons tels que l'intervalle de B à A soit, par exemple, une quinte et l'intervalle de C à B une quarte. Soient a , b , c , les nombres correspondants à ces trois sons; c est les $4/3$ de b , et b les $3/2$ de a , donc c est les $4/3$ des $3/2$ de a , c'est-à-dire qu'on a: $c = 2a$. Quoique l'intervalle de C à A soit le produit des deux intervalles qu'il comprend, on dit qu'il est la somme de ces deux intervalles; ainsi l'on dit que l'octave est la somme d'une quinte et d'une quarte, mais le nombre qui mesure l'octave est le produit des deux nombres qui mesurent la quarte et la quinte.

Nommons encore A, B, C, trois sons tels que l'intervalle de B à A soit, par exemple, une quarte et que l'intervalle de C à A soit une quinte. Soient a , b , c , les nombres correspondants à ces sons et x l'intervalle de c à b . On a, d'après la remarque précédente $3/2 = 4/3 \times x$ d'où $x = 3/2 : 4/3 = 9/8 =$ un ton. Quoique l'intervalle de C à B soit le quotient de l'intervalle de C à A par l'intervalle de B à A, on dit qu'il est la différence de ces deux intervalles: ainsi l'on dit que le ton est l'excès de la quinte sur la quarte, mais le nombre qui mesure le ton est le quotient des deux nombres qui mesurent la quinte et la quarte.

NOTE X. – *Le diagramme musical de Platon comprend quatre octaves, une quinte et un ton* (II, § XIII bis).

Le diagramme musical de Platon comprend, en effet, les sons correspondants aux termes des deux progressions 1, 2, 4, 8, et 1, 3, 9, 27, et s'arrête à 27. Or le premier son de la première octave étant représenté par 1, les premiers sons de la deuxième, de la troisième, de la quatrième et de la cinquième octave sont respectivement représentés par 2, 4, 8, 16. La quinte de cette cinquième octave est exprimée par $16 \times 3/2 = 24$. Pour ajouter un ton à cette quinte, il faut multiplier 24 par $9/8$, le résultat est 27, dernier terme du diagramme de Platon, qui comprend par conséquent quatre octaves plus une quinte et un ton. (Cf. le *Timée*.)

NOTE XI. – *De la valeur du demi-ton* (II, § XIV).

La moitié du ton $1 + 1/8$ n'est pas $1 + 1/16$. Cette moitié x est donnée par

l'équation $x^2 = 9/8$ d'où $x =$ Racine carrée de $9/8$. Mais il faut remarquer que la valeur $1 + 1/16 = 17/16$ est très approchée, car si on en fait le carré, on obtient $289/256$ qui ne diffère, que de $1/256$ du ton $9/8 = (9 \times 32)/(8 \times 32) = 288/256$

Le limma est moindre que le demi-ton, parce qu'on a, comme on peut aisément le vérifier,

$$(256/243)^2 < 9/8 \quad \text{d'où} \quad 256/243 < \text{Racine carrée de } 9/8$$

NOTE XII. – *Du système musical parfait formé de deux octaves* (II, § XXXV).

L'échelle musicale des anciens Grecs, décrite par Théon, avait l'étendue de la voix humaine. C'était une série descendante de deux octaves. Elle était formée de quatre petits systèmes, composés chacun de quatre sons dont les extrêmes donnaient la quarte, consonance maîtresse de laquelle découlaient les autres (II, XIII bis).

Ces petits systèmes se nommaient tétracordes parce que les sons étaient donnés par la lyre à quatre cordes. Les cordes des instruments et les sons qu'elles rendaient portaient le même nom. Les deux extrêmes de chaque tétracorde étaient invariables ou immobiles; les deux intermédiaires étaient variables ou mobiles, elles recevaient différents degrés de tension constituant trois genres principaux d'harmonie: le diatonique, le chromatique et l'enharmónique.

Le premier tétracorde se nommait tétracorde des supérieures ou des *hyperbolées*, ὑπερβολαίων.

Le deuxième s'appelait tétracorde disjoint ou des *disjointes*, διεζευγμένων, parce que sa dernière corde, c'est-à-dire la plus basse, était distincte de la première, ou la plus haute, du tétracorde suivant; elle en différait d'un ton. Les deux premiers tétracordes avaient une corde commune: la plus grave du tétracorde des hyperbolées était en même temps la plus aiguë du tétracorde des disjointes.

Le troisième était le tétracorde moyen ou des *mèses*, μέσων.

Le quatrième se nommait tétracorde des basses ou des hypates, ὑπατῶν, Ces deux tétracordes avaient une corde commune : la plus grave du tétracorde des mèses était en même temps la plus aiguë du tétracorde des hypates.

Le premier et le second tétracorde ayant une corde commune, ainsi que le troisième et le quatrième, l'ensemble des quatre tétracordes ne rendait que quatorze sons. Pour compléter les deux octaves, on a ajouté au-dessous du son le plus grave du tétracorde des hypates un quinzième son, plus bas d'un ton, qu'on a appelé *proslambanomène*, προσλαμβανόμενος, sous-entendu φθόγγος, ou προσλαμβανόμενη sous entendu χορδή c'est-à-dire son ajouté ou corde ajoutée.

De même que les tétracordes étaient désignés par des noms relatifs à leur position dans l'échelle musicale, les cordes étaient désignées par des noms relatifs à leur position dans chaque tétracorde.

La plus haute était la *nète* des hyperbolées, νήτη ὑπερβολαίων.

La seconde était la *paranète*, παρανήτη, c'est-à-dire voisine de la nète.

La troisième s'appelait *trite* des hyperbolées, τρίτη.

La quatrième et la cinquième étaient la *nète* et la *paranète* des disjointes, νήτη et παρανήτη διεζευγμένων.

La sixième, nommée *trite* des disjointes, τρίτη, était la troisième du tétracorde disjoint.

La septième et la huitième étaient la *paramèse*, παραμέση, c'est-à-dire voisine de la mèse, et la *mèse*, μέση.

La neuvième était la *lichane* des mèses, λίχανος μέσων.^[45]

La dixième et la onzième étaient la *parhypate* et l'*hypate* des mèses, παρύπατη et ὀπάτη.

La douzième était l'*hyperhypate*, ὑπερρύπατη ou *lichane* des hypates, λίχανος ὑπάτων.

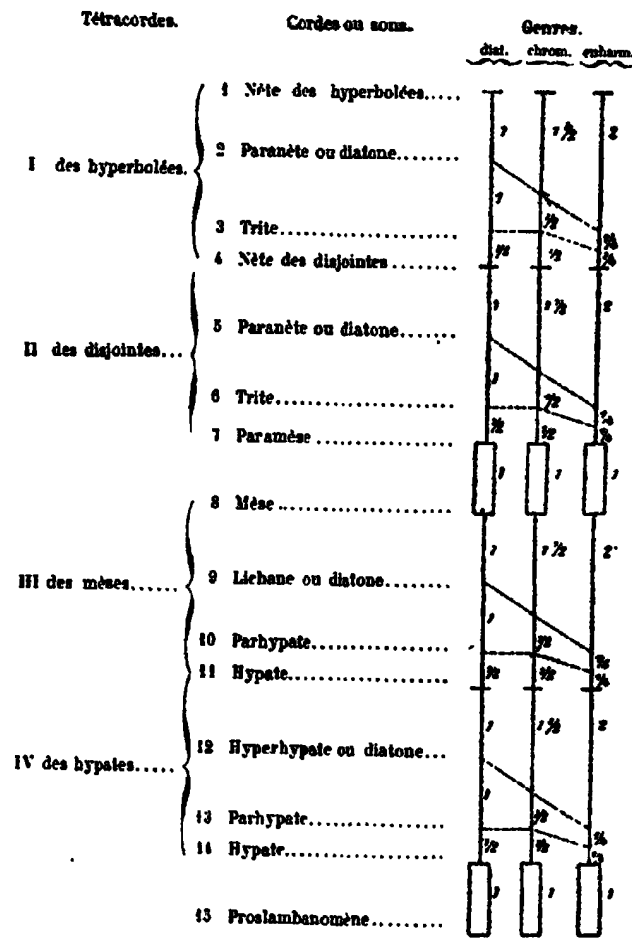
La treizième et la quatorzième étaient la *parhypate* des hypates, παροπάτη et l'*hypate* des hypates, ὑπάτη.

Enfin la quinzième était la *proslambanomène*.

La seconde corde de chaque tétracorde, c'est-à-dire la paranète des hyperbolées, la paranète des disjointes, la lichane des mèses et l'*hyperhypate*, étaient appelées aussi, suivant le genre: *diatone*, chromatique ou enharmonique, des hyperbolées, des disjointes, des mèses ou des hypates.

Voici un tableau de ce système parfait, avec indication des intervalles successifs dans les trois genres, diatonique, chromatique et enharmonique, le demi-ton ou limma étant égal à 256/243.

Système parfait, formé de deux octaves, comprenant les trois genres: diatonique, chromatique, enharmonique.



NOTE XIII. - Diagramme musical de Platon (II, § XXXVI). - Erreur probablement volontaire de *Timée de Locres*.

Platon pour expliquer, dans le *Timée*, la formation de l'âme du monde, admet que Dieu divisa d'abord l'essence en sept parties qui sont entre elles comme les termes des deux progressions 1, 2, 4, 8 et 1, 3, 9, 27 dont l'une a pour raison 2 et l'autre pour

raison 3.

Il dit ensuite que Dieu inséra, entre les termes successifs de ces deux progressions, deux moyennes dont l'une, que nous appelons moyenne arithmétique, égale leur demi-somme et dont l'autre est telle qu'elle surpasse un extrême et est surpassée par l'autre de la même fraction des extrêmes, c'est-à-dire que x étant la moyenne insérée entre a et b , on a :

$$x - a : b - x = a : b, \text{ d'où}$$

$$x = 2ab/(a+b) = ab / ((a+b)/2)$$

de sorte que cette moyenne entre deux nombres s'obtient en divisant le double produit de ces deux nombres par leur somme, ou le produit des deux nombres par leur demi-somme. On l'appelle une *moyenne harmonique*.

Par cette double insertion on obtient les nombres suivants (à lire par colonnes horizontales):

1	4/3	3/2	2
2	8/3	3	4
4	16/3	6	8

Dans cette progression, le rapport de la moyenne arithmétique à la moyenne harmonique égale 9/8: c'est la valeur du ton.

Platon insère ensuite entre chaque terme de la progression double et la moyenne harmonique qui le suit, ainsi qu'entre la moyenne arithmétique et le terme suivant, deux termes tels que le rapport de chacun d'eux au précédent soit aussi 9/8.

Cette opération effectuée sur la progression 1, 2, 4, 8, et prolongée jusqu'à ce qu'on obtienne le terme 27, donne les résultats contenus dans le tableau suivant:

TABLEAU I.
(A lire par colonnes verticales).

	1	2	4	8	16
	9	9	9	9	9
	8	7	5	9	18
	81	81	81	81	81
	64	32	16	8	4
Moyennes harmoniques.	{ 4	8	16*	32*	64*
	{ 3	3	3	3	3
Moyennes arithmétiques.	{ 2	3	6	12	24
	{ 2	3	6	12	24
	27	27	27	27	27
	16	8	4	2	
	243	243	243	243	243
	128	64	32	16	
	2	4	8	16*	

Pour substituer à ces nombres, généralement fractionnaires, des nombres entiers proportionnels, on peut les réduire au même plus petit dénominateur commun $128 \times 3 = 384$ et les multiplier tous par ce dénominateur, on obtient alors le tableau suivant:

TABEAU II.

	384	768	1536	3072	6144
	432	864	1728	3456	6912
	486	972	1944	3888	7776
	512	1024	2048°	4096°	8192°
	576	1152	2304	4608	9216
	648	1296	2592	5184	10368
	729	1458	2916	5832	
	768	1536	3072	6144°	
Sommes.	4535	8302	16604		
TOTAL.	29441				

Si on insère de même une moyenne harmonique et une moyenne arithmétique entre les termes successifs de la progression triple, on obtient les nombres (à lire par colonnes horizontales):

1	3/2	2	3
3	9/2	6	9
9	27/2	18	27

Les Intervalles de 4 à 3, de 3 à 9, et de 9 à 27, étant ceux d'octave et quinte, Proclus^[46] admet que Platon a d'abord rempli l'intervalle de 4 à 3, comme ceux de la progression double, et qu'il a ensuite triplé les termes obtenus de 1 à 3, pour avoir ceux de 3 à 9, et triplé les termes de 3 à 9, pour avoir ceux de 9 à 27.

L'opération ainsi effectuée donne des résultats qu'on peut multiplier par 128 x 3=384, plus petit commun multiple des dénominateurs, pour leur substituer des nombres entiers proportionnels. On obtient ainsi les deux tableaux suivants:

TABEAU III

TABEAU IV.

(A lire par colonnes verticales).

	1	3	9	384	1152	3456
	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{8}$	432	1296	3888
	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{64}$	$\frac{729}{64}^\circ$	486	1458	4374°
	$\frac{4}{3}$	4	12	512	1536	4608
Moyennes harmoniques. {	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{2}$	576	1728	5184
	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{16}$	648	1944	5832
	$\frac{243}{128}$	$\frac{729}{128}^\circ$	$\frac{2187}{128}^\circ$	729	2187°	6561°
Moyennes arithmétiques. {	2	6	18	768	2304	6912
	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{4}$	864	2592	7776
	$\frac{81}{32}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{32}^\circ$	972	2916	8748°
	$\frac{8}{3}$	8	24	1024	3072	9216
	3	9	27	1152	3456	10368
				Somme.. 76923		

Nous faisons suivre d'une étoile les termes de la progression triple (tableaux III et IV) qui ne font pas partie de celle des doubles, et les termes de la progression double (tableaux I et II) qui ne font pas partie de celle des triples.

On lit dans le traité *De l'âme du monde et de la nature* qui porte le nom de Timée de Locres (ch. 1, à la fin): « Dieu fit l'âme la première, en prenant dans le mélange dont il l'a formée, une partie égale à 384 unités. Ce premier nombre trouvé, il est facile de calculer les termes de la progression double et de la progression triple. Tous ces termes disposés suivant les intervalles de tons et demi-tons, sont au nombre de 36 et donnent une somme totale égale à 114 695; et les divisions de l'âme sont elles-mêmes au nombre de 114 693. Or l'intention évidente de Platon a été de ne pas dépasser 8 dans la progression des doubles et 27 dans la progression des triples. Donc son diagramme contient:

1° 22 termes de la progression double, compris de 1 x 384 à 8 x 384 c'est-à-dire de 384 à 3072 (tableau II) qui valent **29 441**

2° le terme de la progression triple compris, de 384 à 3072, qui ne fait pas partie de la progression double (voyez tableaux IV et II), c'est **2 187** et enfin

3° 12 termes de la progression triple, compris de 9 x 384 à 27 x 384 c'est-à-dire de 3456 à 10368 (tableau IV), qui valent **76 923**

SOMME **108 551**

Donc le diagramme de Platon contient (22+ 1 + 12) ou 35 termes différents (et non 36), et la somme de ces 35 termes est 108 551 et non 114 695. La différence 6144 des deux résultats est le terme 16 x 384 de la progression des doubles (tableau II), terme dont il ne faut pas tenir compte, car il dépasse 8 x 384 dans la progression des doubles et ne fait pas partie de la progression triple. Si on le compte, il faut compter aussi les deux termes 4096 et 8192, de la progression double, qui ne font pas partie de la progression triple. d

Il y a donc une erreur dans le traité qui porte le nom de Timée de Locres. Si, suivant les intentions de Platon, on ne dépasse pas, en faisant les insertions, les cubes 8 et 27 dans les progressions respectives 1, 2, 4, 8, et 1, 3, 9, 27, le diagramme musical de Platon comprend 35 termes dont la somme est 108 551, inférieure de 6144, à la somme 114 695 de Timée de Locres.^[47]

Sachant en quelle vénération les Pythagoriciens avaient le quaternaire,^[48] nous croyons fermement que l'erreur du Pseudo-Timée n'est pas involontaire. Le nombre 35 était certainement doué de perfection, c'était le produit du nombre septenaire par la demi-décade; mais le nombre 3 était encore plus parfait, c'était le produit du premier carré pair par le premier carré impair; et, par conséquent, il était lui-même un carré, c'est-à-dire une harmonie, et puis son côté 6 était un nombre vraiment parfait c'est-à-dire égal à la somme de ses parties aliquotes, car on a $6 = 1 + 2 + 3$. Le nombre 36 avait une autre vertu, écoutons Plutarque: «... Ce quaternaire, à savoir 36, célébré par les Pythagoriciens, semble avoir ceci d'admirable qu'il est la somme des quatre premiers nombres pairs et des quatre premiers nombres impairs...

$$(1 + 3 + 5 + 7) + (2 + 4 + 6 + 8) = 16 + 20 = 36$$

Alors que les philosophes pythagorisant voulaient trouver partout des quaternaires, Timée, pour compléter le grand quaternaire 36, aura ajouté aux 35 termes du diagramme musical de Platon le terme 6144 correspondant au son 16, octave du son 8 qui est le dernier terme de la progression 1, 2, 4, 8.

Si le Pseudo-Timée n'a pas ajouté aussi au diagramme de Platon les deux termes 4096

et 8192, qui sont l'un la quinte aiguë, l'autre la quarte grave de 6144 et qui, comme 6144, ne font pas partie des termes insérés dans la progression des triples, c'est parce qu'alors le nombre total des termes eût été 38, au lieu de 36,

NOTE XIV. – *Pourquoi le nombre six était appelé mariage* (II, § XLV).

On l'appelait aussi mariage parce qu'il est le produit du premier nombre pair par le premier nombre impair 3. Les nombres impairs étaient considérés comme mâles et les nombres pairs comme femelles. « Si on les divise l'un et l'autre en unitez, dit Plutarque (traduction d'Amyot), le pair montrera un lieu vuide au milieu, là où le non-pair a toujours le milieu rempli d'une de ses parties, et pour ceste cause, ils (les Pythagoriciens) ont opinion que le pair ressemble plus à la femelle et le non-pair au masle. » (*Questions romaines*, CII, p. 288 C.)

NOTE XV. – *Sur les euripes* (II, § XLVI).

On a donné le nom d'euripes aux courants qui se produisent dans les détroits (εὔριπος, bien, ῥῆπι, mouvement rapide, de ῥίπτω, jeter).

Le plus célèbre était celui de Chalcis, entre l'Eubée et la Béotie, et dont la direction changeait sept fois par jour, suivant la plupart des auteurs anciens : « Il y a des marées particulières en certains lieux, dit Pline, ainsi le flux vient plusieurs fois dans le détroit de Messine, à Tauroménium, et sept fois par jour dans l'Euripe, auprès de l'Eubée. (*Hist. naturelle*, II, c, p. 443 de la trad. de Littré, édition Nisard.)

Le scholiaste de Stobée attribue avec raison les mouvements alternatifs de l'Euripe de Chalcis à l'effort des vagues pour franchir le détroit. (Voyez *Eclogae Physicae*, t. II, p. 447, éd. Heeren.)

Les variations du flux des euripes étaient très irrégulières: cette inconstance était liée comme Platon dit dans le Phédon : «... Ni dans les choses, ni dans les raisonnements, il n'y a rien de vrai ni de stable; mais tout est dans un flux et un reflux continuels, comme l'Euripe, et rien ne demeure un moment dans le même état. » (*Phédon*, XXXIX, p. 90 C.) Lucain dit aussi, dans la Pharsale:

« les flots inconstants de l'Euripe entraînent les vaisseaux de Chalcis vers Aulis si funeste aux nochers :

*Euripusque trahit, cursum mutantibus undis,
Chalcidicas puppes ad iniquam classibus Aulim.
(La Pharsale, Chant V, v. 235-236.)*

L'idée superstitieuse attachée au nombre sept paraît expliquer l'hypothèse de Théon, hypothèse suivant laquelle les euripes varient sept fois par jour.

NOTE XVI. – *Détermination de la moyenne harmonique entre deux nombres donnés* (II, § LXI).

a , b , c étant les trois nombres qui donnent la proportion harmonique $a - b : b - c = a : c$, la première règle de Théon se traduit par la formule $b = c + (a - c)c/(a + c)$, valeur égale à $2ac/(a + c)$; elle est donc générale quel que soit le rapport de a à c .

La seconde règle se traduit par la formule $b = c + (a - c)^2/2(a + c)$; cette valeur n'est égale à $2ac/(a + c)$ que pour $a = c$, solution à rejeter, et pour $a = 3c$. Théon donne en effet la seconde règle pour les nombres en rapport triple, 18 et 6.

L'auteur ayant fait la remarque (II, LVII) que, dans la proportion harmonique, le produit de la somme des nombres extrêmes par la moyenne harmonique est égal au double

produit des nombres extrêmes, nous sommes étonné qu'il n'ait pas conclu de cette égalité la valeur de la moyenne harmonique.

[1] Dans l'octacorde ou lyre à huit cordes, la nète donnait le son le plus aigu, et l'hypate le son le plus grave. Ces deux sons correspondent aux deux *mi* de la même octave, la mèse correspond au *la*.

[2] La tension d'un son s'appelle maintenant la hauteur.

[3] Le rapport superpartiel ou sesquipartiel est celui dont l'antécédent surpasse d'une unité le conséquent, comme celui de 3 à 2, celui de 4 à 3, et en général celui de $n + 1$ à n .

[4] Maintenant, c'est-à-dire au commencement du second siècle.

[5] Platon, selon Macrobe, assigne aussi le genre diatonique à l'harmonie des sphères. Macrobe. *In somnium Scipionis*, II, 4.

[6] Cf. Chalcidius, *In Timaeum Platonis*. XLIV, éd. Didot.

[7] Le rapport de 256 à 243, qu'on appelle aussi limma, est l'excès de la quarte sur le double ton; on a: $4/3 : (9/8)^2 = 4/3 \times 64/81 \sim 256/243$.

[8] On a $9/6 : 8/6 = 9/8$.

[9] On a $9/8 \times 12/9 = 12/8 = 3/2$.

[10] On a $2 \times 4/3 = 8/3 = 2 + 2/3$.

[11] On a $9/6 \times 18/9 = 18/6 = 3$.

[12] Voir la note IX.

[13] Voyez la note X.

[14] Cf. le *Timée*. Plutarque, *De la Création de l'âme dans le Timée* 16-17. Macrobe, *Commentaire du songe de Scipion*, II, 1.

[15] On multiplie par 3 afin de pouvoir prendre les $4/3$ du premier terme pour obtenir le nombre qui correspond la consonance de quarte.

[16] La moitié du ton ($1 + 1/8$) n'est pas ($1 + 1/16$). Voyez la note XI.

[17] Le fond d'un rapport est ce rapport réduit à sa plus simple expression. Voyez II, § XXIX.

[18] Comme on dit: les récits ésopiques; Libycus était un fabuliste.

[19] Cf. II. §§ XII et XIII.

[20] Cf. II, § V.

[21] On a en effet, $11/6 = 1 + 5/6 = 1 + 3/6 + 2/6 = 1 + 1/2 + 1/3$,
 $7/4 = 1 + 3/4 = 1 + 2/4 + 1/4 = 1 + 1/2 + 1/4$,

$19/12 = 1 + 7/12 = 1 + 4/12 + 3/12 = 1 + 1/2 + 1/4$.

[22] Le rapport de 256 à 243 est épimère, car on a $256/243 = 1 + 13/243 = 1 + 9/243 + 3/243 = 1 + 1/27 + 1/81 + 1/243$, de sorte que le plus grand terme contient une fois le plus petit, et en outre plusieurs parties différentes de celui-ci. Cf. II, xxv.

[23] La langue mathématique n'est pas encore fixée. Nous croyons que par μεσότης il faut entendre, dans ce paragraphe, non pas une médieté, mais un nombre moyen compris entre deux autres, et que par ἀναλογία il faut entendre, non pas une analogie, c'est-à-dire une proportion continue, mais un terme moyen proportionnel. Cela paraît résulter de l'explication de Théon et des deux exemples qu'il donne.

[24] $18/6 = 12/6 \times 18/12$.

[25] $12/6 = 9/6 \times 12/9 = 12/8 \times 8/6$.

[26] $18/9 = 18/12 \times 12/9$.

[27] $24/12 = 24/18 \times 18/12$.

[28] $9/6 = 9/8 \times 8/6$.

[29] $12/8 = 12/9 \times 9/8$.

[30] Le limma est moindre que $1+1/18$. La fraction $13/243$ est en effet moindre que $1/18$, donc $1 + 13/243$ ou $256/243$ est moindre que $1+1/18$.

[31] Voyez la note XIII.

[32] Cf. Vers dorés 47-48 de Pythagore. Macrobe, *Commentaire du songe de Scipion*, I, 6. *Theologumena Arithmeticae* § IV, p. 18 de l'éd. d'Ast. Jamblique. *Vie de Pythagore*, §§ XXVIII et XXIX de l'éd. Didot. L'empereur Julien, *Contre les chiens (philosophes cyniques) ignorants*, § II. Plutarque, *Des opinions des philosophes* I. III, 18. Stobée. *Eclogae physicae*, I. IX, 12, t. I.

[33] Cf. Plutarque, *Opinions des philosophes*, I, III. Le nombre trois exprime la multitude. Voyez aussi *Sur Isis et Osiris*, 16.

[34] Le nombre quatre est l'image du solide parce que le plus élémentaire des solides est la pyramide triangulaire qui a 4 faces et 4 sommets. Et il complète les consonances qui sont $4/3$, $3/2$, 2, 3 et 4, c'est-à-dire la quarte, la quinte, l'octave, la quinte de l'octave et la double octave. Cf. supra II, XI.

[35] Voyez la note XIV.

[36] D'une conversion tropicale du soleil à l'autre, d'un équinoxe à l'autre, il n'y a que six mois. Il faut donc comprendre ainsi la pensée de Théon : parti d'un

tropique ou d'un équinoxe, le soleil atteint l'autre tropique ou l'autre équinoxe le septième mois.

[37] Voyez la note XV.

[38] Si $a - b = ma$, on a aussi $b - c = mc$ d'où $(a - b)/(b - c) = a/c$.

[39] Soient en effet, a , b , c , les trois termes donnés en proportion continue : on a $b^2 = ac$. Les trois termes obtenus d'après la règle d'Adraste, sont a , $a + b$ et $a + 2b + c$; le carré du moyen terme est $a^2 + 2ab + b^2$ et le produit des extrêmes est $a^2 + 2ab + ac$. Mais $b^2 = ac$ par hypothèse, donc le carré du moyen terme est égal au produit des extrêmes et les trois nouveaux termes sont en proportion continue .

[40] Soit en général la proportion continue n^2 , n , 1 , dont la raison est n . La nouvelle proportion continue obtenue par la règle d'Adraste sera formée des termes n^2 , $n^2 + n$, $n^2 + 2n + 1$; la raison est $1 + 1/n$.

[41] Voyez la définition de nombres promèques. I, XVII.

[42] Suivant son habitude Théon vérifie simplement la proposition énoncée. Soit a , b , c , les trois nombres qui donnent le médiété géométrique : on a, par hypothèse, $(a - b) : (b - c) = b$ d'où $ac - bc = b^2 - bc$ et par conséquent $ac = b^2$.

[43] Soit, en général, la proportion harmonique $a - b : b - c = a : c$; en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens, on a $(a + c) b = 2ac$, ce qui démontre la proposition énoncée.

[44] Voyez la note XVI.

[45] La lichane indiquait le genre qui était diatonique, chromatique ou enharmonique, suivant que l'intervalle du son de cette corde au son de la corde précédente valait un ton, un ton et demi ou deux tons.

[46] *Proclus in Timaeum*, éd. de Bâle, 1534.

[47] L'erreur de Timée de Locres est reproduite par tous les commentateurs. Voyez abbé Roussier, *Mémoire sur la musique des anciens*, Paris, 1770, in-4° -. V. Cousin, Traduction des *Œuvres de Platon*, Paris, 1859, in-8°, t. XII, p. 335. - J. Simon, *Du commentaire du Timée de Platon par Proclus*, Paris, 1839, in 8°, p. 163. - A.-J.-B. Vincent, *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale*, 1817, t. XVI, 2^e partie, p. 176 et suiv. etc.

[48] Voyez l'Épilogue, § VII.

[RETOUR À L'ENTRÉE DU SITE](#)

[ALLER A LA TABLE DES MATIERES DE THÉON DE SMYRNE](#)



THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

Oeuvre numérisée par Marc Szwajcer

ΘΕΩΝΟΣ ΣΜΥΡΝΑΙΟΥ

ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ

ΤΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΝ ΣΦΕΙΜΩΝ
ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΛΑΤΩΝΟΣ ΑΝΑΓΩΓΗΝ

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION

DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES

POUR LA LECTURE DE PLATON

TRADUITE POUR LA PREMIÈRE FOIS DU GREC EN FRANÇAIS

Par J. DUPUIS

PARIS

LIBRAIRIE HACHETTE ET C^{ie}

Boulevard Saint-Germain, 79

1892

THÉON DE SMYRNE

PHILOSOPHE PLATONICIEN

EXPOSITION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES POUR LA LECTURE DE PLATON

PRÉFACE

PREMIÈRE PARTIE

INTRODUCTION

ARITHMÉTIQUE

SECONDE PARTIE

MUSIQUE

TROISIÈME PARTIE

ASTRONOMIE

De la forme sphérique de la terre

I. Le monde entier est une sphère et la terre qui est elle-même un sphéroïde est placée au milieu. Que la terre est le centre de l'univers et qu'elle n'en est qu'un point par rapport à la grandeur de l'univers, voilà ce qu'il faut avant tout établir. Un exposé exact de cette doctrine exigerait de trop longues considérations, des écrits trop nombreux; il suffira, pour résumer ce que nous avons à dire, de rappeler les notions sommaires que nous a transmises Adraste.

Nous dirons donc que le monde et la terre sont sphériques, et que celle-ci est au centre du monde et qu'elle n'en est qu'un point; cela résulte de ce que, pour les habitants d'un même lieu, tous les corps célestes se lèvent, se couchent et se lèvent de nouveau aux mêmes points, et qu'ils accomplissent toujours les mêmes révolutions.

La sphéricité du monde est encore démontrée par la raison que, de chaque partie de la terre, notre regard embrasse la moitié du ciel, tandis que l'autre moitié nous la jugeons cachée par la terre, ne pouvant l'apercevoir. D'ailleurs, si nous regardons les points extrêmes du ciel, tous les rayons visuels nous paraissent égaux, et des astres diamétralement opposés décrivent un grand cercle, l'un se couche quand l'autre se lève. Si l'univers, au lieu d'être sphérique, avait la forme d'un cône, d'un cylindre, d'une pyramide ou d'un autre solide, il ne produirait pas cet effet sur la terre : une de ses parties paraîtrait plus grande, une autre plus petite et les distances de la terre au ciel paraîtraient inégales.

II. Et d'abord, la terre est sphéroïdale de l'orient à l'occident; le lever et le coucher des mêmes astres le prouvent bien, ils ont lieu plus tôt pour les habitants des régions orientales, plus tard pour ceux des régions occidentales. Ce qui le montre encore, c'est une même éclipse de lune : elle se produit dans un même espace de temps assez court; pour tous ceux qui peuvent la voir, elle paraîtra à des instants différents : plus on sera vers l'orient, plus vite on la verra et plus tôt on en aura vu une plus grande partie. A cause de la forme arrondie de la terre, le soleil n'en éclaire pas en même temps toute la surface, et l'ombre que la terre projette se déplace d'après un ordre fixe, le phénomène ayant lieu la nuit,

Il est encore évident que la terre est convexe du nord au midi: en effet, pour ceux qui se dirigent vers le midi, à mesure qu'ils avancent, beaucoup d'étoiles, qui sont toujours visibles pour nous, dans leur mouvement autour du pôle, ont un lever et un coucher. De même que d'autres astres, toujours invisibles pour nous, dans leur mouvement autour du pôle qui nous est caché, ont pour eux un lever et un coucher : ainsi, l'étoile dite Canopus^[1] est invisible dans les contrées plus septentrionales que Cnide^[2] ; mais elle est visible dans les contrées plus méridionales, et elle est

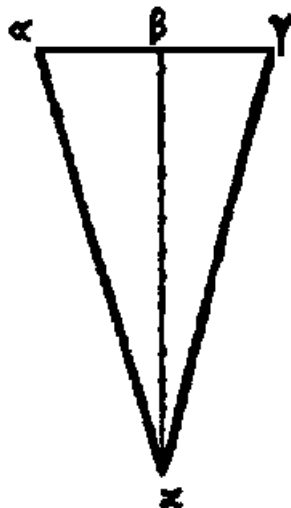
toujours de plus en plus élevée à mesure qu'on s'éloigne du nord. Au contraire, quand on va du midi vers le nord, beaucoup d'astres, dont on voyait au midi le lever et le coucher, disparaissent entièrement, tandis que d'autres, situés dans la région des Ourses et qui avaient un lever et un coucher, deviennent toujours visibles et on en voit d'autant plus qu'on avance davantage vers le nord.

Puisque la terre paraît convexe de toutes parts, elle doit être sphérique. D'ailleurs, tout corps pesant se portant naturellement vers le centre, si nous concevions que certaines parties de la terre soient plus éloignées du centre, à cause de leur grandeur, il faudrait nécessairement que les petites parties qui les entourent fussent pressées, repoussées et éloignées du centre, jusqu'à ce que, l'égalité de distance et de pression étant obtenue, tout en équilibre soit constitué en repos, comme deux poutres qui se soutiennent mutuellement ou comme deux athlètes de même force qui se tiennent mutuellement embrassés. Si les différentes parties de la terre sont également éloignées du centre, il faut que sa forme soit sphérique.

En outre, puisque la chute des corps pesants se fait toujours et partout vers le centre, que tout converge vers le même point et qu'enfin chaque corps tombe verticalement, c'est-à-dire qu'il fait avec la surface de la terre des angles toujours égaux, on doit conclure que la surface de la terre est sphérique.

III. La surface de la mer et de toutes les eaux tranquilles est aussi sphérique. On peut le reconnaître de cette manière: si, placé sur le rivage, on observe un objet dont on est séparé par la mer, comme une colline, un arbre, une tour, un vaisseau ou la terre elle-même, puis, si s'abaissant on regarde vers la surface de l'eau, on ne voit plus rien, ou on voit une moindre partie de l'objet, la convexité de la surface de la mer masquant l'objet. Et souvent, pendant une navigation, alors que du pont du navire on ne voit pas encore la terre ou un vaisseau qui s'avance, des matelots grimpés au haut d'un mât c'est-à-dire les aperçoivent, étant plus élevés et comme dominant la convexité de la mer qui faisait obstacle.

On peut démontrer physiquement et mathématiquement que la surface de toute eau tranquille doit être de forme sphérique. L'eau tend, en effet, toujours à couler des parties les plus hautes vers les parties creuses. Or, les parties hautes sont plus éloignées du centre de la terre, les parties creuses le sont moins. La surface de l'eau étant supposée plane, soit $\alpha\beta\gamma$ (une ligne droite de) cette surface. Du centre de la terre, tel que le point α , menons à la base la perpendiculaire $\alpha\beta$ et menons aux extrémités de cette base les droites $\alpha\alpha$, $\alpha\gamma$.



Il est évident que ces deux droites $\kappa\alpha$, $\kappa\gamma$, sont toutes les deux plus grandes que $\kappa\beta$ et que les deux points, α , γ , sont plus éloignés du centre que le point β et, par conséquent, plus élevés que l'eau s'écoulera donc des points α , β , vers le point β moins élevé jusqu'à ce que ce dernier point, entouré de nouvelle eau, soit autant éloigné du point κ que α et γ . Pareillement, tous les points de la surface de l'eau seront à la même distance de κ ; donc l'eau offre la forme sphérique et la masse entière de l'eau et de la terre est sphérique.

Et qu'on ne dise pas que la hauteur des montagnes ou la profondeur des vallées vient contrarier cette thèse et, prouver que la terre n'est pas une sphère exacte. Ératosthène nous montre, en effet, que le tour de la terre, mesuré suivant la circonférence d'un grand cercle, a une longueur approximative de 252.000 stades, et Archimède nous apprend qu'une circonférence de cercle, développée en ligne droite, vaut trois fois le diamètre et à très peu près le septième de ce diamètre; le diamètre de la terre vaudra donc approximativement 80.182 stades. Trois fois ce nombre, plus un septième de ce nombre, donnent, en effet, 22.000 stades.

Or, et après Ératosthène et Dicéarque, la hauteur verticale des montagnes les plus élevées au-dessus des plaines les plus basses est de 10 stades. Ils ont traduit ce résultat d'observations faites avec la dioptré^[3] qui permet de mesurer les hauteurs d'après certains intervalles. La hauteur de la plus grande montagne serait donc à peu près égale à la huit millièème partie du diamètre total de la terre. Si nous faisons une sphère d'un pied de diamètre, la largeur d'un doigt étant à peu près égale à 12 diamètres et demi d'un grain de mil, le diamètre de notre sphère égalerait 200 diamètres de grain de mil ou un peu moins, car le pied vaut 16 doigts; le doigt vaut 12 diamètres de grain de mil, et 16 fois 12 font 192. La quarantième partie du diamètre d'un grain de mil est donc supérieure à la huit millièème partie d'un pied, car 40 fois 200 font 8000.

Mais nous avons vu que la hauteur de la plus grande montagne est à peu près la huit millièème partie du diamètre de la terre, donc le rapport de la quarantième partie du diamètre d'un grain de mil au diamètre d'une sphère d'un pied de diamètre est plus grand que le rapport de la hauteur de la plus grande montagne au diamètre de la terre, Et le rapport de la sphère ayant pour diamètre la quarantième partie de l'épaisseur d'un grain de mil, à la sphère d'un pied de diamètre, est plus grand que le rapport de la sphère de 10 stades de hauteur à la sphère terrestre.

La sphère qui a pour diamètre la quarantième partie du diamètre d'un grain de mil est la 64 000^e partie d'un grain tout entier. La montagne sphérique de 10 stades de diamètre vaut à peu près 24 stades cubes et toute la terre supposée sphérique vaut, en stades cubiques. 270 troisièmes myriades, 250 deuxièmes myriades, 1350 premières myriades, 8297 et la fraction 14/21^e.^[4]

En outre on démontre que le rectangle formé par le diamètre d'une sphère et la circonférence d'un grand cercle, développée en ligne droite, égale 4 fois la surface du quart de la sphère, lequel quart égale la surface du cercle. Le carré du diamètre est à la surface du cercle comme 14 est à 11: car la circonférence du cercle égale 3 fois le diamètre plus la septième partie de ce diamètre. Si le diamètre est 7, la circonférence est 22. Le quart de la circonférence est 5 + 1/2. Donc le carré du diamètre étant 49, le cercle avant ce diamètre est 38 + 1/2: et si nous doublons pour faire disparaître 1/2, le carré du diamètre étant 98, le cercle ayant ce diamètre sera 77. Or le rapport de ces nombres, exprimé en termes les plus petits et premiers entre eux, est celui de 14 à 11, car la plus grande commune mesure de ces deux nombres est 7 qui est contenue 14 fois dans 98 et 11 fois dans 77. Donc le rapport du cube du diamètre au cylindre circonscrit

à la sphère, laquelle est contenue une fois et demi dans le cylindre, d'après Archimède, est aussi égal au rapport de 14 à 11. Ainsi donc quand le cube du diamètre du cercle sera 14, le cylindre circonscrit sera 11 et la sphère $7 + \frac{1}{3}$.

C'est ainsi qu'on trouve les volumes exprimés en nombres de la sphère terrestre et de la plus haute montagne. Une montagne haute de 10 stades, qui serait une sphère, serait beaucoup plus petite par rapport à la terre, que la 64.000^e partie d'un grain de mil, par rapport à une sphère d'un pied de diamètre. Or les montagnes ne sont pas sphériques, et, telles qu'on les voit, elles sont beaucoup plus petites. Mais une telle partie d'un grain de mil, qu'elle soit superposée sur une sphère d'un pied de diamètre, ou qu'elle en soit enlevée et placée dans un creux ne produira aucune différence de forme. Les montagnes les plus élevées ayant 10 stades ont le même rapport avec la terre, elles n'empêcheront donc pas que l'ensemble de la terre et de la mer ne soit réellement une sphère.

Le tour de la terre vaut donc 232.000
stades

le diamètre

80.182

le carré du diamètre 6.429.153.124
st. carrés

le cube
515.502.355.788.568 st. cubiq.

et le quatorzième de ce cube 36.821.596.812.040 et $\frac{4}{7}$,

< Le produit de ce nombre par $\frac{22}{3}$ est égal au volume de la terre et vaut, en stades cubiques 270.025.043.508.097 et $\frac{14}{21}$.^[5] >

IV. La terre est sphérique et placée au centre du monde. Si elle était éloignée de cette position, elle n'aurait point de tout côté la moitié du ciel au-dessus d'elle et l'autre moitié au-dessous. De plus les lignes droites menées de tout point aux extrémités de la sphère céleste ne seraient égales. Que le volume de la terre n'ait aucun rapport sensible avec l'étendue de l'univers, qu'elle n'occupe qu'un point dans cet univers, les pointes des gnomons le montrent en tout lieu de la terre habitée; elles peuvent en effet être prises pour centre de l'orbite solaire, car en changeant de lieu on n'observe aucun changement sensible, Si donc il y a nécessairement un centre pour l'ensemble de toutes les sphères, tous les points de la terre paraissent être ce centre. Il est donc évident que toute la terre n'est qu'un point par rapport à toute la sphère du soleil et à plus forte raison par rapport à la sphère des étoiles. C'est pour cela que la moitié du monde, ou à peu près, apparaît toujours à nos yeux.

Quoique nous puissions dire beaucoup d'autres choses sur la forme de l'univers et de la terre, sur la position centrale de celle-ci, ainsi que sur sa grandeur peu apparente par rapport à l'univers, ce qu'a démontré Adraste de la manière précédente suffira pour l'exposition de ce qui suit. Voici ce qu'il dit ensuite

Des cercles célestes

V. La sphère céleste tournant autour des pôles immobiles et de l'axe qui les joint et au milieu duquel est fixée la terre, tous les astres emportés par cette sphère, et tous les points du ciel, décrivent des cercles parallèles. C'est-à-dire partout équidistants, perpendiculaires à l'axe, et tracés des pôles de l'univers comme centres. On peut compter les cercles décrits par les étoiles, mais les cercles décrits par les

autres points sont innombrables. On a donné à quelques-uns de ces cercles des noms particuliers qu'il est utile de connaître pour rendre compte de ce qui se passe au ciel.

Il y en a un au-dessus de nous, autour du pôle toujours apparent et lui-même toujours visible. On l'appelle cercle arctique, à cause des constellations des ourses qu'il traverse. Un autre, du côté opposé, égal au premier, autour du pôle que nous ne voyons jamais, est lui-même toujours invisible pour nous, on l'appelle cercle antarctique. Celui du milieu, qui est un grand cercle, divise toute la sphère en deux parties égales et s'appelle équinoxial, parce que pour les régions correspondantes de la terre il y a égalité entre les jours et les nuits; pour les autres lieux où l'on voit le soleil se lever et se coucher suivant le mouvement général de l'univers, les durées du jour et de la nuit sont égales quand le soleil décrit ce cercle.

Entre le cercle équinoxial et les deux cercles arctiques, il y a d'un côté le tropique d'été situé pour nous en deçà du cercle équinoxial, et de l'autre côté le tropique d'hiver. Le soleil dans sa révolution se rapproche tantôt de l'un tantôt de l'autre, Entre ces deux cercles s'étend en effet obliquement le zodiaque.

VI. Le zodiaque est aussi un grand cercle. Il touche chaque tropique en un point : le tropique d'été en un point du Cancer et l'autre en un point du Capricorne. Il coupe l'équinoxial en deux parties égales et est lui-même divisé également par ce cercle en un point du Bélier et un point du Scorpion. C'est dans sa zone que sont emportés le soleil, la lune et les autres planètes: Phénon qu'on nomme l'astre de Saturne ou, suivant quelques-uns, du soleil, Phaéton l'astre de Jupiter, Pyrois celui de Mars ou d'Hercule, Lucifer qu'on nomme aussi Vénus, ou encore l'étoile du matin et l'étoile du soir, et près de ces astres Stilbon qu'on nomme aussi Mercure.

VII. On appelle horizon le cercle qui borne notre vue et divise, ainsi qu'on le voit, la terre faisant obstacle, le ciel tout entier en deux parties égales: l'une au-dessus de la terre est l'hémisphère visible, l'autre au-dessous est l'hémisphère invisible. Comme c'est aussi un grand cercle de la sphère, il coupe en deux parties égales les grands cercles tels que l'équinoxial et le zodiaque. Si deux astres sont diamétralement opposés, quand l'un se lève l'autre se couche. L'horizon partage aussi le méridien en deux parties égales,

VIII. Car il y a un autre grand cercle, nommé méridien, qui passe par les deux pôles du monde et que l'on conçoit perpendiculaire à l'horizon. On le nomme méridien par ce que le soleil le coupe au milieu du jour, étant au point le plus élevé de sa course au-dessus de l'horizon. On le nomme quelquefois colure, parce qu'une de ses parties, celle qui est du côté du pôle invisible, est cachée pour nous.

IX. L'équinoxial et les deux tropiques situés de part et d'autre sont des cercles donnés et fixes de grandeur et de position. On dit que des points et des lignes sont donnés de position, quand ils occupent toujours le même lieu: on dit que des surfaces, des lignes, des angles, sont donnés de grandeur, quand on peut trouver des grandeurs égales. Or l'équinoxial et les deux tropiques placés de part et d'autre ont toujours la même position, sont toujours fixes, et on pourrait trouver des cercles égaux : le zodiaque, l'horizon et le méridien étant égaux à l'équinoxial, et le tropique d'été étant égal au tropique d'hiver et réciproquement. C'est pour cela qu'ils sont toujours donnés; il n'est pas en notre pouvoir de les rendre tels ou tels: ils sont naturellement tels; ils sont donnés, nous ne les donnons pas tels.

Quant à ceux qu'il est en notre pouvoir de rendre tels ou tels, ils ne sont pas naturellement donnés. Ceux qui sont naturellement donnés, c'est-à-dire qui sont fixes, et qui existent par eux-mêmes, sont l'équinoxial et les cercles situés de part et

d'autre, donnés de grandeur et de position. Le zodiaque est un cercle donné de grandeur et de position par rapport au ciel, mais par rapport à nous, il n'est pas donné de position. Pour nous, en effet, il n'est pas fixe, à cause de son obliquité dans l'univers, qui nous le montre changeant de place.

Le méridien et l'horizon sont aussi donnés de grandeur, car ce sont des grands cercles de la sphère céleste. mais ils changent de position suivant le climat et sont différents dans les différents lieux de la terre. Nous n'avons tous en effet ni le même horizon, ni la même ligne méridienne, ni le même méridien. Quant aux cercles arctique et antarctique qui sont voisins des pôles, ils ne sont donnés ni de grandeur ni de position:^[6] suivant la différence des climats plus septentrionaux ou plus méridionaux, on les voit plus grands ou petits. Mais pour la région moyenne de la terre, c'est-à-dire pour la zone qui se trouve sous la ligne équinoxiale et qu'on ne peut habiter à cause de la chaleur, il n'en est pas de même: les deux pôles apparaissent aux extrémités de l'horizon, et on dit quelquefois que la sphère est droite par ce que dans cette région de la terre tous les cercles parallèles sont perpendiculaires à l'horizon.

X. Chacun des autres cercles est un véritable cercle terminé par une seule ligne: mais celui qu'on appelle zodiaque montre une certaine largeur, comme le cylindre d'un tambour: des figures d'animaux sont imaginées sur ce cylindre. On appelle cercle du milieu des signes le grand cercle qui touche les deux tropiques en un point de chacun d'eux, et coupe le cercle équinoxial en deux parties égales. Les deux cercles qui limitent de part et d'autre la largeur du zodiaque sont plus petits que le cercle du milieu.

Des étoiles.

XI. La plupart des astres sont fixes: ils sont emportés ensemble par un mouvement circulaire unique et simple, avec la première sphère qui est la plus grande, comme s'ils lui étaient fixés et s'ils étaient mus par elle. Ils ont toujours la même position relative sur la sphère, conservent entre eux le même ordre et n'éprouvent aucun changement de forme ni de mouvement, de grandeur ni de couleur.

Des planètes.

XII. Le soleil, la lune et les autres astres qu'on nomme errants sont emportés avec l'univers dans le mouvement diurne, d'orient en occident, de même que les étoiles fixes. Mais en dehors de ce mouvement, ils paraissent chaque jour en avoir plusieurs autres. Car, par un mouvement qui leur est propre, ils vont aux signes qui les suivent (dans le mouvement diurne) et non aux signes qui les précèdent entraînés en sens contraire de l'univers, dans une course qu'on appelle mouvement en longitude. De plus, ils ont un mouvement en latitude, du nord au midi et réciproquement, tout en accomplissant leur course en sens contraire du mouvement de l'univers. Les observateurs attentifs les voient emportés du tropique d'été au tropique d'hiver et réciproquement, à travers l'obliquité du zodiaque.

Et dans la largeur du zodiaque, on les voit tantôt plus au nord du cercle du milieu, tantôt plus au midi: les uns s'abaissent plus, les autres moins. En outre ils varient en grandeur, étant tantôt plus éloignés, tantôt plus rapprochés de la terre dans les profondeurs de l'espace. C'est pour cela que la vitesse de leur mouvement à travers les signes paraît inégale: ils ne parcourent pas des espaces égaux dans des temps égaux; ils vont plus vite quand ils paraissent plus grands à cause de leur moins grand éloignement de la terre, ils vont moins vite quand ils paraissent plus petits à cause de leur plus grand éloignement.

La distance parcourue sur le zodiaque, est faible pour le soleil, car elle et à peu

près d'une division sur 360. Pour la lune, comme les anciens astronomes l'ont dit, et pour Vénus, elle est plus grande, car elle est de 12 divisions environ. Mercure en parcourt environ 8. Mars et Jupiter environ 5 et Saturne à peu près 3. La lune et le soleil paraissent s'écarter également chacun en latitude du cercle du milieu des signes. Les autres planètes ne s'en écartent pas également, elles sont plus septentrionales dans quelque signe, plus méridionales dans quelque autre.

Quant à la longueur du cercle des points fixes à ce même point, la lune, allant vers les signes suivants et non vers les signes précédents, la parcourt en 2 jours et un tiers, le soleil en une année qui vaut approximativement 365 jours et un quart; Vénus et Mercure vont d'un mouvement inégal, mais peu différent de durée, et pour tout dire ils ont la même vitesse que le soleil, puisqu'on les voit toujours à côté de lui, le suivant tantôt et tantôt le précédant. Mars achève sa course en un peu moins de 2 ans. Jupiter en 12 ans environ et Saturne en un peu moins de 30 ans.

Les conjonctions avec le soleil, les apparitions et les disparitions, qu'on appelle les levers et les couchers, ne sont pas les mêmes pour toutes les planètes. La lune, en effet, après sa conjonction avec le soleil, ayant un mouvement plus rapide que lui vers les signes qui suivent apparaît d'abord et se lève le soir, tandis qu'elle disparaît et se couche le matin. Inversement Saturne, Jupiter et Mars qui arrivent moins vite que le soleil aux signes suivants sont précédés et devancés par lui, c'est-à-dire que ces planètes se couchent toujours le soir et se lèvent le matin (après la conjonction).

XIII. Vénus et Mercure qui ont un mouvement égal à celui du soleil, paraissent toujours auprès de lui: tantôt ces deux astres le suivent, tantôt ils le précèdent; tantôt ils paraissent le soir et disparaissent aussi le soir, tantôt ils paraissent à l'aube naissante et disparaissent avec le jour. Tandis que les autres planètes s'éloignent du soleil, de tout intervalle, jusqu'à ce qu'elles lui soient diamétralement opposées, ces deux astres au contraire sont toujours vus auprès de lui. Mercure s'en écarte de 20 degrés environ, c'est-à-dire à peu près de deux tiers de signe, soit vers l'orient, soit vers l'occident: Vénus s'en écarte de 50 degrés environ à l'orient et à l'occident.

XIV. Le lever se fait de plusieurs manières: d'abord proprement et communément, pour le soleil et les autres astres, par leur élévation au-dessus de l'horizon: ensuite pour ceux qui par leur éclat commençant à se distinguer des rayons du soleil, ce qui est encore proprement une manière de se lever. Reste encore le lever appelé lever à la nuit tombante, qui se produit à l'orient après le coucher du soleil, dans la partie du ciel diamétralement opposée. On l'appelle « ἀκρόνυχος » parce qu'il se fait à une extrémité de la nuit, s'est ou commencement. Pareillement le premier coucher est la descente au-dessous de l'horizon. Ensuite il y a le coucher produit par la diffusion de l'éclat de l'astre dans les rayons lumineux du soleil on l'appelle aussi proprement une disparition. Reste encore le coucher dit coucher de la pointe du jour, quand le soleil se levant, un astre disparaît dans la partie de l'horizon diamétralement opposée.

Parmi les levers et les couchers dépendant du soleil et de ses rayons, c'est-à-dire parmi les phénomènes d'apparition et de disparition, les uns se font le matin, les autres le soir. Le lever de l'astre est au matin, lorsque l'astre précédant les rayons du soleil paraît avant lui à l'orient, comme le lever du Chien. Le lever est au soir, quand l'astre commence à paraître après le coucher du soleil, comme nous l'avons dit de la lune nouvelle. Pareillement le coucher est au matin quand l'astre, qui les jours précédents se levait avant le soleil, comme la lune, cesse de paraître à son approche; le coucher est au soir, quand le soleil étant tout près d'un astre à l'occident, celui-ci est invisible à cause du rayonnement voisin,

De l'ordre des planètes, et du concert céleste

XV. Relativement à la position et à l'ordre des sphères ou des cercles sur lesquels sont emportées les planètes, voici l'opinion de certains Pythagoriciens. Le cercle de la lune est le plus rapproché de la terre, celui de Mercure est le deuxième au-dessus, puis vient celui de Vénus, celui du soleil est le quatrième, viennent ensuite ceux de Mars et de Jupiter, celui de Saturne est le dernier et le plus rapproché des étoiles. Ils veulent, en effet, que le cercle du soleil tienne le milieu entre les planètes, comme étant le cœur de l'univers et le plus apte à commander. Voici ce que déclare Alexandre d'Étolie:

« Les sphères sont de plus en plus élevées

la lune divine est la plus proche de la Terre; la seconde est Stilbon, astre de Mercure inventeur de la lyre;

vient ensuite Lucifer, astre brillant de la déesse de Cythère;

au-dessus est le soleil traîné des chevaux, et qui occupe le quatrième rang;

Pyroïs, astre du cruel Mars de Thrace, est le cinquième;

Phaéton, astre brillant de Jupiter, est le sixième;

et Phénon, astre de Saturne, près des étoiles, est le septième.

Les sept sphères donnent les sept sens de la lyre et produisent une harmonie, c'est-à-dire une octave, à cause des intervalles qui les séparent deux à deux. »

D'après la doctrine de Pythagore, le monde étant, en effet, harmonieusement ordonné, les corps célestes qui sont distants deux à deux selon les proportions des sons consonants, produisent, par leur mouvement et la vitesse de leur révolution, les sons harmoniques correspondants. C'est pour cela qu'Alexandre s'exprime ainsi dans les vers suivants :

« La terre au centre donne le son grave de l'hypate;

la sphère étoilée donne la nète conjointe;

le soleil placé au milieu des astres errants donne la mèse;

la sphère de cristal donne la quarte par rapport à lui;

Saturne est plus bas d'un demi-ton;

Jupiter s'écarte autant de Saturne que du terrible Mars;

le soleil, joie des mortels, est d'un ton au-dessous;

Vénus diffère d'un trihémiton du soleil éclatant ;

Mercure renie d'un demi-ton inférieur à Vénus;

vient ensuite la lune qui donne à la nature des teintes si variées ;

enfin, la terre au centre donne la quinte par rapport au soleil

elle a cinq zones, des zones brumeuses à la zone torride, s'accommodant à la chaleur la plus intense, comme au froid le plus glacial.

Le ciel qui comprend six tons, complète l'octave.

Le fils de Jupiter, Mercure, nous représente une Sirène ayant une lyre à sept cordes, image de ce divin monde.^[7] »

Dans ces vers, Alexandre a indiqué pour les sphères l'ordre qu'il a voulu, il est évident qu'il a imaginé arbitrairement les intervalles qui les séparent et presque tout le reste. Il dit, en effet, que la lyre à sept cordes, image de l'univers, a été composée par Mercure, et qu'elle donne les consonances de l'octave; puis il établit l'harmonie du monde avec sons qui ne comprennent cependant que six tons.

Il est vrai qu'il attribue à la terre le son de l'hypate, comme étant plus grave que les autres; mais celle-ci étant immobile au centre, ne rend absolument aucun son. Puis, il donne le son de la nète conjointe à la sphère des étoiles et place entre les

deux les sept sons des planètes. Il attribue le son de la mèse au soleil. L'hypate ne donne pas avec la mèse la consonance de quinte, mais celle de quarte, et ce n'est pas avec la nète des conjointes qu'elle donne la consonance d'octave, mais avec la nète des disjointes.

Le système n'est pas conforme au genre diatonique, puisque dans ce genre le chant ne comporte ni un intervalle indécomposé de trihémiton, ni deux demi-tons de suite. Il n'est pas non plus chromatique, car dans le genre chromatique la mélodie ne comprend pas le ton indécomposé. Si l'on dit que le système est formé des deux genres, je répondrai qu'il n'est pas mélodieux d'avoir plus de deux demi-tons de suite. Mais tout cela manque de clarté pour ceux qui ne sont pas initiés à la musique.

Eratosthène expose, d'une manière semblable, l'harmonie produite par la révolution des astres, mais il ne leur assigne pas le même ordre. Après la lune qui est au-dessus de la terre, il donne la seconde place au soleil. Il dit, en effet, que Mercure, encore jeune, ayant inventé la lyre, monta d'abord au ciel, et qu'en passant près des astres qu'on nomme errants, il s'étonna que l'harmonie produite, par la vitesse de leurs révolutions fût la même que celle de la lyre qu'il avait imaginée... Dans des vers épiques, cet auteur paraît laisser la terre immobile et veut qu'il y ait huit sons produits par la sphère étoilée et par les sept sphères des planètes qu'il fait tourner autour de la terre; c'est pour cela qu'il fait une lyre à huit cordes, comprenant les consonances de l'octave. Cette explication vaut mieux que celle d'Alexandre.

Les mathématiciens n'établissent ni cet ordre, ni un même ordre parmi les planètes près la lune, ils placent le soleil, quelques-uns mettent au-delà Mercure, puis Vénus, d'autres mettent puis Mercure, ils rangent les autres planètes dans l'ordre que nous avons dit.

Du mythe du Pamphylien dans la « République ».

XVI. Platon, à la fin de la *République*, voulant exhorter à la justice et à la vertu, raconte une fable dans laquelle, parlant de l'arrangement des corps célestes, il dit qu'un axe traverse le pôle comme une colonne, il ajoute qu'il y a un autre axe du fuseau, avec des boules creuses s'emboîtant les unes dans les autres. Ces boules ne sont autres que les sphères portant les sept planètes; une dernière sphère, celle des étoiles, enveloppe toutes les autres. Il montre l'ordre de ces sphères, par rapport à la distance de chacun des astres, à leur couleur et à la vitesse de leur mouvement en sens contraire de celui de l'univers. Voici ce qu'il dit :^[8]

« Après que chacune de ces âmes eût passé sept jours dans la prairie, il leur avait fallu en partir le huitième se rendre, en quatre jours de marches en un lieu d'où l'on voyait une lumière tendant sur toute la surface du ciel et de la terre, droite comme une colonne, assez semblable à l'arc-en-ciel, mais plus éclatante et plus pure. Il leur avait fallu encore un jour de marche, pour arriver là où l'on voit, au milieu de cette bande lumineuse, les extrémités des attaches fixées au ciel. Cette bande est le lien du ciel et embrasse toute sa circonférence, comme les ceintures des trirèmes (pour empêcher la charpente de se disjoindre). Aux extrémités du lien était tenu le fuseau de la Nécessité. C'est lui qui donne le branle à toutes les révolutions des sphères. La tige et le crochet de ce fuseau étaient de diamant; le fuseau était formé de la même substance et d'autres matières précieuses.

« Voici comment il était fait : il ressemblait pour la forme au fuseau d'ici-bas; mais, d'après la description donnée par le Pamphylien, il faut se le représenter contenant dans sa concavité un autre fuseau plus petit qui en reçoit lui-même un troisième, comme de grands vases ajustés les uns dans les autres, il y en a ainsi un troisième, un quatrième, et quatre autres encore. C'étaient donc en tout huit fuseaux,

placés les un dans les autres, dont on voyait d'en haut les bonis circulaires et qui présentaient tous la surface courbe continue d'un seul fuseau autour de la tige passant par le centre du premier. Les bords circulaires de ce fuseau extérieur étaient les plus larges, puis ceux du sixième, du quatrième du huitième, du septième, du cinquième, du troisième et du second allaient en diminuant de largeur selon cet ordre.

« Les bords du plus grand fuseau (sphère des étoiles) étaient de différentes couleurs, le bord du septième (sphère du soleil) était d'une couleur très éclatante, celui du huitième (sphère de la lune) empruntait du septième sa couleur et son éclat. La couleur des cercles du second et du cinquième Saturne et Mercure était presque la même et ils étaient plus jaunes que les autres; le troisième (Jupiter) avait une couleur très blanche: celle du quatrième Mars était un peu rouge. Enfin, le sixième Vénus occupait le second rang pour l'éclat de sa blancheur.^[9] »

« Le fuseau extérieur tout entier faisait sa révolution dans le même sens que l'univers, et, dans l'intérieur, les sept fuseaux concentriques se mouvaient lentement en sens contraire; le mouvement du huitième était le plus rapide, ceux du septième, du sixième et du cinquième étaient moindres et d'une vitesse égale; le quatrième qui a un mouvement rétrograde plus rapide que celui des autres fuseaux et le troisième pour la vitesse, comme il leur parut ; le troisième n'avait que la quatrième vitesse, et le second n'avait que la cinquième. Le fuseau tournait sur les genoux de la Nécessité. Sur chacun de ces cercles émit assise une Sirène qui tournait avec lui et faisait entendre un son toujours le même. De tous ces sons, au nombre de huit, résultait une harmonie parfaite (c'est-à-dire une octave complète). »

Nous expliquons dans les *Commentaires de la République* cette exposition de Platon. Nous avons aussi construit une *Sphère* d'après ses explications. Platon dit, en effet, qu'on ferait un travail inutile si on voulait exposer ces phénomènes sans des images qui parlent aux yeux. Il dit que sur les cercles sont assises des Sirènes, c'est ainsi que quelques-uns désignent les planètes elles-mêmes, du mot « *σειριάζειν* » briller.^[10] Du reste, d'après Adraste, les poètes nomment souvent astres brillants « *σειρίους* » toutes les étoiles. Ainsi, on lit dans Ibyeus : étincelant comme les *τείρια* qui brillent dans une longue nuit.

D'autres n'appellent particulièrement ainsi que les étoiles brillantes et remarquables. Aratus se sert du verbe *σειρᾶν* pour indiquer qu'une étoile de la gueule du Chien brille d'un vif éclat,^[11] et un poète tragique a dit d'une planète : Quel est donc cet astre brillant, « *σεῖρος* » qui passe au dessus de nos têtes?^[12] Quelques auteurs prétendent que les astres ne peuvent pas être pris pour des Sirènes, mais que, suivant la doctrine pythagoricienne, des sons et des accords sont produits par leurs révolutions, d'où résulte une harmonie parfaite.

Du mouvement des planètes.

XVII. Pour les planètes, dit Adraste, il y en a qui ont toujours laissées en arrière, tels sont le soleil et la lune qui ne vont jamais vers les signes qui précèdent, mais qu'on voit toujours aller vers ceux qui suivent; aussi ces planètes n'ont-elles jamais de stations ni de rétrogradations. Il en a d'autres qui se meuvent vers les signes précédents et vers les signes suivants, ce sont toutes les autres planètes. C'est pour cela qu'elles paraissent nécessairement tantôt s'arrêter et tantôt rétrograder.

XVIII. Le mouvement contraire est, d'après Adraste, celui d'une planète qui semble toujours aller vers les signes qui suivent à l'orient. Mais, d'après Platon, ce n'est pas une apparence, c'est, en réalité, le mouvement propre d'un astre qui va à l'orient

dans les signes suivants, par exemple, du Cancer dans le Lion.

XIX. Le mouvement en avant est le mouvement d'une planète qui semble aller vers les signes précédents à l'occident, par exemple, du Cancer aux Gémeaux.

XX. La station est l'état d'une planète qui semble s'arrêter et rester quelque temps près de quelque une des étoiles fixes.

XXI. La rétrogradation est le retour apparent d'une planète de sa station en sens contraire de son premier mouvement. C'est ainsi que cela paraît se produire, mais ce n'est qu'une apparence : la cause est que chaque planète se mouvant au-dessous des étoiles, dans un cercle ou dans une sphère qui lui est propre, nous semble, à cause de la résistance, emportée, relativement à la zone zodiacale qui est au dessus: et, comme l'explique Adraste, ce ne sont là que des hypothèses différentes sur les planètes, hypothèses rendues vraisemblables par l'accord avec les phénomènes.

XXII. Il dit que le monde tel qu'il est, composé des parties si nombreuses et si diverses que nous avons distinguées, se meut d'un mouvement circulaire et propre à sa forme sphérique, et que ce mouvement a été communiqué par un premier moteur; c'est pourquoi ce monde a été arrangé, grâce à une cause supérieure et la meilleure. Le mouvement des planètes a été diversement disposé pour le calcul du temps et leur retour au périhélie et à l'apogée, de sorte que ce qui se fait ici-bas suit complètement ce mouvement. C'est, en effet, par les révolutions des astres qui viennent ou s'en vont que sont aussi changées toutes choses ici bas. Le mouvement circulaire des étoiles est simple et unique, il est régulier et uniforme; le mouvement des planètes est, il est vrai, circulaire; mais il ne paraît ni simple et unique, ni uniforme et régulier. Et dans le monde sublunaire autour de nous et jusqu'à nous, tout est changement et mouvement, et comme dit le poète:

Ici-bas on ne voit que l'envie et le meurtre.

Et tous les autres maux. ^[13]

Il n'y a, en effet, que génération et corruption, accroissement et décroissance, altération en tout genre et changement de lieu. Les planètes, dit Adraste, sont la cause de tous ces phénomènes. On dira que ces choses existent, non comme ce qu'il y a de plus précieux, de divin, d'éternel, de non engendré, d'incorruptible, causé par ce qui est moindre, mortel et périssable, mais bien qu'elles sont ainsi à cause de ce qu'il y a de meilleur, de plus beau, de plus heureux, et que ce qui est ici-bas ne suit que *par accident* la marche des choses supérieures.

Pour que le mouvement de l'univers qui résulte d'une force active et d'une cause divine, soit circulaire et toujours semblable à lui-même. Il faut que la terre occupe le centre autour duquel se produit le mouvement, et s'il faut qu'elle soit en dessous, il faut aussi que le feu occupe le lieu opposé vers l'essence éthérée qui se meut en cercle. Entre les deux éléments ainsi séparés, il faut que les autres, l'eau et l'air, soient en proportion. Cela étant, il faut encore qu'il y ait changement de toutes choses ici-bas, parce que la nature des choses est profondément changeante et qu'elles sont soumises à des forces contraires.

Le changement se fait par le mouvement varié des planètes: en effet, si celles-ci étaient emportées suivant des cercles parallèles par le même mouvement que les étoiles fixes, la disposition de tous les corps étant universellement la même, il n'y aurait ici-bas aucun changement, aucune vicissitude. Or, les solstices et les équinoxes, les mouvements en avant et les retours, en hauteur et en latitude, surtout du soleil et de la lune, mais aussi des autres planètes, amènent les différentes saisons et produisent ici-bas: toutes les transformations, toutes les générations et toutes les altérations.

L'aspect varié que présente la révolution des planètes, provient de ce pic, fixées à des cercles propres ou à des sphères propres dont elles suivent le mouvement, elles sont emportées à travers le zodiaque, ainsi que Pythagore l'a compris le premier, par une révolution réglée, simple et égale, mais d'où résulte, *par accident*, un mouvement apparent varié et inégal.

XXIII. Voici ce que ditAdraste de la position des cercles ou des sphères, position qui rend compte des apparences.

Il est naturel et nécessaire que, comme les étoiles fixes, chacun des autres corps célestes soit emporté uniformément et régulièrement, d'un mouvement simple et qui lui est propre. Je dis que cela sera évident, si, par la pensée, supposant le monde immobile, nous imaginons que les planètes se meuvent au-dessous du zodiaque immobile par hypothèse; leur mouvement alors ne paraîtra plus varié et inégal, mais il paraîtra s'accomplir régulièrement comme nous l'avons montré par la construction de la *Sphère* de Platon.

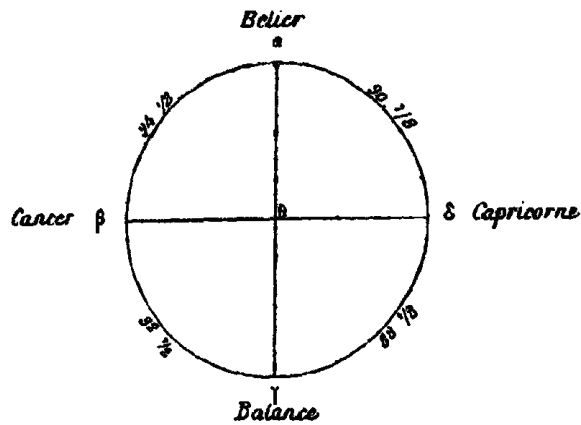
Un double mouvement est la cause du mouvement varié apparent dans un sens et dans l'autre: la sphère étoilée est emportée d'orient en occident autour de l'axe qui passe par les ptes, et dans le mouvement rapide qui lui est propre. Elle entraîne les planètes et décrit les parallèles que suivent les étoiles; d'un autre côté, les planètes, par un mouvement plus lent qui leur est propre, sont emportées du couchant au levant, dans des temps inégaux, sous le zodiaque oblique aux trois cercles parallèles, le tropique d'hiver, l'équinoxial et le tropique d'été. Ce mouvement s'accomplit autour d'un autre axe, perpendiculaire au zodiaque, et qui s'écarte de l'axe des étoiles de la valeur du côté du pentédécagone régulier.^[14] Platon appelle l'axe des planètes tige du fuseau, et même fuseau.

XXIV. Le mouvement est uniforme quand les espaces parcourus en temps égaux sont égaux, sans jamais augmenter ni diminuer de vitesse.

XXV. Le mouvement est régulier, quand le mobile n'a ni station, ni rétrogradation, mais est emporté dans le même sens toujours également. Or, toutes les planètes nous paraissent avoir quelque chose d'inégal certaines même quelque chose de désordonné. Quelle est donc la cause d'une semblable apparence? La principale est que se trouvant sur des sphères ou sur des cercles différents par lesquels elles sont emportées, elles paraissent se mouvoir sur le zodiaque, comme nous l'avons déjà dit.

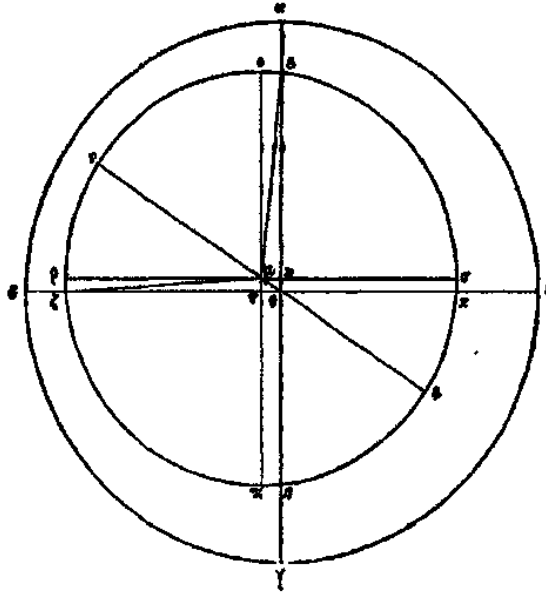
Du mouvement du soleil

XXVI. Comme conséquences ainsi qu'il a été dit plus haut, les sept planètes, qui ont cependant un mouvement propre simple, décrivent plusieurs cercles différents. Cela deviendra clair pour nous, si nous considérons la plus brûlante et la plus grande de ces planètes, le soleil. Soit $\alpha\beta\gamma\delta$ le zodiaque, θ le centre de ce cercle et de l'univers, qui est en même temps celui de la terre, et soient $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ deux diamètres perpendiculaires passant par ce point. Soit le point α au commencement du Bélier, β au commencement du Cancer, puis γ au commencement de la Balance et δ au commencement du Capricorne.



Le soleil se trouve en α à l'équinoxe de printemps, en β au solstice d'été, en γ à l'équinoxe d'automne, et en δ au solstice d'hiver; il parcourt irrégulièrement, dans des temps inégaux, les quatre arcs égaux $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$. En effet, il va de l'équinoxe du printemps au solstice d'été en 94 jours $\frac{1}{2}$, du solstice d'été à l'équinoxe d'automne en 92 jours $\frac{1}{2}$, de l'équinoxe d'automne ou solstice d'hiver en 88 jours $\frac{1}{8}$, et du solstice d'hiver à l'équinoxe de printemps en 90 jours $\frac{1}{8}$, de sorte qu'il parcourt annuellement le cercle entier en 365 jours $\frac{1}{4}$ environ; sa plus petite vitesse est en entrant dans les Gémeaux, sa plus grande dans le Sagittaire; dans la Vierge et les Poissons il a une vitesse moyenne

Il est naturel et nécessaire, comme nous l'avons dit, que toutes les créatures divines (les astres) aient un mouvement uniforme et régulier. Il est donc clair que le soleil avant un cours régulier et uniforme, sur un cercle qui lui est propre, paraîtra se mouvoir irrégulièrement pour nous qui le regarderons du point θ sur son cercle $\alpha\beta\gamma\delta$. Si donc ce cercle avait le même centre que celui de l'univers, c'est-à-dire le point θ , il serait divisé dans les mêmes rapports par les diamètres $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ nous resterions encore embarrassés en présence de cette égalité des angles au centre et de la similitude des arcs. Il est donc évident que la cause de cette apparence est un mouvement différent qui ne s'effectue pas autour du centre θ . Le point θ sera intérieur à la circonférence, ou il sera sur la circonférence elle-même, ou il sera extérieur. Or il est impossible que la circonférence solaire passe par le point θ , car le soleil rencontrerait la terre dont les habitants auraient les uns toujours le jour, les autres toujours la nuit; il n'y aurait ni lever ni coucher et on ne verrait point le soleil tourner autour de la terre, ce qui est absurde. Il reste donc à supposer le point θ à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle solaire. A quelque hypothèse que l'on s'arrête, les apparences seront expliquées, c'est pour cela qu'on peut considérer comme vaines les discussions des mathématiciens qui disent que les planètes ne sont emportées que sur des cercles excentriques, ou sur des épicycles, ou autour du même centre que la sphère étoilée. Nous démontrerons que les planètes décrivent *par accident* ces trois sortes de cercles, un cercle autour du centre de l'univers, ou un cercle excentrique ou un cercle épicycle. Si nous supposons que le point θ est à l'intérieur du cercle solaire, mais non au centre, on dit que le cercle est excentrique; si le point θ est extérieur, il y a épicycle.



Du cercle excentrique

XXVI *bis*. Supposons d'abord que le cercle excentrique solaire soit $\epsilon\zeta\eta\kappa$, placé de manière à avoir son centre sous l'arc $\epsilon\zeta$, au point μ par exemple. Supposons encore que le cercle soit divisé en 365 parties et $1/4$, que l'arc $\epsilon\zeta$ en contienne $94 \frac{1}{2}$, $\zeta\eta$ 92 $1/2$, $\eta\kappa$ 88 $1/8$ et $\kappa\epsilon$ 90 $1/8$. Il est évident que, lorsque le soleil sera en ϵ , il nous paraîtra en α , à nous qui le verrons du point θ , suivant une ligne droite. Puis parcourant régulièrement l'arc $\epsilon\zeta$, qui est la plus grande des quatre divisions de son propre cercle, dans l'espace de 94 jours $1/2$, autant de jours qu'il y a de divisions dans l'arc, il parviendra en ζ ; là il nous paraîtra en β et il nous semblera avoir parcouru irrégulièrement en un nombre de jours différent (du quart de 365 et $1/4$) l'arc $\alpha\beta$ qui est le quart du zodiaque.

De même lorsqu'il aura parcouru l'arc $\zeta\eta$, le second de son propre cercle en grandeur, dans l'espace de 92 jours $1/2$ qui correspondent au nombre des divisions de l'arc, il se trouvera en η , et il nous paraîtra en γ , il nous semblera qu'il a parcouru irrégulièrement en moins de jours, l'arc $\beta\gamma$, quart du zodiaque, égal au précédent. Pareillement lorsqu'il aura parcouru l'arc $\eta\kappa$, la plus petite des quatre divisions du cercle, en 88 jours $1/8$, nombre égal aux divisions de l'arc, il sera en κ et il nous paraîtra en δ , à nous qui l'observerons du point θ , il nous semblera avoir parcouru l'arc $\gamma\delta$ égal aux précédents en un nombre moindre de jours.

Enfin, pour la même raison, lorsqu'il aura parcouru $\kappa\epsilon$ en 90 jours $1/8$, nombre de jours égal au nombre des divisions de l'arc, et qu'il sera revenu en ϵ , il nous semblera qu'il a parcouru, en 90 jours $1/8$, l'arc $\delta\alpha$ égal aux autres, et qu'il est revenu en α . C'est pour cela que parcourant uniformément son cercle, il semblera parcourir irrégulièrement le cercle zodiacal. Or si joignant les centres θ , μ , par une ligne droite, nous prolongeons cette ligne de part et d'autre, nous aurons $\mu\nu = \mu\xi$, puisque μ est le centre du cercle $\epsilon\zeta$. Ainsi donc le soleil en ν sera à sa plus grande distance de la terre et pour nous qui sommes au point θ , il nous paraîtra avoir le minimum de grandeur et de vitesse; ce phénomène paraît se produire vers le 5^e degré $1/2$ des Gémeaux.

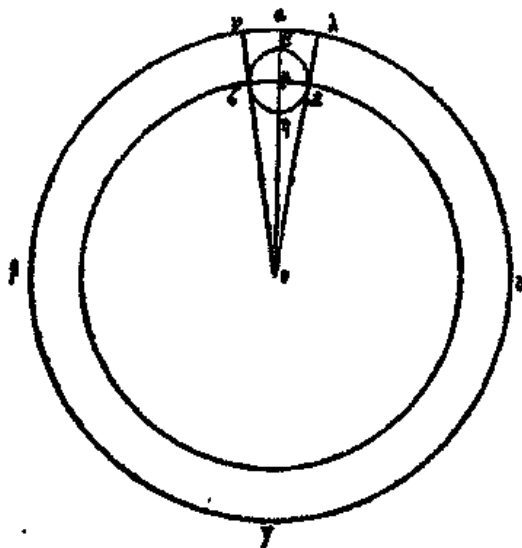
Arrivé en ξ il sera à sa plus petite distance de la terre et il paraîtra avoir le maximum de grandeur et de vitesse; ce dernier fait semble se produire au 5^e degré $1/2$ du Sagittaire. Et avec raison il paraît avoir une grandeur et une vitesse moyenne,

quand il occupe les mêmes degrés dans les Poissons et dans la Vierge. C'est ainsi que seront expliquées toutes les apparences.

Le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ est donné de position et de grandeur. Menons, en effet, par le point μ les droites $\sigma\pi$, $\rho\sigma$ respectivement parallèles aux droites $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, perpendiculaires entre elles et joignons $\zeta\mu$, $\mu\epsilon$. Le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ étant divisé en 365 parties et $1/4$, il est évident que l'arc $\epsilon\zeta\eta$ en contiendra 187 et l'arc $\eta\kappa\epsilon$ 178 et $1/4$; mais les arcs $\epsilon\sigma$, $\pi\eta$ sont égaux, ainsi que les arcs $\rho\zeta$, $\sigma\kappa$; de plus chacun des arcs $\sigma\pi$, $\pi\rho$, $\rho\sigma$, $\sigma\epsilon$ est représenté par 91 divisions + $1/4$ + $1/16$.^[15] L'angle $\sigma\mu\nu$ est donc donné, il est égal à l'angle $\theta\mu\tau$. De même l'angle $\rho\mu\nu = \sigma\mu\theta$ donc le rapport de $\mu\tau$ à $\mu\nu$ c'est-à-dire de $\mu\tau$ à $\theta\tau$, est donné et le triangle $\mu\tau\theta$ est donné de forme. Mais le centre θ de l'univers est aussi donné par rapport aux deux points ν et ξ , car l'un de ces points est à la plus grande distance de la terre et l'autre à la plus petite. La ligne droite $\theta\mu$ joint les centres de l'univers et du cercle solaire, Le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ est donc donné de position et de grandeur. On trouve par la considération des distances et des grandeurs que le rapport de la droite $\theta\mu$ à $\mu\nu$ est à peu près celui de 1 à 24. Telle est l'hypothèse sur le cercle excentrique, hypothèse qui explique toutes les apparences.

Du cercle épicycle

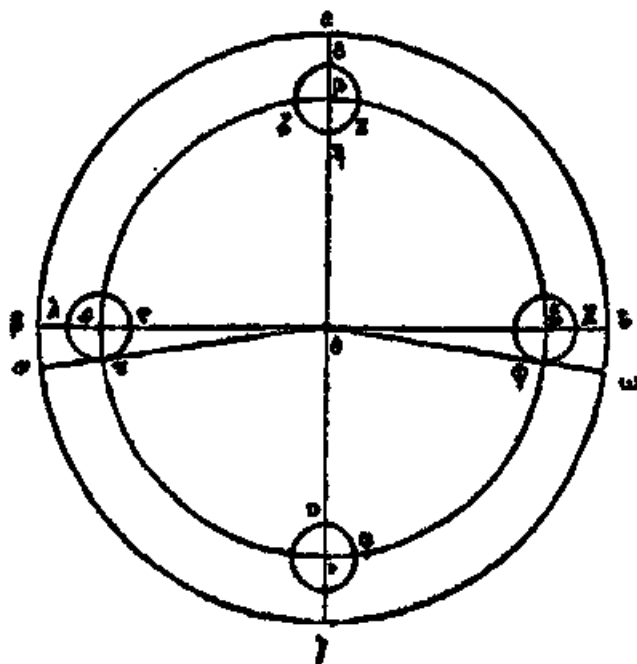
XXVI *ter*. Voici maintenant le raisonnement au moyen de l'épicycle. Soit encore le zodiaque $\alpha\delta$ et le cercle solaire $\alpha\beta\gamma\delta$ qui laisse à l'extérieur le centre θ de l'univers. La sphère étoilée se mouvant du levant β au méridien α , puis du point α au couchant δ , ou le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ sera immobile ou il se mouvra lui-même pendant que le soleil tournera autour de lui. S'il est immobile, il est clair que le soleil ne paraîtra ni se lever ni se coucher; mais il produira toujours le jour pour ceux, qui sont au-dessus de la terre et toujours la nuit pour ceux qui sont au-dessous, par rapport à nous, et, dans une seule révolution (diurne) de l'univers, il paraîtra parcourir tous les signes. Ce qui est contraire aux faits.



Le cercle se mouvra donc lui-même, et, se mouvant, il se portera dans le même sens que l'univers ou en sens contraire. S'il tourne dans le même sens, c'est avec une vitesse égale, ou plus grande ou plus petite. Supposons qu'il se meuve avec la même vitesse, tirons les droites $\theta\zeta\nu$, $\theta\kappa\lambda$, tangentes au cercle $\epsilon\zeta$, le soleil paraîtra toujours aller et venir dans l'arc $\nu\alpha\lambda$ du zodiaque. En effet, arrivé en ζ il paraîtra en ν ; lorsqu'il sera en ϵ il paraîtra en α , et transporté en κ il paraîtra en λ . Lorsqu'il aura parcouru l'arc $\zeta\epsilon\kappa$, il paraîtra avoir décrit l'arc $\nu\alpha\lambda$ vers les signes

qui précèdent. Puis lorsqu'il aura parcouru l'arc $\kappa\eta\zeta$, il paraîtra se porter par l'arc $\lambda\alpha\nu$ vers les signes suivants. Or cela ne se passe pas ainsi, le cercle solaire $\epsilon\zeta\eta\kappa$ ne se porte donc pas dans le même sens que l'univers avec la même vitesse. Il n'a pas non plus une vitesse plus grande, car alors il paraîtrait devancer les étoiles et parcourir le zodiaque en sens contraire, c'est-à-dire du Bélier aux Poissons et au Verseau. Ce qui n'est pas.

Il est donc évident que le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ se meut dans le même sens que l'univers, avec une vitesse moindre, c'est pour cela qu'il paraît être laissé en arrière et passer dans les signes suivants, de sorte qu'il paraît avoir un mouvement propre, contraire à celui de l'univers, tout étant emporté chaque jour dans le même sens, du levant au couchant. C'est ainsi qu'il paraît passer dans les signes suivants, étant en quelque sorte laissé en arrière.



Comment donc ce cercle rendra-t-il compte de ces apparences? Soit μ le centre du cercle solaire. Décrivons le cercle $\mu\nu\xi$ du centre θ avec le rayon $\theta\mu$, et supposons que le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ est emporté d'orient en occident en même temps que l'univers et qu'il est laissé en arrière à cause de sa moindre vitesse, ou bien qu'il se meut dans un sens contraire à celui de l'univers, ce qui paraît plus probable à Platon,^[16] de sorte que le centre, emporté régulièrement sur le cercle $\mu\nu\xi$ le parcourt dans l'espace d'un an, et que le soleil, dans ce même laps de temps, achève aussi sa propre révolution, d'un mouvement régulier. En outre, le soleil sera porté sur le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ ou dans le même sens que l'univers ou en sens contraire, c'est-à-dire dans le même sens que son cercle propre, du point κ au point ϵ et du point ϵ au point ζ .

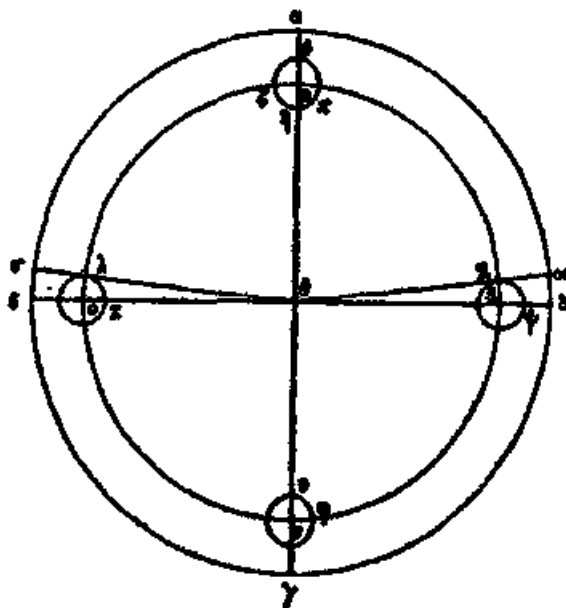
Or je dis que le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ étant emporté sur le cercle $\mu\nu\xi$, d'un mouvement contraire à celui de l'univers, le soleil se mouvra sur le cercle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ dans le même sens que l'univers et expliquera ainsi les apparences.

Supposons d'abord qu'il soit emporté par un mouvement δ contraire à celui de l'univers, mais dans le même sens que son cercle, c'est-à-dire de ϵ en ζ , de ζ en η , de η en κ . Puisque parvenu en ϵ il sera le plus éloigné de nous, il est clair que α est dans le cinquième degré et demi des Gémeaux, donc γ sera dans le cinquième degré et demi du Sagittaire. Supposons que le point μ centre du cercle solaire, décrive d'un

mouvement régulier l'arc $\mu\sigma$, quart de la circonférence du cercle $\mu\nu\xi$ et que le cercle $\varepsilon\zeta\eta\kappa$ soit transporté en $\lambda\pi$, le soleil, emporté régulièrement dans le même sens, décrira l'arc $\varepsilon\zeta$ de la circonférence du cercle $\varepsilon\zeta\eta\kappa$. Il sera donc au point π et il nous apparaîtra en σ , et lorsqu'il aura décrit l'arc $\varepsilon\zeta$, quart de son propre cercle, il paraîtra avoir parcouru l'arc $\alpha\beta\sigma$, plus grand que le quart du zodiaque, et s'être éloigné rapidement du point α .

Le centre o décrira ensuite l'arc ov , quart de la circonférence, le cercle $\lambda\pi$ viendra et $\varphi\upsilon$, et le soleil aura parcouru l'arc $\tau\pi$, quart de la circonférence, il sera donc en υ , nous apparaîtra en γ et semblera avoir parcouru l'arc $\sigma\gamma$, moindre que le quart du zodiaque et s'être rapproché lentement du point γ . Le point v ayant parcouru le quart $v\xi$ de la circonférence, son cercle sera porté en $\chi\psi$, et le soleil ayant décrit le quart de la circonférence sera au point ψ , il apparaîtra au point ω et semblera avoir décrit l'arc $\gamma\omega$, moindre que le quart de la circonférence, et être venu lentement du point γ .

Enfin le centre ξ , décrivant l'arc $\xi\mu$, quart de la circonférence, rétablira le cercle $\psi\chi$ sur $\varepsilon\zeta\eta\kappa$, et le soleil lui-même, ayant décrit un arc semblable $\psi\chi$, reviendra en ε et apparaîtra en α . Alors aussi il semblera avoir décrit un arc $\omega\delta\alpha$ du zodiaque plus grand que le quart de la circonférence et s'être hâté d'arriver en α . Il est donc évident que dans son mouvement il paraîtra avoir une plus grande vitesse dans les Gémeaux et une moindre dans le Sagittaire. C'est cependant le contraire qu'on observe. Tandis que le cercle solaire est emporté sur la circonférence du cercle concentrique $\mu\nu\xi$ en sens contraire de l'univers, le soleil ne peut donc pas se mouvoir sur l'épicycle dans le même sens que ce cercle et en sens contraire de l'univers.



Il reste à examiner le cas où l'épicycle ayant un mouvement contraire à celui de l'univers, le soleil se meut sur l'épicycle dans le même sens que les étoiles fixes. C'est ainsi que seront expliquées les apparences. En effet, supposons que le centre de l'épicycle décrive l'arc $\mu\sigma$ quart de la circonférence du cercle concentrique, et qu'il transporte avec lui l'épicycle en $\lambda\pi$, le soleil aura décrit sur l'épicycle l'arc semblable $\varepsilon\kappa$, il sera donc en λ et il nous apparaîtra en σ , ayant parcouru un arc égal au quart de son propre cercle; mais sur le zodiaque il semblera avoir parcouru l'arc plus petit $\alpha\sigma$, avec une vitesse faible à partir du point α .

Puis le centre o décrira le quart ov de la circonférence et le soleil décrira l'arc

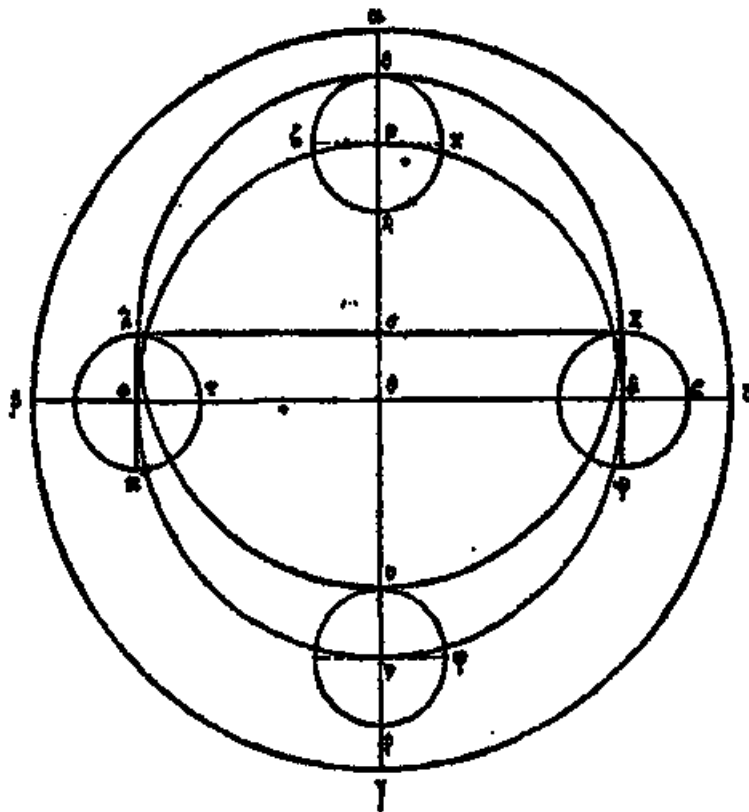
semblable $\lambda\pi$ de l'épicycle, alors il sera en υ et paraîtra en γ , semblera avoir parcouru, en augmentant de vitesse vers γ , l'arc du zodiaque $\sigma\beta\gamma$ plus grand qu'un quart de circonférence. Que ν soit transporté en ξ , l'arc $\nu\xi$ étant le quart de la circonférence et que le cercle $\upsilon\varphi$ s'applique sur le cercle $\chi\psi$, le soleil décrivant l'arc $\upsilon\varphi$ semblable aux précédents sera en χ , et paraîtra en ω ; il semblera avoir parcouru l'arc $\gamma\delta\omega$ du zodiaque, plus grand qu'un quart de circonférence, et être passé rapidement de γ en δ .

Le centre parcourant l'arc restant $\xi\mu$, l'épicycle $\chi\psi$ reviendra en $\varepsilon\zeta\eta\kappa$ et le soleil, décrivant l'arc semblable $\chi\psi$ qui reste sera rétabli en ε . Il apparaîtra en α et semblera avoir parcouru l'arc $\omega\alpha$, plus petit qu'un quart de circonférence, et s'être lentement approché de α . C'est ainsi que suivant cette hypothèse toutes les apparences s'expliquent, car le soleil paraîtra se mouvoir plus lentement et être plus petit, vers le cinquième degré et demi des Gémeaux et se mouvoir plus rapidement et être plus grand, vers le même degré du Sagittaire. Ce qui est conforme aux apparences. Car il passe du point ε au point κ , tandis que le centre du cercle passe lui-même de μ en \omicron , ayant un mouvement contraire (à celui de son propre cercle)...

Allant en π , pendant que l'épicycle passe de \omicron en ν , le soleil, qui va dans le même sens que lui, paraîtra s'avancer sur le zodiaque d'un mouvement en quelque sorte concordant $\omicron\sigma$ avec le sien. Pareillement transporté de υ en φ , pendant que l'épicycle passe de ν en ξ , il paraîtra augmenter de vitesse sur le zodiaque, comme s'il devançait son propre cercle. Au contraire, en passant de χ en ψ pendant que l'épicycle passe de ξ en μ , le soleil, transporté en sens contraire du mouvement de son propre cercle, paraîtra accomplir lentement sa marche sur le zodiaque.

On peut trouver la grandeur de l'épicycle et le rapport de la distance des centres au diamètre $\varepsilon\eta$ de l'épicycle $\varepsilon\zeta$. Ce rapport inverse du précédent, car il est égal au rapport de 24 à 1, s'obtient par la considération des distances et des grandeurs. La plus grande distance du soleil à la terre est $\theta\varepsilon$, la plus petite est $\theta\upsilon$ et la différence de ces deux distances est égale au diamètre de l'épicycle. Telle est l'explication au moyen de l'épicycle, le cercle $\varepsilon\zeta\kappa$ de la planète se mouvant sur un cercle concentrique qui est $\mu\nu\xi$.

Adraste montre ainsi que les phénomènes sont expliqués dans l'une et l'autre hypothèse, celle de l'excentrique et celle de l'épicycle. Hipparque a fait remarquer qu'elle est digne de l'attention du mathématicien, la recherche de l'explication des mêmes phénomènes à l'aide d'hypothèses si différentes, celle des cercles excentriques et celle des cercles concentriques et des épicycles. Adraste a montré que l'hypothèse de l'excentrique est une conséquence de celle de l'épicycle; à dire vrai, l'hypothèse de l'épicycle est aussi une conséquence de celle de l'excentrique.

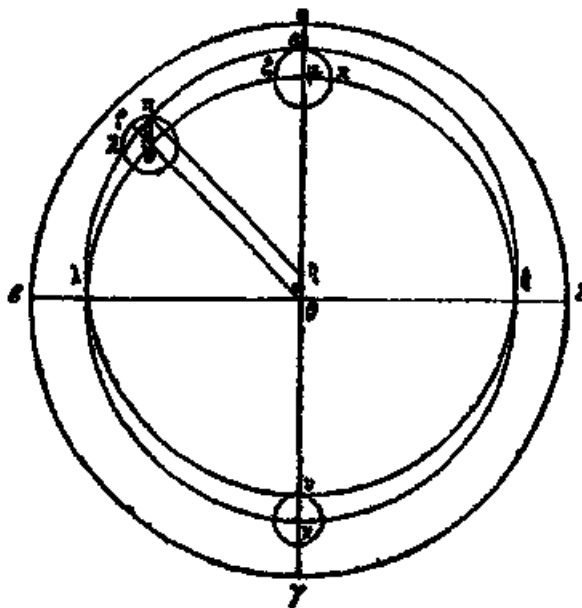


Soit, en effet, $\alpha\beta\gamma\delta$ le zodiaque, θ le centre de l'univers, $\varepsilon\zeta\eta\kappa$ l'épicycle du soleil et μ son centre. Décrivons, du centre θ , avec le rayon $\theta\mu$, le cercle $\mu\nu\xi$; je dis que le centre parcourant uniformément la circonférence du cercle homocentrique $\mu\nu\xi$, d'un mouvement contraire à celui de l'univers et emportant avec lui l'épicycle, il arrivera que le soleil, parcourant dans le même temps l'épicycle $\varepsilon\kappa\eta\zeta$, d'un mouvement uniforme et dans le même sens que l'univers, décrira aussi l'excentrique égal au concentrique $\mu\nu\xi$. Menons, en effet, les diamètres du zodiaque $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ perpendiculaires entre eux, de manière que le point α soit sur le cinquième degré et demi des Gémeaux et γ sur le même degré du Sagittaire, et des centres σ , ν , ξ , traçons les cercles $\lambda\pi\tau$, $\upsilon\varphi$, $\chi\psi\zeta$, égaux à l'épicycle $\varepsilon\zeta\eta\kappa$ et les diamètres $\lambda\pi$ et $\chi\psi$ des cercles $\lambda\pi\tau$ et $\chi\psi\zeta$ perpendiculaires au diamètre $\beta\delta$; tirons enfin la droite $\lambda\chi$.

Les droites $\lambda\chi$, $\sigma\xi$, sont égales et parallèles entre elles. Les droites $\lambda\sigma$ et $\sigma\chi$ sont donc respectivement égales aux droites $\sigma\theta$ et $\theta\xi$ qui sont des rayons du cercle $\mu\nu\xi$; et puisque la droite $\theta\sigma$ est égale à $\sigma\lambda$, elle sera aussi égale à chacune des droites $\sigma\nu$, $\mu\varepsilon$. Mais on a $\theta\mu = \theta\nu$, donc on a aussi $\sigma\nu = \sigma\varepsilon$, or $\theta\sigma = \sigma\nu$, et la droite $\theta\sigma$ est commune; donc $\sigma\nu = \sigma\varepsilon$. Chacune des deux droites $\sigma\nu$ et $\sigma\varepsilon$ est donc égale au rayon du cercle $\mu\nu\xi$; mais on a montré que chacune des droites $\lambda\sigma$, $\sigma\chi$ est égale au rayon de ce cercle, les quatre droites $\sigma\varepsilon$, $\sigma\lambda$, $\sigma\nu$, $\sigma\chi$, sont donc égales et perpendiculaires entre elles; donc le cercle décrit du centre σ , avec un rayon égal à l'une de ces droites, passera par les points ε , λ , ν , χ , sera égal au cercle $\mu\nu\xi$ et sera divisé en quatre parties égales par les diamètres $\varepsilon\nu$, $\lambda\chi$. Décrivons ce cercle et supposons que ce soit $\varepsilon\lambda\nu\chi$. Il sera excentrique; le point qui se projette en α , au cinquième degré et demi des Gémeaux, sera le plus éloigné de la terre, et le point qui se projette en γ , au cinquième degré et demi du Sagittaire, en sera le plus rapproché.

Je dis que le soleil, μ , comme on l'a supposé, sur l'épicycle $\varepsilon\kappa\eta\zeta$, décrira naturellement l'excentrique $\varepsilon\lambda\nu\chi$. En effet, que le centre de l'épicycle décrive l'arc

$\mu\sigma$, quart de la circonférence, le soleil dans le même temps décrira l'arc semblable $\epsilon\kappa$ de l'épicycle, viendra en λ et arrivera de ϵ en λ ayant parcouru le quart $\epsilon\lambda$ de l'excentrique. Que le centre décrive de nouveau le quart ov de la circonférence, le soleil parcourra l'arc semblable $\lambda\tau$ de l'épicycle; il sera donc en u et décrira a par conséquent l'arc semblable λu de l'excentrique. Pareillement, pendant que le point v décrira l'arc $v\xi$, le soleil parcourra l'arc semblable $u\varphi$ de l'épicycle, il sera donc en χ , ayant décrit par conséquent l'arc semblable $u\chi$ de l'excentrique. Enfin, pendant que le point ξ parcourra l'arc $\epsilon\mu$ le soleil ayant décrit l'arc $\chi\zeta$ reviendra en ϵ . Il décrira donc aussi dans le même temps l'arc semblable restant $\epsilon\chi$ de l'excentrique. Ainsi, en parcourant uniformément tout l'épicycle, pendant que celui-ci est emporté sur le concentrique, le soleil décrit un excentrique; c'est ce qu'il fallait prouver.^[17]



On démontre la même proposition de cette manière. Soit $\alpha\beta\gamma\delta$ le zodiaque^[18] et $\epsilon\zeta\kappa$ l'épicycle solaire ayant son centre sur la circonférence du cercle $\mu\nu\xi$ qui est homocentrique autour du centre θ de l'univers. Soit aussi le point ϵ , le point le plus éloigné de la terre, au cinquième degré et demi des Gémeaux, je dis que l'épicycle $\kappa\epsilon$, étant emporté sur la circonférence du cercle $\mu\nu\xi$ d'un mouvement uniforme et contraire à celui de l'univers, et le soleil parcourant dans le même temps l'épicycle $\epsilon\kappa\zeta$, d'un mouvement uniforme et contraire à l'épicycle, et par conséquent dans le même sens que l'univers, décrira par suite un excentrique égal au concentrique $\mu\nu\xi$.

Supposons en effet, que le centre μ ait décrit un arc quelconque $\mu\sigma$ et que l'épicycle soit arrivé en $\pi\chi$, le soleil parti du point ϵ , c'est-à-dire du point ρ aura décrit dans le même temps l'arc $\rho\pi$, semblable à l'arc $\mu\sigma$; prenons la droite $\theta\eta$ égale au rayon $\mu\epsilon$ et tirons les droites $\eta\pi$, $\theta\rho$. Puisque l'arc $\rho\pi$ est semblable à l'arc $\sigma\mu$, l'angle φ est égal à l'angle τ .^[19] Donc la droite $\rho\theta$ est parallèle à $\theta\eta$ mais elle lui est aussi égale, la droite $\pi\eta$ est donc égale et parallèle à la droite $\sigma\theta$. Or la droite $\sigma\theta$ est égale à la droite $\eta\epsilon$. Donc la droite, $\pi\eta$ est égale à la droite $\eta\epsilon$. Donc le cercle décrit du centre η , avec le rayon $\eta\epsilon$, passera par π et sera égal au cercle $\mu\nu\xi$.

Décrivons le cercle $\epsilon\pi\lambda\xi$ (du centre η , avec $\eta\pi = \eta\epsilon$ pour rayon); ce cercle sera l'excentrique. Puisque $\pi\eta$ est parallèle à $\rho\theta$, l'angle φ sera égal à l'angle τ ; c'est-à-dire à $\pi\eta\epsilon$, l'arc $\epsilon\pi$ est donc semblable à l'arc $\pi\rho$ (de l'épicycle $\pi\rho\chi$). Le soleil partant du point ϵ décrira par conséquent l'arc $\epsilon\pi$ semblable de l'excentrique. On

démontrera de même qu'il en est toujours ainsi; de sorte que le soleil ayant parcouru tout l'épicycle se mouvant lui-même sur un cercle concentrique décrit aussi tout un cercle excentrique. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On peut démontrer aussi la proposition inverse. Soit de nouveau $\alpha\beta\gamma\delta$ le zodiaque dont le diamètre est $\alpha\gamma$ et le centre θ ; soit encore $\epsilon\lambda\upsilon\xi$ le cercle excentrique du soleil, ϵ le point le plus éloigné du centre de la terre, sous le cinquième degré et demi des Gémeaux, et soit η son centre sur la droite $\alpha\theta$. Décrivons, du centre θ avec le rayon $\eta\epsilon$, le cercle $\mu\upsilon\nu\xi$ et du centre μ , avec le rayon $\mu\epsilon$, le cercle $\epsilon\zeta\kappa$. Il est clair que ce sera le même que l'épicycle. Je dis donc que le soleil décrivant uniformément la circonférence $\epsilon\lambda\upsilon\xi$ de l'excentrique, décrira aussi par suite l'épicycle $\epsilon\zeta\kappa$ emporté uniformément dans le même temps sur le concentrique $\mu\upsilon\nu\xi$.

Supposons, en effet, que le soleil ait décrit un arc quelconque $\epsilon\pi$ de l'excentrique. Tirons la droite $\pi\eta$, et sa parallèle $\theta\rho$. Qu'on prenne op égale à $\theta\eta$ et qu'on tire po . Puisque les droites $\eta\pi$, θo , sont égales et parallèles, les droites $\eta\theta$, po seront aussi égales et parallèles; mais on a $\theta\eta = \mu\epsilon$, donc $op = \mu\pi$, donc le cercle décrit du centre o avec le rayon op passera par le point π et sera le même que l'épicycle $\epsilon\zeta\kappa$. Décrivons ce cercle $\pi\rho\chi$. A cause du parallélisme des droites (op , $\theta\eta$) les angles τ et φ sont égaux; mais dans les cercles à des angles égaux correspondent des arcs semblables, et dans les cercles égaux à des angles égaux correspondent des arcs égaux, que ces angles soient au centre ou sur la circonférence, donc les arcs $\rho\pi$, $\epsilon\pi$, μo sont semblables entre eux, et, de plus, les arcs $\epsilon\pi$, μo , sont égaux.

Ainsi donc, dans le même temps que le soleil parcourt l'arc $\epsilon\pi$ de l'excentrique, le centre μ de l'épicycle, décrivant l'arc μo , emportera l'épicycle $\epsilon\zeta\kappa$ en $\pi\rho\chi$, et le soleil ayant parcouru l'arc $\epsilon\pi$ de l'excentrique en partant du point ϵ , c'est-à-dire du point ρ , décrira l'arc semblable $\rho\pi$ de l'épicycle. On peut démontrer qu'il en est ainsi pendant tout le mouvement. Donc, en parcourant tout l'excentrique, le soleil décrit aussi tout l'épicycle. C'est ce qu'il fallait démontrer.

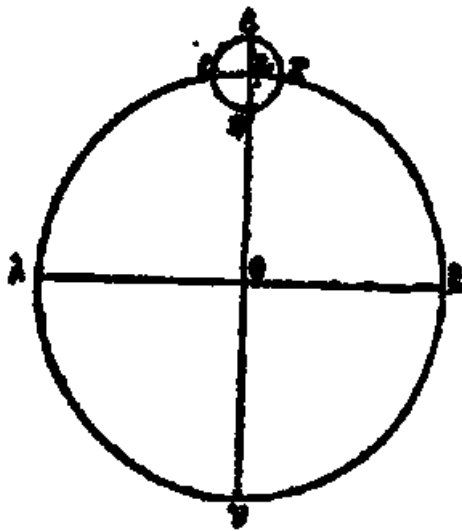
XXVII. Les mêmes démonstrations s'appliquent aux autres planètes. Le soleil paraît faire tous ces mouvements, dans l'une et l'autre hypothèse avec régularité, car les temps des retours à la même longitude, à la même latitude, au même éloignement qui produit l'inégalité qu'on nomme anomalie, sont tellement peu différents les uns des autres, que la plupart des mathématiciens les regardent comme égaux à 365 jours $1/4$. Ainsi, quand on considère attentivement le temps du retour en longitude pendant lequel le soleil parcourt le zodiaque, en allant d'un point au même point, d'un solstice au même solstice, ou d'un équinoxe au même équinoxe, c'est à très peu près le temps signalé plus haut, de sorte qu'au bout de quatre ans, le retour à un point de même longitude se fait à la même heure.

Quant au temps de l'anomalie après lequel le soleil au point le plus éloigné de la terre paraît le plus petit et le plus lent dans son mouvement vers les signes suivants, ou après lequel, au point le plus voisin de la terre, il paraît avoir le plus grand diamètre et la plus grande vitesse, il est à peu près de 365 jours $1/2$, de sorte qu'au bout de deux ans le soleil paraît revenir à la même distance à la même heure. Enfin, le temps de son retour en latitude, temps après lequel parti du point le plus septentrional ou le plus méridional, il revient au même point, de manière à donner les mêmes longueurs d'ombre des gnomons, il est de 365 jours $1/8$, et, par conséquent, on peut dire qu'au bout de huit ans, il sera revenu à la même heure, au même point de latitude.

XXVIII. Pour chacune des autres planètes, les divers temps dont nous avons parlé varient beaucoup, ils sont plus longs pour les uns, plus courts pour les autres. Les

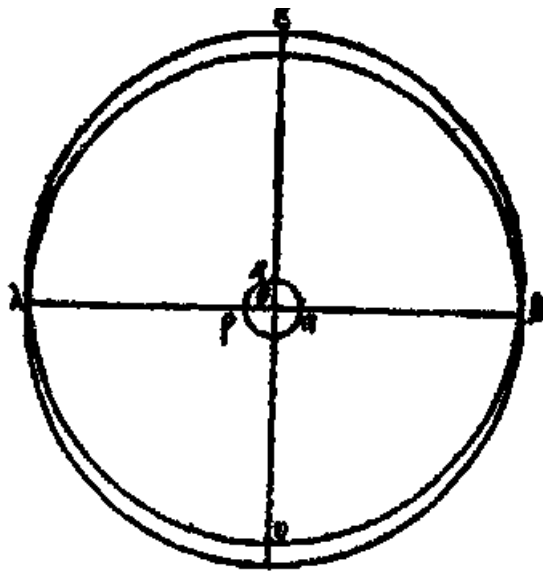
durées des retours paraissent d'autant plus variables et plus changeantes dans l'une et l'autre hypothèse que ce n'est pas dans le même laps de temps que chaque planète parcourt son épicycle et l'épicycle son cercle concentrique (au zodiaque): les mouvements sont plus rapides pour les unes, plus lents pour les autres, à raison de l'inégalité des cercles, de l'inégalité des distances au centre de l'univers et des différences d'obliquité par rapport au cercle du milieu des signes c'est-à-dire des différences d'inclinaison et de position.

XXIX. De là vient que, pour toutes les planètes, les stations et les retours, soit vers les signes précédents, soit vers les signes suivants, ne se font pas d'une manière semblable. On observe le phénomène pour cinq planètes, mais d'une manière qui n'est pas absolument semblable. Pour le soleil et la lune, cela ne se fait aucunement; en effet, ces deux astres ne paraissent jamais ni avancer, ni rester stationnaires, ni rétrograder. Comme nous l'avons dit, le soleil paraît emporté sur son propre cercle dans le même temps que l'épicycle sur le concentrique, tandis que l'épicycle de la lune est emporté plus rapidement sur le cercle concentrique au cercle zodiacal, qu'elle ne parcourt elle-même l'épicycle.



XXX. Il est clair qu'il importe peu, pour interpréter les phénomènes, que l'on dise, comme il a été expliqué, que les planètes se meuvent sur des cercles ou que les cercles qui portent ces astres se meuvent autour de leurs propres centres. Je comprends que les cercles concentriques, portant les centres des épicycles, se meuvent autour de leurs propres centres dans un sens contraire à l'univers, et que les épicycles portant les planètes se meuvent aussi autour de leurs centres. Ainsi, je comprends que le cercle $\mu\nu\xi$ concentrique se meuve autour de θ , qui est son propre centre et celui de l'univers, dans un sens contraire à l'univers; je comprends, en outre, que le concentrique porte sur sa circonférence le centre μ de l'épicycle $\epsilon\zeta\eta\kappa$ et que cet épicycle qui porte la planète au point ϵ , tourne autour du centre μ , dans le même sens que l'univers, s'il s'agit du soleil et de la lune, ou dans un sens contraire, si l'on considère les autres planètes. Ainsi sont expliquées les apparences.

Suivant l'autre interprétation, soit le cercle excentrique $\epsilon\lambda\upsilon\xi$ qui a pour centre le point κ . Considéré par rapport au soleil, ce cercle $\epsilon\lambda\upsilon\xi$, se mouvant uniformément dans l'espace d'un an, autour du centre κ , et portant le soleil fixé au point ϵ , rendra compte des phénomènes, si le centre κ se meut par lui-même, non dans un sens contraire à l'univers, mais emporté dans le même sens, et si chaque jour il décrit le cercle $\kappa\rho\pi$ égal au cercle dans l'autre raisonnement.



De la sorte, en effet, le soleil offrira toujours aux mêmes endroits respectifs les plus grandes, les plus petites et les moyennes distances à la terre : les plus grandes, comme il a été dit, au cinquième degré et demi des Gémeaux, les plus petites au même degré du Sagittaire et les moyennes au même degré de la Vierge et des Poissons. En effet, le point de l'excentrique, où est le soleil, vu sous les Gémeaux, dans cette position du cercle, est le plus éloigné de la terre; mais le cercle tournant autour du centre κ , le point ϵ , transporté où est maintenant le point υ , nous paraîtra dans le Sagittaire à la plus petite distance de la terre. Entre ces deux points extrêmes il se trouvera aux moyennes distances dans la Vierge et les Poissons.

Quant aux autres planètes, c'est en tout lieu du zodiaque qu'elles peuvent être à la plus grande, à la plus petite et à la moyenne distance de la terre et qu'elles peuvent avoir la vitesse minimum, maximum ou moyenne. Du centre θ de l'univers et du rayon $\theta\kappa$, imaginons qu'on décrive le cercle $\kappa\rho$, puis, que le cercle concentrique et égal à l'épicycle de l'autre hypothèse tourne autour du centre θ de l'univers et qu'il porte avec lui le centre κ de l'excentrique, d'un mouvement contraire à l'univers et dans un temps déterminé, enfin que l'excentrique $\epsilon\lambda\upsilon\xi$ se meuve dans un temps différent autour de son centre κ , portant l'astre fixé sur sa circonférence au point ϵ ; si on prend les temps propres et particuliers à chaque planète, on rendra compte des phénomènes.

Tout cela nous entraîne trop loin sous prétexte d'accorder les hypothèses et les raisonnements des mathématiciens. Ceux-ci ne considérant que les phénomènes et les mouvements planétaires produits selon le cours des choses, après les avoir observés longtemps dans des lieux favorables, en Babylonie, en Chaldée, en Egypte, recherchaient avec ardeur des principes et des hypothèses qui expliquaient les phénomènes.^[20] Ils arrivaient ainsi à confirmer les faits observés et à prédire les phénomènes à venir, les Chaldéens à l'aide de méthodes arithmétiques, les Egyptiens par des méthodes graphiques,^[21] tous par des méthodes imparfaites et sans une science suffisante de la nature; car il faut discuter aussi les faits au point de vue physique. Ceux qui ont étudié l'astronomie chez les Grecs ont essayé de le faire en se servant des principes et des observations de ces étrangers. Platon le déclare dans l'*Epinomis*, comme nous le verrons un peu plus loin, en rapportant ses propres paroles.^[22]

XXXI. Aristote, dans son traité *Du ciel*,^[23] parle beaucoup des astres en général et montre qu'ils ne se meuvent ni à travers l'éther tranquille ni avec l'éther, en quelque sorte séparés et indépendants, et qu'ils ne tournent ni ne roulent, mais bien

que les nombreuses étoiles fixes sont emportées sur une seule et même sphère, la sphère extérieure et que chaque planète est portée par plusieurs sphères. Il dit encore dans le XI^e livre de la *Métaphysique*^[24] qu'Eudoxe et Callippe mettent les planètes en mouvement à l'aide de certaines sphères. Ce qui concorde, en effet, avec la science naturelle, c'est que les astres ne soient pas emportés de la même manière par certaines courbes circulaires ou hélicoïdales, d'un mouvement contraire à celui de l'univers, et que ces cercles ne roulent pas tous autour de leurs centres, en portant fixés à leurs circonférences les divers astres se mouvant les uns dans le même sens que l'univers, les autres en sens contraire. Comment se pourrait-il, en effet, que de tels corps fussent attachés à des cercles incorporels?

D'après les apparences, des sphères du cinquième corps^[25] se meuvent dans les profondeurs du ciel; les unes sont plus élevées les autres moins, les unes sont plus grandes les autres plus petites, les unes sont creuses, les autres pleines sont intérieures aux premières, et les planètes qui y sont fixées, à la manière des étoiles, sont portées d'un mouvement simple, mais de vitesse inégale suivant les lieux. Par un effet qui est la conséquence de tous ces mouvements, elles paraissent se mouvoir diversement et décrire certains cercles excentriques; ou bien, placées sur d'autres cercles, elles paraissent décrire des spirales suivant lesquelles des mathématiciens, trompés par la rétrogradation, pensent qu'elles sont mues.

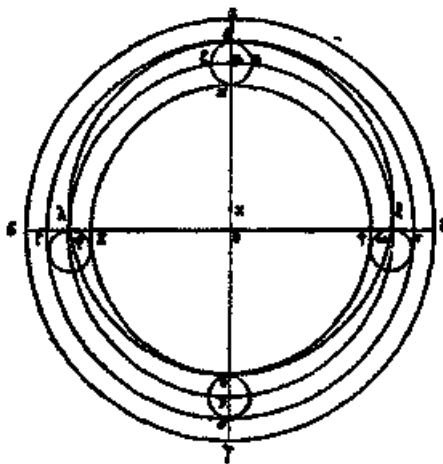
Comme nous les voyons portées chaque jour par le mouvement de l'univers d'orient en occident et passer par les signes suivants, dans leur course à travers l'obliquité du zodiaque, tantôt plus au nord, tantôt plus au sud, tantôt plus haut, tantôt plus bas, d'où il suit qu'elles paraissent plus ou moins éloignées de la terre, Aristote dit que les anciens les supposaient portées chacune par plusieurs sphères.

Eudoxe dit que le soleil et la lune sont appuyés sur trois sphères : la première est celle des étoiles fixes qui roule autour des pôles de l'univers et entraîne par force avec elle toutes les autres du levant au couchant; la seconde se meut autour de l'axe perpendiculaire au cercle du milieu des signes, c'est par cette sphère que chaque planète paraît exécuter un mouvement en longitude vers les signes suivants; la troisième roule autour de l'axe perpendiculaire au cercle, oblique à celui du milieu des signes. Par cette dernière, chaque astre paraît avoir un mouvement propre en latitude, tantôt à une plus grande distance, tantôt à une plus petite, tantôt plus au nord, tantôt plus au midi, du cercle qui passe par le milieu des signes. Chacune des autres planètes est portée par quatre sphères dont l'une produit le mouvement de la planète en hauteur.

Aristote dit que Callippe ajoutait de nouvelles sphères aux autres planètes, excepté à Saturne et à Jupiter, savoir deux au soleil et à la lune, et une seulement à chacune des autres. Il pense aussi que, si on veut rendre compte des phénomènes, il faut, pour chacune des planètes, d'autres sphères moindres qu'une des sphères qui portent les sphères roulantes. Telle est son opinion ou celle des autres (Eudoxe et Callippe). Si on pensait qu'il est naturel que tout se porte dans le même sens, on voyait cependant les planètes aller en sens contraire; aussi supposait-on que dans les intervalles des sphères déférentes (c'est-à-dire portant les planètes), il y a quelques sphères évidemment solides qui, par leur mouvement propre, font tourner en sens contraire les déférentes en contact, de même que dans des sphères artificielles, des tympanes roulant autour de leurs axes peuvent, de leur propre mouvement et à l'aide de dents, faire mouvoir et rouler en sens contraire des corps adjacents et au contact.

XXXII. Il est bien naturel que toutes les sphères se meuvent dans le même sens, entraînées par la sphère extérieure: mais, par un mouvement propre, à cause du rang

quelles occupent, de leur place et de leur grandeur, elles se portent les unes plus vite, les autres moins et dans le sens contraire, autour de leurs axes propres obliques à celui de la sphère des étoiles. Ainsi les astres qu'elles portent sont entraînés par le mouvement simple et régulier des étoiles et ce n'est que par un effet, qui est la conséquence du mouvement des sphères, qu'ils paraissent accomplir des mouvements composés, irréguliers et variés; ils décrivent plusieurs cercles, les uns concentriques, les autres excentriques ou épicycles. Pour l'intelligence de ce que nous disons, il faut expliquer en peu de mots la figure qui nous paraît nécessaire pour la construction des sphères.



Soit $\alpha\beta\gamma\delta$ la sphère creuse des étoiles autour du centre θ de l'univers, $\alpha\epsilon$ son épaisseur, $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ deux diamètres (perpendiculaires). Supposons que $\alpha\gamma\beta\delta$ soit un grand cercle et qu'il passe par le milieu des signes; soit, au-dessous de la première, la sphère creuse $\epsilon\rho\sigma$, $\pi\chi\upsilon\psi$, d'une planète, ayant le même centre et pour épaisseur $\epsilon\pi$. Soit enfin, dans cette épaisseur, la sphère solide $\epsilon\zeta\eta$ portant un astre errant fixé au point ϵ . Que toutes soient portées régulièrement dans le même sens par des mouvements simples d'orient en occident; que celle qui produit le mouvement de la planète en latitude tourne seule en sens contraire ou dans le même sens pourvu qu'elle reste en arrière par sa lenteur, car les deux hypothèses rendent compte des phénomènes.

Et maintenant, que la sphère des étoiles tourne autour de l'axe perpendiculaire au plan du cercle équinoxial, et que la sphère creuse de la planète tourne autour de l'axe perpendiculaire au cercle produisant le mouvement en latitude, et oblique à celui qui passe par le milieu des signes. Que la sphère des étoiles tourne très rapidement; que la sphère creuse de la planète tourne plus lentement en sens contraire, de sorte que, dans un temps déterminé, elle ait parcouru dans ce sens contraire toute la sphère des étoiles ou qu'elle le soit laissée en arrière, comme d'autres le veulent, – nous avons dit ailleurs qu'elle est l'opinion la plus vraisemblable; – qu'elle porte la sphère solide soutenant l'astre errant. La sphère solide, tournant régulièrement autour de son axe propre, reviendra au même point, portée dans le même sens que la sphère étoilée; elle reviendra au même point dans le même temps que la sphère creuse de la planète aura parcouru, en se mouvant en sens contraire, la sphère entière des étoiles ou qu'elle aura été laissée plus ou moins en arrière.

Supposons d'abord qu'elle soit revenue dans le même temps; soit μ le centre de la sphère, décrivons du centre θ , avec le rayon $\theta\mu$, le cercle $\mu\lambda\nu\xi$. Divisons la droite $\epsilon\upsilon$ en deux parties égales au point κ , et du centre κ , avec le rayon $\kappa\epsilon$, décrivons le cercle $\epsilon\lambda\nu\xi$, excentrique à l'égard de l'univers. Il est évident que dans le temps que la sphère creuse de la planète, portant la sphère solide, sera laissée en arrière de la

sphère des étoiles, le centre μ de la sphère solide parcourra le cercle concentrique $\mu\lambda\nu\xi$, paraissant emporté en sens contraire et entraînant cette sphère solide. Il est encore évident que la planète placée au point ε sur la sphère solide décrira (dans le même temps) le cercle $\varepsilon\eta\zeta$ qui devient l'épicycle du concentrique $\mu\lambda\nu\xi$ et tourne dans le même sens que l'univers; elle décrira aussi, par conséquent, l'excentrique $\varepsilon\lambda\upsilon\xi$, égal au concentrique, en le parcourant dans un sens contraire à celui de l'univers.

Elle paraîtra donc aux observateurs qui seront en θ , décrire le zodiaque $\alpha\beta\gamma\delta$, en s'avançant vers les signes suivants en sens contraire du mouvement de l'univers. Elle paraîtra aussi se mouvoir en latitude en raison de l'inclinaison de son plan sur le cercle qui passe par le milieu des signes, les axes de ces sphères étant respectivement perpendiculaires à ces plans. C'est toujours au même lieu qu'elle sera le plus éloignée de la terre et qu'elle paraîtra se mouvoir le plus lentement : c'est au point α du zodiaque, le centre de la sphère solide étant au point μ de la droite $\alpha\theta$, et la planète elle-même étant au point ε . Au point opposé, elle sera toujours le moins éloignée de la terre et paraîtra se mouvoir le plus rapidement : c'est au point γ du zodiaque. La sphère creuse tournant en sens contraire, le centre de la sphère solide sera au point ν de la droite $\theta\gamma$ et la planète elle-même sera vue au point γ , c'est-à-dire qu'elle sera au point u .

Elle aura les distances moyennes et les mouvements moyens en deux endroits : lorsqu'elle sera aux points qui partagent en deux parties égales l'épicycle $\varepsilon\zeta\eta$ et le concentrique $\mu\lambda\nu\xi$, tels sont les points ζ et η qui, à cause de la translation des sphères en sens contraire, ou de leur moindre mouvement, sont les mêmes que λ et ξ , lesquels partagent en deux parties égales l'excentrique $\varepsilon\lambda\upsilon\xi$ et le concentrique $\mu\lambda\nu\xi$ et apparaissent dans le zodiaque entre les points α et γ , en β et δ , c'est-à-dire en φ et ω . Tout cela est apparent pour le soleil, puisque les temps de ses retours, autant que nos sens peuvent les percevoir, sont trouvés égaux entre eux, ou à peu près – je parle des durées de ses retours à la même longitude, à la même latitude, au même éloignement, – les points semblables des deux sphères se trouvent toujours, par des mouvements semblables, aux mêmes endroits et paraissent dans les mêmes signes.

Un tel mouvement des planètes et des sphères est naturellement régulier, simple, bien ordonné, mais il est oblique au zodiaque et, à cause de sa lenteur, la planète paraît laissée en arrière par la sphère des fixes; une seule sphère se meut en sens contraire, c'est celle qui porte la sphère solide dite épicycle; cependant le mouvement paraît varié, multiple et inégal. Il se produit vers les signes suivants, ou réellement ou par suite d'un plus lent déplacement: il paraît oblique au zodiaque, et à cause de la rotation de la sphère solide autour de son axe propre, la planète se montre tantôt plus loin et par conséquent plus lente, tantôt plus près et par conséquent animée d'une plus grande vitesse. En un mot le mouvement paraît inégal, il se fait suivant l'épicycle alors qu'il paraît se faire suivant l'excentrique. Il est évidemment conforme à la raison qu'il y ait accord entre les deux hypothèses des mathématiciens sur les mouvements des astres, celle de l'épicycle et celle de l'excentrique: l'une et l'autre s'accordent *par accident* avec celle qui est conforme à la nature des choses, ce qui faisait l'objet de l'admiration d'Hipparque, surtout pour le soleil, puisque les mouvements de ses sphères s'accomplissent exactement dans des temps égaux entre eux.

Pour les autres planètes il n'y a pas la même exactitude, parce que la sphère solide de la planète ne revient pas dans le même temps à la même position; la sphère creuse reste en arrière de celle des étoiles ou va dans un sens contraire, plus ou moins rapidement; de sorte que leurs mouvements semblables, bien qu'ils s'accomplissent sur des points semblables des sphères, ne se font pas toujours aux mêmes endroits, mais changent sans cesse de place, l'obliquité des sphères ne se produisant pas à la même

latitude, et les temps des retours à la même longitude, à la même latitude, au même éloignement étant inégaux et variables, les plus grandes, les plus petites et les moyennes distances, de même que les vitesses variables se produiront dans tous les signes du zodiaque, tantôt sur un point, tantôt sur un autre.

En outre, les mouvements semblables paraissant, comme nous l'avons dit, changer de place, bien qu'ils s'accomplissent sur les mêmes points des sphères, les planètes dans leurs mouvements *par accident* ne paraissent pas même décrire des cercles, mais des spirales. Il faut donc croire que, pour chaque planète, il y a une sphère propre creuse qui porte dans son épaisseur une sphère solide et que la sphère solide à son tour porte l'astre sur sa surface.

XXXIII. Quant au Soleil, à Vénus et à Mercure, il est possible que chacun de ces astres ait deux sphères propres, que les sphères creuses des trois astres, animées de la même vitesse, parcourent dans le même temps, en sens contraire, la sphère des étoiles fixes et que les sphères solides aient toujours leurs centres sur une même ligne droite, la sphère du soleil étant la plus petite, celle de Mercure étant plus grande et celle de Vénus étant encore plus grande.

Il se peut aussi qu'il n'y ait qu'une seule sphère creuse commune aux trois astres et que les trois sphères solides, dans l'épaisseur de celle-là, n'aient qu'un seul et même centre, la plus petite serait la sphère vraiment solide du soleil, autour de laquelle serait celle de Mercure; viendrait après, entourant les deux autres, celle de Vénus qui remplirait toute l'épaisseur de la sphère creuse commune. C'est pour cela que ces trois astres sont laissés en arrière sur le zodiaque, ou exécutent un mouvement en longitude de sens contraire au mouvement diurne et de même vitesse sans avoir les autres mouvements semblables. Ils paraissent toujours voisins, se dépassant et s'éclipsant mutuellement, Mercure s'éloignant au plus, de part et d'autre du soleil, de vingt degrés au couchant et au levant, et Vénus de cinquante degrés au plus. On comprendra que cette position et cet ordre sont d'autant plus vrais que le soleil essentiellement chaud est le foyer du monde, en tant que monde et animal, et peut ainsi dire le cœur de l'univers, à cause de son mouvement, de son volume et de la course commune des astres qui l'entourent.

Car dans les corps animés, le centre du corps, c'est-à-dire de l'animal, en tant qu'animal, est différent du centre du volume. Par exemple, pour nous qui sommes, comme nous l'avons dit, hommes et animaux, le centre de la créature animée est dans le cœur toujours en mouvement et toujours chaud, et à cause de cela, source de toutes les facultés de l'âme, cause de la vie et de tout mouvement d'un lieu à un autre, source de nos désirs, de notre imagination et de notre intelligence. Le centre de notre volume est différent : il est situé vers l'ombilic.

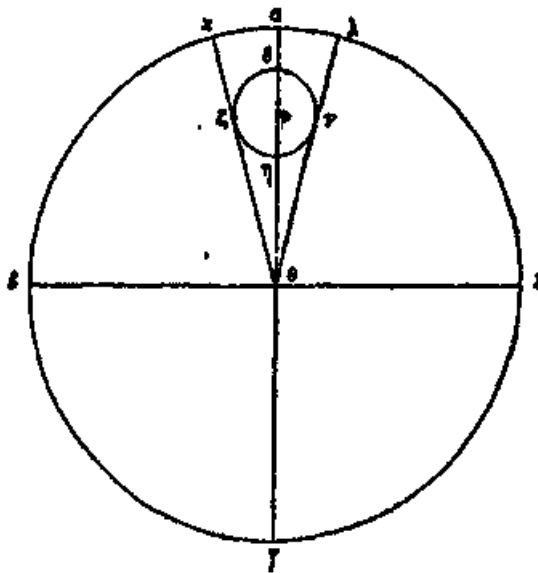
De même, si l'on juge des choses les plus grandes, les plus dignes et les plus divines, comme des choses les plus petites, fortuites et mortelles, le centre du volume du monde universel sera la terre froide et immobile, mais le centre du monde, en tant que monde et animal, sera dans le soleil qui est en quelque sorte le cœur de l'univers et d'où l'on dit que l'âme du monde prit naissance pour pénétrer et s'étendre jusque dans ses parties extrêmes.

XXXIV. Il est clair que, pour les motifs expliqués, des deux hypothèses, dont chacune est la conséquence de l'autre, celle de l'épicycle paraît la plus commune, la plus généralement admise, la plus conforme à la nature des choses. Car l'épicycle est un grand cercle de la sphère solide, celui que la planète décrit dans son mouvement sur cette sphère, tandis que l'excentrique diffère entièrement du cercle qui est conforme à la nature, et est plutôt décrit *par accident*. Hipparque, persuadé que le phénomène se

produit ainsi, vante l'hypothèse de l'épicycle comme sienne propre et dit qu'il est probable que tous les corps célestes sont uniformément placés par rapport au centre du monde et qu'ils lui sont semblablement unis. Mais lui-même, ne connaissant par suffisamment la science naturelle, n'a pas bien compris quel est le vrai mouvement des astres qui est d'accord avec la nature des choses, ni celui qui est *par accident* et qui n'est qu'une apparence. Il pose cependant en principe que l'épicycle de chaque planète se meut sur le concentrique et que la planète se meut sur l'épicycle.

Platon paraît préférer aussi l'hypothèse de l'épicycle, il pense que ce ne sont pas des sphères, mais des cercles qui portent les planètes, comme il l'indique à la fin de la *République* en imaginant des fuseaux emboîtés les uns dans les autres. Il se sert du reste de termes communs: il dit souvent cercles au lieu de sphères, et autour des pôles au lieu de autour de l'axe.

D'après les apparences, dit Aristote, des sphères du cinquième corps (l'éther) se meuvent dans les profondeurs du ciel; les unes sont plus élevées, les autres moins, les unes sont plus grandes, les autres plus petites, les unes sont creuses, les autres pleines sont intérieures aux premières, et les planètes, qui y sont fixées à la manière des étoiles, sont portées d'un mouvement simple, mais de vitesse inégale suivant les lieux. Par un effet qui est la conséquence de tous ces mouvements, elles paraissent se mouvoir diversement et décrire certains cercles excentriques; ou bien, placées sur d'autres cercles, elles paraissent décrire des spirales suivant lesquelles des mathématiciens, trompés par la rétrogradation, pensent qu'elles sont mues.



XXXV. Il faut montrer comment quelques planètes paraissent tantôt avancer, tantôt stationner et tantôt rétrograder; car elles paraissent faire tout cela. Soit le zodiaque $\alpha\beta\gamma\delta$ autour du point θ , centre de l'univers, et $\epsilon\zeta\eta$ l'épicycle de la planète. Du point θ nous observons, tirons les tangentes $\theta\zeta\kappa$, $\theta\nu\lambda$, l'épicycle, et par le centre μ de l'épicycle, la droite $\theta\mu\epsilon\alpha$. Puisque nous voyons en ligne droite, il est clair que l'astre arrivé en ζ nous paraîtra en κ ; puis, lorsqu'il aura parcouru l'arc $\zeta\epsilon$, il paraîtra avoir décrit l'arc $\kappa\alpha$ vers les signes précédents du zodiaque. De même, lorsqu'il aura parcouru l'arc $\epsilon\nu$, il paraîtra avoir parcouru en avant l'arc $\alpha\lambda$. Lorsqu'ensuite il décrira l'arc $\nu\eta\zeta$, il paraîtra décrire l'arc $\lambda\alpha\kappa$, vers les signes suivants du zodiaque. Pendant qu'il s'approchera du point ζ ou qu'il commencera à s'en éloigner, il paraîtra employer plus de temps à se déplacer et stationnera au point κ puis s'étant éloigné du point ζ il avancera de nouveau: ensuite en s'approchant du point ν et en commençant s'en éloigner, il paraîtra de nouveau stationner et enfin

rétrograder. Les stations, les rétrogradations et les mouvements en avant et en arrière de chaque planète, se feront tantôt dans un signe, tantôt dans un autre et dans différentes parties des signes, parce que l'épicycle de chacune se déplace toujours vers les signes suivants, que ce mouvement soit réel, ou que l'épicycle soit simplement laissé en arrière.

Des distances moyennes des planètes

XXXVI. Il est utile, pour notre sujet, de savoir qu'elle est la distance moyenne d'une planète, quel que soit le déplacement de l'épicycle ou de l'excentrique. Dans l'hypothèse des épicycles, si nous prenons la distance la plus grande de l'astre à la terre, telle que $\theta\epsilon$, et puis la plus petite, telle que $\theta\nu$, ainsi que la différence entre la plus grande et la plus petite c'est-à-dire $\epsilon\nu$, et que nous en prenions le milieu, il est clair que la distance moyenne sera $\theta\mu$. Si donc du centre θ et de l'intervalle $\theta\mu$ nous décrivons le cercle concentrique $\mu\lambda\zeta$ et que du centre μ avec l'intervalle $\mu\epsilon$, nous tracions l'épicycle $\epsilon\zeta\eta$, il est évident que l'astre porté sur l'épicycle sera le plus éloigné de nous au point ϵ et le moins éloigné au point ν , et à une distance moyenne aux deux points ζ et η d'intersection du concentrique et de l'épicycle, en quelque lieu que soit transporté l'épicycle.

Dans l'hypothèse des excentriques, soit l'excentrique $\epsilon\lambda\nu\xi$ dont le centre est κ , soit θ le centre de l'univers, menons la ligne des centres $\theta\kappa$ et prolongeons-la de part et d'autre. Si nous décrivons, du centre θ le cercle $\mu\lambda\zeta$, égal à l'excentrique. Il est clair que c'est le concentrique sur lequel est emporté l'épicycle de l'autre hypothèse, décrit du centre μ avec le rayon $\mu\epsilon$. Lorsque la planète portée par l'excentrique sera en ϵ , en quelque endroit que cela se produise, elle sera le plus éloignée de nous, elle le sera le moins en ν , les distances moyennes seront aux points λ et ξ d'intersection de l'excentrique et du concentrique, en quelque endroit que tombent ces points par le déplacement de l'excentrique. Il est évident qu'il y a accord dans les deux hypothèses : les plus grandes, les plus petites et les moyennes distances sont les mêmes.

De la conjonction, des occultations et des éclipses

XXXVII. Pour le besoin de notre sujet, il nous reste à parler brièvement des conjonctions et des occultations, disparitions et éclipses. Puisque nous voyons naturellement en ligne droite, que la sphère des étoiles est la plus élevée, et que les sphères planétaires sont placées au-dessous, dans l'ordre que nous avons indiqué, il est clair que la lune étant la planète la plus rapprochée de la terre peut passer devant tous les autres astres qui sont au-dessus d'elle; elle nous cache, en effet, les planètes et plusieurs étoiles, lorsqu'elle est placée en ligne droite enlie notre vue et ces astres, et elle ne peut être cachée par aucun d'eux. Le soleil peut être caché par la lune, et lui-même peut cacher tous les autres astres, la lune exceptée, d'abord en s'approchant et en les noyant dans sa lumière, et ensuite en se plaçant directement entre eux et nous.

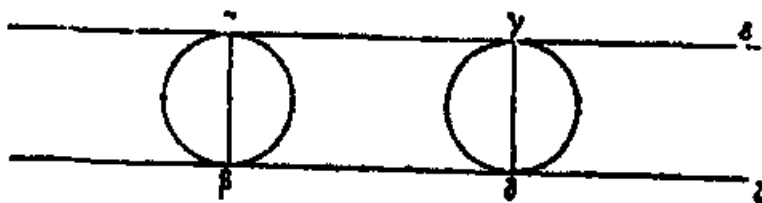
Mercure et Vénus cachent les astres qui sont au-dessus d'eux, quand ils sont pareillement placés en ligne droite entre eux et nous; ils paraissent même s'éclipser mutuellement, suivant que l'une des deux planètes est plus élevée le que l'autre, à raison des grandeurs, de l'obliquité et de la position de leurs cercles. Le fait n'est pas d'une observation facile, parce que les deux planètes tournent autour du soleil et que Mercure en particulier, qui n'est qu'un petit astre, voisin du soleil, et vivement illuminé par lui, est rarement apparent. Mars éclipse quelquefois les deux planètes qui lui sont supérieures, et Jupiter peut éclipser Saturne. Chaque planète éclipse d'ailleurs les étoiles au-dessous desquelles elle passe dans sa course.

Des éclipses de soleil et de lune.

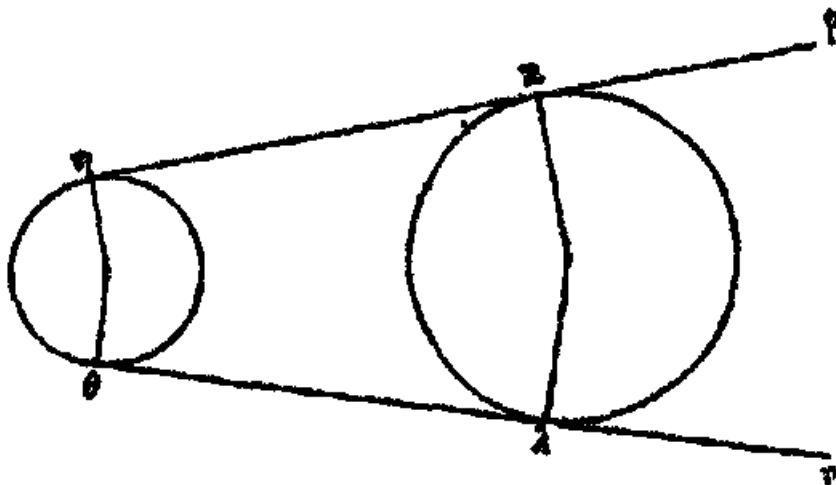
XXXVIII. La lune disparaît quand, diamétralement opposée au soleil, elle entre dans l'ombre de la terre. Cela n'arrive pas tous les mois: et le soleil n'est pas éclipsé à toutes les conjonctions de la lune ou néoménie, de même que la lune ne l'est pas à toutes les pleines lunes, parce que leurs cercles sont sensiblement inclinés l'un sur l'autre. Le cercle du soleil paraît emporté, comme nous l'avons dit^[26] sous celui qui passe par le milieu des signes sur lequel il est un peu incliné, car il s'en écarte d'un demi-degré de chaque côté; et le cercle de la lune a une obliquité de dix degrés en latitude, comme l'a trouvé Hipparque, ou de douze degrés, comme le pensent la plupart des mathématicien, de sorte qu'elle paraît s'écarter de cinq ou six degrés, au nord ou au sud du cercle qui passe par le milieu des signes.

Si nous supposons prolongés les plans des deux cercles, solaire et lunaire, leur commune intersection sera une ligne droite qui contient les centres des deux cercles. Celle ligne, en quelque façon, sera leur diamètre commun. Les points extrêmes où paraissent se couper les cercles s'appellent les nœuds, l'un ascendant, l'autre descendant ; ils se portent vers les signes suivants du zodiaque. Si la conjonction du soleil et de la lune se fait près des nœuds, les deux astres paraissent voisins l'un de l'autre et la lune cachera à nos yeux le soleil qui s'éclipsera d'autant plus que la lune le couvrira davantage. Mais si la conjonction mensuelle ne se fait pas près du nœud, la longitude comptée sur le zodiaque étant la même pour les deux astres, mais la latitude étant différente, les deux astres paraîtront l'un plus au nord, l'autre plus au sud, et le soleil n'étant pas caché ne pourra pas disparaître.

XXXIX. Voici ce qui arrive évidemment pour la lune. Elle s'éclipse, comme nous l'avons dit souvent, lorsqu'elle entre dans l'ombre de la terre; montrons comment il se fait que l'éclipse n'ait pas lieu chaque mois, Les rayons lumineux, se propageant en ligne droite, enveloppent une région obscure: si deux corps sphériques, l'un lumineux et l'autre éclairé par le premier, sont égaux, l'ombre produite est un cylindre indéfini.

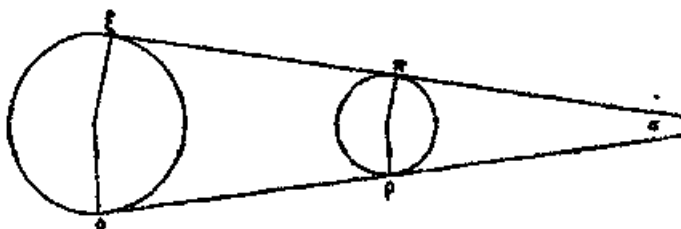


Soit, par exemple, $\alpha\beta$ le corps lumineux et $\gamma\delta$ le corps éclairé, supposons-les tous les deux égaux et sphériques. Les rayons de lumière tels que $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ dirigés suivant deux génératrices opposées du cylindre tangent aux deux sphères, se propagent en ligne droite; donc les diamètres $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ étant égaux et perpendiculaires aux tangentes $\alpha\gamma\epsilon$, $\beta\delta\zeta$, il est clair que ces rayons seront parallèles et que les droites, prolongées indéfiniment, ne se rencontreront pas. Comme cela se produit sur tous les points, il est évident que la sphère γ produira une ombre cylindrique indéfinie.



Si, au contraire, le corps lumineux est plus petit, tel que $\eta\theta$, et que le corps éclairé soit plus grand, tel que $\kappa\lambda$, l'ombre aura la forme d'un cône tronqué indéfini, car le diamètre $\kappa\lambda$ étant plus grand que le diamètre $\eta\theta$, les rayons lumineux $\kappa\mu$ et $\lambda\nu$ prolongés indéfiniment s'éloigneront de plus en plus l'un de l'autre, et il en sera ainsi de tous côtés.

Si le corps lumineux est plus grand, comme b et le corps éclairé plus petit, comme $\xi\sigma$, et que tous les deux soient sphériques, il est clair que l'ombre du corps, c'est-à-dire $\pi\rho$, aura la forme d'un cône et sera limitée, car les rayons $\xi\pi$ et $\sigma\rho$ prolongés en ligne droite se rencontreront au point σ , puisque le diamètre $\pi\rho$ est plus petit que le diamètre $\xi\sigma$. Ce phénomène se produira de toutes parts.



Par la considération des distances et des diamètres du soleil et de la lune, Hipparque montre que le volume du soleil contient environ 1880 fois celui de la terre, que le volume de la terre contient plus de 27 fois celui de la lune, et que le soleil est beaucoup plus éloigné que la lune. Il est donc évident que l'ombre de la terre aura la forme d'un cône, qu'elle s'étendra suivant un diamètre commun du soleil et de la terre (c'est-à-dire suivant la droite qui joint leurs centres), et que le diamètre de la lune, même à son maximum, est moindre que la largeur de l'ombre projetée par la terre. Quand le soleil est à un nœud et la lune à l'autre nœud, le soleil, la terre et la lune étant en ligne droite, la lune entre nécessairement dans l'ombre de la terre, et comme elle est plus petite et qu'elle n'a pas d'éclat par elle-même, elle devient invisible, et on dit qu'elle s'éclipse.

Lorsque les centres du soleil, de la terre et de la lune sont exactement placés suivant une ligne diamétrale, c'est-à-dire suivant la même ligne droite, comme nous l'avons dit, la lune pénétrant au milieu de l'ombre, il y a éclipse totale. Lorsque les trois centres ne sont pas tout à fait en ligne droite, il n'y a pas toujours éclipse

totale. Mais le plus souvent, au temps des pleines lunes, le soleil et la lune ne passent pas par les nœuds, et la lune sera plus au nord ou plus au midi que l'ombre de la terre. Comme elle n'entre pas dans le cône d'ombre, il ne saurait y avoir éclipse.

Voilà ce que dit Adraste. Dercyllide n'a écrit sur ce sujet avec aucun ordre convenable. Voici cependant ce qu'il indique dans le livre où il traite « *Des fuseaux dont il est question dans la République de Platon* ».

Des découvertes astronomiques et de leurs auteurs

XL. Eudème dans ses livres « *Sur l'astronomie* » raconte qu'Énopide a trouvé le premier l'obliquité du zodiaque et reconnu l'existence de la grande année : d'après lui, Thalès a fait voir que les éclipses de soleil et les retours de cet astre aux solstices n'arrivent pas toujours après le même temps; Anaximandre prétend que la terre est suspendue dans l'espace et se meut autour du centre du monde; Anaximène a montré que la lune reçoit la lumière du soleil et de quelle manière elle s'éclipse. D'autres ont ajouté de nouvelles découvertes à celles-là: que les étoiles se meuvent autour de l'axe immobile qui passe par les pôles, que les planètes se meuvent autour de l'axe perpendiculaire au zodiaque; et que l'axe des étoiles et celui des planètes s'écartent l'un de l'autre, du côté du pentédécagone, et par conséquent d'un angle de 24 degrés.

Des hypothèses de l'astronomie.

XLI. Il dit ensuite : de même qu'en géométrie et en musique, il est impossible, sans faire d'hypothèses, de déduire les conséquences des principes, même en astronomie il convient d'établir d'abord des hypothèses pour pouvoir parler du mouvement des planètes. Avant tout, dit-il, comme tout le monde en convient, il faut arrêter les principes qui doivent servir dans les études mathématiques. Le premier est que la composition du monde est ordonnée et gouvernée par un seul principe et que la réalité se trouve au fond des choses qui existent ou qui paraissent exister, et qu'il ne faut pas dire que le monde est l'infini où notre vue se perd, mais qu'il a ses limites,

Le second principe est que les levers et les couchers des corps divins ne se font pas parce que ces corps s'allument et s'éteignent successivement; si leur état n'était pas éternel, il n'y aurait aucun ordre conservé dans l'univers. Le troisième principe est qu'il y a sept planètes, ni plus ni moins, vérité qui résulte d'une longue observation. Le quatrième est le suivant: puisqu'il n'est pas conforme à la raison que tous les corps soient en mouvement ou qu'ils soient tous au repos, mais puisque les uns sont en mouvement et les autres immobiles, il faut rechercher ce qui est nécessairement au repos dans l'univers et ce qui est en mouvement. Il ajoute qu'il faut croire que la terre, foyer de la maison des dieux, suivant Platon,^[27] reste en repos et que les planètes se meuvent avec toute la voûte céleste qui les enveloppe. Ensuite, il repousse avec énergie, comme contraire aux bases de la mathématique, l'opinion de ceux qui veulent que les corps qui paraissent en mouvement soient au repos et que les corps immobiles par nature et par situation soient en mouvement.

Il dit ensuite que les planètes ont un mouvement circulaire, régulier et uniforme, en longitude, en distance et en latitude. Il juge ainsi, bien que nous puissions nous tromper sur ce point. C'est pourquoi il croit que les levers successifs différents dépendent d'un mouvement en longitude et il rejette les raisons faibles et commodes, données par les anciens, d'après lesquelles les planètes seraient laissées en arrière. Mettant de côté tout ce qu'il y a de désordonné et de contraire à la raison dans un tel mouvement, il est juste de croire, dit-il, que les planètes sont emportées lentement par un mouvement contraire celui des étoiles fixes, de sorte que le mouvement intérieur soit produit par le mouvement extérieur.

Il ne pense pas qu'il faille prendre comme causes premières de ces mouvements, des spirales ni des lignes semblables à la course sinueuse d'un cheval. Car ce mouvement est le résultat d'autres mouvements. La cause première du mouvement en spirale est le mouvement qui s'accomplit suivant le cercle oblique du zodiaque. Le mouvement en spirale est en effet, adventice et postérieur, il résulte du double mouvement des planètes. On doit donc regarder comme premier le mouvement suivant le cercle oblique; le mouvement en spirale en est une conséquence, il n'est pas premier.

En outre il ne croit pas que les cercles excentriques soient la cause du mouvement en profondeur. Il pense que tout ce qui se meut dans le ciel est emporté autour d'un centre unique du mouvement et du monde, de sorte que ce n'est que par une conséquence, et non par un mouvement antécédent, comme nous l'avons dit plus haut, que les planètes décrivent des épicycles ou des excentriques dans l'épaisseur des concentriques. Car chaque sphère a une double surface, l'une concave à l'intérieur, l'autre convexe à l'extérieur, dans l'intervalle desquelles les astres se meuvent suivant des épicycles et des concentriques, d'un mouvement qui leur fait décrire, comme conséquence apparente, des excentriques.

Il dit encore que, suivant les apparences, les mouvements des planètes sont irréguliers, mais qu'en principe et en réalité ils sont réguliers: le mouvement est simple et naturel pour tous: il n'y a qu'un très petit nombre de déplacements sur des sphères disposées avec ordre. Il blâme ces philosophes qui, considérant les astres comme inanimés, ajoutèrent aux sphères et à leurs cercles plusieurs autres sphères; ainsi Aristote^[28] et parmi les mathématiciens, Ménechme et Callippe ont proposé les sphères déférentes et les spirales. Après avoir établi tout cela, il pense que le ciel se meut avec tous les astres autour de la terre immobile, suivant un très petit nombre de mouvements circulaires, uniformes, harmonieux, concentriques et indépendants. Il montre que, d'après Platon, ces hypothèses rendent compte des apparences.

XLII. Les étoiles se meuvent autour de l'axe immobile qui passe par les pôles, et les planètes autour de l'axe perpendiculaire au cercle zodiacal. Les deux axes s'écartent l'un de l'autre, de la valeur du côté du pentédécagone (et par conséquent d'un angle de 24 degrés). En effet, le zodiaque étant un grand cercle divise le monde en deux parties égales. La circonférence de l'univers étant partagée en 360 degrés, le cercle zodiacal en sépare 180 de chaque côté. L'axe du zodiaque lui étant perpendiculaire divise aussi les 180 degrés en deux parties égales. Or le zodiaque s'étend obliquement du parallèle d'hiver au parallèle d'été, mais on compte 30 degrés du tropique d'été au cercle arctique comme l'enseigne Hipparque, et du cercle arctique au pôle de la sphère des étoiles il y a 16 degrés. En faisant la somme, on compte donc 66 degrés du tropique d'été au pôle des fixes.

Pour compléter les 90 degrés qui s'étendent jusqu'au pôle de la sphère des planètes, il faut ajouter à cette somme 24 degrés, puisque l'axe des planètes est perpendiculaire au zodiaque. Du pôle de l'axe des planètes au cercle glacial arctique il reste 12 degrés, car tout l'arc de la zone vaut 36 degrés; si on en retranche 24, il reste 12. Il convient d'y ajouter les 30 degrés compris du cercle arctique au tropique d'été, puis les 24 degrés compris du tropique d'été au cercle équinoxial, et encore les 24 degrés compris du cercle équinoxial au tropique d'hiver auquel le zodiaque est tangent. Mais 24 degrés forment la quinzième partie des 360 degrés de la circonférence de l'univers, car 15 fois 24 font 360, nous avons donc raison de dire que les deux axes, celui des étoiles et celui des planètes, s'écartent l'un de l'autre de la valeur du côté du pentédécagone inscrit dans (un grand cercle de) la sphère.

XLIII. Les planètes décrivent des spirales par accident, c'est-à-dire en

conséquence de leurs deux mouvements en sens contraire l'un de l'autre. En effet, comme elles sont portées par leur propre mouvement du tropique d'été au tropique d'hiver et réciproquement, en allant lentement, et qu'elles sont rapidement entraînées chaque jour en sens contraire sous la sphère des étoiles, elles ne passent pas en droite ligne d'un parallèle à un autre, mais entraînées autour de la sphère des fixes. En d'autres termes, pour aller sur le zodiaque d'un point à un autre point, leur mouvement ne se fait pas seulement suivant une ligne droite du zodiaque, mais il devient en même temps circulaire autour de la sphère des fixes, de sorte qu'en passant d'un parallèle à un autre elles décrivent des spirales semblables aux vrilles de la vigne; c'est comme si on enroulait une courroie autour d'un cylindre d'un bout à l'autre; telles étaient les lanières enroulées sur les scytales de Laconie et sur lesquelles les éphores écrivaient leurs dépêches.

Les planètes décrivent encore une autre spirale, mais celle-ci non comme si on la traçait sur un cylindre d'un bout à l'autre, mais comme si on la traçait sur une surface plane. Puisque depuis un temps infini, elles passent d'un cercle parallèle à l'autre et de nouveau de celui-ci au premier, et cela sans interruption et sans fin, si nous supposons des lignes droites, disposées en nombre infini, représentant les cercles parallèles et que les planètes se meuvent sur ces parallèles dans le même sens que la sphère des fixes, tantôt vers le tropique d'hiver, tantôt vers le tropique d'été, elles nous paraîtront décrire une hélice sans fin. A cause du mouvement incessant et continu autour de la sphère sur les cercles parallèles, le chemin parcouru sera semblable à celui qui se ferait suivant les lignes droites étendues à l'infini, comme l'indiquent les figures ci-jointes.^[29] Les planètes décrivent donc deux spirales *par accident*, l'une comme autour d'un cylindre, l'autre comme sur une surface plane.

XLIV. Tout cela est très nécessaire et très utile pour la lecture des *œuvres* de Platon. Or, nous avons dit que nous avons à considérer la musique instrumentale, la musique mathématique et l'harmonie des sphères^[30] et que nous rapporterions tout ce qu'il y a nécessairement d'harmonie dans le monde, après ce qui regarde l'astronomie, – car Platon assigne à cette musique des sphères le cinquième rang dans les mathématiques, après l'arithmétique, la géométrie, la stéréométrie et l'astronomie – nous allons donc montrer sommairement ce que Thrasyllé expose sur ce sujet, en même temps que notre propre travail antérieur.

FIN DE LA TRADUCTION DES ŒUVRES DE THÉON DE SMYRNE

PARVENUES JUSQU'À NOUS.

NOTE XVII. – *Sur la mesure du volume de la terre* (III, III).

Le passage est altéré et les manuscrits présentent une lacune à la fin. Henri Martin, en essayant de le restituer, a fait une faute de calcul. Le diamètre d de la terre étant égal à 8018g stades, on a

$$d^2 = 64\ 2915\ 3124 \text{ au lieu de } 64\ 2713\ 3124.$$

Le chiffre inexact 7, des centaines de myriades, substitué au chiffre exact 9, a donné à H. Martin des valeurs inexactes pour d^3 , pour $1/14 d^3$ et pour $22/3$ de $1/14 d^3$ ou $11/21 d^2$ qui exprime le volume de la sphère de diamètre d . Il faut

$$d^2 = 515\ 5023\ 5578\ 8568 \text{ au lieu de } 515\ 3419\ 9178\ 8568$$

$$1/14 d^3 = 36\ 8215\ 9684\ 2040 + 4/7 \text{ au lieu de } 36\ 8101\ 4227\ 0612$$

$$11/21 d^3 = 270\ 0250\ 4350\ 8297 + 11/21 \text{ au lieu de } 269\ 9410\ 4331\ 7821 + 1/3$$

Ainsi le volume de la terre, évalué en stades cubiques, en supposant le rapport de la circonférence au diamètre égal à 22/7, vaut, d'après la mesure de l'arc de méridien faite par Eratosthène, 270 troisièmes myriades, 250 deuxièmes myriades, 4350 myriades, 8297 monades et 11/21. Non seulement cette fraction est illusoire, mais on peut compter, tout au plus, sur les deux ou trois premiers chiffres du résultat. C'est l'expression de ce volume que nous avons restituée.

NOTE XVIII. – Sur le mythe de Pamphylien dans la République de Platon pp. 616B-617B. (III, XVI).

Il résulte du récit de Platon que, des huit globes concentriques, le premier extérieurement est celui des étoiles fixes, le second est celui qui porte Saturne, le troisième porte Jupiter, le quatrième Mars, le cinquième Mercure, le sixième Vénus, le septième le Soleil et le huitième la lune. La terre est au centre du système.

Les couleurs et les vitesses des fuseaux répondent à celles des astres qu'ils portent, et la largeur inégale des bords colorés répond à l'écart inégal des planètes dans leur course à travers la zone zodiacale et quelquefois au-delà. La sphère des étoiles fixes est en effet, de couleur variée, puisque les étoiles ont des nuances diverses. Le septième cercle, celui du soleil, est très éclatant; le huitième, celui de la lune, lui emprunte son éclat. La nuance un peu jaune du second et du cinquième est bien celle de Saturne et de Mercure. La blancheur du troisième et la rougeur du quatrième caractérisent parfaitement l'aspect de Jupiter et de Mars. Enfin le sixième cercle est donné comme le plus éclatant après le soleil, ce qui est vrai de Vénus. Une vitesse égale est attribuée à Mercure, à Vénus et au soleil : le soleil, dans sa course apparente autour de la terre, entraîne, en effet, Mercure et Vénus.

[1] Du navire Argo, l'une des plus brillantes étoiles de l'hémisphère austral.

[2] Ville de Carie (Asie Mineure).

[3] Espèce de graphomètre.

[4] Les premières myriades valent 10.000 unités; les deuxièmes en valent 10.000 fois 10.000 ou 100.000.000 et les troisièmes valent 10.000 fois 100.000.000 ou 1.000.000.000.000. Le nombre précédent s'écrit dans notre système de numération 270.025.043.508.297 et 14/21.

[5] Pour la rectification que nous avons faite des valeurs des différents résultats, voyez la note XVII.

[6] On appelait cercle arctique dans chaque lieu le parallèle limite des étoiles toujours visibles dans ce lieu, et cercle antarctique le parallèle limite des étoiles toujours invisibles.

[7] Voici donc, d'après Alexandre, l'ordre des sphères et l'intervalle des sons rendus par ces sphères :

Sphère des étoiles donnant la nète		demi-
ton	quarte	
Id.	de	
Saturne		demi-
ton	quarte	
Id.	de	
Jupiter		demi-ton
	quarte	
Id.	de	
Mars		demi-
ton	quarte	
Id.	du Soleil donnant la mèse	
ton	quarte	
Id.	de	
Vénus		
trihémiton	quinte	
Id.	de	
Mercure		demi-
ton	quinte	
Id.	de la	
Lune		demi-
ton	quinte	
Id.	de la Terre donnant l'hypate	
ton	quinte	

[8] Platon. *République*, X, 617e.

[9] Grou, dans sa traduction de la *République*, a fait un contresens qui a été reproduit par les autres traducteurs français : Cousin, ... Il dit en effet : « le second surpassait en blancheur le sixième », mot à mot : « le sixième est le second pour la blancheur », et en effet Vénus est l'astre le plus brillant après le soleil. Voyez note XVIII.

[10] Le mot *σειριάζειν* qui manque aux dictionnaires, même au *Thesaurus* d'Henri Etienne, paraît dériver de *σεῖρος*, brûlant, brillant, d'où vient Sirius ; *σειριάζειν* signifierait donc ici « briller »

[11] Aratus, *Les Phénomènes*.

[12] Euripide, *Iphigénie en Aulis*.

[13] Cf. Empédocle, éd. Sturr et Mullach, vs. 19 ; éd. Karsten, vs 21.

[14] L'angle au centre du pentadécagone régulier saut le quinzième de 360° en 24° : l'angle des deux axes vaut donc 24°, d'après Théon. Cet angle n'est pas constant, mais sa variation est de moins d'une demi-seconde par année.

[15] Car $91 + 1/4 + 1/16$ est le quart de $365 + 1/4$.

[16] Cf. *Supra*, III, XVIII.

[17] En admettant que le soleil décrive uniformément l'épicycle, dans le sens du mouvement diurne, pendant que le centre de l'épicycle décrit uniformément le concentrique en sens contraire, Adraste démontre que le soleil se trouve sur l'excentrique, aux points ϵ , λ , υ , χ : mais il ne démontre pas que le soleil soit sur l'excentrique aux points intermédiaires.

[18] Dans les mss. la figure contient deux fois la lettre η . Pour éviter une contusion possible, nous avons supprimé une fois cette lettre, et nous désignons, dans le texte et sur la figure, l'épicycle par $\epsilon\zeta\kappa$ au lieu de $\epsilon\zeta\eta\kappa$.

[19] T Théon désigne par φ l'angle $\rho\sigma\pi$, et par τ l'angle $\sigma\theta\mu$.

[20] Cf. Aristote, traité *Du ciel*, II, XII, 1, et *Météorologie*, I, VI, 9.

[21] Cf. Biot, *Journal des Savants*, 1850. p. 199.

[22] *Epinomis*. p. 987 A.

[23] *Traité Du ciel*, II, 7.

[24] Aristote, *Métaphysique*, λ 8, p. 1073 B.

[25] Ce cinquième corps est l'éther. Cf. Aristote, *Météorologie*, I, 3.

[26] Voyez § XII.

[27] Cf. Phèdre, 247 A.

[28] Cf. *Métaphysique*, λ 8. p. 1073 B.

[29] Ces figures manquent aux mss.

[30] *République*, VII, p. 530 D.